

特殊関数と代数的線型常微分方程式

大島 利雄 述

廣惠 一希 記

はじめに

東京大学大学院数理科学研究科において 2010 年の 4 月 8 日から 7 月 22 日まで毎週行なった「代数解析」の講義をもとに、この冊子は作られた。受講者には海外から研究科に留学中の院生が 1 名含まれ、講義は日本語で、板書は英語で行なった。講義の副題は「特殊関数と代数的線型常微分方程式」であった。内容は、それに先立つ 2 年半に渡る Fuchs 型方程式の研究の紹介であるが、詳しくは「あとがき」に記してある。

講義を始めるに先だって廣惠一希氏から講義録作成の提案があり、それを喜んで受けることにした。廣惠氏は講義に出席できなかったため、石崎晋也氏と山本聖爾氏の講義ノートを元に、廣惠氏によって講義録の原稿が作成され、さらに修正・加筆などの手が加わってこの冊子になった。

講義録の内容を順を追って解説しよう。最初の「序」章では、講義で目指す Fuchs 型方程式を扱うための新しい視点を解説した。方程式の各特異点での特異性、すなわち、局所モノドロミー、あるいはほぼ同種概念である特性指数、スペクトル型などの「わかる量」で方程式を分類し、方程式や解の具体的変換を通じて、複素領域における線型常微分方程式についての基本的問題（与えられた局所モノドロミーを持つ方程式の構成や接続問題など）を扱う、という視点である。

分数化演算の章では、古典的なゲージ変換や Laplace 変換などを、多項式あるいは有理関数係数の微分作用素の変換として明確に定式化する。これらは代数準同型であるが、そうでないが自明に見える簡約代表変換が後に重要な役割を演ずる。さらに、Katz [Kz] の middle convolution と addition に対応する変換を微分作用素の変換として定義して、以降同じ名前と呼ぶ。また、Gauss の超幾何関数や Airy 関数などの例でこれらの変換を説明する。最後に有理関数係数の常微分作用素環の性質を復習する。

特異点の位置と特異点における特性指数とを合わせたパラメーター空間で分数化演算を考えると、「確定特異点の合流として不確定特異点が自然に捉えられること」を合流の章で解説する。ここで定義した演算は、一般の不確定特異点の解析に有効であり、「代数的線型常微分方程式」は不確定特異点も含むが、今回の講義では深入りせず例を挙げるにとどめ、それが現れない Fuchs 型に限った。不確定特異点を含む場合は、研究が進展中のこともあり、別の機会に譲りたい。

級数展開と隣接関係の章では、関数のべき級数表示や微分作用素を使って表された複数の関数の間の関係式が、addition や middle convolution によりどのように変換されるか、の計算が具体的に可能なことを示す。Fuchs 型方程式の局所解のべき級数展開や隣接関係式などを、方程式の簡約化と組み合わせることにより、より簡単な方程式の場合から得るのに使われる。

第 5 章では、まず確定特異点における特性指数と局所解について、さらに Fuchs 型方程式とモノドロミー群についての基本的事実を証明を付けて復習する。次に、一般化特性指数と一般化 Riemann 図式、スペクトル型、rigidity 指数など、この講義で最も重要となる概念を導入し、スペクトル型による方程式の分類と解析という目標を明確にする。

Fuchs 型方程式の簡約化の章では、まず addition や middle convolution を施したときの一般化 Riemann 図式の変化や既約性の伝搬について具体的に調べる。この結果を基に Fuchs 型方程式の簡約化を行ない、特に rigidity 指数が 2 すなわち rigid ならば一階の単独方程式まで簡約化できる、という一階 Fuchs 型方程式系に対する Katz の定理が、単独高階 Fuchs 型方程式でも成立することを示す。

第 7 章で、それ以上簡約化できないスペクトル型の一般 Riemann 図式に対応する Fuchs 型方程式をすべて具体的に構成し (存在定理)、一般化 Riemann 図式では決まらないモジュライを記述するアクセサリー・パラメーターを明らかにする。簡略化は逆をたどることができるので、前章の結果と併せて、Fuchs 型方程式のスペクトル型としてどのようなものがあり得るか、という問について解答を得るとともに、実現可能なスペクトル型を与えたとき、それを持つ普遍微分作用素が構成される。なお、普遍微分作用素の係数は、特性指数やアクセサリー・パラメーターの多項式となっていることもわかる。

次の章で星型の Kac-Moody ルート系を導入し、スペクトル型、rigidity 指数、一般化 Riemann 図式、簡約化などの概念をルート系の言葉に翻訳する。既約な Fuchs 型方程式のスペクトル型であるかどうかの判定条件は、rigid の場合は実ルートに、non-rigid の場合は虚ルートに対応する、という結果になる。さらに、対応する Weyl 群が、Fuchs 型方程式全体の空間に作用していることを見るとともに、rigid なスペクトル型を持った方程式の既約性の必要十分条件を、[O6] を引用してルート系の言葉で述べる。

普遍微分方程式の存在が示されたので、その解について解析することが次の問題となる。特に、簡約化によって trivial な方程式に帰着される rigid な場合は、明示的に多くの問題が解けることになる。解の積分表示は簡約化の議論から当然であるが、第 4 章の結果から、解のべき級数表示や隣接関係式を具体的に作ることが出来る。第 9 章では、解の接続問題を扱い、重複度が 1 の局所解の間の接続係数をガンマ関数によって具体的に与える公式を証明する。

第 10 章では、超幾何関数族、Jordan-Pochhammer 族、even/odd 族の 3 つの rigid な系列を例にとりて、解の積分表示、べき級数表示、既約性の必要十分条件、接続係数などを具体的に与える。

この冊子は、2010 年の講義を元にした講義録であるが、廣恵氏は講義では省略、あるいは簡略化した内容や証明を補い、説明不足の部分を書き加えて原稿を作成した。特に、Tsai の定理を使った既約性伝搬の議論は、氏が論文 [Hi2] で用いており、それを定理 6.2.5 とともに氏がこの冊子に加えた。元になるノートを提供していただいた石崎晋也氏と山本聖爾氏、および講義録の形にまとめてくださった廣恵一希氏に深く感謝する。また、原稿の多くのミスを指摘していただいた示野信一氏、講義のビデオ撮影をしていただいた麻生和彦氏と東正明氏にも感謝する。

4 年前までは門外漢であった大島に、複素領域における常微分方程式について教示してくださった岡本和夫氏、また、アクセサリー・パラメーター研究会を主催し、問題の面白さと多様性とを学ぶ機会を提供してくださった原岡喜重氏に深く感謝する。さらに、東大数理の同僚の方々、アクセサリー・パラメーター研究会や数理解析研究所および神戸大学などでの研究会に参加された研究者の方々から多くの刺激やアイデアを得た。そのようなすばらしい環境がなければ、楽しく研究が進んでいくことはあり得ず、成果を挙げるのが不可能であった。関連の研究の話をしていただいた方々や疑問点についての議論に応じていただいた皆様に感謝するとともに、よい環境が今後も発展していくことを願っている。

2011 年 11 月 11 日

大島利雄 記

目次

第 1 章	序	3
第 2 章	分数化演算 (Fractional operators)	9
2.1	Weyl 代数	9
2.2	演算の例	15
2.3	常微分方程式	18
第 3 章	合流	21
3.1	合流	21
3.2	versal addition	21
3.3	versal operator	23
第 4 章	級数展開と隣接関係	27
4.1	級数展開	27
4.2	隣接関係	29
第 5 章	Fuchs 型常微分方程式と一般化 Riemann スキーム	31
5.1	特性指数	31
5.2	Fuchs 型微分方程式	36
5.3	一般化特性指数	40
5.4	正整数の分割の組	44
5.5	一般化特性指数と局所モノドロミーの共役類	45
5.6	実現可能なスペクトル型	48
第 6 章	Fuchs 型微分方程式の簡約化	51
6.1	Riemann 関式と分数化演算	51
6.2	簡約化と既約性	57
6.3	アクセサリー・パラメーターと Katz の定理	60
6.4	Riemann 関式の簡約化	63
第 7 章	普遍微分方程式	67

7.1	補題	67
7.2	存在定理	70
7.3	素でないスペクトル型	73
7.4	Fuchs 型普遍微分作用素	74
第 8 章	Kac-Moody ルート系	77
8.1	Weyl 群作用と微分作用素の変換	77
8.2	Deligne-Simpson-Katz の問題	82
第 9 章	接続問題	85
9.1	Gauss の超幾何関数の接続問題	85
9.2	接続公式	86
第 10 章	例	93
10.1	Jordan-Pochhammer 族 P_n	93
10.2	超幾何族 H_n	95
10.3	even/odd 族 EO_n	100
10.4	三角関数の恒等式	102
第 11 章	あとがき	103
	参考文献	107
	索引	110

第 1 章

序

有理関数や指数関数などの初等関数以外の関数を超越関数というが，その中でも応用の多い重要な関数は特殊関数と呼ばれ，古くから研究されてきた．古典的な特殊関数の中でも最も重要なものとして Gauss の超幾何関数が挙げられる．Bessel 関数，Whittaker 関数，Legendre 多項式といったその他のよく知られた特殊関数たち^{*1}はこの Gauss の超幾何関数のある種の極限操作や特殊化として得ることができ，岩波全書の公式集 III「特殊関数」[MUI] の 3 分の 2 以上はこれで占められている．この Gauss の超幾何関数は，ある代数的線型常微分方程式^{*2}を満たしていることを使って，様々な性質が求められて来た．このように，代数的線型常微分方程式で特徴付けられる「特殊関数」の性質や具体的公式を得るための，現在発展中の新しい理論について，その入り口を解説するのがこの講義の目的である．

Gauss の超幾何関数は Euler によって導入された以下のような超幾何級数と呼ばれる巾級数で表される．

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} x^n = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} x + \dots$$

ここで $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ ^{*3}， $(\alpha)_n := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$ ．さらにこの巾級数の収束条件は $|x| < 1$ であり，Gauss の超幾何微分方程式とよばれる次の代数的線型微分方程式を満たすことが確かめられる．

$$x(1-x)u'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)u' - \alpha\beta u = 0.$$

簡単のために

$$P = x(1-x)\partial^2 + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\partial - \alpha\beta \quad (\partial := \frac{d}{dx})$$

と置いて，Gauss の超幾何関数の満たす微分方程式を

$$(GE): Pu = 0$$

と書くことにしよう．次にこの微分方程式の解を調べてみる．まず，

$$\partial: x^\lambda \mapsto \lambda x^{\lambda-1}$$

^{*1} Whittaker-Watson [WW]，Watson [Wa] 等の文献がある

^{*2} 代数的とは，多項式または有理関数係数の常微分方程式の意味で使った

^{*3} これらの値によっては定義されない場合があることに注意．たとえば γ が負の整数の時

$$x: x^\lambda \mapsto x^{\lambda+1}$$

より

$$\vartheta := x\partial: x^\lambda \mapsto \lambda x^\lambda$$

となる．すなわち x^λ は線型作用素 ϑ の固有値 λ をもつ固有ベクトルとなる．これを踏まえて以下の式変形をする．

$$\begin{aligned} xP &= x^2\partial^2 + \gamma x\partial - x(x^2\partial^2 + (\alpha + \beta + 1)x\partial + \alpha\beta) \\ &= \vartheta(\vartheta - 1) + \gamma\vartheta - x(\vartheta(\vartheta - 1) + (\alpha + \beta + 1)\vartheta + \alpha\beta) \\ &= \vartheta(\vartheta + \gamma - 1) - x(\vartheta + \alpha)(\vartheta + \beta). \\ \therefore Pu = 0 &\iff \vartheta(\vartheta + \gamma - 1)u = x(\vartheta + \alpha)(\vartheta + \beta)u. \end{aligned}$$

右辺の式が u の巾級数展開の各係数の関係を与えている．すなわち $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ を右辺に代入して x^n の係数を比べてみると，

$$c_n \times n(n + \gamma - 1) = c_{n-1} \times (n - 1 + \alpha)(n - 1 + \beta)$$

を得る．従って

$$c_n = c_{n-1} \frac{(\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)}{(\gamma + n - 1)n} = \dots = c_0 \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} \quad (c_0 = u(0))$$

となって係数が決まる．よって Gauss の超幾何関数が $Pu = 0$ を満たす事が確かめられた．

この超幾何級数の $x = 1$ での値は Gauss によって，

$$C_{\alpha, \beta, \gamma} := F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}$$

となることが示された． $\operatorname{Re} \alpha + \operatorname{Re} \beta < \operatorname{Re} \gamma$ ならば^{*4} 左辺の級数は絶対収束することに注意しよう．これは Gauss の和公式 (Gauss summation formula) と呼ばれ，この公式から特異点の間の接続公式が得られ，Gauss の超幾何関数の大域的性質がわかる．この最も重要な公式の証明を2通り紹介しよう．

1つ目 (Gauss による証明)

式 $\frac{C_{\alpha, \beta, \gamma+1}}{C_{\alpha, \beta, \gamma}} = \frac{\gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{\alpha, \beta, \gamma+n} = 1$ から導かれる．

問 1.0.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{\alpha, \beta, \gamma+n} = 1$ を証明し，上の二つの式から Gauss の和公式を導け．

2つ目 適当な条件下^{*5}で $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ は以下のような積分表示を持つ．

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tx)^{-\alpha} dt$$

この右辺で $x = 1$ とすれば $\operatorname{Re}(\gamma - \beta - \alpha) > 0$ の時，積分は収束してベータ関数となり，(右辺) = $\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \times \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)}$ を得る．

^{*4} $\operatorname{Re} \alpha$ は複素数 α の実部．虚部は $\operatorname{Im} \alpha$ と書く

^{*5} 例えば $0 < \operatorname{Re} \beta < \operatorname{Re} \gamma$, $0 < \arg(x - 1) < 2\pi$

ちなみにこの積分表示は

$$\begin{aligned}(1-tx)^{-\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} (-t)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-n+1)}{n!} (-t)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} t^n x^n\end{aligned}$$

を積分に代入して x^n の係数を見ると、各項の積分はベータ関数になり、

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \frac{(\alpha)_n}{n!} \frac{\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+n)} = \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}$$

となって積分が $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ に等しいことがわかる。

次は特異点について考えてみる。微分方程式 (GE) の特異点*6は $\{0, 1, \infty\}$ である。単連結な開集合 $U \subset (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ に対し $\mathcal{F}(U) = \{u \in \mathcal{O}(U) \mid Pu = 0\}$ を U 上の正則解全体とする。ここで $\mathcal{O}(U)$ は U 上の正則関数全体を表す。この時一般論より次の事が知られる。

- $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}(U) = 2$.
- $U' \subset U$ なる単連結開集合について $\mathcal{F}(U)|_{U'} = \mathcal{F}(U')$.
- $\mathcal{F}(U) = \mathbb{C}\phi_1 + \mathbb{C}\phi_2$, $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{O}(U)$ と書いたとき次が成り立つ。
 1. ある定数 $C \in \mathbb{R}_{>0}, N \in \mathbb{N}$ があって

$$|\phi_j(x)| \leq C|x|^{-N} \quad (j = 1, 2, x \in U, |\arg x| < 2\pi, |x| < \frac{1}{2})$$

すなわち $x = 0$ に近づいたとき、高々極程度にしか関数値の絶対値が増大しない*7。

2. $x = 0$ で正則で $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 1$ を満たす正則関数 $\psi_1(x), \psi_2(x)$ を用いて

$$\mathcal{F}(U) = \mathbb{C}x^0\psi_1(x) + \mathbb{C}x^{1-\gamma}\psi_2(x)$$

と書ける。すなわち $x = 0$ での特性指数 (characteristic exponent) は 0 と $1 - \gamma$ である。ここで $\psi_1(x) = F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ であることに注意しておこう。

また、 $x = 1, x = \infty$ での特性指数はそれぞれ $\{0, \gamma - \alpha - \beta\}, \{\alpha, \beta\}$ 。

各特異点での特性指数を

$$\begin{pmatrix} x=0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta \end{pmatrix}$$

のような表にすることが出来る。このような表を **Riemann 図式** (Riemann scheme) と呼ぶ。

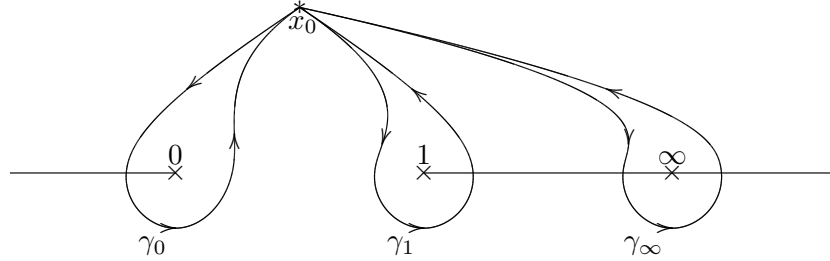
Riemann は、この図式で表された特異性が Gauss の超幾何微分方程式を、すなわち Gauss の超幾何関数を一意的に定めていることを示した*8。

*6 最高階の係数を 1 と正規化した時の係数の特異点。無限遠点は $x \mapsto \frac{1}{x}$ と変換して原点で見ればよい

*7 この条件は、特異点が確定特異点、ということに対応している

*8 rigid であることに対応

次にモノドロミー (monodromy) について考える． $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ の基本群は，起点 x_0 を決め，そこから以下の図のような各特異点を回る閉曲線 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$ で生成される．



(u_1, u_2) を x_0 の近傍での (GE) の二つの線型独立な解とすると，それぞれの閉曲線 γ_j ($j = 0, 1, \infty$) に沿って解析接続したのも再び x_0 の近傍での解となるから，それを $\gamma_j(u_1, u_2)$ と書くことにすると，ある正則行列 $M_j \in GL(2, \mathbb{C})$ があって，

$$\gamma_j(u_1, u_2) = (u_1, u_2)M_j$$

と書けることがわかる．これら M_j ($j = 0, 1, \infty$) を $x = j$ での (局所) モノドロミー行列と呼ぶ．

今 u を (GE) の解とするとき， $x^{\mu_1}(1-x)^{\mu_2}u$ は Riemann 図式

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ \mu_1 & \mu_2 & \alpha - \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_1 + 1 - \gamma & \mu_2 + \gamma - \alpha - \beta & \beta - \mu_1 - \mu_1 \end{array} \right\}$$

を持つ微分方程式の解となる．よって一般的な Riemann 図式

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ \lambda_{01} & \lambda_{11} & \lambda_{21} \\ \lambda_{02} & \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{array} \right\}$$

を考えればよいが，このとき λ_{kl} には線型関係式 (Fuchs の関係式) $\sum \lambda_{kl} = 1$ が成り立つ．

この一般的な Riemann 図式に対し， u_{02} を $x = 0$ の周りで特性指数 λ_{02} を持つ解とし， u_{12} を $x = 1$ の周りで特性指数 λ_{12} を持つ解としよう．これらは線型独立であるとしてよい (そうでなければ u_{01} あるいは u_{22} を代わりにとればよい)．このときモノドロミー行列はある定数 a, b があって

$$M_0 = \begin{pmatrix} e(\lambda_{02}) & a \\ 0 & e(\lambda_{01}) \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} e(\lambda_{11}) & 0 \\ b & e(\lambda_{12}) \end{pmatrix}$$

となる*9．ここで

$$e(\lambda) := e^{2\pi i \lambda}.$$

一方で $M_\infty = (M_1 M_0)^{-1}$ から $\text{Tr}(M_1 M_0) = \text{Tr}(M_\infty^{-1})$ となるので*10

$$e(\lambda_{02})e(\lambda_{11}) + e(\lambda_{01})e(\lambda_{12}) + ab = e(-\lambda_{21})e(-\lambda_{22})$$

*9 $u_{12} = u_{01} + C u_{02}$ とすれば， $\gamma_0 u_{12} = e(\lambda_{01})u_{01} + C e(\lambda_{02})u_{02} = e(\lambda_{01})u_{12} + C(e(\lambda_{02}) - e(\lambda_{01}))u_{02}$ となることからわかる． M_1 も同様．なお $\lambda_{k\ell}$ は一般とする

*10 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$ をこの順でつなげた道は基本群の単位元を定義するので， $M_\infty M_1 M_0$ は単位行列になる

が得られる．このとき $ab \neq 0$ ^{*11} ならば，基底を取り替えて $a = 1$ としてよいので，上の式より b も求まり，定数 a, b が決まる．

この様に上の Riemann 図式をもつ微分方程式の大域モノドロミーは特異点での局所モノドロミーを決める特性指数から決定されてしまう．このようなとき大域モノドロミー（あるいは方程式）は rigid であるといわれる．

このことを一般的に考えてみよう．一般的な階数 n の線型常微分方程式

$$Pu = 0$$

を考え， P の特異点^{*12}は $\{c_0 = \infty, c_1, \dots, c_p\}$ ($\subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) であるとする．また特異点 $x = c_j$ での局所モノドロミーの固有値の重複度を $m_{j,1}, \dots, m_{j,n_j}$ ($\sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu} = n$) とすると，これは n の分割

$$m_j = (m_{j,1}, \dots, m_{j,n_j})$$

を与える．これらを集めると

$$\mathbf{m} = (m_0, m_1, \dots, m_p)$$

という n の分割の $(p+1)$ 個の組を考えることができる．これらのデータ，すなわちスペクトル型が与えられたときに一般化された Riemann 図式 (generalized Riemann scheme)

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x = c_0 & c_1 & \cdots & c_p \\ [\lambda_{0,0}]_{(m_{0,0})} & [\lambda_{1,0}]_{(m_{1,0})} & \cdots & [\lambda_{p,0}]_{(m_{p,0})} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [\lambda_{0,n_0}]_{(m_{0,n_0})} & [\lambda_{1,n_1}]_{(m_{1,n_1})} & \cdots & [\lambda_{p,n_p}]_{(m_{p,n_p})} \end{array} \right\}$$

を考える事ができる．ただし，ここで

$$[\lambda]_{(k)} := \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda + 1 \\ \vdots \\ \lambda + k - 1 \end{pmatrix}$$

とし，各 $\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'} (0 \leq j \leq p, 1 \leq \nu < \nu' \leq n_j)$ が整数値を取らない^{*13}ときは，特異点でのモノドロミー行列が対角化可能とする．さて，この様に勝手に与えられた（一般化）Riemann 図式に対して，実際その Riemann 図式を持つような微分方程式 $P_{\mathbf{m}}(\lambda)u = 0$ （あるいは Riemann 図式に対応する局所モノドロミーの同値類を持つような大域モノドロミー）は存在するだろうか？ この問題は Deligne-Simpson-Katz 問題と呼ばれている．

最後にルート系との対応の話をしてしよう．

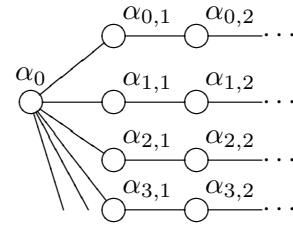
*11 モノドロミーが既約ならば満たされる

*12 特異点は全て確定特異点であるとする

*13 この条件を満たさない場合は， $\lambda_{j,\nu}$ を正則パラメーターと考えることにより，自然に定義が可能

上で与えた n の分割の組において, $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_{0,1}, \alpha_{0,2}, \dots, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{j,\nu}, \dots\}$ を単純ルートと

し, 次のような星形 Dynkin 図を持つルート系を考えよう.



このとき n の分割の組 \mathbf{m} に対し,

$$n_{j,\nu} = \sum_{\mu=\nu+1}^{n_j} m_{j,\mu}$$

とおくと,

$$\mathbf{m} \longleftrightarrow \alpha_{\mathbf{m}} = n\alpha_0 + \sum_{j \geq 0} \sum_{\nu \geq 1} n_{j,\nu} \alpha_{j,\nu}$$

としてルート空間の元 $\alpha_{\mathbf{m}}$ を対応させることができる. すると Deligne-Simpson-Katz 問題や rigidity はルートの言葉に換言され, 以下の美しい結果が成立する^{*14}.

一般化 Riemann 図式を持つ既約微分方程式が存在する $\iff \alpha_{\mathbf{m}}$ は正ルート
 対応する微分方程式が rigid である $\iff \alpha_{\mathbf{m}}$ が正の実ルート

たとえば, ${}_nF_{n-1}$ の記号で書かれる一般超幾何級数の満たす方程式や, 積分で表される解を持つ Jordan-Pochhammer の微分方程式は rigid となり, リーマン球面上で 4 点の確定特異点をもつ 2 階の一般方程式である Heun の微分方程式は rigid ではなく, アクセサリー・パラメーターを持つ.

単純ルート α に対応する鏡映 s_{α} で生成される群 (無限群になる) はこのルート系の Weyl 群であるが, Riemann 図式でパラメトライズされた方程式全体の空間 $\{P_{\mathbf{m}}(\lambda)\}$ やそれらの解空間の集合上にこの Weyl 群の作用が定義される. そのことに基づいて, この美しい結果が示される.

$$\begin{array}{ccc} \{P_{\mathbf{m}}(\lambda)\} & \rightarrow & \Delta^+ = \{\alpha_{\mathbf{m}}\} \\ \downarrow S_{\alpha} & \circlearrowleft & \downarrow s_{\alpha} \\ \{P_{\mathbf{m}}(\lambda)\} & \rightarrow & \Delta^+ = \{\alpha_{\mathbf{m}}\} \end{array}$$

微分作用素に対する変換 S_{α} は, その解に対しての一般階微分 $\partial^{-\mu}$ や関数 $\prod_j (x - c_j)^{\lambda_j}$ との積として具体的に表せる. このような原理で, 方程式の構成, 接続係数の計算, 解のべき級数表示や積分表示, 隣接関係式, モノドロミーの既約性, 確定特異点の合流, 多項式解の構成などの問題を統一的, かつ具体的に^{*15}に扱うことができる. この講義ではその一端として, Riemann 図式を基に, 方程式の存在と構成, 解の接続問題を主に紹介する.

ここで取り上げる理論は, 確定特異点のみを持つ常微分方程式 (すなわち Fuchs 型方程式) に限らず, 不確定特異点をもつ代数的線型常微分方程式に対しても有効であり, さらには Appell の超幾何などの多変数の特殊関数の解析やモノドロミー保存変形の理論から出てくる Painlevé 型非線型方程式の解析にも有効である.

^{*14} 正確には, 大きさが 0 の虚ルートのときは「 $\{m_{j,\nu}\}$ の最大公約数が 1」などの制限が付く

^{*15} これらの問題の答えを与えるコンピュータのプログラムが作成されている

第 2 章

分数化演算 (Fractional operators)

2.1 Weyl 代数

今後の議論は標数 0 の代数閉体でほとんどの場合通用するが、簡単のため複素数体で話を進める。

ここでは Weyl 代数、あるいは局所化された Weyl 代数に関する様々な作用素を導入する。

$\mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ を x_1, x_2, \dots, x_n の多項式環, $\mathbb{C}(x)$ をその商体, すなわち x_1, x_2, \dots, x_n の有理関数体としよう。そして各変数に関する微分を $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) で表す。このとき Weyl 代数 $W[x]$ は x_1, x_2, \dots, x_n とその微分 $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n$ によって生成される \mathbb{C} 上の代数であって、その生成元は Leibniz の法則に従って次の関係式を満たす。

$$[x_i, x_j] = [\partial_i, \partial_j] = 0, \quad [\partial_i, x_j] = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

ここで $[a, b] = ab - ba$ である。

例 2.1.1. 例えば,

$$\begin{aligned} x\partial \cdot x\partial &= x^2\partial^2 + x\partial, \\ \partial_i(x_j u(x)) &= (x_j\partial_i + \delta_{ij})u(x) \end{aligned}$$

と Weyl 代数では計算される。

また $W[x]$ の $\mathbb{C}[x]$ に関する局所化を $W(x)$ と書き、局所化された Weyl 代数と呼ぶ。すなわち $W(x) = \mathbb{C}(x) \otimes_{\mathbb{C}[x]} W[x]$ であり、 $f, g \in \mathbb{C}[x]$ に対し、

$$[\partial_i, \frac{g}{f}] = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot f - g \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}}{f^2} \quad (2.1)$$

として関係式を入れたものである。

次にパラメーター付きの Weyl 代数を定義しよう。 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ をパラメーターとして $\mathbb{C}[\xi], \mathbb{C}(\xi)$ を先ほどと同様に $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ の多項式環, 有理関数体としよう。このときパラメーター付きの Weyl 代

数 $W[x][\xi]$, $W[x; \xi]$, 局所化された Weyl 代数 $W(x; \xi)$ を次のように定義する .

$$\begin{aligned} W[x][\xi] &= \mathbb{C}[\xi] \otimes_{\mathbb{C}} W[x], \\ W[x; \xi] &= \mathbb{C}(\xi) \otimes_{\mathbb{C}} W[x], \\ W(x; \xi) &= \mathbb{C}(\xi) \otimes_{\mathbb{C}} W(x). \end{aligned}$$

ここで

$$[x_i, \xi_\nu] = [\partial_i, \xi_\nu] = 0 \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq \nu \leq m),$$

としてそれぞれを \mathbb{C} 代数と見る . また ,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x; \xi] &= \mathbb{C}(\xi) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x], \\ \mathbb{C}(x; \xi) &= \mathbb{C}(\xi) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(x) \end{aligned}$$

とおこう .

このとき \mathbb{C} 代数として以下の包含関係が成り立つ .

$$\mathbb{C}[x, \xi] \subset W[x][\xi] \subset W[x; \xi] \subset W(x; \xi).$$

命題 2.1.2. $P \in W(x; \xi)$ は

$$P = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n} p_\alpha(x, \xi) \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (p_\alpha(x, \xi) \in \mathbb{C}(x; \xi))$$

の形に一意的に書ける .

Proof. 式 (2.1) により P が上のように書けることは明らか . 一意性を示そう . すなわち $p_\alpha(x, \xi) \neq 0$ なるものがあれば $P \neq 0$ であることを示す . 仮定より $p_\alpha(x, \xi) \neq 0$ となるようなものがある . このようなものの中から $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n > |\alpha'|$ ならば $p_{\alpha'}(x, \xi) = 0$ を満たすような α をとってくる . すると $Px^\alpha = \alpha_1! \dots \alpha_n! \cdot p_\alpha(x, \xi) \neq 0$ となり $P \neq 0$ が示せた . \square

P の階数(order) を $\text{ord } P = \max\{|\alpha| \mid p_\alpha(x, \xi) \neq 0\}$ とし , さらに P が $W[x; \xi]$ の元であるとき , その次数(degree) を $\text{deg } P = \max\{\text{deg}_x p_\alpha(x, \xi)\}$ として決める . ただし $\text{deg}_x p_\alpha(x, \xi)$ は x の多項式としての次数である .

定義 2.1.3. i) (簡約代表変換 (reduced representative)) $W(x; \xi)$ の元に対して $W[x; \xi]$ の元を対応させる次のような変換 R を簡約代表変換と呼ぶ . すなわち $P \in W(x; \xi)$ に対して $RP \in W[x; \xi]$ は $(\mathbb{C}(x; \xi) \setminus \{0\})P \cap W[x; \xi]$ の中で $\text{deg } RP$ が最小な元である .

ii) (Fourier-Laplace 変換) $I \subset \{1, \dots, n\}$ に対して

$$\begin{aligned} L_I: \quad W[x; \xi] &\longrightarrow W[x; \xi] \\ \partial_i &\longmapsto x_i \\ x_i &\longmapsto -\partial_i \\ \partial_j &\longmapsto \partial_j \\ x_j &\longmapsto x_j \\ \xi_\nu &\longmapsto \xi_\nu \end{aligned} \quad (i \in I, j \notin I, \nu = 1, \dots, m)$$

で $W[x, \xi]$ の自己同型である Fourier-Laplace 変換 L_I を定義する . また $I = \{1, \dots, n\}$ のときは単に $L = L_{\{1, \dots, n\}}$ と書く .

iii) 上の Fourier-Laplace 変換によって $W(x; \xi)$ と $\mathbb{C}(\xi) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\partial)$ の間の \mathbb{C} 線型同型

$$L: W(x; \xi) \longrightarrow \mathbb{C}(\xi) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\partial)$$

が得られる . これによりベクトル空間 $\mathbb{C}(\xi) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(\partial)$ 上に積構造を $P \cdot Q = L(L^{-1}P \cdot L^{-1}Q)$ で定義した \mathbb{C} 代数を特に $W_L(x; \xi)$ と書く .

例 2.1.4. i)

$$\begin{aligned} R\left(\frac{1}{x_{j-1}} \frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \\ R\left((x_j - \xi_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

ii) $n = 1$ とする .

- $(\partial - c)^m x = x(\partial - c)^m + m(\partial - c)^{m-1}$ と $W[x; \xi]$ の中で計算される .
- 一方で $W_L(x; \xi)$ の中では $\partial^{-m} x = x\partial^{-m} - m\partial^{-m-1}$ となる .

$n = 1$ として , $P \in W(x)$ が $P = \sum_{i=0}^m a_i(x)\partial^i$ という表示を持つとしよう . 不定元 ζ を用意して ζ の多項式

$$P(x, \zeta) = \sum_{i=0}^m a_i(x)\zeta^i$$

を定義してこれを P の全表象という .

命題 2.1.5 (Leibniz の法則). $P, Q \in W(x)$ の積 $R = PQ \in W(x)$ の全表象は

$$R(x, \zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^{\nu} P(x, \zeta)}{\partial \zeta^{\nu}} \frac{\partial^{\nu} Q(x, \zeta)}{\partial x^{\nu}}$$

となる*1 .

Proof. $P = \sum_{i=0}^m a_i(x)\partial^i$, $Q = \sum_{i=0}^n b_i(x)\partial^i$ と書けているとしよう . このとき関数 f に対し

$$\begin{aligned} PQf &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_i(x)\partial^i (b_j(x)\partial^j f) \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_i(x) \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} b_j^{(k)}(x) \partial^{i-k+j} f \end{aligned}$$

となるので ,

$$R(x, \zeta) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_i(x) \sum_{k=0}^i \frac{i(i-1)\cdots(i-k+1)}{k!} b_j^{(k)}(x) \zeta^{i-k+j}$$

*1 $n > 1$ のときも, ν を多重表象 $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ で置き換え, $\nu! = \nu_1 \cdots \nu_n$, $\partial^{\nu} = \partial_1^{\nu_1} \cdots \partial_n^{\nu_n}$, $\xi^{\nu} = \xi_1^{\nu_1} \cdots \xi_n^{\nu_n}$ などの記号を用いると, 同じ式が得られることが各変数毎に上の証明を適応すればわかる . 和は, 各 ν_j が非負整数を渡る .

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \sum_{i=k}^m a_i(x) i(i-1) \cdots (i-k+1) \zeta^{i-k} \sum_{j=0}^n b_j^{(k)}(x) \zeta^j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k P(x, \zeta)}{\partial \zeta^k} \frac{\partial^k Q(x, \zeta)}{\partial x^k}
\end{aligned}$$

となり求める式が得られた。 □

定義 2.1.6 (ゲージ変換 (gauge transformation)). $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{C}(x, \xi)^n$ を次を満たすように取る。

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

このとき $W(x; \xi)$ の自己同型 $\text{Adei}(h)$ を

$$\begin{array}{ccc}
\text{Adei}(h): & W(x; \xi) & \xrightarrow{\sim} W(x; \xi) \\
& \partial_i & \mapsto \partial_i - h_i \\
& x_i & \mapsto x_i \\
& \xi_\nu & \mapsto \xi_\nu
\end{array}$$

で定義する。ここで

$$\begin{aligned}
[\partial_i - h_i, \partial_j - h_j] &= -\frac{\partial h_j}{\partial x_i} + \frac{\partial h_i}{\partial x_j} = 0 \\
[\partial_i - h_i, x_j] &= \delta_{ij}
\end{aligned}$$

に注意しよう。

また、関数 $g(x)$ を $\frac{\partial g}{\partial x_i} = h_i$ ($i = 1, \dots, n$) となるように取ったとして、さらに $f = e^g$ とおいて、

$$\text{Ad}(f) := \text{Ade}(g) := \text{Adei}(h_1, \dots, h_n) = \text{Adei}(h)$$

と定義する。

例 2.1.7. $n = 1$ とする。 $h = \frac{\lambda}{x}$ とすれば $g = \lambda \log x$, $f = x^\lambda$ となるので、

$$\text{Ad}(x^\lambda) \partial = \partial - \frac{\lambda}{x}$$

となる。すなわち Leibniz の法則によって $\text{Ad}(x^\lambda) \partial = x^\lambda \circ \partial \circ x^{-\lambda}$ がわかる。

定義 2.1.8 (座標変換). $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in \mathbb{C}(x_1, \dots, x_m, \xi)^n$ ($m \geq n$) に対して

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

の階数が n であるとする。このとき行列 Φ の左逆元を $\Psi = (\psi_{i,j}(x, \xi))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ とする。つまり $\Psi \Phi$ は n 次の単位行列であり、 $m = n$ ならばこのような Ψ は一意に決まる。このとき代数準同型

$$T_\phi^*: W(x_1, \dots, x_n; \xi) \longrightarrow W(x_1, \dots, x_m; \xi)$$

を

$$\begin{aligned} T_\phi^*(x_i) &= \phi_i(x) & (1 \leq i \leq n), \\ T_\phi^*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \sum_{j=1}^m \psi_{i,j}(x, \xi) \frac{\partial}{\partial x_j} & (1 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

と定義する .

例 2.1.9. $x = y^2$ の変換をすると ,

$$\partial_x = \frac{1}{2y} \partial_y, \quad \phi = x^2$$

となり $[\frac{1}{2x}, x^2] = 1$ であるから T_ϕ^* が準同型であることは見て取れる .

定義 2.1.10. 記号は上記の通りとする . $f = e^g$, $h_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}$ を思い出しておこう .

$$\begin{aligned} \text{RAd}(f) &= \text{RAde}(g) = \text{RAdei}(h_1, \dots, h_n) := \text{R} \circ \text{Adei}(h_1, \dots, h_n), \\ \text{AdL}(f) &= \text{AdeL}(g) = \text{AdeiL}(h_1, \dots, h_n) \\ &:= \text{L} \circ \text{Adei}(h_1, \dots, h_n) \circ \text{L}^{-1}, \\ \text{RADL}(f) &= \text{RAdeL}(g) = \text{RAdeiL}(h_1, \dots, h_n) \\ &:= \text{L} \circ \text{RAdei}(h_1, \dots, h_n) \circ \text{L}^{-1}, \\ \text{Ad}(\partial_{x_i}^\mu) &:= \text{L} \circ \text{Ad}(x_i^\mu) \circ \text{L}^{-1}, \\ \text{RAd}(\partial_{x_i}^\mu) &:= \text{L} \circ \text{RAd}(x_i^\mu) \circ \text{L}^{-1}. \end{aligned}$$

ここで μ は複素数が $\mathbb{C}(\xi)$ の元であり , また $\text{Ad}(\partial_{x_i}^\mu)$ は $W_L(x; \xi)$ の自己準同型を与える .

$n = 1$ として上で定めた作用素を見てみよう . $\text{Ad}(f)$ は

$$f \circ \partial \circ f^{-1} = e^g \circ \partial \circ e^{-g} = e^g(e^{-g} \partial - e^{-g} \frac{dg}{dx}) = \partial - h = \text{Ad}(f) \partial$$

なので , f による共役作用素に他ならない . 従って

$$Pu(x) = 0 \iff (\text{Ad}(f)P)(fu) = 0$$

であり , $\text{Ad}(f)$ は解を $u \mapsto fu$ と変換したときの対応する微分方程式の変換を与えている . 実際 ,

$$\text{Ad}(x^{-\mu}) \partial = x^{-\mu} \circ \partial \circ x^\mu = x^{-\mu} (x^\mu \partial + \mu x^{\mu-1}) = \partial + \mu x^{-1}$$

として容易に計算できる . また $\text{RAd}(x^{-\mu}) \partial = x \partial + \mu$ もすぐわかる . さらに $\text{Ad}(\partial^{-\mu})$ に関しては

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\partial^{-\mu}) x^m &= \partial^{-\mu} \circ x^m \circ \partial^\mu \\ &= \left(x^m \partial^{-\mu} + \frac{(-\mu)m}{1!} x^{m-1} \partial^{-\mu-1} + \frac{(-\mu)(-\mu-1)m(m-1)}{2!} x^{m-2} \partial^{-\mu-2} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{(-\mu)(-\mu-1) \cdots (-\mu-m+1)m!}{m!} \partial^{-\mu-m} \right) \partial^\mu \\ &= \sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu (\mu)_\nu \binom{m}{\nu} x^{m-\nu} \partial^{-\nu} \end{aligned} \tag{2.2}$$

として Leibniz の法則の拡張が得られる .

ここで Laplace 変換と Euler 変換について少し復習しておく . $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の積分路 C を決め , その上で定義された関数 $u(x)$ に

$$v(x) = \int_C e^{-xt} u(t) dt$$

なる $v(x)$ を対応させる写像を Laplace 変換といい $v(x) = \mathcal{L}u(x)$ と書く . このとき微分と積分記号が交換可能^{*2}であれば

$$\partial \mathcal{L}u(x) = \int_C (-t) e^{-xt} u(t) dt = \mathcal{L}(-xu(x)).$$

また部分積分より ,

$$\mathcal{L}u(x) = -\frac{1}{x} [e^{-xt} u(t)]_{\partial C} + \frac{1}{x} \int_C e^{-xt} u'(t) dt$$

だから , $[e^{-xt} u(t)]_{\partial C} = 0$ となるように C を決めていれば^{*3}

$$\mathcal{L}(\partial u)(x) = x \mathcal{L}u(x)$$

となる . 従って $W[x]$ での Laplace 変換が $x \mapsto -\partial, \partial \mapsto x$ という変換であったので ,

$$Pu = 0 \iff \mathcal{L}(P)(\mathcal{L}u) = 0$$

とできる .

一方関数 $u(x)$ に対して

$$I_c^\lambda(u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_c^x u(t)(x-t)^{\lambda-1} dt$$

を対応させて Euler 変換 (Riemann-Liouville 変換) と呼ぶ^{*4} . この積分は , 例えば $\operatorname{Re} \lambda > 0$, かつ $\lim_{x \rightarrow c} (x-c)^{-1-\epsilon} u(x) = 0$ となる正数 ϵ が存在するならば^{*5} 絶対収束する . さらに $u(t)$ が c と x を結ぶ積分路から端点 c を除いた部分の近傍で正則な関数であれば , 積分 $\int_c^x u(t)(x-t)^{\lambda-1} dt$ は λ の有理型関数に解析接続され $\lambda = 0, -1, -2, \dots$ に高々 1 位の極を持つことがわかる . $\Gamma(\lambda)$ も $\lambda = 0, -1, -2, \dots$ に 1 位の極を持つため $I_c^\lambda u(x)$ は $\lambda = 0, -1, -2, \dots$ で正則であり , さらに

$$I_c^{-n} u(x) = \frac{d^n}{dx^n} u(x)$$

が成り立つ . また以下のことが確かめられる .

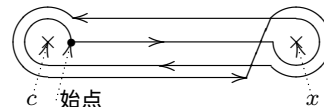
- $I_c^\lambda I_c^\mu u(x) = I_c^{\lambda+\mu} u(x)$.

^{*2} 通常 , このような微分と積分の順序交換が可能ないように , $u(x)$ に応じて積分路 C を選ぶ

^{*3} ∂C は曲線 C の (符号付) 端点

^{*4} I_c^λ を以下の Pochhammer の道に沿った複素積分で定義しても良い

$$(\tilde{I}_c^\mu(u))(x) := \int^{(x+, c+, x-, c-)} u(z)(x-z)^{\mu-1} dz$$



^{*5} $c = \infty$ のときは , $\lim_{x \rightarrow c} x^{1+\epsilon} u(x) = 0$ ならばよい

- $p(x)$ を n 次多項式としたとき,

$$I_c^{-\lambda}(p(x)u(x)) = p(x)I_c^{-\lambda}u(x) + \binom{\lambda}{1}p'(x)I_c^{-\lambda-1}u(x) + \cdots + \binom{\lambda}{n}p^{(n)}(x)I_c^{-\lambda-n}u(x)$$

という Leibniz の法則の拡張が成り立つ．例えば

$$\frac{d}{dt}(u(t)(x-t)^{\lambda-1}) = u'(t)(x-t)^{\lambda-1} - \frac{d}{dx}(u(t)(x-t)^{\lambda-1})$$

より, $\partial I_c^\lambda(u) = I_c^\lambda(\partial u)$ がわかる．また,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t)(x-t)^\lambda) &= u'(t)(x-t)^\lambda - \frac{d}{dx}(u(t)(x-t)^{\lambda-1}) \\ &= xu'(t)(x-t)^{\lambda-1} - tu'(t)(x-t)^{\lambda-1} - \lambda u(t)(x-t)^{\lambda-1} \end{aligned}$$

より, 両辺を積分して

$$[u(t)(x-t)^\lambda]_{t=c}^{t=x} = xI_c^\lambda(\partial u) - I_c^\lambda(\vartheta u) - \lambda I_c^\lambda(u)$$

であるから, 左辺が 0 ならば $I_c^\lambda(\vartheta u) = (\vartheta - \lambda)I_c^\lambda(u)$ とできる．

従って $\text{RAd}(\partial^{-\lambda})$ の Leibniz の法則を思い出すと, $P \in W[x]$ に対して

$$Pu = 0 \iff (\text{RAd}(\partial^{-\lambda})P)I_c^\lambda u = 0$$

となることがわかる．

2.2 演算の例

これまでに定義した演算を, 具体的な場合にみてみよう．

例 2.2.1. $n = 1$ として $h(x, \xi)$ は ξ をパラメーターとしてもつ x の有理関数, $g(x, \xi), f(x, \xi)$ を $g' = h, f = e^g$ 満たすような関数とし, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする．

$$\begin{aligned} \text{Adei}(h)\partial &= \partial - h = \text{Ad}(e^g)\partial = e^g \circ \partial \circ e^{-g}, \\ \text{Ad}(f)x &= x, \quad \text{AdL}(f)\partial = \partial, \\ \text{Ad}(f)\partial &= \partial - h(x, \xi), \quad \text{AdL}(f)x = x + h(\partial, \xi), \\ \text{Ad}((x-c)^\lambda) &= \text{Ade}(\lambda \log(x-c)) = \text{Adei}\left(\frac{\lambda}{x-c}\right), \\ \text{Ad}((x-c)^\lambda)x &= x, \quad \text{Ad}((x-c)^\lambda)\partial = \partial - \frac{\lambda}{x-c}, \\ \text{RAdL}((x-c)^\lambda)x &= (\partial - c)x + \lambda = x\partial - cx + 1 + \lambda, \\ \text{RAdL}((x-c)^\lambda)\partial &= \partial, \\ \text{RAdL}((x-c)^\lambda)\vartheta &= x(\partial - c) - \lambda \quad (\vartheta := x\partial), \\ \text{Ad}(\partial^{-\mu})\vartheta &= \text{AdL}(x^\mu)\vartheta = \vartheta - \mu, \\ \text{Ad}(e^{\frac{\lambda(x-c)^m}{m}})x &= x, \quad \text{Ad}(e^{\frac{\lambda(x-c)^m}{m}})\partial = \partial - \lambda(x-c)^{m-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{RAdL} \left(e^{\frac{\lambda(x-c)^m}{m}} \right) x &= \begin{cases} x + \lambda(\partial - c)^{m-1} & (m \geq 1), \\ (\partial - c)^{1-m} x + \lambda & (m \leq -1), \end{cases} \\ T_{(x-c)^m}^* x &= (x-c)^m, \quad T_{(x-c)^m}^* \partial = \frac{1}{m} (x-c)^{1-m} \partial. \end{aligned}$$

次に，前節で定義した演算を，古典的な微分方程式に関連づけていくつか計算してみる．

例 2.2.2. 最も単純な微分方程式

$$\frac{du}{dx} = 0$$

を $\text{RAd}(x^\mu)$ や $\text{RAd}(\partial^\nu)$ を用いて変換してみよう．

- (Gauss の超幾何関数)

$$\begin{aligned} P_{\lambda_1, \lambda_2, \mu} &:= \text{RAd}(\partial^{-\mu}) \circ \text{RAd}(x^{\lambda_1}(1-x)^{\lambda_2}) \partial \\ &= \text{RAd}(\partial^{-\mu}) \circ \text{R} \left(\partial - \frac{\lambda_1}{x} + \frac{\lambda_2}{1-x} \right) \\ &= \text{RAd}(\partial^{-\mu}) (x(1-x)\partial - \lambda_1(1-x) + \lambda_2 x) \\ &= \text{RAd}(\partial^{-\mu}) ((\vartheta - \lambda_1) - x(\vartheta - \lambda_1 - \lambda_2)) \\ &= \text{Ad}(\partial^{-\mu}) ((\vartheta + 1 - \lambda_1)\partial - (\vartheta + 1)(\vartheta - \lambda_1 - \lambda_2)) \\ &= (\vartheta + 1 - \lambda_1 - \mu)\partial - (\vartheta + 1 - \mu)(\vartheta - \lambda_1 - \lambda_2 - \mu) \\ &= (\vartheta + \gamma)\partial - (\vartheta + \beta)(\vartheta + \alpha) \\ &= x(1-x)\partial^2 + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\partial - \alpha\beta \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{cases} \alpha = -\lambda_1 - \lambda_2 - \mu \\ \beta = 1 - \mu \\ \gamma = 1 - \lambda_1 - \mu \end{cases}$$

とした．ここで解は変換により

$$\begin{aligned} u(x) &= I_0^\mu (x^{\lambda_1}(1-x)^{\lambda_2}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x t^{\lambda_1}(1-t)^{\lambda_2}(x-t)^{\mu-1} dt \\ &= \frac{x^{\lambda_1+\mu}}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 s^{\lambda_1}(1-s)^{\mu-1}(1-xs)^{\lambda_2} ds \quad (t = xs \text{ とした}) \\ &= \frac{\Gamma(\lambda_1+1)x^{\lambda_1+\mu}}{\Gamma(\lambda_1+\mu+1)} F(-\lambda_2, \lambda_1+1, \lambda_1+\mu+1; x) \end{aligned}$$

となり Gauss の超幾何関数が得られた．従って以上の手順により，Riemann 図式

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x=0 & 1 & \infty & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & -\lambda_1 - \lambda_2 & ; x \end{array} \right\}$$

をもつ $x^{\lambda_1}(1-x)^{\lambda_2}$ の満たす微分方程式に $\text{RAd}(\partial^{-\mu})$ を施して，Riemann 図式

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x=0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & 1-\mu & ; x \\ \lambda_1+\mu & \lambda_2+\mu & -\lambda_1-\lambda_2-\mu & \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cccc} x=0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \beta & ; x \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \alpha & \end{array} \right\}$$

をもつ*6 Gauss の超幾何関数の満たす微分方程式が得られた*7 .

- (Airy 関数)

$$\begin{aligned} P_m &= L \circ \text{Ad}\left(e^{\frac{x^{m+1}}{m+1}}\right) \partial \\ &= L(\partial - x^m) \\ &= x - (-\partial)^m \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

より, 微分方程式

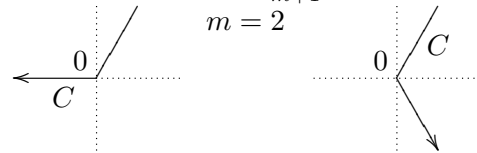
$$\frac{d^m u}{dx^m} - (-1)^m x u = 0$$

が得られた. また, 解は変換により

$$u(x) = \int_C e^{\frac{z^{m+1}}{m+1}} e^{-zx} dz = \int_C \exp\left(\frac{z^{m+1}}{m+1} - zx\right) dz$$

となる. 積分路 C は偏角が $\frac{\pi}{m+1}$ の無限遠方向から始まり, 偏角が $\frac{(2k+1)\pi}{m+1}$ 方向で無限遠に入る曲

線にとることができる ($k = 1, 2, \dots, m$).



- (Jordan-Pochhammer 関数) $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ としよう.

$$\begin{aligned} P_{\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu} &:= \text{RAd}(\partial^{-\mu}) \circ \text{RAd}\left(\prod_{j=1}^p (1 - c_j x)^{\lambda_j}\right) \partial \\ &= \text{RAd}(\partial^{-\mu}) \circ \text{R}\left(\partial + \sum_{j=1}^p \frac{c_j \lambda_j}{1 - c_j x}\right) \\ &= \text{RAd}(\partial^{-\mu})(p_0(x)\partial + q(x)) \\ &= \partial^{-\mu+p-1}(p_0(x)\partial + q(x))\partial^\mu = \sum_{k=0}^p p_k(x)\partial^{p-k} \end{aligned}$$

とすると, $P_{\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu} u = 0$ が Jordan-Pochhammer 関数の満たす微分方程式である. ここで

$$\begin{aligned} p_0(x) &= \prod_{j=1}^p (1 - c_j x), \quad q(x) = p_0(x) \sum_{j=1}^p \frac{c_j \lambda_j}{1 - c_j x}, \\ p_k(x) &= \binom{-\mu + p - 1}{k} p_0^{(k)}(x) + \binom{-\mu + p - 1}{k - 1} q^{(k-1)}(x), \\ \binom{\alpha}{\beta} &:= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\alpha - \beta + 1)} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

*6 一般論は定理 6.1.2

*7 特性指数 $\lambda_1 + \mu$ に対応する原点での局所解が得られた. その後さらに演算 $\text{Ad}(x^{-\lambda_1 - \mu})$ を施すと, Riemann 図式 $\left\{ \begin{matrix} x=0 & 1 & \lambda_1 + 1 \\ -\lambda_1 - \mu & 0 & \lambda_1 + 1 \\ 0 & \lambda_2 + \mu & -\lambda_2 \end{matrix} \right\}$ における原点での正則解になる. よって Riemann 図式 $\left\{ \begin{matrix} x=0 & 1 & \infty \\ 1-\gamma & 0 & \beta \\ 0 & \gamma - \alpha - \beta & \alpha \end{matrix} \right\}$ における原点での正則解は, $\alpha = -\lambda_2, \beta = \lambda_1 + 1, \gamma = \lambda_1 + \mu + 1$ とおくことにより, $x^{1-\gamma} I_0^{\gamma-\beta}(x^{\beta-1}(1-x)^{-\alpha})$ で与えられる

とした．そして構成からわかるように解は，

$$u_j(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{\frac{1}{c_j}}^x \prod_{\nu=1}^p (1 - c_\nu t)^{\lambda_\nu} (x-t)^{\mu-1} dt \quad (j = 0, 1, 2, \dots, p, \quad c_0 = 0)$$

で得られる．また，Riemann 図式は

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x = \frac{1}{c_1} & \cdots & \frac{1}{c_p} & \infty \\ [0]_{(p-1)} & \cdots & [0]_{(p-1)} & [1-\mu]_{(p-1)} \\ \lambda_1 + \mu & \cdots & \lambda_p + \mu & -\lambda_1 - \cdots - \lambda_p - \mu \end{array} ; x \right\}$$

であることもわかる．

2.3 常微分方程式

今までは一般の n 変数の Weyl 代数を扱っていたが，この講義では特に $n = 1$ ，すなわち常微分方程式

$$\mathcal{M}: Pu = 0$$

の場合を扱っていく．ここで $P \in W(x; \xi)$ とする．今 M_P を生成元 u と基本関係 $Pu = 0$ で定義される左 $W(x; \xi)$ 加群とする．このとき $W(x; \xi)$ 準同型

$$\begin{array}{ccc} W(x; \xi) & \longrightarrow & M_P \\ \cup & & \cup \\ Q & \longmapsto & Qu \end{array}$$

を考えれば， $M_P \cong W(x; \xi)/W(x; \xi)P$ となることがわかる．我々は微分方程式 \mathcal{M} と左 $W(x; \xi)$ 加群 M_P をしばしば同一視し，左 $W(x; \xi)$ 加群 M_P も同じ記号 \mathcal{M} と書くことにする．

例えば \mathcal{O}_{x_0, ξ_0} を (x, ξ) に関する (x_0, ξ_0) の近傍での正則関数全体とすると，微分方程式 \mathcal{M} の \mathcal{O}_{x_0, ξ_0} における解空間に対しては次のような同型写像

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{W(x; \xi)}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{x_0, \xi_0}) & \xrightarrow{\sim} & \{v(x, \xi) \in \mathcal{O}_{x_0, \xi_0} \mid Pv = 0\} \\ \cup & & \cup \\ I & \longmapsto & I(u) \end{array}$$

がある．従って \mathcal{M} を左 $W(x; \xi)$ 加群と見た場合は $\text{Hom}_{W(x; \xi)}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{x_0, \xi_0})$ を解空間とみなせる．

ここで $W(x; \xi)$ のいくつかの性質を思い出しておこう．

1. $W(x; \xi)$ は零因子を持たない．すなわち $PQ = 0$ ならば $P = 0$ か $Q = 0$ である．
2. $W(x; \xi)$ は Euclid 環である．すなわち任意の $P, Q \in W(x; \xi)$ ($P \neq 0$) に対し，次を満たす $R, S \in W(x; \xi)$ ($\text{ord } R < \text{ord } P$) がそれぞれただ一つずつ存在する．

$$Q = SP + R. \tag{2.3}$$

Proof. 一意性を示す． $S', R' \in W(x; \xi)$ ($\text{ord } R' < \text{ord } P$) があって $Q = S'P + R'$ とできたとすると， $0 = (S - S')P + (R - R')$ ．ここで $S \neq S'$ ならば $\text{ord}((S - S')P + (R - R')) \geq \text{ord } P$ とな

り $P \neq 0$ なので $S = S'$ でなければならない . このとき $R = R'$ となって一意性が示せた . また ,

$$\begin{aligned} P &= a_n \partial^n + \cdots + a_1 \partial + a_0 \quad (a_n \neq 0), \\ Q &= b_m \partial^m + \cdots + b_1 \partial + b_0 \quad (b_m \neq 0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

と書けているとする . $\text{ord } Q < \text{ord } P$ ならば $S = 0, R = Q$ として (2.3) は明らか . $\text{ord } Q \geq \text{ord } P$ とする . $\text{ord } Q$ に関する帰納法で証明する . $\text{ord } Q = 0$ の場合は主張は明らかなので , $\text{ord } Q' < \text{ord } Q$ なる $Q' \in W(x; \xi)$ に対して主張が成り立っていると仮定する . いま $Q' = Q - b_m a_n^{-1} \partial^{m-n} P$ とすると $\text{ord } Q' < \text{ord } Q$ より $S'R \in W(x; \xi)$ ($\text{ord } R < \text{ord } Q' < \text{ord } Q$) があって $Q' = S'P + R$ とできる . よって $S = S' + b_m a_n^{-1} \partial^{m-n}$ とすれば , $Q = SP + R$ となって主張が従う . \square

3. $W(x; \xi)$ の任意の左イデアルは単項生成である .

Proof. 左イデアルの中で ord が最小の元をとってくれば Euclid 環であることより明らかにこれがイデアルの生成元となる . \square

4. (Euclid の互除法) $P, Q \in W(x; \xi) \setminus \{0\}$ に対し , P, Q の最大左公約元 $U \in W(x; \xi)$ がある . すなわち $P = AU, Q = BU$ であって , もし $P = A'U', Q = B'U'$ ならば $U = CU' (A, B, C, A', B', U' \in W(x; \xi))$. さらに

$$U = MP + NQ$$

なる $M, N \in W(x; \xi)$ を求めることができる .

問 2.3.1. P, Q から Euclid の互除法を使って , U, M, N を求める手続きを与えよ .

5. 任意の有限生成左 $W(x; \xi)$ 加群 \mathcal{M} は巡回加群である . すなわちある $P \in W(x; \xi)$ があって $\mathcal{M} \cong W(x; \xi)/W(x; \xi)P$ とできる .

注意 2.3.2. これは任意の常微分方程式系は単独方程式に帰着できることを主張している .

Proof. まず次の主張が示せれば十分である .

任意の $P, Q \in W(x; \xi)$ に対し , $R \in W(x; \xi)$ が存在して ,

$$W(x; \xi)/W(x; \xi)P \oplus W(x; \xi)/W(x; \xi)Q \cong W(x; \xi)/W(x; \xi)R.$$

実際 , \mathcal{M} の生成元を u_1, \dots, u_r として

$$I_i = \{P \in W(x; \xi) \mid Pu_i = 0\} \quad (i = 1, \dots, r)$$

とするとこれらは左イデアルとなるから単項生成 . 各 I_i の生成元を $P_i \in W(x; \xi)$ とすれば ,

$$\mathcal{M} \supset W(x; \xi)u_i \cong W(x; \xi)/W(x; \xi)P_i$$

である . 従って全射準同型

$$\bigoplus_{i=1}^r W(x; \xi)/W(x; \xi)P_i \rightarrow \mathcal{M}$$

があることがわかる．一方で上の主張を認めれば， $R \in W(x; \xi)$ があって

$$\bigoplus_{i=1}^r W(x; \xi)/W(x; \xi)P_i \cong W(x; \xi)/W(x; \xi)R$$

である．従って全射準同型

$$W(x; \xi)/W(x; \xi)R \rightarrow \mathcal{M}$$

があり，さらに自然な全射準同型 $W(x; \xi) \rightarrow W(x; \xi)/W(x; \xi)R$ と合成すれば $W(x; \xi) \rightarrow \mathcal{M}$ も全射準同型で核は単項生成なので，ある $Q \in W(x; \xi)$ があって $W(x; \xi)/W(x; \xi)Q \cong \mathcal{M}$.

では主張を証明しよう． $P, Q \in W(x; \xi)$ は (2.4) のように書けているとしよう．さらに $W(x; \xi)/W(x; \xi)P$, $W(x; \xi)/W(x; \xi)Q$ の生成元をそれぞれ u, v とおく*8 . すると $u, \partial u, \dots, \partial^{n-1}u$ は $\mathbb{C}(x; \xi)$ 上線型独立， $v, \partial v, \dots, \partial^{m-1}v$ も同様に線型独立． P, Q の特異点でない一般の点 x_0 を選んで $w = u + (x - x_0)^{n\nu}$ とおくと， x_0 での正則局所解の性質から $w, \partial w, \dots, \partial^{m+n-1}w$ も線型独立であることがわかる*9 . よって

$$\dim_{\mathbb{C}(x; \xi)} W(x; \xi)w \geq m + n = \dim_{\mathbb{C}(x; \xi)} W(x; \xi)/W(x; \xi)P + \dim_{\mathbb{C}(x; \xi)} W(x; \xi)/W(x; \xi)Q .$$

一方 $W(x; \xi)w \subset W(x; \xi)/W(x; \xi)P \oplus W(x; \xi)/W(x; \xi)Q$ なので次元の評価からこの包含関係は等式でなければならない． \square

定義 2.3.3. $P \in W(x; \xi)$, $P \neq 0$ が既約であるとは次の同値な条件のうちどれかが成立することとする .

1. $W(x; \xi)/W(x; \xi)P$ は左 $W(x; \xi)$ 加群として単純である .
2. $W(x; \xi)P \subset W(x; \xi)$ は左極大イデアルである .
3. $P = QR$ が $Q, R \in W(x; \xi)$ に対し成り立つなら， $\text{ord } Q \cdot \text{ord } R = 0$ である .
4. $Q \in W(x; \xi)$, $Q \notin W(x; \xi)P$ ならば $M, N \in W(x; \xi)$ があって $MP + NQ = 1$ とできる .
5. $S, T \in W(x; \xi)$ が $ST \in W(x; \xi)P$ かつ $\text{ord } S < \text{ord } P$ ならば $S = 0$ であるか $T \in W(x; \xi)P$ のいずれかである .

問 2.3.4. 上の定義の条件が互いに同値であることを示せ .

*8 自然な準同型 $W(x; \xi) \rightarrow W(x; \xi)/W(x; \xi)P$ による $1 \in W(x; \xi)$ の像を u とすればよい . v も同様

*9 $Pu = 0$ の x_0 での正則解 $u(x)$ は， $(\partial^\nu u)(x_0)$ ($\nu = 0, \dots, n-1$) を任意に与えて存在する . $Qv = 0$ についても同様 . よって， $w = u + (x - x_0)^{n\nu}$ の満たす方程式の x_0 での正則解 $w(x)$ は， $(\partial^\nu w)(x_0)$ ($\nu = 0, \dots, m+n-1$) を任意に与えて存在する

第3章

合流

この章の内容は不確定特異点の解析に極めて有効であるが，ここでは簡単な応用例を述べるにとどめ，より詳しくは別の機会に譲る．

3.1 合流

Addition RAd $((1 - cx)^\mu)$ によって $\partial u = 0$ は

$$\text{RAd} : \partial \mapsto (1 - cx)\partial + c\mu$$

と変換され， $((1 - cx)\partial + c\mu)u = 0$ は解 $(1 - cx)^\mu$ をもつ．ここでパラメーター c, μ を $(c, \mu) \mapsto (c, c\mu = \lambda)$ と変数変換してみる．すると $((1 - cx)\partial + \lambda)$ となり， $c \rightarrow 0$ とすると， $(\partial + \lambda)$ となる．これは $e^{-\lambda x}$ を解にもち， $\text{Ade}(-\lambda x)$ によって $\text{Ade}(-\lambda x)\partial = \partial + \lambda$ としたものに他ならない．

$$(1 - cx)^{\frac{\lambda}{c}} = \exp\left(-\int_0^x \frac{\lambda}{1 - cx} dx\right)$$

であるから， $(1 - cx)^{\frac{\lambda}{c}}$ は λ, c の関数として $(c, \lambda) = (0, 0)$ のまわりで正則である．またこれより， $\text{Ad}((1 - cx)^{\frac{\lambda}{c}}) = \text{Adei}\left(-\frac{\lambda}{1 - cx}\right)$ となるので，

$$\text{Ad}((1 - cx)^{\frac{\lambda}{c}})\Big|_{c=0} = \text{Adei}\left(-\frac{\lambda}{1 - cx}\right)\Big|_{c=0} = \text{Adei}(-\lambda) = \text{Ade}(-\lambda x) = \text{Ad}(e^{-\lambda x})$$

となっていることから，上記のことは自然に理解される．

3.2 versal addition

$h(c, x)$ を $c \in \mathbb{C}$ を正則パラメーターにもつ関数としよう． $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ に対し関数 $h_n(c_1, \dots, c_n; x)$ を

$$h_n(c_1, \dots, c_n; x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z|=R} \frac{h(z, x)}{\prod_{j=1}^n (z - c_j)} dz$$

と定めよう．ここで $c_1, \dots, c_n \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ となるように R を十分大きく取っておく．このとき $h_n(c_1, \dots, c_n; x)$ は $c_1, \dots, c_n \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ であるとき各 c_i に関して正則である．

命題 3.2.1. 上で定めた $h_n(c_1, \dots, c_n; x)$ に対し,

$$h_n(c_1, \dots, c_n; x) = \sum_{k=1}^n \frac{h(c_k, x)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (c_k - c_i)}$$

が成り立つ.

Proof. 両辺は各 c_i に関して正則なので各 c_i は相異なるとして等式を示せば十分. すると留数定理から

$$\begin{aligned} h_n(c_1, \dots, c_n; x) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|z|=R} \frac{h(z, x)}{\prod_{j=1}^n (z - c_j)} dz \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{h(c_k, x)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (c_k - c_i)}. \end{aligned} \quad \square$$

特に $h(c, x) = c^{-1} \log(1 - cx) = -x - \frac{c}{2}x^2 - \frac{c^2}{3}x^3 - \dots$ ととると, $h(c, x) = -\int_0^x \frac{1}{1-cx} dx$ より $(1 - cx)h'(c, x) = -1$ となるから,

$$h'_n(c_1, \dots, c_n; x) \prod_{1 \leq i \leq n} (1 - c_i x) = - \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (1 - c_i x)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (c_k - c_i)}$$

補題 3.2.2. 次の等式が成り立つ.

$$- \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (1 - c_i x)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (c_k - c_i)} = -x^{n-1}$$

Proof. 左辺を $f(c_1, \dots, c_n, x)$ とおくと, f は x に関する次数 $n-1$ の多項式で, 係数は c_i について正則となる. $f(Cc_1, \dots, Cc_n, C^{-1}x) = C^{1-n} f(c_1, \dots, c_n, x)$ ($C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) が成り立つので, x^i の係数は (c_1, \dots, c_n) に対して $(1 - n + i)$ 次の斉次式になる. よって $i < n-1$ ならば係数は 0 で, f は x^{n-1} の定数倍でなければならず, $c_1 = 0$ と置けばその定数が -1 であることがわかる. \square

$h_n(c_1, \dots, c_n; 0) = 0$ に注意すれば, この補題より

$$h_n(c_1, \dots, c_n; x) = - \int_0^x \frac{t^{n-1}}{\prod_{1 \leq i \leq n} (1 - c_i t)} dt$$

となることがわかる. 以上の事から

$$\begin{aligned} \text{Ad}(e^{\lambda_n h_n(c_1, \dots, c_n; x)}) \left(\prod_{1 \leq i \leq n} (1 - c_i x) \right) \partial &= e^{\lambda_n h_n(c_1, \dots, c_n; x)} \circ \left(\prod_{1 \leq i \leq n} (1 - c_i x) \right) \partial \circ e^{-\lambda_n h_n(c_1, \dots, c_n; x)} \\ &= \left(\prod_{1 \leq i \leq n} (1 - c_i x) \right) \partial + \lambda_n x^{n-1}, \\ e^{\lambda_n h_n(c_1, \dots, c_n; x)} &= \prod_{k=1}^n (1 - c_k x)^{\frac{\lambda_n}{c_k \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (c_k - c_i)}} \end{aligned}$$

がわかる.

定義 3.2.3 (Versal addition). 次のような変換を定義する .

$$\begin{aligned} \text{AdV}_{\left(\frac{1}{c_1}, \dots, \frac{1}{c_p}\right)}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) &:= \text{Ad} \left(\prod_{k=1}^p (1 - c_k x)^{\sum_{n=k}^p \frac{\lambda_n}{c_k \prod_{1 \leq i \leq n, i \neq k} (c_k - c_i)}} \right) \\ &= \text{Adei} \left(- \sum_{n=1}^p \frac{\lambda_n x^{n-1}}{\prod_{i=1}^n (1 - c_i x)} \right), \\ \text{RAdV}_{\left(\frac{1}{c_1}, \dots, \frac{1}{c_p}\right)}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) &= \text{R} \circ \text{AdV}_{\left(\frac{1}{c_1}, \dots, \frac{1}{c_p}\right)}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \end{aligned}$$

このとき $\text{RAdV}_{\left(\frac{1}{c_1}, \dots, \frac{1}{c_p}\right)}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ を $\frac{1}{c_1}, \dots, \frac{1}{c_p}$ での **versal addition** と呼ぶ . 同様に原点での versal addition も次のように定義される .

$$\text{AdV}_{(a_1, \dots, a_p)}^0(\lambda_1, \dots, \lambda_p) := \text{Ad} \left(\prod_{k=1}^p (x - a_k)^{\sum_{n=k}^p \frac{\lambda_n}{\prod_{1 \leq i \leq n, i \neq k} (a_k - a_i)}} \right)$$

例えば

$$\left(\partial - \frac{\lambda_1}{x - a_1} - \frac{\lambda_1}{x - a_2} \right) u = 0$$

は一般に $a_1 = a_2$ としたとき

$$\left(\partial - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{x - a_1} \right) u = 0$$

となる . ところがパラメーターを変換して

$$\frac{\lambda_1}{x - a_1} + \frac{\lambda_2}{x - a_2} = \frac{\mu_1}{x - a_1} + \frac{\mu_2}{(x - a_1)(x - a_2)}$$

としておくと , $a_1 = a_2$ としたとき ,

$$\left(\partial - \frac{\mu_1}{x - a_1} - \frac{\mu_2}{(x - a_1)^2} \right) u = 0$$

となり $x = a_1$ は不確定特異点となった . 上で定義した versal addition はこの操作の一般化である .

3.3 versal operator

前節で定義した versal addition を用いると versal な Jordan-Pochhammer 微分作用素が次のように構成される .

$$\begin{aligned} P &:= \text{RAd}(\partial^{-\mu}) \circ \text{RAdV}_{\left(\frac{1}{c_1}, \dots, \frac{1}{c_p}\right)}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \partial \\ &= \text{RAd}(\partial^{-\mu}) \circ \text{R} \left(\partial + \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k x^{k-1}}{\prod_{\nu=1}^k (1 - c_\nu x)} \right) \\ &= \partial^{-\mu+p-1} (p_0(x) \partial + q(x)) \partial^\mu = \sum_{k=0}^p p_k(x) \partial^{p-k} \end{aligned}$$

ここで

$$p_0(x) = \prod_{j=1}^p (1 - c_j x), \quad q(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k x^{k-1} \prod_{j=k+1}^p (1 - c_j x),$$

$$p_k(x) = \binom{-\mu + p - 1}{k} p_0^{(k)}(x) + \binom{-\mu + p - 1}{k-1} q^{(k-1)}(x)$$

とした．これは $c_j \neq c_i, c_i \neq 0$ であるとき通常の Jordan-Pochhammer 微分作用素になる．また解の積分表示も同様に構成することができる．

versal な Jordan-Pochhammer 作用素の $p = 2$ の場合が Gauss の超幾何微分作用素に相当する．次にこの versal な Gauss の超幾何微分作用素を例に見てみよう．

例 3.3.1. $P_{c_1, c_2; \lambda_1, \lambda_2, \mu} = \text{RAd}(\partial^{-\mu}) \circ \text{RAdV}_{\left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}\right)}(\lambda_1, \lambda_2) \partial$

$$= \text{RAd}(\partial^{-\mu}) \circ \text{RAd} \left((1 - c_1 x)^{\frac{\lambda_1}{c_1} + \frac{\lambda_2}{c_1(c_1 - c_2)}} (1 - c_2 x)^{\frac{\lambda_2}{c_2(c_2 - c_1)}} \right) \partial$$

$$= \text{RAd}(\partial^{-\mu}) \circ \text{RAd}_{\text{ei}} \left(-\frac{\lambda_1}{1 - c_1 x} - \frac{\lambda_2 x}{(1 - c_1 x)(1 - c_2 x)} \right) \partial$$

$$= \text{RAd}(\partial^{-\mu}) \circ \text{R} \left(\partial + \frac{\lambda_1}{1 - c_1 x} + \frac{\lambda_2 x}{(1 - c_1 x)(1 - c_2 x)} \right)$$

$$= \text{Ad}(\partial^{-\mu}) (\partial(1 - c_1 x)(1 - c_2 x) \partial + \partial(\lambda_1(1 - c_2 x) + \lambda_2 x))$$

$$= ((1 - c_1 x) \partial + c_1(\mu - 1)) ((1 - c_2 x) \partial + c_2 \mu)$$

$$+ \lambda_1 \partial + (\lambda_2 - \lambda_1 c_2)(x \partial + 1 - \mu)$$

$$= (1 - c_1 x)(1 - c_2 x) \partial^2$$

$$+ ((c_1 + c_2)(\mu - 1) + \lambda_1 + (2c_1 c_2(1 - \mu) + \lambda_2 - \lambda_1 c_2)x) \partial$$

$$+ (\mu - 1)(c_1 c_2 \mu + \lambda_1 c_2 - \lambda_2)$$

$$= (1 - c_1 x)(1 - c_2 x) \partial^2 + (\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 x) \partial + \tilde{\mu}(\tilde{\lambda}_2 - c_1 c_2(\tilde{\mu} + 1)),$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 + (c_1 + c_2)(\mu - 1),$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2 - \lambda_1 c_2 + 2c_1 c_2(1 - \mu),$$

$$\tilde{\mu} = 1 - \mu.$$

これは $c_1 \neq c_2, c_1 c_2 \neq 0$ ならば Gauss の超幾何微分作用素に対応して，その Riemann 図式は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = \frac{1}{c_1} & \frac{1}{c_2} & \infty \\ 0 & 0 & 1 - \mu \\ \frac{\lambda_1}{c_1} + \frac{\lambda_2}{c_1(c_1 - c_2)} + \mu & \frac{\lambda_2}{c_2(c_2 - c_1)} + \mu & -\frac{\lambda_1}{c_1} + \frac{\lambda_2}{c_1 c_2} - \mu \end{array} ; x \right\}$$

である．また解は下に定義する $K_{c_1, c_2; \lambda_1, \lambda_2}(x)$ を積分核として

$$I_c^\mu K_{c_1, c_2; \lambda_1, \lambda_2}(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_c^x K_{c_1, c_2; \lambda_1, \lambda_2}(t) (x - t)^{\mu-1} dt$$

によって与えられる．その積分核は

$$K_{c_1, c_2; \lambda_1, \lambda_2}(x) = (1 - c_1 x)^{\frac{\lambda_1}{c_1} + \frac{\lambda_2}{c_1(c_2 - c_1)}} (1 - c_2 x)^{\frac{\lambda_2}{c_2(c_2 - c_1)}}$$

である．なお c は特異点に，積分路は収束を考慮して選ぶ．

こうして versal な Gauss の超幾何微分作用素が得られたが，versal addition のパラメーターを特殊化することによって以下のような合流型の微分作用素が得られる．

$$P_{c_1,0;\lambda_1,\lambda_2,\mu} = (1 - c_1x)\partial^2 + (c_1(\mu - 1) + \lambda_1 + \lambda_2x)\partial - \lambda_2(\mu - 1).$$

これは Kummer の合流型微分作用素^{*1}に対応する．また解の積分表示を与える積分核は

$$K_{c_1,0;\lambda_1,\lambda_2}(x) = (1 - c_1x)^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{c_1}} \exp\left(\frac{\lambda_2x}{c_1}\right)$$

で与えられる．次に

$$P_{0,0;0,-1,\mu} = \partial^2 - x\partial + (\mu - 1)$$

は Hermite の微分作用素．また，

$$\begin{aligned} \text{Ad}(e^{\frac{1}{4}x^2})P_{0,0;0,1,\mu} &= (\partial - \frac{1}{2}x)^2 + x(\partial - \frac{1}{2}x) - (\mu - 1) \\ &= \partial^2 + \left(\frac{1}{2} - \mu - \frac{x^2}{4}\right) \end{aligned}$$

は Weber の微分作用素に対応する．積分核は

$$K_{0,0;0,\pm 1} = \exp\left(\int_0^x \pm t dt\right) = \exp\left(\pm \frac{x^2}{2}\right)$$

である．また Weber の微分方程式の解

$$\begin{aligned} D_{-\mu}(x) &:= (-1)^{-\mu} e^{\frac{x^2}{4}} I_\infty^\mu(e^{-\frac{x^2}{2}}) = \frac{e^{\frac{x^2}{4}}}{\Gamma(\mu)} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} (t - x)^{\mu-1} dt \\ &= \frac{e^{\frac{x^2}{4}}}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty e^{-\frac{(s+x)^2}{2}} s^{\mu-1} ds = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty e^{-xs - \frac{s^2}{2}} s^{\mu-1} ds \\ &\sim x^{-\mu} e^{-\frac{x^2}{4}} {}_2F_0\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}; -\frac{2}{x^2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^\infty x^{-\mu} e^{-\frac{x^2}{4}} \frac{(\frac{\mu}{2})_k (\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2})_k}{k!} \left(-\frac{2}{x^2}\right)^k \end{aligned}$$

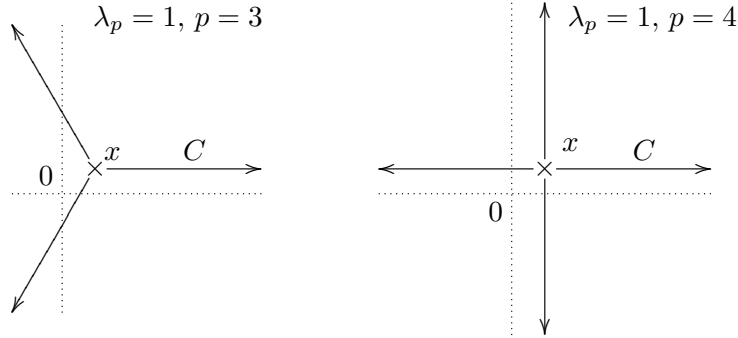
は放物型シリンダー関数として知られている．また最後の行は $x \rightarrow +\infty$ での漸近展開を表している．

上の例では $n = 2$ の場合を見たが，一般の versal な Jordan-Pochhammer 作用素で $c_1 = \dots = c_p = 0$ の場合を考えてみよう．これは無限遠点のみに特異点をもつ微分作用素になる．また解の積分表示は

$$u(x) = \int_C e^{\int \sum -\lambda_j t^{j-1} dt} (x - t)^{\mu-1} dt = \int_C \exp\left(\sum_{j=1}^p -\frac{\lambda_j}{j} t^j\right) (x - t)^{\mu-1} dt$$

^{*1} $\text{RAd}(\partial^{-\mu}) \circ \text{RAdV}_{0,a}^0(\lambda_1, \lambda_2)\partial$ の $a = 0$ の場合が，そのまま Kummer の微分作用素になる

となる．ここで積分路 C は以下のような x を始点とする半直線を取ればよい（無限遠方向の偏角は， $\lambda_p \neq 0$ のとき $e^{\lambda_p + \frac{2\pi\sqrt{-1}k}{p}}$ ($k = 0, 1, \dots, p-1$) の p 通りとする）．



合流の話をもう少し説明しておこう．ここで次の2つのベクトル空間を考えてみよう．

$$V_c = \sum_{j=1}^p \mathbb{C} \cdot \frac{c_j}{1 - c_j x},$$

$$\bar{V}_c = \sum_{j=1}^p \mathbb{C} \cdot h_j(x), \quad h_j(x) = \frac{x^{j-1}}{\prod_{i=1}^j (1 - c_i x)}.$$

これらは $c_j \neq 0$ ($j = 1, \dots, p$), $c_i \neq c_j$ ($i \neq j$) のとき $V_c = \bar{V}_c$ である．また $\text{Ad}(\prod_{j=1}^p (x - \frac{1}{c_j})^{\mu_j})$ は $\text{Ad}(\prod_{j=1}^p (1 - c_j x)^{\mu_j})$ と一致し，

$$\partial \mapsto \partial + \sum_{j=1}^p \frac{\mu_j c_j}{1 - c_j x}, \quad x \mapsto x$$

という変換を与える．一方で $\text{AdV}_{(\frac{1}{c_1}, \dots, \frac{1}{c_p})}(\mu'_1, \dots, \mu'_p)$ は

$$\partial \mapsto \partial + \sum_{j=1}^p \mu'_j h_j(x), \quad x \mapsto x$$

という変換を与える．従って， Ad は ∂ に V_c の元を加え， AdV は \bar{V}_c の元を加える変換となる．さらに c_j が上の条件を満たせば2つのベクトル空間は一致するので Ad と AdV は同等の変換を与えている．しかし c_j が上の条件を満たさないと，つまりある c_j, c_i が $c_j = 0$ となったり， $c_j = c_i$ となったとすると，一般には V_c の次元は小さくなってしまふ．しかし \bar{V}_c の次元はいかなる c_j の値にたいしても変わらないようになっているのである．

問 3.3.2 ((h_1, \dots, h_p) の一意性)． (c_1, \dots, c_p) を正則パラメーターとする有理関数 $\tilde{h}_1(x), \dots, \tilde{h}_p(x)$ で， $\tilde{V}_c = \sum_{j=1}^p \mathbb{C} \tilde{h}_j$ の次元はすべての複素数 c_1, \dots, c_p に対して p 次元で， $c_j \neq 0$ ($j = 1, \dots, p$), $c_i \neq c_j$ ($i \neq j$) のときは $V_c = \tilde{V}_c$ となっているとする．このとき $\tilde{h}_i = \sum_{j=1}^p g_{ij}(c) h_j$ ($1 \leq i \leq p$) を満たす $c = (c_1, \dots, c_p) \in \mathbb{C}^p$ の正則関数 $g_{ij}(c)$ が存在し，しかも $\det(g_{ij}(c))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$ は零にならないことを示せ．

第 4 章

級数展開と隣接関係

4.1 級数展開

ここでいくつかの事実を少し思い出しておく .

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

左辺の積分は $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$ で絶対収束する .

$$\begin{aligned} (1-t)^{-\gamma} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\gamma)(-\gamma-1)\cdots(-\gamma-\nu+1)}{\nu!} (-t)^{\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+\nu)}{\Gamma(\gamma)\nu!} t^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{\nu}}{\nu!} t^{\nu} \end{aligned}$$

また Euler 変換に関する公式もいくつか列挙しておく .

$$\begin{aligned} I_c^{\mu} u(x) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_c^x (x-t)^{\mu-1} u(t) dt \\ &= \frac{(x-c)^{\mu}}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 (1-s)^{\mu-1} u((x-c)s+c) ds \quad (t = (x-c)s+c), \\ I_c^{\mu} \circ I_c^{\mu'} &= I_c^{\mu+\mu'}, \\ I_c^{-n} u(x) &= \frac{d^n}{dx^n} u(x), \\ I_c^{\mu} (x-c)^{\lambda} &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_c^x (t-c)^{\lambda} (x-t)^{\mu-1} dt \\ &= \frac{(x-c)^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 (1-s)^{\mu-1} ((x-c)s)^{\lambda} ds \\ &= \frac{(x-c)^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 (1-s)^{\mu-1} s^{\lambda} ds \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)} (x-c)^{\lambda+\mu}, \\ I_c^{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-c)^{\lambda+n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+n+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+n+1)} c_n (x-c)^{\lambda+\mu+n}. \end{aligned}$$

最後の式は λ に関する解析接続によって $\lambda \notin \{-1, -2, \dots\}$ に対して意味を持つ。また $c = \infty$ の場合も

$$I_{\infty}^{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-\lambda-n} = e^{\pi i \mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda - \mu + n)}{\Gamma(\lambda + n)} c_n x^{-\lambda-\mu-n}.$$

\mathcal{O}_c で収束巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-c)^n$ ($\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} < +\infty$) の全体を表すとする。また

$$\mathcal{O}_c(\lambda, m) = (x-c)^{\lambda} \bigoplus_{j=0}^m \mathcal{O}_c \cdot \log^j(x-c)$$

とする。

命題 4.1.1. $\lambda \notin \{-1, -2, \dots\}$ ならば

$$I_c^{\mu} : \mathcal{O}_c(\lambda, m) \longrightarrow \mathcal{O}_c(\lambda + \mu, m)$$

は well-defined。また $\phi_j \in \mathcal{O}_c$ ($j = 0, \dots, m$) に対して,

$$I_c^{\mu} \left(\sum_{j=0}^m (x-c)^{\lambda} \phi_j \log^j(x-c) \right) - I_c^{\mu} \left((x-c)^{\lambda} \phi_m \log^m(x-c) \right) \in \mathcal{O}_c(\lambda + \mu, m-1).$$

さらに $\lambda + \mu \notin \{-1, -2, \dots\}$ ならば上の I_c^{μ} は全単射である。

Proof. $c = 0$ としてよい。 $\phi \in \mathcal{O}_0$ とする。

$m = 0$ のときは, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda+\mu+n)} \cdot (\lambda+\mu)^n = 1$ から well-defined となること*1, また, I_0^{μ} の逆写像 $I_0^{-\mu}$ の存在から全単射となることがわかる。さらに, $I_c^{\mu}(x^{\lambda}\phi(x))$ が λ に正則に依っていることもわかる。 $m > 0$ のときは,

$$I_0^{\mu}(x^{\lambda}\phi(x) \log^m x) = \frac{d^m}{d\lambda^m} I_c^{\mu}(x^{\lambda}\phi(x))$$

によって, well-define なことや残りの主張がわかる。□

命題 4.1.2. $P \in W[x]$, $\phi \in \mathcal{O}_c(\lambda, m)$ を $P\phi = 0$ を満たすようにとる。また ∂ を左から何回か施して

$$\partial^k P = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} c_{ij} \partial^i \partial^j \quad (c_{ij} \in \mathbb{C})$$

としておく。さらに $\vartheta \mapsto \vartheta - \mu$ として

$$Q = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} c_{ij} \partial^i (\vartheta - \mu)^j$$

と定義する。また $S, T \in W[x]$ があって $Q = ST$ となっているとする。さらに S は $x = c$ を特異点としないと仮定する。

このとき $\lambda + \mu \notin \mathbb{Z}$ のもとで

$$T(I_c^{\mu})(\phi) = 0.$$

*1 あるいは, 十分大きな正整数 N をとり, 級数の最初の N 項を除いて λ を $\lambda + N$ に変えてよく, また, $I_0^{\mu} = \frac{d^N}{dx^N} \circ I_0^{\mu+N}$ を使って, 収束する積分で表せる場合に帰着できる

特に,

$$(\text{RAd}(\partial^{-\mu})P)(I_c^\mu(\phi)) = 0$$

なので $(\text{RAd}(\partial^{-\mu})P)u = 0$ が既約ならば

$$W(x)(\text{RAd}(\partial^{-\mu})P) = \{T \in W(x) \mid TI_c^\mu(u) = 0\}. \quad (4.1)$$

Proof. $\text{Ad}(\partial^{-\mu})\vartheta = \vartheta - \mu$ であったから $P\phi = 0$ とすると $Q(I_c^\mu(\phi)) = \partial^{-\mu+k}P\partial^\mu I_c^\mu(\phi) = \partial^{-\mu+k}P\phi = 0$. よって $STI_c^\mu\phi = 0$. また $\phi \in \mathcal{O}_c(\lambda, m)$ より前命題から $I_c^\mu(\phi) \in \mathcal{O}_c(\lambda + \mu, m)$ であるから, ある $N \geq 0$ があって $TI_c^\mu(\phi) \in \mathcal{O}_c(\lambda + \mu - N, m)$ となる. 仮定より $\lambda + \mu - N \notin \mathbb{Z}$ であり, $Sv = 0$ となる解は $x = c$ で正則なので, $S(TI_c^\mu(\phi)) = 0$ より $TI_c^\mu(\phi) = 0$ が従う. 最後の等式 (4.1) の包含関係 \subset は明らか. さらに両辺が $W(x)$ に真に含まれる左イデアルであり, 左辺は既約性より極大であるので, 等号が成立する. \square

たとえば Gauss の超幾微分方程式の原点での正則解が $x^{1-\gamma}I_0^{\gamma-\beta}(x^{\beta-1}(1-x)^{-\alpha})$ で与えられることは第 2 章の注*7 で示されているが, それを無限級数で表すと,

$$\begin{aligned} x^{1-\gamma}I_0^{\gamma-\beta}(x^{\beta-1}(1-x)^{-\alpha}) &= x^{1-\gamma}I_0^{\gamma-\beta} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_\nu}{\nu!} x^{\beta-1+\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+\nu)}{\Gamma(\gamma+\nu)} \frac{(\alpha)_\nu}{\nu!} x^\nu = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_\nu(\beta)_\nu}{(\gamma)_\nu \nu!} x^\nu. \end{aligned}$$

4.2 隣接関係

次の命題は前の命題 4.1.2 より従う.

命題 4.2.1. $P \in W[x]$ をとってくる. 非負整数 m と $\lambda \notin \mathbb{Z}$, $\lambda + \mu \notin \mathbb{Z}$ を満たす複素数 λ, μ に対して $\mathcal{O}(\lambda, m)$ の元 ϕ が微分方程式 $Pu = 0$ の解となるとき. さらに $P_j, S_j \in W[x]$ を $\sum_{j=1}^N P_j S_j \in W[x]P$ を満たすようにとってくる. このとき適当な $l \in \mathbb{Z}$ を選んで

$$\begin{aligned} \phi_j &= S_j \phi, \\ Q_j &= \partial^{l-\mu} \circ P_j \circ \partial^\mu \in W[x], \quad (j = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (4.2)$$

とおくと,

$$\sum_{j=1}^N Q_j(I_c^\mu(\phi_j)) = 0$$

が成り立つ.

Proof. 適当な $l \in \mathbb{Z}$ を選び $j = 1, \dots, N$ に対して $\partial^l P_j = \tilde{P}_j(\partial, \vartheta) = \sum_{i_1, i_2} c_{i_1, i_2} \partial^{i_1} \vartheta^{i_2}$ ($c_{i_1, i_2} \in \mathbb{C}$) とする. $\sum_{j=1}^N \partial^l P_j S_j \phi = 0$ より $\sum_{j=1}^N I_c^\mu(\tilde{P}_j(\partial, \vartheta) S_j \phi) = \sum_{j=1}^N \tilde{P}_j(\partial, \vartheta - \mu) I_c^\mu(S_j \phi) = 0$ となり主張が従う. \square

例 4.2.2 (Gauss の超幾何関数). $u_{\lambda_1, \lambda_2, \mu} := I_0^\mu (x^{\lambda_1} (1-x)^{\lambda_2})$

は Gauss の超幾何関数となる (例 2.2.2). 前の命題より Gauss の超幾何関数の隣接関係式

$$\begin{aligned} u_{\lambda_1, \lambda_2, \mu-1} &= \partial u_{\lambda_1, \lambda_2, \mu}, \\ \partial u_{\lambda_1+1, \lambda_2, \mu} &= (x\partial + 1 - \mu)u_{\lambda_1, \lambda_2, \mu}, \\ \partial u_{\lambda_1, \lambda_2+1, \mu} &= ((1-x)\partial + \mu - 1)u_{\lambda_1, \lambda_2, \mu} \end{aligned}$$

が得られる. 例えば最初の式は $\partial I_c^\mu = I_c^{\mu-1}$ に他ならず, 2番目は $\phi = x^{\lambda_1} (1-x)^{\lambda_2}$ が方程式

$$x \cdot 1 \cdot \phi - 1 \cdot x \cdot \phi = 0$$

を満たすことから, 前命題で $S_1 = T_2 = 1$, $T_1 = S_2 = x$ とおくと

$$\begin{aligned} 0 &= \partial^{1-\mu} \circ x \partial^\mu I_0^\mu(\phi) - \partial^{1-\mu} \circ 1 \circ \partial^\mu I_0^\mu(x\phi) \\ &= (x\partial + 1 - \mu)I_0^\mu(x^{\lambda_1} (1-x)^{\lambda_2}) - \partial I_0^\mu(x^{\lambda_1+1} (1-x)^{\lambda_2}) \end{aligned}$$

となることから得られる. 3番目も同様.

§2.3 で述べたことから, 例 2.2.2 の記号のもとに, 1階の $Q \in W(x)$ に対して

$$MP_{\lambda_1, \lambda_2, \mu} + NQ = 1$$

となる $M, N \in W(x)$ をユークリッドの互除法で具体的に求めることができることに注意しよう. たとえば, $Q = \partial$ ならば $R = x(1-x)\partial + 1 - \lambda_1 - \mu + (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu - 2)x$ とおくと $P_{\lambda_1, \lambda_2, \mu} = R\partial - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)(\mu - 1)$ となるので, M, N がわかる. これにより, 隣接関係式

$$Ru_{\lambda_1, \lambda_2, \mu-1} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)(\mu - 1)u_{\lambda_1, \lambda_2, \mu}$$

が得られる. このようなやり方で, 任意に与えられた整数 k_1, k_2, k_3 に対して

$$u_{\lambda_1+k_1, \lambda_2+k_2, \mu+k_3} = T(k_1, k_2, k_3)u_{\lambda_1, \lambda_2, \mu}$$

となる 1階の微分作用素 $T(k_1, k_2, k_3) \in W(x; \lambda_1, \lambda_2, \mu)$ を, 最初に求めた基本的な 3つの隣接関係式から具体的に求めることができる.

$u(k_1, k_2, k_3) := u_{\lambda_1+k_1, \lambda_2+k_2, \mu+k_3}$ とおくと, $(k_1, k_2, k_3), (\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{Z}^3$ に対して, 3項間関係式

$$a_0 u(0, 0, 0) + a_1 u(k_1, k_2, k_3) + a_2 u(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = 0$$

を満たす $a_j \in \mathbb{C}(x, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$ が存在する. ただし, a_0, a_1, a_2 のいずれかは 0 でない. 実際

$$u(k_1, k_2, k_3) = (b_1\partial + c_1)u(0, 0, 0), \quad u(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (b_2\partial + c_2)u(0, 0, 0)$$

を満たす $b_1, c_1, b_2, c_2 \in \mathbb{C}(x, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$ が定まることからわかる.

第 5 章

Fuchs 型常微分方程式と一般化 Riemann スキーム

5.1 特性指数

与えられた局所モノドロミーをもつ Fuchs 型常微分作用素

$$P = a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0(x) \quad (a_i(x) \in \mathcal{O}_0) \quad (5.1)$$

をこれから扱っていく．ここで確定特異点の定義を思い出しておく．

定義 5.1.1. $x = c \in \mathbb{C}$ が P の特異点であるとは，ある j ($1 \leq j \leq n$) で $\frac{a_{n-j}(x)}{a_n(x)}$ が $x = c$ を極にもつときにいう．さらに特異点 $x = c$ が確定特異点であるとは

$$b_j(x) := (x - c)^{n-j} \frac{a_j(x)}{a_n(x)} \in \mathcal{O}_c \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

となるときにいう．つまり $\frac{a_j(x)}{a_n(x)}$ が $x = c$ で高々 $n - j$ 位の極を持つときにいう．確定特異点でない特異点を不確定特異点とよぶ．

P は $x = 0$ に確定特異点を持つとしよう．すると

$$\frac{x^n}{a_n(x)} P = x^n \partial^n + b_{n-1}(x) x^{n-1} \partial^{n-1} + \cdots + b_0(x)$$

と書くことができ， $x^k \partial^k = \vartheta(\vartheta - 1) \cdots (\vartheta - k + 1)$ より， x と ϑ の式

$$\frac{x^n}{a_n(x)} P = P_0(\vartheta) - xR(x, \vartheta)$$

に書き直せる．ここで

$$\begin{aligned} R(x, \vartheta) &= r_{n-1}(x) \vartheta^{n-1} + \cdots + r_1(x) \vartheta + r_0(x) \quad (r_j(x) \in \mathcal{O}_0), \\ P_0(\vartheta) &= x^n \partial^n + b_{n-1}(0) x^{n-1} \partial^{n-1} + \cdots + b_0(0) \end{aligned}$$

で, $P_0(\vartheta)$ は ϑ の多項式である. さてこの $P_0(\vartheta)$ に対して, 多項式

$$P_0(s) := s(s-1)\cdots(s-n+1) + b_{n-1}(0)s(s-1)\cdots(s-n+2) + \cdots + b_0(0)$$

を定義する.

定義 5.1.2. 方程式 $P_0(s) = 0$ の根, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を P の $x = 0$ での特性指数とよぶ.

半径 r の開円盤を $B_r = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| < r\}$ と書き, $\hat{\mathcal{O}}_0 = \mathbb{C}[[x]]$ で形式べき級数環を表すことにする. すると $\hat{\mathcal{O}}_0 \supset \mathcal{O}(B_r)$.

$\phi = \sum a_j x^j, \psi = \sum b_j x^j \in \hat{\mathcal{O}}_0$ に対し, ψ が ϕ の優級数であるとは

$$|a_j| \leq b_j$$

がすべての j で成り立つときにいう. このとき

$$\phi \ll \psi$$

と書く.

次の性質は基本的である.

補題 5.1.3. i) $\phi \ll \psi$ とする. このとき $\psi \in \mathcal{O}(B_r)$ ならば $\phi \in \mathcal{O}(B_r)$ となる.

ii) $\phi \in \mathcal{O}(B_r)$ と次は同値. 任意の $Cr > 1$ を満たす実数 $C > 0$ に対して $A_C > 0$ が存在して

$$\phi \ll \frac{A_C}{1-Cx} = \sum_{j=0}^{\infty} A_C (Cx)^j \in \hat{\mathcal{O}}_0.$$

問 5.1.4. 上の補題を示せ.

さて, $x = 0$ を確定特異点にもつ P に戻ろう.

補題 5.1.5. $P = P_0(\vartheta) - xR(x, \vartheta)$ と前のように書けているとする. $\deg P_0(s) = n > \text{ord } R$ に注意しておく. すべての j で $r_j(x) \in \mathcal{O}(B_r)$ となる $r > 0$ をとってくる. この時, $P_0(k) \neq 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) ならば

$$P: \mathcal{O}(B_r) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(B_r)$$

は全単射となる.

Proof. $f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j \in \hat{\mathcal{O}}_0$ に対して微分方程式 $Pu = f$ を考える. $u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j$ とおくと,

$$\begin{aligned} P_0(\vartheta) \sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j &= \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j + xR(x, \vartheta) \sum_{j=0}^{\infty} u_j x^j \\ \parallel & \qquad \qquad \qquad \parallel \\ \sum_{j=0}^{\infty} P_0(j) u_j x^j &= \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j + x \sum_{j=0}^{\infty} R(x, j) u_j x^j \end{aligned}$$

となるので両辺の各 x^j の係数を比較すれば u_j が帰納的に一意に決まることがわかる.

次に上で $f \in \mathcal{O}(B_r)$ ならば $u \in \mathcal{O}(B_r)$ となることを示す．逆は仮定と $\partial\mathcal{O}(B_r) \subset \mathcal{O}(B_r)$ より明らか．
仮定 $P_0(k) \neq 0$ より，ある $\epsilon > 0$ があって

$$|P_0(k)| \geq \epsilon \sum_{j=0}^n \prod_{\nu=1}^j (k+1-\nu)$$

とできる．また補題 5.1.3 より， $C_r > 1$ なる $C > 0$ に対して $A, B > 0$ があって

$$b_j(x) \ll \frac{A}{1-Cx} \quad (j=0, \dots, n-1)$$

$$f \ll \frac{B}{1-Cx}$$

とできる．ここで

$$xR(x, \vartheta) = \sum_{j=0}^{n-1} (b_j(0) - b_j(x)) x^j \partial^j, \quad b_j(0) - b_j(x) \ll \frac{A}{1-Cx} - A = \frac{ACx}{1-Cx}$$

に注意し，形式べき級数 $\hat{u} = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{u}_j x^j$ が

$$\epsilon \left(\sum_{j=0}^n x^j \partial^j \right) \hat{u} \gg \sum_{j=0}^{n-1} \frac{ACx}{1-Cx} x^j \partial^j \hat{u} + \frac{B}{1-Cx} \quad (5.2)$$

を満たすなら， $\hat{u} \gg u$ となることをまず示す．上の式から

$$\hat{u}_j \geq \left| \sum_{j=0}^{n-1} \frac{ACx}{1-Cx} x^j \partial^j \hat{u} + \frac{B}{1-Cx} \text{の } x^j \text{ の係数} \right|.$$

よって $\hat{u}_0 \geq |u_0|$ はすぐわかる．さらに $l \geq j$ に対して $\hat{u}_j \geq |u_j|$ が成り立つとすると，

$$\sum_{j=0}^l \hat{u}_j x^j \gg \sum_{j=0}^l u_j x^j$$

となる．すると

$$\frac{B}{1-Cx} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{ACx}{1-Cx} x^j \partial^j \sum_{k=0}^l \hat{u}_k x^k \gg f + xR(x, \vartheta) \sum_{k=0}^l u_k x^k$$

となる．ここで $\bar{\phi} \gg \phi, \bar{\psi} \gg \psi$ ならば $\bar{\phi} + \bar{\psi} \gg \phi + \psi, \bar{\phi}\bar{\psi} \gg \phi\psi, \vartheta\bar{\phi} \gg \vartheta\phi$ に注意しよう．これより， $\hat{u}_{l+1} \geq |u_{l+1}|$ を得る．よって帰納法より $\hat{u} \gg u$ が示された．よって最後に (5.2) を満たす \hat{u} をつくる．十分大きな N, L に対して

$$\hat{u} := \frac{L}{(1-Cx)^N}$$

とおくと，

$$\epsilon \sum_{j=1}^n x^j \frac{C^j(N)_j L}{(1-Cx)^{j+N}} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{ACx}{1-Cx} x^j \frac{C^j(N)_j L}{(1-Cx)^{j+N}} = \sum_{j=1}^n x^j \frac{\epsilon C^j(N)_j L - AC^j(N)_{j-1} L}{(1-Cx)^{j+N}} \gg 0,$$

$$\epsilon \frac{L}{(1-Cx)^N} \gg \frac{B}{1-Cx}$$

であるから，この \hat{u} は (5.2) を満たす．

□

系 5.1.6. 非負整数 m に対して $\mathcal{O}_{B_r}(\lambda, m) = \bigoplus_{j=0}^m \mathcal{O}(B_r) \cdot x^\lambda \log^j x$ とおく. 補題 5.1.5 の形の微分作用素 $P = P_0(\vartheta) - xR(x, \vartheta)$ に対して $P_0(\lambda + k) \neq 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) が満たされるなら以下の全単射が成り立つ.

$$P : \mathcal{O}_{B_r}(\lambda, m) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{B_r}(\lambda, m)$$

Proof. $P_\lambda = \text{Ad}(x^{-\lambda})P$ とおくと, $Pu = x^\lambda P_\lambda x^{-\lambda}u$, $P_\lambda = P_0(\vartheta + \lambda) + xR(x, \vartheta + \lambda)$ となるので, $\lambda = 0$ の場合に帰着される.

$\phi(x) \in \mathcal{O}(B_r)$ に対して $P_\lambda(\log^m x \cdot \phi(x)) \equiv P_\lambda(\phi(x)) \log^m x \pmod{\mathcal{O}_{B_r}(0, m-1)}$ が成り立つので, 補題 5.1.5 と m についての帰納法からわかる. \square

この補題 5.1.5 を用いると次がいえる.

定理 5.1.7 (Cauchy-Kowalevskaia^{*1}). 微分作用素

$$Q = \partial^n + \sum_{j=0}^{n-1} q_j(x) \partial^j \quad (q_j(x) \in \mathcal{O}(B_r))$$

に対して,

$$Q: \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(B_r) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}(B_r) \oplus \mathbb{C}^n \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ u & \longmapsto & (Qu, u(0), u'(0), \dots, u^{(n-1)}(0)) \end{array}$$

は全単射となる.

Proof. $P = Qx^n$ とおくと,

$$P = Qx^n = \sum_{j=0}^n q_j(x) \partial^j x^n = \sum_{j=0}^n q_j(x) (\vartheta + 1) \cdots (\vartheta + j) x^{n-j}$$

となり, P の特性指数は $-1, -2, \dots, -n$ である. よって補題 5.1.5 より全単射 $P: \mathcal{O}(B_r) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(B_r)$ が得られる. 従って $(f, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \in \mathcal{O}(B_r) \oplus \mathbb{C}^n$ に対して,

$$Qx^n w = f - Q\left(v_0 + \frac{x}{1!}v_1 + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}v_{n-1}\right)$$

を満たす $w \in \mathcal{O}(B_r)$ がある. ここで

$$u = x^n w + v_0 + \frac{x}{1!}v_1 + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}v_{n-1}$$

とおくと, $(Qu, u(0), \dots, u^{(n-1)}(0)) = (f, v_0, \dots, v_{n-1})$ となる. 一方 $u \in \mathcal{O}(B_r)$ に対して $u^{(j)}(0) = 0$ ($j = 0, \dots, n-1$) ならば $u = x^n w$ なる $w \in \mathcal{O}(B_r)$ がある. さらに $Qu = 0$ とすると $Pw = Qx^n w = Qu = 0$ となって $w = 0$, つまり $u = 0$ を得る. \square

^{*1} Cauchy-Kowalevskaia の定理は, より一般に線型偏微分作用素に対するものであるが, その証明はここに述べたと同じようにできる (たとえば [O7] にある). より一般の場合が [O1] で扱われている

定理 5.1.8. 微分作用素 P は $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の連結開集合 U で定義されていて, U 内に特異点を持たないとする. U 内の点 x_0 での $Pu = 0$ の局所正則解 $u(x)$ は, x_0 を始点とする U 内の任意の曲線 γ に沿って解として解析接続できる.

Proof. 解析接続の一意性から, 解析接続した結果も同じ方程式の解であることは明らか.

曲線を $\gamma: [0, 1] \rightarrow U, t \mapsto \gamma(t)$ と表示する. γ に沿って, $0 \leq t < t_0$ まで解析接続されるが, $t = t_0$ までは解析接続できない $0 < t_0 < 1$ があったとする. $|x - t_0| < r \Rightarrow x \in U$ となるよう $r > 0$ を選び, $t_1 \leq t \leq t_0 \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \frac{r}{3}$ を満たすように $0 < t_1 < t_0$ となる t_1 をとる. u を $t = t_1$ まで解析接続して得られた関数を u_1 とおくと, $Pv = 0$ の解で $v^{(j)}(\gamma(t_1)) = u_1^{(j)}(\gamma(t_1))$ ($j = 0, \dots, n-1$) を満たすものは一意にあって, それは, 前定理より少なくとも $\gamma(t_1)$ の $\frac{2r}{3}$ 近傍で正則であり $\gamma(t_1)$ の近傍で u_1 と一致する. これは $u(t)$ が γ に沿って $\gamma(t_0)$ まで解析接続可能なことを意味するので, 矛盾. \square

特性指数と局所解の関係について少し復習しておこう. 階数 n の微分方程式 $Pu = 0$ が $x = 0$ で確定特異点を持つとし, そこでの特性指数を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ としよう. このとき次が成り立つ.

定理 5.1.9. i) $1 \leq i < j \leq n$ なるすべての i, j に対して $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}$ ならば, 微分方程式の解として

$$x^{\lambda_j} \phi_j \quad (\phi_j \in \mathcal{O}_0, \phi_j(0) \neq 0, j = 1, 2, \dots, n)$$

なるものがとれる.

ii) より一般に

$$\lambda_j - \lambda_1 \begin{cases} = 0 & (1 \leq j \leq k), \\ \in \mathbb{Z}_{>0} & (k < j \leq m), \\ \notin \mathbb{Z}_{\geq 0} & (m < j \leq n) \end{cases}$$

とすると*2, 解として次を満たす $u_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, \dots, k-1$) がとれる:

$$u_\nu - x^{\lambda_1} \log^\nu x \in \mathcal{O}_{B_r}(\lambda_1 + 1, m - 1).$$

従って, 互いに異なるものを選んだ特性指数の代表系の集合を $\{\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_q\}$ とし, 各 $\bar{\lambda}_i$ の重複度を m_i とおくと, $n = m_1 + \dots + m_N$ であって

$$\bar{u}_{i,\nu} - x^{\bar{\lambda}_i} \log^\nu x \in \mathcal{O}_{B_r}(\bar{\lambda}_i + 1, n - 1) \quad (0 \leq \nu < m_i, i = 1, \dots, q) \quad (5.3)$$

を満たす独立解の基底 $\tilde{u}_{i,\nu}$ ($0 \leq \nu < m_i, i = 1, \dots, q$) が $x = 0$ の近傍で存在する.

Proof. $P = P_0(\vartheta) - xR(x, \vartheta)$ の形としてよい.

i) $P' = x^{-\lambda_j-1} \circ P \circ x^{\lambda_j+1}$ とおくと, $P' = P_0(\vartheta + \lambda_j + 1) - xR(x, \vartheta + \lambda_j + 1)$ も $x = 0$ を確定特異点とし, $\lambda_\nu - \lambda_j - 1$ ($\nu = 1, \dots, n$) が特性指数である. $P_0(\vartheta)$ は $\vartheta + 1 = \partial x$ を因子に持ち, $xR(x, \vartheta + \lambda_j + 1) = R(x, \vartheta + \lambda_j)x$ であるから, $\mathcal{O}(B_r)$ の元を係数とする微分作用素 Q によって $P' = Qx$ となる. P' は補題 5.1.5 の仮定を満たすので, $P'w = Q1$ を満たす $w \in \mathcal{O}(B_r)$ が存在し,

$$P(x^{\lambda_j}(1-xw)) = x^{\lambda_j+1} \circ Qx \circ x^{-\lambda_j-1}(x^{\lambda_j}(1-xw)) = x^{\lambda_j+1}Q(1-xw) = x^{\lambda_j+1}(Q1 - P'w) = 0.$$

*2 $\mathbb{Z}_{>0} := \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ とする

ii) $x^{-\lambda_1} \circ P \circ x^{\lambda_1}$ を考えれば, $\lambda_1 = 0$ としてよい.

仮定から $P_0(\vartheta) = \vartheta^k(\vartheta - \lambda_{k+1}) \cdots (\vartheta - \lambda_n)$ である. そこで $0 \leq j < k$ を満たす j を固定して考えると, $P_0(\vartheta) \log^j x = 0$ となることから $P \log^j x = P_0(\vartheta) \log^j x - xR(x, \vartheta) \log^j x \in \mathcal{O}_{B_r}(1, j)$ がわかる.

$Pu = 0$ の解を $u \in \mathcal{O}_{B_r}(0, m)$ の中から

$$P_0(\vartheta) \left(\log^j x + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^m u_{i,\nu} x^i \log^\nu x \right) = xR(x, \vartheta) \left(\log^j x + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^m u_{i,\nu} x^i \log^\nu x \right)$$

の形でみつけることを考える. この $u_{i,j} \in \mathbb{C}$ は, 両辺を比較して i の小さなものから順に決めていく. 実際, $Q = q(\vartheta)(\vartheta - \lambda)^l$ で $q(s)$ は $q(\lambda) \neq 0$ なる多項式とすると,

$$Q: \sum_{j=0}^{n+l} \mathbb{C} x^\lambda \log^j x \rightarrow \sum_{j=0}^n \mathbb{C} x^\lambda \log^j x, \quad f \mapsto Qf$$

は全射となることから, 任意の正整数 N に対して $1 \leq i \leq N$ のときの $u_{i,\nu} \in \mathbb{C}$ を順に決めて

$$Pu_N \in \mathcal{O}_{B_r}(N+1, m), \quad u_N := \log^j x + \sum_{i=1}^N \sum_{\nu=0}^m u_{i,\nu} x^i \log^\nu x$$

とすることができる. $N = \max\{0, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m\}$ とすると, 系 5.1.6 から, $Pu_N = Pv$ となる $v \in \mathcal{O}_{B_r}(N+1, m)$ の存在がわかり, $u = u_N - v$ が $Pu = 0$ を満たす. \square

5.2 Fuchs 型微分方程式

微分方程式 $Pu = 0$ が $x = \infty$ で確定特異点を持つとは, $x \mapsto \frac{1}{x}$ と変換したときに原点で確定特異点を持つこととする. さて $P \in W(x)$ の $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ での特異点がすべて確定特異点であるとき微分作用素 P と微分方程式 $Pu = 0$ を Fuchs 型とよぶことにする. また, $\bar{\mathbb{C}}$ から P の特異点の集合 $\{c_0, c_1, \dots, c_p\} \subset \bar{\mathbb{C}}$ を除いてできる集合を $\bar{\mathbb{C}}' := \bar{\mathbb{C}} \setminus \{c_0, c_1, \dots, c_p\}$ とかく. このとき微分方程式 P は次のような写像を定義する:

$$\mathcal{F}: \bar{\mathbb{C}}' \supset U (\text{単連結な領域}) \mapsto \mathcal{F}(U) \subset \mathcal{O}(U),$$

ここで $\mathcal{F}(U) := \{u(x) \in \mathcal{O}(U) \mid Pu(x) = 0\}$ とする. さらに特異点 $\{c_0, c_1, \dots, c_p\}$ の近傍として,

$$U_{j,\epsilon,R} = \begin{cases} \{c_j + re^{\sqrt{-1}\theta} \mid 0 < r < \epsilon, R < \theta < R + 2\pi\} & (c_j \neq \infty), \\ \{re^{\sqrt{-1}\theta} \mid r > \epsilon^{-1}, R < \theta < R + 2\pi\} & (c_j = \infty) \end{cases}$$

を定義する. このとき \mathcal{F} は次を満たす.

1. $\mathcal{F}(U) \subset \mathcal{O}(U)$ であり, $\dim \mathcal{F}(U) = \text{ord } P$.
2. $V \subset U \Rightarrow \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(U)|_V = \{f|_V \in \mathcal{O}(V) \mid f \in \mathcal{F}(U)\}$
3. 特異点 c_j に対して $\epsilon > 0$ があって次が成り立つ. 任意の $\phi \in \mathcal{F}(U_{j,\epsilon,R})$ に対し, ある正数 C と正整数 m があって,

$$|\phi(x)| < \begin{cases} C|x - c_j|^{-m} & (c_j \neq \infty, x \in U_{j,\epsilon,R}), \\ C|x|^m & (c_j = \infty, x \in U_{j,\epsilon,R}) \end{cases}$$

が任意の $R \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ .

このような条件を満たす (有限個の特異点を持つ多価の) 正則関数の空間 \mathcal{F} の全体は, $W(x)$ の作用で閉じていることが以下の補題からわかる .

補題 5.2.1. $B_r^+ := \{x \in B_r \mid \operatorname{Im} x > 0\}$ とおくととき, $\psi \in \mathcal{O}(B_r^+)$ がある整数 m に対して

$$|\psi(x)| \leq C|x|^{-m} \quad (x \in B_r^+)$$

を満たすならば, 以下の評価が成り立つ .

$$|\psi'(x)| \leq 2^{|m|+1} C x^{-(m+1)} \quad (0 < x < \frac{r}{2})$$

Proof. $0 < x < \frac{r}{2}$ とすると

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{|t-x|=\frac{r}{2}} \frac{\psi(t)dt}{t-x}$$

であるから

$$|\psi'(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|t-x|=\frac{r}{2}} \frac{\psi(t)dt}{(t-x)^2} \right| \leq \max_{|t-x|=\frac{r}{2}} |\psi(t)| \frac{2}{x} \leq 2^{|m|+1} C x^{-(m+1)}. \quad \square$$

さらに次がいえる .

定理 5.2.2. Fuchs 型常微分方程式と解空間の対応

$$\begin{aligned} \{W(x)P \subset W(x) : \text{Fuchs 型}\} &\xrightarrow{\sim} \{ \text{上の条件 1~3 を満たす } \mathcal{F} \} \\ \cup &\qquad \cup \\ P = \partial^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\partial^i &\mapsto \{U \mapsto \{u \in \mathcal{O}(U) \mid Pu = 0\}\} \end{aligned}$$

は全単射 . $\mathcal{F}(U) = \sum_{\nu=1}^n \mathbb{C}\phi_\nu(x)$ とかけているとすると,

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \phi_1^{(0)}(x) & \cdots & \phi_n^{(0)}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1^{(i-1)}(x) & \cdots & \phi_n^{(i-1)}(x) \\ \phi_1^{(i+1)}(x) & \cdots & \phi_n^{(i+1)}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1^{(n)}(x) & \cdots & \phi_n^{(n)}(x) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

としたとき,

$$a_i(x) = (-1)^{n-i} \frac{\det \Phi_i}{\det \Phi_n}$$

と書ける .

証明の概略. $\phi_\nu(x)$ ($\nu = 1, \dots, n$) は $\mathcal{F}(U)$ の基底なので, 任意の $u(x) \in \mathcal{F}(U)$ に対し,

$$\det \begin{pmatrix} u & \phi_1 & \cdots & \phi_n \\ u^{(1)} & \phi_1^{(1)} & \cdots & \phi_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u^{(n)} & \phi_1^{(n)} & \cdots & \phi_n^{(n)} \end{pmatrix} = 0$$

となる．1 列目に関する余因子展開が $u(x)$ の満たす微分方程式を与える．これが Fuchs 型であることを確かめればよい．特異点 c_j のまわりを反時計回りに回るループを γ_j とおき， Φ_i をループ γ_j にそって解析接続したものを $\gamma_j \Phi_i$ とかこう． $\gamma_j \phi_1, \dots, \gamma_j \phi_n \in \mathcal{F}(U)$ であり， ϕ_1, \dots, ϕ_n は $\mathcal{F}(U)$ の基底なので， $M_j \in GL(n, \mathbb{C})$ があって，

$$\gamma_j \Phi_i = \Phi_i M_j$$

となる．ここで解析接続は微分と可換なので， M_j は Φ_i ($i = 1, \dots, n$) によらないことに注意しよう．両辺の行列式を比べると

$$\gamma_j \det \Phi_i = \det M_j \det \Phi_i$$

となるので， $\det M_j = e^{-2\pi i \lambda}$ なる $\lambda \in \mathbb{C}$ をとると，

$$\gamma_j ((x - c_j)^\lambda \det \Phi_i) = (x - c_j)^\lambda \det \Phi_i.$$

従って， $(x - c_j)^\lambda \det \Phi_i$ は $x = c_j$ に高々極を持つことがわかる．すなわち， $\det \Phi_i$ は，ある $\psi_j \in \mathcal{O}_{c_j}$ と $k_i \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ があって $\det \Phi_i = (x - c_j)^{-\lambda + k_i} \psi_j$ ．従って， $\det \Phi_i$ と $\det \Phi_n$ の商をとれば $(x - c_j)^{-\lambda}$ の項は打ち消されるので， $a_i(x)$ も $x = c_j$ に高々極を持つことがわかる．最後に $x = c_j$ が確定特異点であることと，すべての解が条件 3 を満たすことが同値であることに注意すれば (cf. 問 5.2.4)，定理が従う．□

$c_0, \dots, c_p \in \bar{\mathbb{C}}$ を特異点にもつ階数 n の Fuchs 型微分方程式 $Pu = 0$ に対して，特異点でない点 $x_0 \in \bar{\mathbb{C}}'$ を取り，その点のまわりの局所解のなすベクトル空間を V_0 とかき， V_0 の基底を ϕ_1, \dots, ϕ_n とする． x_0 を基点として特異点 c_j のまわりを反時計回りに回るループを γ_j とし， ϕ_i 達をこのループに沿って解析接続したものを $\gamma_j \phi_i \in V_0$ と書こう．これにより， V_0 の線型自己同型が得られ，それを基底 ϕ_1, \dots, ϕ_n で書けば，

$$\begin{array}{ccc} V_0 & \longrightarrow & V_0 \\ \Psi & & \Psi \\ v & \mapsto & \gamma_j v \end{array} \quad (\gamma_j \phi_1, \dots, \gamma_j \phi_n) = (\phi_1, \dots, \phi_n) M_j$$

なる $M_j \in GL(n, \mathbb{C})$ が得られる．これら M_j を集めて $M = (M_0, \dots, M_n)$ とかき， $Pu = 0$ のモノドロミー^{*3}という．

Fuchs 型方程式の特異点であってもそこでのモノドロミー行列が単位行列になることがある．その点の近傍では正則な解が解の基底を張っているが，解の Wronskian すなわち $\det \Phi_n(x)$ がその点で消えている場合にはこのようなことが起こり，そのような特異点を見かけの特異点という．見かけの特異点における特性指数の集合は $\{k_1, \dots, k_n\}$ の形をしている．すなわち，各 k_j は $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n$ を満たす非負整数となる．特に $k_n = n - 1$ ならばその点は特異点ではない．

定理 5.2.2 から，直ちに次の結果がわかる^{*4}．

系 5.2.3. n 階の Fuchs 型微分方程式 $Pu = 0$ に対して以下の条件は同値．

1. P は既約．

^{*3} 基底の選び方によるので， M の $GL(n, \mathbb{C})$ 共役類といった方がよいかもしれない

^{*4} Airy の微分方程式の例からわかるように，不確定特異点も許すと一般には正しくない

2. 解空間のモノドロミー $M = (M_0, \dots, M_p)$ は既約, すなわち $M_j V \subset V$ ($j = 0, \dots, p$) となる \mathbb{C}^n の部分空間 V は $\{0\}$ と \mathbb{C}^n のみ.
3. 解空間に対応する \mathcal{F} は, 同様なより次元の少ない \mathcal{F}' (すなわち, $\{0\} \subsetneq \mathcal{F}'(U) \subsetneq \mathcal{F}(U)$ を満たすもの) を持たない.

問 5.2.4. 記号を簡単にするため一次分数変換を行なって $c_j = 0$ とする.

- i) 可逆な n 次正方行列 M に対し, $\exp L := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{L^\nu}{\nu!} = M$ となる行列 L の存在を示せ.
- ii) \mathcal{F} の基底 $u = (u_1, \dots, u_n)$ が特異点 $c_j = 0$ の周りで定義するモノドロミー行列を M とするとき, i) の L を用いて $v = ux^{-L}$, $x^{-L} := \exp(-L \log x)$ とおくと, v の成分は c_j の近傍で一価で c_j を高々極とすることを示せ.
- iii) 特異点 $c_j = 0$ の近傍での \mathcal{F} の基底が (5.3) のように取れることを示せ.
- iv) このとき $x^{n-i} \frac{a_i(x)}{a_n(x)}$ は $x = 0$ を除去可能な特異点を持つことを示し, 拡張した正則関数の $x = 0$ での値を求めよ.

以下の定理に述べるように, Fuchs 型微分方程式の左 $W(x)$ 加群として同型類はモノドロミーの共役類*5と 1 対 1 に対応する.

定理 5.2.5. $P, Q \in W(x)$ を Fuchs 型微分作用素とする. このとき $W(x)/W(x)P$ と $W(x)/W(x)Q$ が $W(x)$ 加群として同型であることと, $Pu = 0$ と $Qv = 0$ において, モノドロミー行列が単位行列とならない特異点の位置が同じで, モノドロミーが共役であることは同値である.

注意 5.2.6. $P = \partial^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\partial^i \in W(x)$ で定まる微分方程式 $PY = 0$ に対し

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad A_P(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \cdots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

としたときに一階の連立系 $\frac{d}{dx}Y = A_P(x)Y$ が得られる. さて P と $W(x)$ 加群 $W(x)/W(x)P$ との関係は前にみたが, 上の連立系とこの $W(x)$ 加群の関係を見てみよう.

$Pu = 0$ を満たす生成元 $u \in W(x)/W(x)P$ より, $W(x)/W(x)P$ は $\mathbb{C}(x)$ ベクトル空間として $u, \partial u, \dots, \partial^{n-1}u$ によって生成される. 従って ∂ の $W(x)/W(x)P$ への作用をこの基底によって成分が $\mathbb{C}(x)$ の列ベクトル $v \in W(x)/W(x)P$ に対する作用として書けば

$$\partial v = {}^t A_P(x)v$$

と行列表示できる. 従って $W(x)/W(x)P$ への ∂ の作用の行列表示は P から得られる連立系の転置行列として書けることがわかる*6.

*5 見かけの特異点のように単位元となるモノドロミー行列とその特異点は除いて, 共役類を考える

たとえば, $(x-2)F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ の満たす方程式は, $x=2$ に見かけの特異点を持つ

6 $M_P = W(x)/W(x)P$ とかき, M_P の双対ベクトル空間 M_P^ を $f \in M_P^*$ に対し, $\partial \circ f(m) = f(\partial m)$ ($m \in M_P$) として右 $W(x)$ 加群とみることができる. すると上の注意から M_P^* への ∂ の行列表示は $\{u, \partial u, \dots, \partial^{n-1}u\}$ の双対基底をと

定理の証明. $W(x)/W(x)P$ と $W(x)/W(x)Q$ が同型ということは, $\mathbb{C}(x)$ ベクトル空間としても同型なので,

$$\dim_{\mathbb{C}(x)} W(x)/W(x)P = \dim_{\mathbb{C}(x)} W(x)/W(x)Q = n.$$

$Py = 0$ から上記の注意のように $\mathbb{C}(x)$ ベクトル空間の基底を取ってできる連立系を

$$\partial Y = A(x)Y, \quad (5.5)$$

同様に $Qz = 0$ に対応する微分方程式を

$$\partial Z = B(x)Z \quad (5.6)$$

と書いておこう. このとき $W(x)/W(x)P$ と $W(x)/W(x)Q$ が $W(x)$ 加群として同型であるということは, その同型は $\mathbb{C}(x)$ ベクトル空間としての同型でもあるので, $G(x) \in GL(n, \mathbb{C}(x))$ によって $Z = G(x)Y$ として与えられ, $\partial Y = A(x)Y$ を満たすということと $Z = G(x)Y$ が $\partial Z = B(x)Z$ を満たすということが同値であることを意味する.

言い換えれば, 方程式の特異点を含まない任意の単連結開集合 $U \subset \bar{\mathbb{C}}'$ に対して, 方程式 (5.5) の解の基底 $y_1, \dots, y_n \in (\mathcal{O}(U))^n$ と, 方程式 (5.6) の解の基底 $z_1, \dots, z_n \in (\mathcal{O}(U))^n$ を適当に (同型に応じて) 取ったとき, $Y = (y_1 \cdots y_n) \in GL(n, \mathcal{O}(U))$, $Z = (z_1 \cdots z_n) \in GL(n, \mathcal{O}(U))$ とおくと

$$ZY^{-1} \in GL(n, \mathbb{C}(x))$$

となることである.

一方で特異点 c_j を回るループ γ_j に対して

$$\gamma_j Y = Y M_j, \quad \gamma_j Z = Z N_j$$

なる $M_j, N_j \in GL(n, \mathbb{C})$ が決まるが,

$$\begin{aligned} ZY^{-1} \in GL(n, \mathbb{C}(x)) &\Leftrightarrow \gamma_j ZY^{-1} = ZY^{-1} \quad (j = 0, \dots, p) \\ &\Leftrightarrow ZN_j M_j^{-1} Y^{-1} = ZY^{-1} \quad (j = 0, \dots, p) \\ &\Leftrightarrow M_j = N_j \quad (j = 0, \dots, p) \end{aligned}$$

となって定理の主張が従う. □

5.3 一般化特性指数

特性指数は特性方程式の根として定義されたが, 特性指数間に整数差がある場合は, 特性指数のみからでは解の局所的な性質 (局所モノドロミー) は一般にはわからない. 例えば, $x = 0$ に確定特異点をもつ 3 階の微分方程式 $P_\varepsilon u = 0$, $P_\varepsilon = \vartheta(\vartheta - \frac{1}{2})(\vartheta - 1) - \varepsilon x - x^2$ ($\varepsilon = 0, 1$) は特性指数 $0, \frac{1}{2}, 1$ を持つ. この独立解は特性指数 $\frac{1}{2}$ と 1 に対する

$$x^{\frac{1}{2}}(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots), \quad x(1 + b_1 x + b_2 x + \cdots)$$

れば $A_P(x)$ そのものである. また $W(x)$ の作用をもつ関数空間 \mathcal{F} に関して, $Pu = 0$ の \mathcal{F} での解は $\text{Hom}_{W(x)}(M_P, \mathcal{F})$ と同一視できたが, $\text{Hom}_{W(x)}(M_P, \mathcal{F}) \subset \text{Hom}_{\mathbb{C}(x)}(M_P, \mathcal{F}) \cong M_P^* \otimes_{\mathbb{C}(x)} \mathcal{F}$ より $\text{Hom}_{W(x)}(M_P, \mathcal{F}) \cong \{u \otimes f \in M_P^* \otimes \mathcal{F} \mid \partial u \otimes f = u \otimes \partial f\}$. 従って ∂ は解空間には $A_P(x)$ で作用していることがわかる

の形のもの、0 に対する

$$\begin{cases} 1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots & (\varepsilon = 0), \\ 1 + 2x \log x + (c_2 + c'_2 \log x)x^2 + (c_3 + c'_2 \log x)x^2 + \cdots & (\varepsilon = 1) \end{cases}$$

の形のを併せると得られる。ε = 0 と 1 に応じて、局所モノドロミーは

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & 4\pi i \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

と特性指数が同じでも局所モノドロミーは一般には異なる。

この節では特性指数に整数差がある場合に局所モノドロミーが対角化可能となるような条件を考えてみよう*7。

補題 5.3.1. \mathcal{O}_0 を係数とする微分作用素

$$P = a_n(x)\partial^n + a_{n-1}(x)\partial^{n-1} + \cdots + a_0(x) \quad (5.7)$$

が $x = 0$ を確定特異点を持つとする。また、最高階の係数 $a_n(x)$ は $x = 0$ で丁度 n 位の零点を持つとする。すなわち、

$$a_n(0) = \cdots = a_n^{(n-1)}(0) = 0, \quad a_n^{(n)}(0) \neq 0. \quad (5.8)$$

この時、 k を $0 \leq k \leq n$ なる整数として、次は同値。

1. \mathcal{O}_0 係数の微分作用素 R があって、 $P = x^k R$.
2. $Px^\nu = o(x^{k-1})$
が $\nu = 0, 1, \dots, k-1$ に対して成り立つ。
3. 微分方程式 $Pu = 0$ は $\nu = 0, 1, \dots, k-1$ に対して $u(x) = x^\nu + o(x^{k-1})$ なる解をもつ。
4. P を

$$P = \sum_{j \geq 0} x^j p_j(\vartheta)$$

と x と ϑ の多項式 $p_j(\vartheta)$ で書き直すと、

$$p_j(\nu) = 0$$

が $0 \leq \nu < k - j, j = 0, \dots, k-1$ に対して成り立つ。

注意 5.3.2. 条件 4 で $\nu = 0, 1, \dots, k-1$ 以外に $p_0(\nu) = 0$ の非負整数解がないと、特性指数は $0, 1, \dots, k-1$ と整数差をもつが条件 3 の解は \log 項を持たないことも容易に確かめられる。

Proof. $1 \Rightarrow 2, 2 \Leftrightarrow 3$ は明らかだろう。4 $\Leftrightarrow 2$ を示す。 $Px^\nu = \sum_{j \geq 0} x^j p_j(\vartheta)x^\nu = \sum_{j \geq 0} x^{j+\nu} p_j(\nu)$ 。よって「 $j + \nu < k$ ならば $p_j(\nu) = 0$ 」は「 $Px^\nu = o(x^{k-1})$ 」と同値である。最後に $2 \Rightarrow 1$ を示す。

$$P1 = o(x^{k-1}), Px = o(x^{k-1}), \dots, Px^{k-1} = o(x^{k-1})$$

*7 上の例では、 $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ のときは対角化可能でない

より, $j = 0, \dots, k-1$ に対し, $b_j(x) \in \mathcal{O}_0$ があって $a_j(x) = x^k b_j(x)$ と書ける. また $x = 0$ が確定特異点であることから, $j = k, k+1, \dots, n$ においても $b_j(x) \in \mathcal{O}_0$ があって, $a_j(x) = x^k b_j(x)$ となる. \square

定義 5.3.3. \mathcal{O}_0 の元を係数にもつ n 階の微分作用素 $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial^i$ が $x = 0$ に確定特異点を持つとしよう. このとき P が $x = 0$ で (一般化) 特性指数 $[\lambda]_{(k)}$ を持つとは, $x^{n-k} \text{Ad}(x^{-\lambda})(a_n(x)^{-1} P) \in W[x]$ となるときにいう.

補題 5.3.1 からわかるように, P が $x = 0$ で特性指数 $[\lambda]_{(k)}$ を持つことと, ある多項式 $q_l(x)$ に対して

$$x^n a_n(x)^{-1} P = \sum_{l \geq 0} x^l q_l(\vartheta) \prod_{0 \leq i < k-l} (\vartheta - \lambda - i)$$

と書けることは同値である.

注意 5.3.4. n 階の方程式が $x = 0$ で特性指数 $[0]_{(n)}$ を持つという条件は, $x = 0$ が特異点でないことを意味する. 場合によっては, 方程式の特異点でない点も特性指数が $[0]_{(n)}$ の確定特異点とみなすと議論や命題の記述が統一化されてわかりやすくなることがある.

定義 5.3.5 (一般化特性指数). \mathcal{O}_0 の元を係数に持つ n 階の微分作用素 P に対し, $n = m_1 + \dots + m_q$ を満たす正整数 m_i を考え, さらに複素数 $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ をとってくる. このとき P が $x = 0$ で一般化特性指数 $\{[\lambda_1]_{(m_1)}, \dots, [\lambda_q]_{(m_q)}\}$ をもつとは,

$$x^n a_n(x)^{-1} P = \sum_{l \geq 0} x^l q_l(\vartheta) \prod_{\nu=1}^q \prod_{0 \leq i < m_\nu - l} (\vartheta - \lambda_\nu - i)$$

と書けるときにいう^{*8}. さらにこのとき $\{m_1, \dots, m_q\}$ を P の $x = 0$ でのスペクトル型という.

$x = c$ が確定特異点である場合にも同様に $x = c$ での一般化特性指数が定義される.

P が $x = 0$ で特性指数 $[\lambda]_{(m)}$ を持つとすると, $m = 1$ ならば古典的な意味での解の特性指数に対応し, $m \geq 2$ の場合は補題 5.3.1 の 3 より, 整数差の特性指数 $\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + m - 1$ を持つが (少なくとも $x^{\lambda+m-1}$ 以下の項に) \log 項を持たない解が存在することがわかる.

各特異点での一般化特性指数を集めて次のような図式を導入しよう.

定義 5.3.6 (一般化 Riemann 図式). Fuchs 型の微分作用素 $P \in W[x]$ を考え, その確定特異点を $c_0 = \infty, c_1, \dots, c_p$ としよう. 各特異点 $x = c_j$ で P は特性指数 $\{[\lambda_{j,1}]_{(m_{j,1})}, \dots, [\lambda_{j,n_j}]_{(m_{j,n_j})}\}$ を持つとする. この時図式

$$\{\lambda_{\mathbf{m}}\} := \left\{ \begin{array}{cccc} x = c_0 & c_1 & \cdots & c_p \\ [\lambda_{0,1}]_{(m_{0,1})} & [\lambda_{1,1}]_{(m_{1,1})} & \cdots & [\lambda_{p,1}]_{(m_{p,1})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\lambda_{0,n_0}]_{(m_{0,n_0})} & [\lambda_{1,n_1}]_{(m_{1,n_1})} & \cdots & [\lambda_{p,n_p}]_{(m_{p,n_p})} \end{array} \right\} \quad (5.9)$$

を (一般化) Riemann 図式 (generalized Riemann scheme) と呼ぶ.

^{*8} P が (5.8) を満たすときは, $P = \sum_{l \geq 0} x^l q_l(\vartheta) \prod_{\nu=1}^q \prod_{0 \leq i < m_\nu - l} (\vartheta - \lambda_\nu - i)$ と表せるという条件と同じ

定義 5.3.7 (スペクトル型). $P \in W[x]$ が上記の Riemann 図式を持つとする. このとき, 特性指数の重複度を集めてできる n の分割の $(p+1)$ 個の組

$$\mathbf{m} := (m_{01}, \dots, m_{0,n_0}; m_{1,1}, \dots, m_{1,n_1}; \dots)$$

を P のスペクトル型と呼ぶ.

例えば P の特性指数が

$$\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'} \notin \mathbb{Z} \quad (\nu \neq \nu')$$

を満たしている場合は局所モノドロミーは対角化可能 (semi-simple) となる.

定理 5.3.8 (Fuchs の関係式). 特性指数たちは次の関係式を満たす.

$$\sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} \sum_{i=0}^{m_{j,\nu}-1} (\lambda_{j,\nu} + i) = \frac{(p-1)n(n-1)}{2} \quad (5.10)$$

Proof. ∂^n の係数を 1 と正規化すると P は

$$P = \partial^n - \sum_{j=1}^p \frac{a_j}{x - c_j} \partial^{n-1} + \text{低階項}$$

の形をしていることがわかる ($a_j \in \mathbb{C}$). なお $x = \infty$ は高々確定特異点であるから ∂^{n-1} の係数は $x = \infty$ で 0 となることに注意. 有限の特異点 c_j における特性指数は, c_j を原点に平行移動することにより, $c_j = 0$ として計算できる. このときの $x^n P$ の形を見ると

$$\begin{aligned} x^n \partial^n - a_j x^{n-1} \partial^{n-1} &= \vartheta(\vartheta - 1) \cdots (\vartheta - n + 1) - a_j \vartheta(\vartheta - 1) \cdots (\vartheta - n + 2) \\ &= \vartheta^n - \left(\frac{(n-1)n}{2} + a_j \right) \vartheta^{n-1} + \text{低階項} \end{aligned}$$

となることから, c_j における特性指数の和は

$$\sum_{\nu=1}^{n_j} \sum_{i=0}^{m_{j,\nu}-1} (\lambda_{j,\nu} + i) = a_j + \frac{(n-1)n}{2} \quad (1 \leq j \leq p)$$

を満たすことがわかる. 一方 $c_0 = \infty$ においては, $y = x^{-1}$ の変数変換で ϑ は $-\vartheta_y$ に変換され,

$$\begin{aligned} x^n \partial^n - \sum_{j=1}^p a_j x^{n-1} \partial^{n-1} &= \vartheta(\vartheta - 1) \cdots (\vartheta - n + 1) - \sum_{j=1}^p a_j \vartheta(\vartheta - 1) \cdots (\vartheta - n + 2) \\ &= (-1)^n \left(\vartheta_y^n + \left(\frac{(n-1)n}{2} + \sum_{j=1}^p a_j \right) \vartheta_y^{n-1} \right) + \text{低階項} \end{aligned}$$

となることから, $c_0 = \infty$ における特性指数の和は

$$\sum_{\nu=1}^{n_0} \sum_{i=0}^{m_{0,\nu}-1} (\lambda_{0,\nu} + i) = - \sum_{j=1}^p a_j - \frac{(n-1)n}{2}$$

となる. これらをすべて辺々加えると Fuchs の関係式が得られる. □

例 5.3.9. Gauss の超幾何方程式のスペクトル型は $(1, 1; 1, 1; 1, 1)$ であるが, 次のようにも表す.

$$11; 11; 11 \quad \text{または} \quad 11, 11, 11 \quad \text{または} \quad 1^2; 1^2; 1^2$$

第 10 章 3 節で詳しく扱う一般超幾何方程式 (一般超幾何級数 ${}_nF_{n-1}$ の満たす方程式) では

$$(n-1)1; 1^n; 1^n$$

また, Jordan-Pochhammer 方程式では

$$\overbrace{(n-1)1; (n-1)1; \dots}^{(n+1) \text{ 組}}$$

となる.

5.4 正整数の分割の組

上で定義したスペクトル型は微分方程式の階数を n としたときの n の分割を各特異点の周りで与えている. さてここでは一般に与えられた n の分割の組に対していくつかの概念を定義しよう.

定義 5.4.1. $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})_{\substack{j=0,1,\dots \\ \nu=1,2,\dots}}$ を非負整数 $m_{j,\nu}$ の集合としよう. \mathbf{m} が

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} m_{j,\nu} &= n \quad (j = 0, 1, \dots), \\ m_{j,1} &= n \quad (j > p) \end{aligned}$$

を満たすとき, \mathbf{m} を n の分割の $(p+1)$ 個の組とよぶことにする. またこのとき, ある正整数 n_j があって $\nu \geq n_j$ ならば $m_{j,\nu} = 0$ であるからこれらを見捨て, $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})_{\substack{j=0,\dots,p \\ \nu=1,\dots,n_j}}$ と有限個の成分でしばしば記述する.

また, n の分割の $(p+1)$ 個の組がモノトーンであるとは,

$$m_{j,\nu} \geq m_{j,\nu+1}$$

がすべての $j = 0, 1, \dots, \nu = 1, 2, \dots$ で成り立つときにいう. さらに $(m_{j,\nu})_{\substack{j=0,1,\dots \\ \nu=1,2,\dots}}$ の最大公約数を $\gcd \mathbf{m}$ と書くことにする. このとき \mathbf{m} が素とは $\gcd \mathbf{m} = 1$ となることをいう.

n の分割の $(p+1)$ 個の組全体の集合を $\mathcal{P}_{p+1}^{(n)}$ と表すことにして, これらの集まりを

$$\mathcal{P}_{p+1} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{p+1}^{(n)}, \quad \mathcal{P}^{(n)} = \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathcal{P}_{p+1}^{(n)}, \quad \mathcal{P} = \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathcal{P}_{p+1}$$

と書くことにしよう. \mathbf{m} が $\mathcal{P}^{(n)}$ の元であるとき, \mathbf{m} の位数を

$$\text{ord } \mathbf{m} = n$$

と定義する．さらに， $\mathbf{m}, \mathbf{m}' \in \mathcal{P}_{p+1}$ に対し，

$$\text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{m}') := \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{\infty} m_{j,\nu} m'_{j,\nu} - (p-1) \text{ord } \mathbf{m} \cdot \text{ord } \mathbf{m}'$$

を定義し，特に $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$ のとき $\text{idx } \mathbf{m} = \text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{m})$ と書いて \mathbf{m} の rigidity 指数または単に指数とよぶ．また今後のために，

$$\text{Pidx } \mathbf{m} = 1 - \frac{\text{idx } \mathbf{m}}{2}$$

という量を定義しておく．これは以後のアクセサリー・パラメーターに関する話題で非常に重要となる．

さて前に見た Fuchs の関係式を上定義した量で整理してみよう．

定義 5.4.2. \mathcal{P}_{p+1} の元 $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})_{\substack{0 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}}$ と複素数の組 $(\lambda_{j,\nu})_{\substack{0 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}}$ に対して，

$$|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}| := \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu} \lambda_{j,\nu} - \text{ord } \mathbf{m} + \frac{\text{idx } \mathbf{m}}{2} \quad (5.11)$$

と定義する．

ここで定義した $|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}|$ を用いると Fuchs の関係式 (5.10) は

$$|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}| = 0 \quad (5.12)$$

という条件に他ならない．なぜなら，

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} \sum_{i=0}^{m_{j,\nu}-1} i &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu} (m_{j,\nu} - 1) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu}^2 - \frac{1}{2} (p+1)n \\ &= \frac{1}{2} (\text{idx } \mathbf{m} + (p-1)n^2) - \frac{1}{2} (p+1)n \\ &= \frac{1}{2} \text{idx } \mathbf{m} - n + \frac{(p-1)n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

となるからである．

5.5 一般化特性指数と局所モノドロミーの共役類

今後のために，ここで行列の共役類の復習をしておく． $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_N) \in \mathcal{P}_1^{(n)}$ と $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^N$ に対して $n \times n$ 行列 $L(\mathbf{m}; \lambda)$ を次のように定義する．まず \mathbf{m} をモノトーン，つまり $m_1 \geq \dots \geq m_n$ であるとしよう．そして $A_{i,j} \in M(m_i, m_j, \mathbb{C})$ を

$$A_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i I_{m_i} & (i = j), \\ I_{m_i, m_j} = (\delta_{\mu\nu})_{\substack{1 \leq \mu \leq m_i \\ 1 \leq \nu \leq m_j}} = \begin{pmatrix} I_{m_j} \\ 0 \end{pmatrix} & (i = j-1), \\ 0 & (i \neq j, j-1) \end{cases}$$

となるようにとったとき,

$$L(\mathbf{m}; \lambda) = (A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq N}}$$

と定義する. たとえば

$$L(2, 1, 1; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

また, \mathbf{m} がモノトーンでない場合は, 順序を入れ替えてモノトーンにしてから同様に定義する*9. 簡単な性質として次のようなことがわかる. 例えば, $A \in M(n, \mathbb{C})$ に対し,

A が $L(\mathbf{m}; \lambda)$ と共役である \Leftrightarrow

$$\text{rank} \prod_{\nu=1}^j (A - \lambda_\nu) = n - (m_1 + \cdots + m_j) \text{ が } j = 0, 1, \dots, N \text{ で成り立つ.} \quad (5.13)$$

実際, $L(\mathbf{m}; \lambda)$ が右辺の条件を満たすのは容易に確かめられ, また右辺の条件によってその行列の Jordan 標準形は一意的に定まる. よって A と $L(\mathbf{m}; \lambda)$ の Jordan 標準形は一致するので, 互いに共役となる.

また, 等方部分空間の次元の計算も容易にできる. すなわち $A \in M(n, \mathbb{C})$ に対し $Z(A) := \{X \in M(n, \mathbb{C}); AX = XA\}$ と定義したとき,

$$\dim Z(L(\mathbf{m}; \lambda)) = m_1^2 + \cdots + m_N^2$$

となる.

また \mathbf{m} に対して $\mathbf{m}^\vee = (m_1^\vee, \dots, m_r^\vee)$ を

$$m_\nu^\vee = \#\{j \mid m_j \geq \nu\} \quad \left(\text{例: } (7, 6, 3, 1) \xleftrightarrow{\text{双対}} (4, 3, 3, 2, 2, 2, 1) \right)$$

となるように定義して, \mathbf{m} の双対分割という.

$$J(k, \mu) := \begin{pmatrix} \mu & 1 & & & \\ & \mu & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & \mu \end{pmatrix} \in M(k, \mathbb{C})$$

を Jordan 細胞とする. このとき $L(\mathbf{m}; \lambda)$ と Jordan 標準形の関係は次のようにみることができる. \mathbf{m} がモノトーンで $\mu = (\mu, \dots, \mu) \in \mathbb{C}^N$ とおいたとき,

$$L(\mathbf{m}; \mu) \sim \bigoplus_{j=1}^{m_1} J(m_j^\vee, \mu) \quad (\text{互いに共役})$$

*9 例えば, $L(1, 2, 1; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = L(2, 1, 1; \lambda_2, \lambda_1, \lambda_3)$

となる．実際， $J(k, \mu)$ ，正整数 $l \leq k$ に対して

$$\dim\{u \in \mathbb{C}^k \mid J(k, \mu)^{l-1}u \neq \mathbf{0}, J(k, \mu)^l u = \mathbf{0}\} = 1$$

であることより， $J = \bigoplus_{j=1}^{m_1} J(m_j^\vee, \mu)$ とおくと，

$$\dim\{u \in \mathbb{C}^n \mid J^{l-1}u \neq \mathbf{0}, J^l u = \mathbf{0}\} = \#\{\nu \mid m_\nu^\vee \geq l\} = m_l.$$

よって J に対して (5.13) の右辺の条件が成り立つ．

命題 5.5.1. 階数 n の微分方程式 $Pu = 0$ が $x = 0$ を確定特異点し，そこでの特性指数が

$$\{[\lambda_1]_{(m_1)}, \dots, [\lambda_q]_{(m_q)}\}$$

であるとする ($n = m_1 + \dots + m_q$)．このとき次が成り立つ．

i) ある $k \leq q$ があって

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = \dots = \lambda_k, \\ m_1 &\geq m_2 \geq \dots \geq m_k, \\ \lambda_j - \lambda_1 &\notin \{0, 1, 2, \dots\} \quad (j = k+1, \dots, q) \end{aligned}$$

となっているとする． $\mathbf{m}^\vee = \{m_1^\vee, \dots, m_r^\vee\}$ を $\mathbf{m} = \{m_1, \dots, m_k\}$ の双対分割とすると $r = m_1$ となり， $i = 0, 1, \dots, r-1$ ， $j = 0, \dots, m_{i+1}^\vee - 1$ に対して，

$$u_{i,j}(x) = \sum_{\nu=0}^j x^{\lambda_1+i} \log^\nu x \cdot \phi_{i,j,\nu}(x)$$

を満たす解 $u_{i,j}$ がある．ただし $\phi_{i,j,\nu}(x) \in \mathcal{O}_0$ であって $\phi_{i,j,\nu}(0) = \delta_{j,\nu}$ を満たす．

ii) $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ($i \neq j$)

ならば*10 $x = 0$ での局所モノドロミー行列は，

$$L(\mathbf{m}; e(\lambda_1), \dots, e(\lambda_q))$$

に共役である．特に $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}$ ($i \neq j$) ならば局所モノドロミー行列は対角化可能となる．

Proof. ii) は i) より従うので 1 のみを示す． $\lambda_1 = 0$ として考えればよい．上の条件は P が

$$P = \sum_{l=0}^{\infty} x^l r_l(\vartheta) \prod_{\nu=1}^k \prod_{0 \leq i \leq m_\nu - l} (\vartheta - i)$$

と書けることを意味している．ここで $r_l(s)$ は多項式で $r_0(s) = 0$ は非負の整数解を持たない．簡単のため $P = \sum_{l=0}^{\infty} x^l p_l(\vartheta)$ とも書くことにすると， $0 \leq i \leq m_1 - 1$ を満たす整数 i は $p_l(x) = 0$ の根として少

*10 次のより弱い条件でよい ([O6, Proposition 11.9]).

$$\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z} \quad \text{または} \quad (\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i + m_i - \lambda_j - m_j) \in (-\infty, 0]$$

なくとも m_{i+l+1}^\vee の重複度を持つことがわかる ($\nu \geq m_1$ のときは $m_\nu^\vee = 0$ とした) . 特に $p_0(s) = 0$ の根の中では i の重複度は m_{i+1}^\vee に等しい . 非負整数 i, j に対して

$$x^l p_l(\vartheta) x^i \log^j x = x^{i+l} \sum_{\nu=0}^{j-m_{i+l+1}^\vee} c_{i,j,l,\nu} \log^\nu x \quad (c_{i,j,l,\nu} \in \mathbb{C})$$

となり , 特に $p_0(\vartheta) x^i \log^j x = 0$ ($j < m_{i+1}^\vee$) である .

ここで

$$p_0(\vartheta) : \sum_{\nu \leq j} \mathbb{C} x^i \log^\nu x \rightarrow \sum_{\nu \leq j - m_{i+1}^\vee} \mathbb{C} x^i \log^\nu x \quad (5.14)$$

が全射であることに注意すると ,

$$p_0(\vartheta) \phi_{i,j} = - \sum_{1 \leq l < m_1 - i} x^l p_l(\vartheta) x^i \log^j x, \quad \phi_{i,j} \in \sum_{\substack{i < k < m_1 \\ 0 \leq \nu \leq j}} \mathbb{C} x^k \log^\nu x$$

を満たす $\phi_{i,j}$ が存在する . $x^i \log^j x$ に $\phi_{i,j}$ を対応させる写像を

$$V := \sum_{0 \leq i < m_1} \sum_{0 \leq j < m_1^\vee} \mathbb{C} x^i \log^j x$$

における線型写像に拡張して Q とおき , $u \in V$ に対して $Tu = \sum_{\nu=0}^{m_1-1} Q^\nu u$ と定義する . すると ,

$$\begin{aligned} PTu &\equiv p_0(\vartheta)Tu + \sum_{l=1}^{m_1-1} x^l p_l(\vartheta)Tu && \text{mod } \mathcal{O}_0(m_1, j) \\ &\equiv p_0(\vartheta)(1 - Q)Tu && \text{mod } \mathcal{O}_0(m_1, j) \\ &\equiv p_0(\vartheta)(1 - Q)(1 + Q + \cdots + Q^{m_1-1})u && \text{mod } \mathcal{O}_0(m_1, j) \\ &= p_0(\vartheta)u \end{aligned}$$

となり , とくに $j < m_{i+1}^\vee$ ならば $PTx^i \log^j x \equiv 0 \pmod{\mathcal{O}_0(m_1, j)}$ となるので , $v_{i,j} = Tx^i \log^j x$ とおくと , $Pv_{i,j} \in \mathcal{O}_0(m_1, j)$ である . 系 5.1.6 より , ある $w_{i,j} \in \mathcal{O}_0(m_1, j)$ があって $Pv_{i,j} = Pw_{i,j}$ とできる . よって $u_{i,j} = v_{i,j} - w_{i,j}$ とすれば , これが求める解となる . \square

5.6 実現可能なスペクトル型

微分方程式のスペクトル型によって n の分割の組が定まることは今までに見た . しかし逆に抽象的に n の分割の組が与えられたとき , 実際にそれをスペクトル型として持つような微分方程式が存在するかどうかという問題が考えられる .

定義 5.6.1 (実現可能なスペクトル型). $\mathbf{m} = (\mathbf{m}_0, \dots, \mathbf{m}_p)$ を正整数 n の分割 ($p+1$) 個の組とする . ここで $\mathbf{m}_j = (m_{j,1}, \dots, m_{j,n_j})$ で $j = 0, \dots, p$, さらに $m_{j,\nu}$ は $m_{j,1} + \cdots + m_{j,n_j} = n$ を満たす正整数とする . また , 相異なる複素数 c_1, \dots, c_p を固定し , $c_0 = \infty$ とおく .

この時 , \mathbf{m} が実現可能なスペクトル型であるとは , ある Fuchs 型微分作用素 P で , Fuchs の関係式を満たす一般の $\lambda_{j,\nu}$ に対して , Riemann 関式 (5.9) を持つものが存在するときという . また特に上のような微分作用素 P として既約なものがとれるとき , \mathbf{m} は既約に実現可能ということにする .

ここで次のようなことを考えてみよう． $\mathbf{m}, \mathbf{m}' \in \mathcal{P}_{p+1}^{(n)}$ が実現可能な時， $\mathbf{m} + \mathbf{m}'$ を実現するような微分作用素は存在するだろうか．

いま特異点 $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{C}$ を固定し $c_0 = \infty$ としよう．このとき $x = c_j$ ($j = 0, \dots, p$) に確定特異点を持つ Fuchs 型微分作用素は一般に次の形に書き直すことができる．

$$P = \left(\prod_{j=1}^p (x - c_j)^n \right) \partial^n + a_{n-1}(x) \partial^{n-1} + \dots + a_1(x) \partial + a_0(x) \quad (5.15)$$

ここで， $a_i(x)$ は多項式で，

$$\begin{aligned} \deg a_i(x) &\leq (p-1)n + i, \\ (\partial^\nu a_i)(c_j) &= 0 \quad (0 \leq \nu \leq i-1, 1 \leq j \leq p) \end{aligned} \quad (5.16)$$

を満たす．この (5.15) を標準形と呼ぶことにしよう．

命題 5.6.2. P を Riemann 図式 (5.9) を持つ微分作用素とし，また P は標準形であるとしよう．もし P と同じ c_0, \dots, c_p に確定特異点を持ち，Riemann 図式

$$\left\{ \begin{array}{cc} c_0 = \infty & c_j \ (j = 1, \dots, p) \\ [\lambda_{0,1} + m_{0,1} - (p-1) \text{ord } \mathbf{m}]_{(m'_{0,1})} & [\lambda_{j,1} + m_{j,1}]_{(m'_{j,1})} \\ \vdots & \vdots \\ [\lambda_{0,n_0} + m_{0,n_0} - (p-1) \text{ord } \mathbf{m}]_{(m'_{0,n_0})} & [\lambda_{j,n_j} + m_{j,n_j}]_{(m'_{j,n_j})} \end{array} \right\} \quad (5.17)$$

を持つような微分作用素 P' があったとすると， P' のスペクトル型から決まる n の分割を \mathbf{m}' とかくとき， $P'P$ はスペクトル型 $\mathbf{m} + \mathbf{m}'$ を持ち Riemann 図式は

$$\left\{ \begin{array}{cccc} c_0 & c_1 & \dots & c_p \\ [\lambda_{0,1}]_{(m_{0,1} + m'_{0,1})} & [\lambda_{1,1}]_{(m_{1,1} + m'_{1,1})} & \dots & [\lambda_{p,1}]_{(m_{p,1} + m'_{p,1})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\lambda_{0,n_0}]_{(m_{0,n_0} + m'_{0,n_0})} & [\lambda_{1,n_1}]_{(m_{1,n_1} + m'_{1,n_1})} & \dots & [\lambda_{p,n_p}]_{(m_{p,n_p} + m'_{p,n_p})} \end{array} \right\} \quad (5.18)$$

となる．また，(5.9) が Fuchs の関係式を満たすならば，(5.17) が Fuchs の関係式を満たすことと (5.18) が Fuchs の関係式を満たすことは同値である．より正確には以下が成り立つ．

$$|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}| + |\{[\lambda_{j,\nu} + m_{j,\nu} - \delta_{j,0}(p-1) \text{ord } \mathbf{m}]_{(m'_{j,\nu})}\}_{\substack{0 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}}| = |\{\lambda_{\mathbf{m} + \mathbf{m}'}\}|.$$

Proof. 次の二つの微分作用素を考える．

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{l=0}^{\infty} x^l r_l(\vartheta) \prod_{\nu=1}^q \prod_{0 \leq k < m_\nu - l} (\vartheta - \lambda_\nu - k), \\ Q' &= \sum_{l=0}^{\infty} x^l r'_l(\vartheta) \prod_{\nu=1}^q \prod_{0 \leq k < m'_\nu - l} (\vartheta - \lambda_\nu - m_\nu - k), \end{aligned}$$

ここで $r_l(s)$, $r'_l(s)$ は多項式とする．このとき

$$\prod_{0 \leq k < m'_\nu - j} (\vartheta - \lambda_\nu - m_\nu - k) \cdot x^i \cdot \prod_{0 \leq k < m_\nu - i} (\vartheta - \lambda_\nu - k) = x^i \prod_{0 \leq k < m_\nu + m'_\nu - i - j} (\vartheta - \lambda_\nu - m_\nu - k)$$

より

$$Q'Q = \sum_{l=0}^{\infty} x^l \left(\sum_{i=0}^l r'_{l-i}(\vartheta + i)r_i(\vartheta) \right) \prod_{\nu=1}^q \prod_{0 \leq k < m_\nu + m'_\nu - l} (\vartheta - \lambda_\nu - k)$$

と計算できる．従って， $x = c_1, \dots, c_p$ での $P'P$ の特性指数が主張の Riemann 図式のようなになるのは， $y = x - c_j$ という座標で見れば上の計算からわかる．また， $x = c_0 = \infty$ に関しても， $Q = x^{-(p-1) \text{ord } \mathbf{m}} P$ ， $Q' = x^{-(p-1) \text{ord } \mathbf{m}'} P'$ とおくと $Q'Q = x^{-2(p-1) \text{ord } \mathbf{m}} \text{Ad}(x^{(p-1) \text{ord } \mathbf{m}})(P')P$ となるので， $y = \frac{1}{x}$ という座標で見ればわかる．

また，(5.17) の Fuchs の関係式は

$$\sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m'_{j,\nu} (\lambda_{j,\nu} + m_{j,\nu} - \delta_{j,0}(p-1) \text{ord } \mathbf{m}) = \text{ord } \mathbf{m}' - \frac{\text{idx } \mathbf{m}'}{2} \quad (5.19)$$

である．ここで，

$$\sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m'_{j,\nu} (m_{j,\nu} - \delta_{j,0}(p-1) \text{ord } \mathbf{m}) = \text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{m}')$$

なので，(5.19) は

$$\sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m'_{j,\nu} \lambda_{j,\nu} = \text{ord } \mathbf{m}' - \frac{\text{idx } \mathbf{m}'}{2} - \text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{m}')$$

と書き換えられ，また， $\text{idx}(\mathbf{m} + \mathbf{m}') = \text{idx } \mathbf{m} + \text{idx } \mathbf{m}' + 2\text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{m}')$ に注意すると，(5.9) の Fuchs の関係式から，

$$\sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} (m_{j,\nu} + m'_{j,\nu}) \lambda_{j,\nu} = \text{ord}(\mathbf{m} + \mathbf{m}') - \frac{\text{idx}(\mathbf{m} + \mathbf{m}')}{2}$$

を得る．これは (5.18) の Fuchs の関係式に他ならない．最後の等式の証明も同様． □

第 6 章

Fuchs 型微分方程式の簡約化

第 2 章で微分作用素に対する様々な代数的作用を定義して、それらによって微分作用素が変化の様子を例に見てきた。この章ではその中でも $\text{RAd}((x-c)^\lambda)$, $\text{RAd}(\partial^{-\mu})$ によって Fuchs 型微分作用素がどう変化するかを、特に Riemann 図式に注目して見ていこう。

6.1 Riemann 図式と分数化演算

命題 6.1.1. i) $Pu = 0$ を Fuchs 型微分方程式とする。もしある複素数 c があって、 $P \in (\partial - c)W[x]$ とできたならば、 $c = 0$ である。

ii) $\phi(x) \in \mathbb{C}(x)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $P \in W[x]$ とすると、

$$\begin{aligned} P &\in \mathbb{C}[x]\text{RAd}(-\phi(x)) \circ \text{RAd}(\phi(x))P, \\ P &\in \mathbb{C}[\partial]\text{RAd}(\partial^{-\mu}) \circ \text{RAd}(\partial^\mu)P \end{aligned}$$

が成り立つ。特に P が既約で $\text{ord } P > 1$ ならば、

$$\text{RAd}(\partial^{-\mu}) \circ \text{RAd}(\partial^\mu)P = cP$$

がある $c \in \mathbb{C}^\times$ に対して成り立つ。

Proof. i) $P = (\partial - c)Q$ と書くことにする。いま $Qu(x) = e^{cx}$ を満たす $u(x)$ をとってくると $Pu(x) = 0$ となる。 P は $x = \infty$ を高々確定特異点として持つので、ある正整数 $N > 0$ と定数 $C > 0$ があって、 $|x| \gg 1$ かつ $0 \leq \arg x \leq 2\pi$ の時、 $|u(x)| < C|x|^N$ とできる。よって $c = 0$ でなくてはならない。

ii) 前半は

$$\begin{aligned} \text{Adei}(-\phi(x)) \circ \text{Adei}(\phi(x)) &= \text{id}, \\ \text{Adei}(\phi(x))f(x)P &= f(x)\text{Adei}(\phi(x))P \end{aligned}$$

より従う。後半は

$$L^{-1} \circ R \circ LP = cP \quad (c \in \mathbb{C}^\times)$$

を示せばよい。 $L^{-1} \circ R \circ LP = \bar{P}$ と書くことにする。このとき $R \circ LP = L\bar{P}$ だから、ある $f(x) \in \mathbb{C}(x)$ があって、 $LP = f(x)L\bar{P}$ となる。また $LP \in W[x]$ なので $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ としてよいことに注意しよう。

従って,

$$P = f(\partial)\bar{P}$$

となるが P は既約なので $\bar{P} \in \mathbb{C}[x]$ か $f(x) \in \mathbb{C}$ となる. しかし前者だとすると, $f(\partial)$ は既約となるので 1 次式となるがこれは $\text{ord } P > 1$ に反する. よって主張が従う. \square

次に $\text{Ad}((x-c)^\tau)$, $\text{RAd}(\partial^{-\mu})$ によって Riemann 図式がどう変化するかを具体的にみてみよう.

定理 6.1.2. $Pu = 0$ を Riemann 図式 (5.9) を持つ Fuchs 型微分方程式としよう. また P は標準形 (5.15) であるとしよう.

i) (addition) $\text{Ad}((x-c_j)^\tau)P$ は次の Riemann 図式を持つ.

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} c_0 = \infty & c_1 & \cdots & c_j & \cdots & c_p \\ [\lambda_{0,1} - \tau]_{(m_{0,1})} & [\lambda_{1,1}]_{(m_{1,1})} & \cdots & [\lambda_{j,1} + \tau]_{(m_{j,1})} & \cdots & [\lambda_{p,1}]_{(m_{p,1})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\lambda_{0,n_0} - \tau]_{(m_{0,n_0})} & [\lambda_{1,n_1}]_{(m_{1,n_1})} & \cdots & [\lambda_{j,n_j} + \tau]_{(m_{j,n_j})} & \cdots & [\lambda_{p,n_p}]_{(m_{p,n_p})} \end{array} \right\}$$

ii) (middle convolution) 必要ならば $m_{j,1} = 0$ も許すとして $\lambda_{j,1} = 0$ ($j = 1, \dots, p$) と仮定する.

$$\begin{cases} \mu = \lambda_{0,1} - 1, \\ d = d(\mathbf{m}) := \sum_{j=0}^p m_{j,1} - (p-1)n \end{cases}$$

とにおいて, 次のことを仮定しよう.

$$m_{j,1} \geq d \quad (j = 0, \dots, p), \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} \text{もし } \nu \geq 1 \text{ に対し } m_{0,\nu} \geq m_{0,1} - d + 2 \text{ かつ } m_{1,1} \cdots m_{p,1} \neq 0 \text{ ならば} \\ \lambda_{0,\nu} \notin \{0, -1, \dots, m_{0,1} - m_{0,\nu} - d + 2\}, \end{cases} \quad (6.2)$$

$$\begin{cases} \text{もし } j \geq 1, \nu \geq 2 \text{ に対し } m_{j,1} \neq 0 \text{ かつ } m_{j,\nu} \geq m_{j,1} - d + 2 \text{ ならば} \\ \lambda_{0,1} + \lambda_{j,\nu} \notin \{0, -1, \dots, m_{j,1} - m_{j,\nu} - d + 2\}. \end{cases} \quad (6.3)$$

このとき

$$S = \partial^{-d} \text{Ad}(\partial^{-\mu}) \prod_{j=1}^p (x - c_j)^{-m_{j,1}} P$$

は $W[x]$ の元となり, 次の Riemann 図式をもつ.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} c_0 = \infty & c_1 & \cdots & c_p \\ [1 - \mu]_{(m_{0,1}-d)} & [0]_{(m_{1,1}-d)} & \cdots & [0]_{(m_{p,1}-d)} \\ [\lambda_{0,2} - \mu]_{(m_{0,2})} & [\lambda_{1,2} + \mu]_{(m_{1,2})} & \cdots & [\lambda_{p,2} + \mu]_{(m_{p,2})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\lambda_{0,n_0} - \mu]_{(m_{0,n_0})} & [\lambda_{1,n_1} + \mu]_{(m_{1,n_1})} & \cdots & [\lambda_{p,n_p} + \mu]_{(m_{p,n_p})} \end{array} \right\}.$$

特に次の仮定 (6.4), (6.5) が満たされるとき,

$$S = \text{RAd}(\partial^{-\mu})RP$$

である. すなわち

$$x = c_j \quad (j = 0, \dots, p) \text{ で } \lambda_{j,1} + m_{j,1} \text{ は } P \text{ の特性指数ではない.} \quad (6.4)$$

さらに

$$m_{0,1} = d \text{ あるいは } \lambda_{0,1} \notin \{-d, -d-1, \dots, 1-m_{0,1}\}. \quad (6.5)$$

iii) もし $\text{ord } P > 1$ かつ P が既約だとすると, ii) における (6.1), (6.2), (6.3) が成立する*¹.

Proof. i) は明らかなので, ii), iii) を示す.

$$P' = \left(\prod_{j=1}^p (x - c_j)^{-m_{j,1}} \right) P$$

とおくと仮定から $P' \in W[x]$ である. さらに (6.4) を仮定すると $RP = P'$ であることは補題 5.3.1 からわかる. さらに $Q = \partial^{(p-1)n - \sum_{j=1}^p m_{j,1}} P'$ とおこう. ここで (6.1) より $(p-1)n - \sum_{j=1}^p m_{j,1} \geq 0$ に注意しておく.

$1 \leq j \leq p$ なる j に対し $x = c_j$ に関して議論するが, 簡単のため $j = 1, c_j = 0$ とする. $P' = \sum_{j=0}^n a_j(x) \partial^j$ と書いたとき, $\deg a_j(x) \leq (p-1)n + j - \sum_{j=1}^p m_{j,1}$ であることより,

$$x^{m_{1,1}} P' = \sum_{l=0}^N x^{N-l} r_l(\vartheta) \prod_{\substack{1 \leq \nu \leq n_0 \\ 0 \leq i < m_{0,\nu} - l}} (\vartheta + \lambda_{0,\nu} + i)$$

と書ける. ここで

$$N = (p-1)n - \sum_{j=2}^p m_{j,1} = m_{0,1} + m_{1,1} - d,$$

$r_l(s)$ は多項式, 特に r_0 は 0 でない複素数である. まず $N - m_{1,1} + 1 \leq l \leq N$ ならば

$$\prod_{\substack{1 \leq \nu \leq n_0 \\ 0 \leq i < m_{0,\nu} - l}} (\vartheta + \lambda_{0,\nu} + i) \notin xW[x]$$

となるという条件を考える. すなわち上式に $(\vartheta + \lambda_{0,\nu} + i) = \vartheta$ となる項がないという条件である. これは (6.2) から従うことに注意しよう. すなわち $m_{1,1} = 0$, あるいは, $l \geq m_{0,1} - d + 1$ より $m_{0,\nu} \leq m_{0,1} - d + 1$, あるいは,

$$\lambda_{0,\nu} \notin \{0, -1, \dots, m_{0,1} - m_{0,\nu} - d + 2\} \quad (1 \leq \nu \leq n_0)$$

ならばよい.

さてこの仮定のもと, $P' \in W[x]$ であり, さらに $x = c_1 = 0$ で特性指数 $[0]_{(m_{1,1})}$ を持つことを思い出すと, $N - m_{1,1} + 1 \leq l \leq N$ ならば多項式 s_l があって,

$$r_l(\vartheta) = x^{l-N+m_{1,1}} \partial^{l-N+m_{1,1}} s_l(\vartheta)$$

*¹ より一般に, Riemann 図式 (5.9) をもつ P が既約で $\text{ord } P > 1$ とすると

$$\lambda_{0,\nu_0} + \dots + \lambda_{p,\nu_p} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m_{0,\nu_0} + \dots + m_{p,\nu_p} \leq (p-1) \text{ord } \mathbf{m}$$

が成り立つ (cf. [O6, Lemma 7.3]). よってこのとき (6.5) も成り立つ

とできる．残りの r_l も s_l と書き直すと，

$$\begin{aligned}
P' &= \sum_{l=0}^{N-m_{1,1}} x^{N-m_{1,1}-l} s_l(\vartheta) \prod_{\substack{1 \leq \nu \leq n_0 \\ 0 \leq i < m_{0,\nu}-l}} (\vartheta + \lambda_{0,\nu} + i) \\
&+ \sum_{l=N-m_{1,1}+1}^N \partial^{l-N+m_{1,1}} s_l(\vartheta) \prod_{\substack{1 \leq \nu \leq n_0 \\ 0 \leq i < m_{0,\nu}-l}} (\vartheta + \lambda_{0,\nu} + i)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

となる．すると

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_{l=0}^N \partial^l s_l(\vartheta) \prod_{1 \leq i \leq N-m_{1,1}-l} (\vartheta + i) \prod_{\substack{1 \leq \nu \leq n_0 \\ 0 \leq i < m_{0,\nu}-l}} (\vartheta + \lambda_{0,\nu} + i), \\
\text{Ad}(\partial^{-\mu})Q &= \sum_{l=0}^N \partial^l s_l(\vartheta - \mu) \prod_{1 \leq i \leq N-m_{1,1}-l} (\vartheta - \mu + i) \\
&\times \prod_{1 \leq i \leq m_{0,1}-l} (\vartheta + i) \prod_{\substack{2 \leq \nu \leq n_0 \\ 0 \leq i < m_{0,\nu}-l}} (\vartheta - \mu + \lambda_{0,\nu} + i)
\end{aligned}$$

となる． $N - m_{1,1} = m_{0,1} - d$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\partial^{-m_{0,1}} \text{Ad}(\partial^{-\mu})Q &= \sum_{l=0}^{m_{0,1}-1} x^{m_{0,1}-l} s_l(\vartheta - \mu) \prod_{1 \leq i \leq m_{0,1}-d-l} (\vartheta - \mu + i) \prod_{\substack{2 \leq \nu \leq n_0 \\ 0 \leq i < m_{0,\nu}-l}} (\vartheta - \mu + \lambda_{0,\nu} + i) \\
&+ \sum_{l=m_{0,1}}^N \partial^{l-m_{0,1}} s_l(\vartheta - \mu) \prod_{1 \leq i \leq m_{0,1}-d-l} (\vartheta - \mu + i) \prod_{\substack{2 \leq \nu \leq n_0 \\ 0 \leq i < m_{0,\nu}-l}} (\vartheta - \mu + \lambda_{0,\nu} + i)
\end{aligned}$$

となる．よって $x = \infty$ での特性指数は

$$\{[1 - \mu]_{(m_{0,1}-d)}, [\lambda_{0,2} - \mu]_{(m_{0,2})}, \dots, [\lambda_{0,n_0} - \mu]_{(m_{0,n_0})}\}$$

であることがわかる．

上の $l = 0$ の項に注目しよう． $\lambda_{0,\nu} + i \neq \lambda_{0,1} + m_{0,1}$ は $-\mu + \lambda_{0,\nu} + i \neq m_{0,1} + 1$ を意味するので， $\lambda_{0,1} + m_{0,1}$ が P の $x = \infty$ での特性指数ではなく，さらに $1 \leq i \leq m_{0,1} - d$ に対し $-\mu + i \neq m_{0,1} + 1$ ，すなわち $\lambda_{0,1} \notin \{-d, -d-1, \dots, 1 - m_{0,1}\}$ であるならば，

$$x^{m_{0,1}} s_0 \prod_{1 \leq i \leq m_{0,1}-d} (\vartheta - \mu + i) \prod_{\substack{2 \leq \nu \leq n_0 \\ 0 \leq i < m_{0,\nu}}} (\vartheta - \mu + \lambda_{0,\nu} + i) \notin \partial W[x]$$

である．よってこのとき $\partial^{-m_{0,1}-1} \text{Ad}(\partial^{-\mu})Q \notin W[x]$ がわかる．つまり $m_{0,1}$ は $\partial^{-m} \text{Ad}(\partial^{-\mu})Q \in W[x]$ となる最大の整数 m であることがわかり，ii) の最後の主張が示された．

同様に有限の特異点における特性指数も見ていこう． $x = c_1 = 0$ の周りでの P の特性指数から

$$P' = \sum_{l=0}^{m_{1,1}} \partial^{m_{1,1}-l} q_l(\vartheta) \prod_{\substack{2 \leq \nu \leq n_1 \\ 0 \leq i < m_{1,\nu}-l}} (\vartheta - \lambda_{1,\nu} - i) + \sum_{l=m_{1,1}+1}^N x^{l-m_{1,1}} q_l(\vartheta) \prod_{\substack{2 \leq \nu \leq n_1 \\ 0 \leq i < m_{1,\nu}-l}} (\vartheta - \lambda_{1,\nu} - i)$$

となる．よって

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_{l=0}^{m_{1,1}} \partial^{N-l} q_l(\vartheta) \prod_{\substack{2 \leq \nu \leq n_1 \\ 0 \leq i < m_{1,\nu} - l}} (\vartheta - \lambda_{1,\nu} - i) \\
&+ \sum_{l=m_{1,1}+1}^N \partial^{N-l} q_l(\vartheta) \prod_{i=1}^{l-m_{1,1}} (\vartheta + i) \prod_{\substack{2 \leq \nu \leq n_1 \\ 0 \leq i < m_{1,\nu} - l}} (\vartheta - \lambda_{1,\nu} - i), \\
\text{Ad}(\partial^{-\mu})Q &= \sum_{l=0}^N \partial^{N-l} q_l(\vartheta - \mu) \prod_{1 \leq i \leq l - m_{1,1}} (\vartheta - \mu + i) \prod_{\substack{2 \leq \nu \leq n_1 \\ 0 \leq i < m_{1,\nu} - l}} (\vartheta - \mu - \lambda_{1,\nu} - i)
\end{aligned}$$

となる．従って $N - m_{0,1} = m_{1,1} - d$ に注意すると，

$$\prod_{\substack{2 \leq \nu \leq n_1 \\ 0 \leq i < m_{1,\nu} - l}} (\vartheta - \mu - \lambda_{1,\nu} - i) \notin \partial W[x]$$

が $N - \ell < m_{0,1}$ のときに成り立てば， $x = c_1$ での $\partial^{-m_{0,1}} \text{Ad}(\partial^{-\mu})Q$ の特性指数は

$$\{[0]_{(m_{1,1}-d)}, [\lambda_{1,2} + \mu]_{(m_{1,2})}, \dots, [\lambda_{1,n_1} + \mu]_{(m_{1,n_1})}\}$$

となる．また上の条件は $0 \leq i \leq m_{1,\nu} - m_{1,1} + d - 2$ の範囲で $\vartheta - \mu - \lambda_{1,\nu} - i = \vartheta + 1$ となる項がなければよいので，それは仮定 (6.3) より成り立つ．以上で ii) が示せた．

最後に iii) を示す．まず (6.1) を示す． P' ， N を ii) の証明のとおりとすると，

$$x^{m_{1,1}} P' = \sum_{l=0}^N x^{N-l} r_l(\vartheta) \prod_{\substack{1 \leq \nu \leq n_0 \\ 0 \leq i < m_{0,\nu} - l}} (\vartheta + \lambda_{0,\nu} + i)$$

と書けたが，このとき， $m_{0,1} > N$ であるとすると， $x^{m_{1,1}} P'$ は右から $\vartheta + \lambda_{0,1}$ で割れる．これは P の既約性に反するので $m_{0,1} \leq N$ である．これより，

$$m_{1,1} - d = m_{1,1} + N - m_{0,1} - m_{1,1} = N - m_{0,1} \geq 0.$$

同様に $m_{1,1} > N$ であるとすると $x^{m_{1,1}} P'$ は右から ϑ で割れる．よって $m_{1,1} \leq N$ となる．これより $m_{0,1} - d \geq 0$ を得る．他の $m_{j,1} - d \geq 0$ についても同様．

次に (6.2) を示す． P' は多項式 $p_l(x)$ ($l = 0, 1, \dots, N$) があって，

$$x^{m_{1,1}} P' = \sum_{l=0}^N x^{N-l} p_l(\vartheta)$$

と書けた．ここで $x = 0$ で特性指数 $[0]_{(m_{1,1})}$ を持つことから， $p_l(\vartheta)$ ($N - m_{1,1} + 1 \leq l \leq N$) は $\prod_{0 \leq i < l - N + m_{1,1}} (\vartheta - i) = x^{l - N + m_{1,1}} \partial^{l - N + m_{1,1}}$ で割れる．また， $x = \infty$ における特性指数 $[\lambda_{0,\nu}]_{(m_{0,\nu})}$ から， $p_l(\vartheta)$ ($0 \leq l \leq N - m_{1,1}$) は $\prod_{0 \leq i < m_{0,\nu} - l} (\vartheta + \lambda_{0,\nu} + i)$ で割れる．よって

$$P' = \sum_{l=0}^{N-m_{1,1}} x^{N-m_{1,1}-l} r_l(\vartheta) \prod_{0 \leq i < m_{0,\nu} - l} (\vartheta + \lambda_{0,\nu} + i) + \sum_{l=N-m_{1,1}+1}^N \partial^{l-N+m_{1,1}} r_l(\vartheta) \quad (6.7)$$

となる多項式 $r_l(s)$ が存在することがわかる .

さて , さらに $m_{0,\nu} \geq m_{0,1} - d + 2$ および

$$\lambda_{0,\nu} \in \{0, -1, \dots, m_{0,1} - m_{0,\nu} - d + 2\}$$

を仮定しよう . すると $0 \leq l \leq N - m_{1,1} = m_{0,1} - d$ に対し , $m_{0,\nu} > l$ かつ

$$\begin{aligned} \lambda_{0,\nu} + (m_{0,\nu} - l - 1) &\geq m_{0,1} - m_{0,\nu} - d + 2 + m_{0,\nu} - l - 1 \\ &= m_{0,1} - d - l + 1 > 0. \end{aligned}$$

この時 , 上式 (6.7) の第 1 項の和の各項は , 左から

$$x^{m_{0,1}-d-l}(\vartheta + 1)(\vartheta + 2) \cdots (\vartheta + \lambda_{0,\nu} + m_{0,\nu} - l - 1)$$

で割れる . 簡単のため $m_{0,1} - d - l = L$, $\lambda_{0,\nu} + m_{0,\nu} - l - 1 = M$ とおくと , $M > L \geq 0$ より上式は

$$x^L(\vartheta + 1)(\vartheta + 2) \cdots (\vartheta + M) = (\vartheta + 1 - L)(\vartheta + 2 - L) \cdots (\vartheta + M - L)x^L \in \partial W[x]$$

となって , すべての項は ∂ で左から割れる . (6.7) の第 2 項も ∂ で左から割れるので P' が既約であることに反する .

また (6.3) は $\tilde{P} = \text{Ad}((x - c_j)^{-\lambda_{j,\nu}})P$ に関して (6.2) と同様の議論をすればよい . 実際 \tilde{P} に関しての d を \tilde{d} と書いて区別すると ,

$$\begin{aligned} \tilde{d} &= m_{0,1} + \cdots + m_{j-1,1} + m_{j,\nu} + m_{j+1,1} + \cdots + m_{p,1} - (p-1)n \\ &= d - m_{j,1} + m_{j,\nu}. \end{aligned}$$

よって (6.2) より , \tilde{P} が既約ならば , $m_{0,1} \geq m_{0,1} - \tilde{d} + 2$ であるとする ,

$$\lambda_{j,\nu} + \lambda_{0,1} \notin \{0, -1, \dots, m_{0,1} - m_{0,1} - \tilde{d} + 2\}.$$

これを元の d で書き直せば (6.3) が得られる . □

また上の Riemann 図式の変化は Fuchs の関係式を保っていることを次にみてみよう .

命題 6.1.3. $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})_{\substack{j=0,\dots,p \\ \nu=1,\dots,n_j}} \in \mathcal{P}_{p+1}^{(n)}$ としよう . d は上の定理のとおりとして $\lambda_{j,\nu}$ も定理の条件を満たすような複素数とする . また $m_{j,1} \geq d$ ($j = 1, \dots, p$) も仮定する . このとき , $\mathbf{m}' \in \mathcal{P}_{p+1}^{(n-d)}$ と複素数 $\lambda'_{j,\nu}$ を次のように定義する .

$$m'_{j,\nu} = m_{j,\nu} - \delta_{\nu,1}d \quad (j = 0, \dots, p, \nu = 1, \dots, n_j),$$

$$\lambda'_{j,\nu} = \begin{cases} 2 - \lambda_{0,1} & (j = 0, \nu = 1) \\ \lambda_{j,\nu} - \lambda_{0,1} + 1 & (j = 0, \nu > 1) \\ 0 & (j > 0, \nu = 1) \\ \lambda_{j,\nu} + \lambda_{0,1} - 1 & (j > 0, \nu > 1) \end{cases}.$$

このとき

$$\text{idx } \mathbf{m} = \text{idx } \mathbf{m}', \quad |\{\lambda_{\mathbf{m}}\}| = |\{\lambda_{\mathbf{m}'}\}|$$

が成り立つ .

$$\begin{aligned}
\text{Proof.} \quad \text{idx } \mathbf{m} - \text{idx } \mathbf{m}' &= \sum_{j=0}^p m_{j,1}^2 - (p-1)n^2 - \sum_{j=0}^p (m_{j,1} - d)^2 + (p-1)(n-d)^2 \\
&= 2d \sum_{j=0}^p m_{j,1} - (p+1)d^2 - 2(p-1)nd + (p-1)d^2 \\
&= d \left(2 \sum_{j=0}^p m_{j,1} - 2d - 2(p-1)n \right) = 0.
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu} \lambda_{j,\nu} - \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m'_{j,\nu} \lambda'_{j,\nu} &= m_{0,1}(\mu+1) - (m_{0,1} - d)(1-\mu) + \mu \left(n - m_{0,1} - \sum_{j=1}^p (n - m_{j,1}) \right) \\
&= \left(\sum_{j=0}^p m_{j,1} - d - (p-1)n \right) \mu - m_{0,1}d - (m_{0,1} - d) = d.
\end{aligned}$$

よって主張が従う。 \square

6.2 簡約化と既約性

まず, Fuchs の関係式から以下の既約性の結果が従うことがわかることに注意しよう。

定理 6.2.1. P を Fuchs の関係式 (5.10) を満たす (5.9) の Riemann 関式 $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ を持つ n 階の Fuchs 型微分作用素とする。このとき, $0 < n' < n$ を満たす n' と n' の分割の組 $\mathbf{m}' = (m'_{j,\nu})_{\substack{0 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}}$ で以下の条件を満たすものが存在しなければ, P は既約である。ここで, いくつかの $m'_{j,\nu}$ は 0 でもよいとする。

$$\begin{cases} m'_{j,\nu} \leq m_{j,\nu} & (0 \leq j \leq p, 1 \leq \nu \leq n_j), \\ \sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^{m'_{j,\nu}-1} (\lambda_{j,\nu} + i) - \frac{(p-1)n(n-1)}{2} \notin \{0, -1, -2, \dots\}. \end{cases} \quad (6.8)$$

Proof. 可約ならば $Pu = 0$ の解が定義する n 次元の多価関数の空間 \mathcal{F} に含まれる。よって, より小さな n' 次元の多価関数の空間 \mathcal{F}' があって, それはある Fuchs 型微分方程式 $P'v = 0$ の解の空間となる。 P' は Fuchs 型であるが, c_0, \dots, c_p 以外に見かけの特異点 c'_1, \dots, c'_q があり得る。 P の c_j での特性指数の集合は $\{\lambda_{j,\nu} \mid i = 0, \dots, m_{j,\nu} - 1, \nu = 1, \dots, n_j\}$ であるから, 定理 5.1.9 ii) より, P' の c_j での特性指数の集合は, ある n' の分割 $m'_{j,1}, \dots, m'_{j,n'_j}$ によって

$$\{\lambda_{j,\nu} + k_{j,\nu,i} \mid 1 \leq i \leq m'_{j,1}, \nu = 1, \dots, n_j\}$$

と表せる。ただし, $k_{j,\nu,i}$ は $0 \leq k_{j,\nu,1} < k_{j,\nu,2} < \dots < k_{j,\nu,m'_{j,\nu}} < m_{j,\nu}$ を満たす整数である。同様に見かけの特異点 c'_j における特性指数の集合は, $0 \leq k'_{j,1} < k'_{j,2} < \dots < k'_{j,n'}$ を満たすある整数 $k'_{j,i}$ によって

$$\{k'_{j,i} \mid 1 \leq i \leq n'\}$$

と表せる。 P' に対する Fuchs の関係式から定理の主張が得られる。 \square

さてこのことから次のようなことがわかる． $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ が $\mathbf{m} = \mathbf{m}' + \mathbf{m}''$, $0 < \text{ord } \mathbf{m}' < \text{ord } \mathbf{m}$ を満たす任意の $\mathbf{m}', \mathbf{m}'' \in \mathcal{P}$ に対して,

$$|\{\lambda_{\mathbf{m}'}\}| \notin \{0, -1, -2, \dots\} \quad (6.9)$$

を満たすならば, Riemann 関式 $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ をもつ Fuchs 型微分作用素は既約である．

命題 6.2.2. k を正整数, $\mathbf{m} \in \mathcal{P}_{p+1}^{(n)}$ を素で実現可能とする．

i) $\lambda_{j,\nu}$ ($j = 0, \dots, p, \nu = 1, \dots, n_j$) を (Fuchs の関係式のもとで) 一般の値にとったとき, Riemann 関式 $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ を実現する Fuchs 型微分方程式は既約である．

ii) $\text{idx } \mathbf{m} < 0$ とする．i) と同様 $\lambda_{j,\nu}$ を一般の値にとると, スペクトル型 $k\mathbf{m}$ に対し, Riemann 関式 $\{\lambda_{k\mathbf{m}}\}$ を実現する Fuchs 型微分方程式は既約である．

Proof. i) を示す．いま, \mathbf{m} が $\mathbf{m} = \mathbf{m}' + \mathbf{m}''$, $0 < \text{ord } \mathbf{m}' < \text{ord } \mathbf{m}$ と分解できて, $|\{\lambda_{\mathbf{m}'}\}| \in \{0, -1, -2, \dots\}$ となったとする．しかし $|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}| = 0$ より, 一般の値 $\lambda_{j,\nu}$ に対して, $|\{\lambda_{\mathbf{m}'}\}| \in \mathbb{Z}$ とするにはある正整数 l があって $\mathbf{m} = l\mathbf{m}'$ とならなければいけない．しかし \mathbf{m} は素なので, このような \mathbf{m} の分解は存在しない．よってこの節の初めに見たことより, 実現する微分方程式は既約．

ii) も同様に示すことができる．実際 $k\mathbf{m} = \mathbf{m}' + \mathbf{m}''$, $0 < \text{ord } \mathbf{m}' < \text{ord } \mathbf{m}$ で, $|\{\lambda_{\mathbf{m}'}\}| \in \{0, -1, -2, \dots\}$ を満たす分解があったとすると, ある正整数 $l < k$ があって, $\mathbf{m}' = l\mathbf{m}$ でなければいけない．しかし, このとき

$$\begin{aligned} |\{\lambda_{l\mathbf{m}}\}| &= \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} l m_{j,\nu} \lambda_{j,\nu} - \text{ord } l\mathbf{m} + \frac{l^2}{2} \text{idx } \mathbf{m} \\ &= l \left(\text{ord } \mathbf{m} - k \frac{\text{idx } \mathbf{m}}{2} \right) - l \text{ord } \mathbf{m} + \frac{l^2}{2} \text{idx } \mathbf{m} \\ &= \frac{l(l-k)}{2} \text{idx } \mathbf{m} > 0 \end{aligned}$$

となり $|\{\lambda_{\mathbf{m}'}\}| > 0$ となって仮定に反する．従って実現する微分方程式は既約である． \square

既約に実現可能な $\mathbf{m} \in \mathcal{P}$ は, 素でないならば $\text{idx } \mathbf{m} < 0$ となることが第 7 章 3 節で示されるので, スペクトル型 \mathbf{m} と Fuchs の関係式を満たす generic な特性指数を持つ微分作用素 P に対する $\text{RAd}(\partial^{-\mu})$ などの作用素は, 一般には既約性を保つことがわかる．

より具体的に次の定理を用いて既約性を調べてみよう．

定理 6.2.3 (Tsai [Ts, Corollary 5.5]). $Q \in W[x]$ は \mathbb{C} の中で c_1, \dots, c_p に特異点を持ちそれらはすべて確定特異点*2であるとする．そして各 $x = c_j$ では特性指数

$$\{[0]_{(m_{j,1})}, [\lambda_{j,2}]_{(m_{j,2})}, \dots, [\lambda_{j,n_j}]_{(m_{j,n_j})}\}$$

を持つとしてさらに $\lambda_{j,\nu} \notin \mathbb{Z}$ であるとする．このとき Q が $W(x)$ の中で既約ならば, Q の簡約代表元 RQ で生成される $W[x]$ の左イデアル $W[x]RQ$ は極大イデアルとなる．

*2 実際の Tsai の定理では不確定特異点でも良く, 他の条件ももう少し弱くできるのだが, 簡単のため確定特異点とした．また, $x = \infty$ に関してはなにも条件もつけていないことに注意

また Laplace 変換で特性指数がどう変わるかを特別な場合にみておく .

命題 6.2.4. $Q \in W[x]$ が $Q = \sum_{i=-k}^{m_0} x^i q_i(\vartheta)$ と多項式 $q_i(s)$ を用いて書けているとしよう . ここで m_0, k は非負整数で, $q_{m_0} \neq 0, k > 0$ であるとする . さらに $x = \infty$ は Q の確定特異点で, Q は $x = \infty$ で特性指数

$$\{[\lambda_1]_{(m_1)}, \dots, [\lambda_n]_{(m_n)}\}$$

を持つとする . このとき $L(Q)$ は $x = 0$ を確定特異点として持ち, そこでの特性指数は

$$\{[0]_{(m_0)}, [\lambda_1 - 1]_{(m_1)}, \dots, [\lambda_n - 1]_{(m_n)}\}$$

である .

Proof. もし $i \geq 0$ ならば

$$L(x^i q_i(\vartheta)) = (-\partial)^i q_i(-\vartheta - 1)$$

であるので, ある多項式 $r_j(x)$ ($j = 1, \dots, k$) があって

$$L(Q) = \sum_{i=0}^{m_0} (-\partial)^i q_i(-\vartheta - 1) + \sum_{j=1}^k x^j r_j(\vartheta)$$

と書ける . よって主張が従う . □

ここからは話を簡単にすために, 特性指数たちを一般のパラメーターだと思って議論すすめる . すなわち, Fuchs 型微分方程式 $Pu = 0$ が Riemann 関式 (5.9) を持つとして, $(\lambda_{j,\nu})_{\substack{0 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}}$ はただ一つの関係式

$$|\{\lambda_m\}| = 0$$

を満たす以外は互いに独立なパラメーターと思うことにする . さらにこの $(\lambda_{j,\nu})_{\substack{0 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}}$ が \mathbb{C} 上生成する体を $\mathbb{C}(\lambda)$ と書こう . $\overline{\mathbb{C}(\lambda)}$ でその代数的閉体を一つ固定する . そして

$$\overline{W}[x; \lambda] = W[x] \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathbb{C}(\lambda)} = \left\{ Q = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial^i \mid a_i(x) \in \overline{\mathbb{C}(\lambda)}[x] \right\}$$

とおいて, 今後微分作用素の演算はこの $\overline{W}[x; \lambda]$ のなかで考えることにする . また $\overline{W}(x; \lambda)$ も同様に定義する .

また定理 6.1.2 の時と同様に $m_{j,1} = 0$ ($j = 1, \dots, p$) も許すとして,

$$\begin{cases} \lambda_{j,1} = 0 & (j = 1, \dots, p), \\ |\{\lambda_m\}| = 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

に制限して考えることにする . 以上の準備の下, $\text{RAd}(\partial^{-\mu})$ が既約性を保存することをみてみよう .

定理 6.2.5. P は上のとおりとし, $\overline{W}(x; \lambda)$ の中 (あるいは, (6.10) を満たす generic な複素数) で方程式 $Pu = 0$ は既約であるとする . このとき $\mu = \lambda_{0,1} - 1$ とおくと, $\text{ord } P > 1$ ならば $\text{RAd}(\partial^{-\mu})RP$ もまた既約となる .

Proof. 定理 6.2.3 より RP は $\overline{W}[x; \lambda]$ の極大イデアルを生成する．Laplace 変換は代数同型写像なので LRP も極大イデアルを生成する．よって $LRP \notin \overline{\mathbb{C}(\lambda)}[x]$ ならば, LRP は $\overline{W}(x; \lambda)$ の中で既約である．そこで, もし $LRP \in \overline{\mathbb{C}(\lambda)}[x]$ だったとすると, ある多項式 $f(x) \in \overline{\mathbb{C}(\lambda)}[x]$ があって, $RP = f(\partial)$ だがともに既約なので $f(x)$ は一次式．これは $\text{ord } P > 1$ に反する．よって LRP は $\overline{W}(x; \lambda)$ で既約．また $\text{RAd}(x^{-\mu})$ は既約性を保存するので $\text{RAd}(x^{-\mu})LRP$ は $\overline{W}(x; \lambda)$ で既約．ここで命題 6.2.4 より $\text{RAd}(x^{-\mu})LRP$ は $x = 0$ で確定特異点で, 特性指数

$$\{[-\mu]_{(\sum_{j=1}^p \sum_{\nu=2}^{n_j} m_{j,\nu} - n)}, [0]_{(m_{0,1})}, [\lambda_{0,2} - 1 - \mu]_{(m_{0,2})}, \dots, [\lambda_{0,n_0} - 1 - \mu]_{(m_{0,n_0})}\}$$

を持つ．よって再び定理 6.2.3 より $\text{RAd}(x^{-\mu})LRP$ は $\overline{W}[x; \lambda]$ の極大イデアルを生成するので $\text{RAd}(\partial^{-\mu})P = L^{-1}\text{RAd}(x^{-\mu})LRP$ は $\overline{\mathbb{C}(\lambda)}[x]$ の元でなければ $\overline{W}(x; \lambda)$ の中で既約となり主張が従う．逆に $\overline{\mathbb{C}(\lambda)}[x]$ の元であったとしてみると, P の既約性からある $\alpha \in \overline{\mathbb{C}(\lambda)}[x]$ があって

$$\text{RAd}(x^{-\mu})LRP = \partial + \alpha,$$

すなわち, ある $f(x) \in \overline{\mathbb{C}(\lambda)}[x]$ があって

$$LRP = f(x)(\partial + \alpha x - \mu)$$

となる．よって $RP = f(\partial)(-\partial + \alpha\partial - \mu - 1)$ だが, これは P の既約性と $\text{ord } P > 1$ に反する． \square

注意 6.2.6. また定理の証明から $\text{ord } P = 1$ の場合も有限の特異点が 2 点以上あれば既約性が保存されることもわかる．

6.3 アクセサリー・パラメーターと Katz の定理

いままでに, $\text{RAd}((x-c)^\tau)$ や $\text{RAd}(\partial^{-\mu})$ によって微分方程式がどのように変化するかを見てきた．ここでは既約な Fuchs 型微分方程式はアクセサリー・パラメーターを持たなければ, $\text{RAd}((x-c)^\tau)$ と $\text{RAd}(\partial^{-\mu})$ を有限回ほどこすことによって一階単独の微分方程式に変形することができることを示す．一階の Fuchs 系の Schlesinger 標準形 (正規型ともいう)^{*3} に関しては, N. Katz が middle convolution を導入することにより示した ([Kz]^{*4}, [DR]) ．

いま $Pu = 0$ ($P \in W[x]$) が Riemann 図式 (5.9) をもつ Fuchs 型微分方程式であるとする．そこに現れる特性指数は当然 $P = \sum_{i,j} p_{i,j} x^i \partial^j$ に現れる係数 $p_{i,j}$ で表される．では逆にすべての P の係数は特性指数によって表すことができるだろうか．

例えば Gauss の超幾何微分方程式は

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\frac{du}{dx} - \alpha\beta u = 0$$

^{*3} c_1, \dots, c_p, ∞ を確定特異点とする $\frac{du}{dx} = \sum_{j=1}^p \frac{A_j}{x-c_j} u$ という形の方程式．ただし u は n 個の未知関数の列ベクトル, A_j は複素数を成分とする n 次正方行列

^{*4} ここで扱う単独高階の場合は, [Kz] の序文に残された問題として挙げられている

であり, その Riemann 図式は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta \end{array} \right\}$$

となる. ここから見てわかるように方程式の係数 α, β, γ は特性指数たちの有理式*5としても逆に表すことが可能である. すなわち特性指数さえ決めてしまえば Gauss の方程式は完全に決まってしまうのである. このようなことはいつでも可能であろうか. 次の Heun の微分方程式を見てみよう.

Heun の微分方程式とは

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} + \frac{\epsilon}{x-t} \right) \frac{du}{dx} + \frac{\alpha\beta x - q}{x(x-1)(x-t)} u = 0 \quad (\alpha + \beta + 1 = \gamma + \delta + \epsilon)$$

という方程式で, Riemann 図式は

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & t & \infty \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & 1-\delta & 1-\epsilon & \beta \end{array} \right\}$$

である. ここでも特性指数は方程式の係数たちによって表されている. しかし逆に方程式の係数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, q$ を特性指数を用いて表すことを考えると, 最後の q は特性指数とは独立であることがわかる. すなわちこの q をどのように取ったとしても, 特性指数は変わらない. 逆に特性指数がわかっていたとしても最後の q を決めなければ方程式を復元することはできない.

このように方程式のパラメーターの中で特性指数からは独立なものをアクセサリー・パラメーターと呼ぶ. 特性指数とは局所解の情報を表しているが, アクセサリー・パラメーターは局所的情報と方程式全体の大域的な情報のズレを表す重要なパラメーターといえる.

さて $Pu = 0$ を上のとおりとして, アクセサリー・パラメーターの数をかぞえてみよう. P は標準型であると, $P = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial^i$ と書けているとする. このとき,

$$a_i(x) = b_i(x) \prod_{j=1}^p (x - c_j)^i, \quad b_0(x) = 1$$

$$\deg b_i(x) \leq (p-1)n + i - pi = (p-1)(n-i)$$

となることが P が $c_0 = \infty, c_1, \dots, c_p$ に確定特異点をもつ Fuchs 型方程式であることからわかる. 従って P は高々

$$\sum_{i=0}^{n-1} ((p-1)(n-i) + 1) = \frac{(pn + p - n + 1)n}{2}$$

個の係数を持つことがわかる. $x = c_j$ で特性指数 $[\lambda_{j,\nu}]_{(m_{j,\nu})}$ を持つことは

$$(x - c_j)^{-m_{j,\nu}} \text{Ad}((x - c_j)^{-\lambda_{j,\nu}}) P \in W[x]$$

となることと同値であるが, $(x - c_j)^{-k} P \in W[x]$ とは

$$(\partial^l a_i)(c_j) = 0 \quad (0 \leq l \leq k-1, 0 \leq i \leq n)$$

*5 特に多項式として取れる. ここで一つ疑問. いつでも方程式の係数は特性指数に多項式的によるのだろうか? これは後の章の存在定理で明かにされる

すなわち

$$(\partial^l b_i)(c_j) = 0 \quad (0 \leq l \leq k-1-i, 0 \leq i \leq k-1)$$

を意味するので，上の特性指数の条件は $b_i(x)$ たちの係数の間に

$$\frac{(m_{j,\nu} + 1)m_{j,\nu}}{2}$$

個の関係式があることを意味する．さらに特性指数たちの間にも既に Fuchs の関係式があることを思い出しておくと，特性指数によって係数たちには

$$\sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} \frac{m_{j,\nu}(m_{j,\nu} + 1)}{2} - 1$$

個の関係式があることになる．これらの関係式が互いに独立とすると，特性指数で決まらない P の係数の数，すなわちアクセサリー・パラメーターの数は，係数全体の数からこれらを引いた数である．それは，

$$\begin{aligned} & \frac{(pn + p - n + 1)n}{2} - \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} \frac{m_{j,\nu}(m_{j,\nu} + 1)}{2} + 1 \\ &= \frac{(pn + p - n + 1)n}{2} - \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} \frac{m_{j,\nu}^2}{2} - (p+1)\frac{n}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{2}((p-1)n^2 - \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu}^2 + 2) = \text{Pidx } \mathbf{m} \end{aligned}$$

となって，アクセサリー・パラメーターの数は先に定義した $\text{Pidx } \mathbf{m}$ に等しいことがわかった．

定義 6.3.1. \mathbf{m} が既約に実現可能で， $\text{Pidx } \mathbf{m} = 0$ すなわち $\text{idx } \mathbf{m} = 2$ となるとき， \mathbf{m} は既約 rigid，あるいは単に rigid という．

さて，ここから再び話を簡単にするため前節と同様の仮定の下で議論をする．すなわち $Pu = 0$ は Riemann 関式 (5.9) を持つ Fuchs 型方程式で，各 $\lambda_{j,\nu}$ たちを Fuchs の関係式を満たす以外は独立なパラメーターとみて $P \in \overline{W}[x; \lambda]$ であるとしよう*6．あるいは，各 $\lambda_{j,\nu}$ たちを Fuchs の関係式を満たす generic な複素数として固定して考えよう．

定理 6.3.2. $Pu = 0$ は上のおりで， $\text{ord } P > 1$ かつ $\text{idx } \mathbf{m} \geq 2$ とする．このとき $\overline{W}(x; \lambda)$ の中（あるいは，複素数 $\lambda_{j,\nu}$ が generic）で P が既約とすると， $\text{idx } \mathbf{m} = 2$ が成立し， $\text{RAd}((x - c_j)^\tau)$ ， $\text{RAd}(\partial^{-\mu})$ を有限回ほどこすことによって， P は一階の単独微分方程式に変換できる．

Proof. 各 $j = 0, \dots, p$ に対し $m_{j,\nu}$ の順番を適当に入れ替えることによって

$$m_{j,1} = \max\{m_{j,\nu} \mid \nu = 1, \dots, n_j\}$$

*6 $\lambda_{j,\nu}$ が Fuchs 条件を満たす複素数のとき， P が既約ならば定理 6.3.2 が成り立つことが [O6, Theorem 8.13] によって，示されている．一般には既約性の仮定が必要なことは [O6, Example 7.5] からわかる

としてよい．そして $\prod_{j=1}^p \text{RAd}((x - c_j)^{-\lambda_{j,1}})$ を P にほどこすことによって，Riemann 図式

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x = c_0 & c_1 & \cdots & c_p \\ [\lambda'_{0,1}]_{(m_{0,1})} & [\lambda'_{1,1}]_{(m_{1,1})} & \cdots & [\lambda'_{p,1}]_{(m_{p,1})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\lambda'_{0,n_0}]_{(m_{0,n_0})} & [\lambda'_{1,n_1}]_{(m_{1,n_1})} & \cdots & [\lambda'_{p,n_p}]_{(m_{p,n_p})} \end{array} \right\}$$

は，

$$\lambda'_{j,1} = 0 \quad (j = 1, \dots, p)$$

となっているとしてよい．さらに $\lambda_{j,\nu}$ たちは Fuchs の関係式を満たす以外は独立であり，さらに P は既約，あるいは $\lambda_{j,\nu}$ は generic なので定理 6.1.2 の仮定はすべてみたされる．よってさらに $\mu = \lambda'_{0,1} - 1$ とおいて $\text{RAd}(\partial^{-\mu})$ をほどこせば，定理 6.1.2 より，方程式の階数は

$$n - d$$

となる．ここで $d = \sum_{j=0}^p m_{j,1} - (p-1)n$ であった．さらに定理 6.2.5 より得られた方程式も既約，あるいは addition を考慮すると特性指数は generic で階数は $n - d \geq 1$ である*7．

ここで次の等式を考える．

$$\left(\sum_{j=0}^p m_{j,1} - (p-1)n \right) n = \text{idx } \mathbf{m} + \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} (m_{j,1} - m_{j,\nu}) m_{j,\nu}.$$

左辺の括弧の中は d そのものである．一方 $m_{j,1}$ のとり方から右辺の第 2 項は 0 以上であり， $\text{idx } \mathbf{m} > 0$ より右辺 > 0 となって $d > 0$ が従う．よって得られた方程式の階数は

$$0 < n - d < n.$$

以下， $\text{ord } \mathbf{m} = 1$ となるまで同様の手順を繰り返すことができる．この操作で rigidity 指数は変化しないので， $\text{idx } \mathbf{m} = 2$ もわかる． □

6.4 Riemann 図式の簡約化

これまでこの章で見てきたことを，Riemann 図式， n の分割の言葉で整理しておこう．

定義 6.4.1.

$$P = a_n(x)\partial^n + a_{n-1}(x)\partial^{n-1} + \cdots + a_0(x)$$

は n 階 Fuchs 型微分作用素で Riemann 図式 (5.9) を持つとしよう．ここで $m_{j,\nu}$ は 0 でもよいとする． $l = (l_1, \dots, l_p)$ ($1 \leq l_j \leq n_j$) なる整数の組を一つ固定する．そして

$$\#\{j \mid m_{j,l_j} \neq n, 0 \leq j \leq p\} \geq 2$$

*7 0 階，つまり多項式にはならない

であると仮定する．このとき

$$\begin{aligned} d_l(\mathbf{m}) &:= m_{0,l_0} + \cdots + m_{p,l_p} - (p-1) \text{ord } \mathbf{m}, \\ \partial_l P &:= \text{Ad} \left(\prod_{j=1}^p (x - c_j)^{\lambda_{j,l_j}} \right) \\ &\circ \prod_{j=1}^p (x - c_j)^{m_{j,l_j} - d_l(\mathbf{m})} \partial^{-m_{0,l_0}} \text{Ad}(\partial^{1-\lambda_{0,l_0} - \cdots - \lambda_{p,l_p}}) \\ &\circ \partial^{m_{0,l_0} - d_l(\mathbf{m})} a_n(x)^{-1} \prod_{j=1}^p (x - c_j)^{n - m_{j,l_j}} \text{Ad} \left(\prod_{j=1}^p (x - c_j)^{-\lambda_{j,l_j}} \right) P \end{aligned}$$

と定義する． $\lambda_{j,\nu}$ が一般の値，あるいは P が既約ならば $\partial_l P \in W[x]$ となる．

また \mathbf{m} や $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ に対しても，

$$\partial_l \mathbf{m} := (m'_{j,\nu})_{\substack{0 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}}, \quad m'_{j,\nu} = m_{j,\nu} - \delta_{l_j,\nu} d_l(\mathbf{m}),$$

また，Riemann 図式を $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ と略記して，

$$\partial_l \{\lambda_{\mathbf{m}}\} := \{\lambda'_{\mathbf{m},\nu}\}, \quad \lambda'_{j,\nu} = \begin{cases} \lambda_{0,\nu} - 2\mu_l & (j=0, \nu=l_0) \\ \lambda_{0,\nu} - \mu_l & (j=0, \nu \neq l_0) \\ \lambda_{j,\nu} & (1 \leq j \leq p, \nu=l_j) \\ \lambda_{j,\nu} + \mu_l & (1 \leq j \leq p, \nu \neq l_j) \end{cases}$$

と定義する．ここで

$$\mu_l = \sum_{j=0}^p \lambda_{j,l_j} - 1.$$

この $\partial_l \{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ は $\partial_l P$ の Riemann 図式になることが定理 6.1.2 よりわかることに注意しよう．

またここで，

$$m_{j,l_j} \geq d_l(\mathbf{m}) \quad (j=0, \dots, p)$$

が成り立つとき， $\partial_l \mathbf{m}$ は well-defined であるという．

さらに

$$\partial \mathbf{m} := \partial_{(1,1,\dots)} \mathbf{m},$$

また， $l_{\max}(\mathbf{m})$ を

$$l_{\max}(\mathbf{m})_j = \min\{\nu \mid m_{j,\nu} = \max\{m_{j,1}, m_{j,2}, \dots\}\}$$

を第 j 成分にもつ整数の組とし，

$$\begin{aligned} \partial_{\max} \mathbf{m} &:= \partial_{l_{\max}(\mathbf{m})} \mathbf{m}, \\ d_{\max}(\mathbf{m}) &:= \sum_{j=0}^p \max\{m_{j,1}, m_{j,2}, \dots, m_{j,n_j}\} - (p-1) \text{ord } \mathbf{m} \end{aligned}$$

と定義する．

命題 6.1.3 より,

$$\begin{aligned} \text{idx } \mathbf{m} &= \text{idx } \partial_l \mathbf{m}, \\ \text{ord } \partial_{\max} \mathbf{m} &= \text{ord } \mathbf{m} - d_{\max}(\mathbf{m}). \end{aligned}$$

また, 定理 6.3.2 の証明から,

$$\text{idx } \mathbf{m} > 0 \quad \text{ならば} \quad d_{\max}(\mathbf{m}) > 0$$

がわかる.

定義 6.4.2. $\mathbf{m} \in \mathcal{P}$ に対し, $s\mathbf{m}$ で各 j に対し $m_{j,\nu}$ の順序を入れ替えてモノトーンにしたものを表すことにする. また $\mathbf{m} \in \mathcal{P}_{p+1}^{(n)}$ が自明であるとは \mathbf{m} の正の各成分がすべて $n = \text{ord } \mathbf{m}$ であるときにいう.

定理 6.4.3. $\mathbf{m} \in \mathcal{P}$ が実現可能であるのは, $s\mathbf{m}$ が自明であるか $\partial_{\max} \mathbf{m}$ が well-defined であって実現可能である時, またその時に限る.

Proof. $\#\{j \mid m_{j,1} < n\} < 2$ であるとすると, $\partial_{\max} \mathbf{m}$ は well-defined とはならない. このとき $Pu = 0$ がこの \mathbf{m} を実現するとしよう. $m_{j,1} = n$ に対応する特異点 $c_j \neq \infty$ での特性指数を $[\tau_j]_{(n)}$ とすると $\text{RAd}((x - c_j)^{-\tau_j})$ を施すことにより c_j は特異点ではなくなる. よって P の特異点は高々一点のみとしてよいが, さらに座標変換で特異点を ∞ にもって行って標準形 (5.15) で表すと, 条件 (5.16) より $P = \partial^n$ がわかる. このとき対応する \mathbf{m} は自明となる.

一方 $\#\{j \mid m_{j,\nu} < n\} \geq 2$ ならば定理 6.1.2 より \mathbf{m} が実現可能であることと $\partial_{\max} \mathbf{m}$ が実現可能であることは同値. \square

- 例 6.4.4.1. $\underline{4}11, \underline{4}11, \underline{4}2, \underline{3}3 \xrightarrow{15-2 \cdot 6=3} \underline{1}11, \underline{1}11, \underline{2}1 \xrightarrow{4-3=1} \underline{1}1, \underline{1}1, \underline{1}1 \xrightarrow{3-2} 1, 1, 1$ (自明)
 2. $\underline{2}11, \underline{2}11, \underline{1}11 \xrightarrow{9-8=1} \underline{1}11, \underline{1}11, \underline{1}11 \xrightarrow{3-3=0} \underline{1}11, \underline{1}11, \underline{1}11$ (自明ではないが実現可能)
 3. $\underline{2}11, \underline{2}11, \underline{2}11, \underline{3}1 \xrightarrow{9-8=1} \underline{1}11, \underline{1}11, \underline{1}11, \underline{2}1 \xrightarrow{5-6=-1} \underline{2}11, \underline{2}11, \underline{2}11, \underline{3}1$ (自明でないが実現可能)
 4. $\underline{4}31, \underline{3}311, \underline{4}1111 \xrightarrow{11-8=3} \underline{3}11, \underline{3}11, \underline{1}1111 \xrightarrow{7-5=2} \times$ ($\text{idx } \mathbf{m} = 2$ で, 実現可能ではない)

注意 6.4.5. 上の例の 2, 3 が実現可能なことは後の存在定理で示す「 $d_{\max}(\mathbf{m}) \leq 0$ ならば \mathbf{m} は実現可能である」という事実から従う.

後の都合のため次のような記号をここで導入しておく.

定義 6.4.6. $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})_{\substack{0 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}} \in \mathcal{P}_{p+1}^{(n)}$ と $\lambda_{j,\nu} \in \mathbb{C}$ を取ってくる. いま \mathbf{m} は実現可能であるとしよう. さらにある正整数 K があって,

$$\begin{aligned} \text{ord } \mathbf{m} &> \text{ord } \partial_{\max} \mathbf{m} > \cdots > \text{ord } \partial_{\max}^K \mathbf{m}, \\ s\partial_{\max}^K \mathbf{m} &\text{ は自明である, あるいは } d_{\max}(\partial_{\max}^K \mathbf{m}) \leq 0 \end{aligned}$$

であるとする.

このとき $k = 0, \dots, K$ に対し $\mathbf{m}(k) \in \mathcal{P}_{p+1}$, $l(k) \in \mathbb{Z}$, $\lambda(k)_{j,\nu} \in \mathbb{C}$ を次の様に定義する.

$$\mathbf{m}(0) = \mathbf{m}, \quad \mathbf{m}(k) = \partial_{\max} \mathbf{m}(k-1),$$

$$l(k) = l_{\max}(\mathbf{m}(k)), \quad d(k) = d_{\max}(\mathbf{m}(k)),$$

$$\{\lambda(k)_{\mathbf{m}(k)}\} = \partial_{\max}^k \{\lambda_{\mathbf{m}}\}.$$

例 6.4.7. i) 以下は既約 rigid で階数が 2 から 6 までの分割の組のリスト . ただし分割の順番は無視し , 階数を最初につけた .

2:11,11,11
 3:111,111,21 3:21,21,21,21
 4:1111,1111,31 4:1111,211,22 4:211,211,211 4:211,22,31,31
 4:22,22,22,31 4:31,31,31,31,31
 5:11111,11111,41 5:11111,221,32 5:2111,2111,32 5:2111,221,311
 5:221,221,221 5:221,221,41,41 5:221,32,32,41 5:311,311,32,41
 5:32,32,32,32 5:32,32,41,41,41 5:41,41,41,41,41,41
 6:111111,111111,51 6:111111,222,42 6:111111,321,33 6:21111,222,33
 6:21111,3111,33 6:2211,2211,411 6:222,222,321 6:222,3111,321
 6:3111,3111,321 6:2211,33,42,51 6:222,33,411,51 6:321,321,42,51
 6:33,33,33,42 6:33,33,411,42 6:33,411,411,42 6:411,411,411,42
 6:33,42,42,51,51 6:321,33,51,51,51 6:411,42,42,51,51 6:51,51,51,51,51,51,51

ii) 以下は , rigidity 指数が 0 の $\mathbf{m} \in \mathcal{P}$ で , $d_{\max}(\mathbf{m}) \leq 0$ となるもののリスト*8 .

idx $\mathbf{m} = 0$ (系 7.1.2)

2:11,11,11,11 3:111,111,111 4:22,1111,1111 6:33,222,111111

idx $\mathbf{m} = -2$ ([O2, Proposition 8.4])

2:11,11,11,11,11 3:111,111,21,21 4:211,22,22,22 4:1111,22,22,31
 4:1111,1111,211 5:11111,11111,32 5:11111,221,221 6:111111,2211,33
 6:2211,222,222 8:22211,2222,44 8:11111111,332,44 10:22222,3331,55
 12:2222211,444,66

idx $\mathbf{m} = -4$

2:11,11,11,11,11,11 3:111,21,21,21,21 4:22,22,22,31,31 3:111,111,111,21
 4:1111,22,22,22 4:1111,1111,31,31 4:211,211,22,22 4:1111,211,22,31
 6:321,33,33,33 6:222,222,33,51 4:1111,1111,1111 5:11111,11111,311
 5:11111,2111,221 6:111111,222,321 6:111111,21111,33 6:21111,222,222
 6:111111,111111,42 6:222,33,33,42 6:111111,33,33,51 6:2211,2211,222
 7:1111111,2221,43 7:1111111,331,331 7:2221,2221,331 8:11111111,3311,44
 8:221111,2222,44 8:22211,22211,44 9:3321,333,333 9:111111111,333,54
 9:22221,333,441 10:1111111111,442,55 10:22222,3322,55 10:222211,3331,55
 12:22221111,444,66 12:33321,3333,66 14:2222222,554,77 18:3333321,666,99

*8 rigidity 指数を決めると $d_{\max}(\mathbf{m}) \leq 0$ となる $\mathbf{m} \in \mathcal{P}$ は有限種類しかないとわかっている ([O2, Proposition 8.1]).
 このような $\mathbf{m} \in \mathcal{P}_{p+1}$ は , $\text{ord } \mathbf{m} \leq 3|\text{idx } \mathbf{m}| + 6$, $p \leq \frac{1}{2}|\text{idx } \mathbf{m}| + 3$ を満たす ([O6, Proposition 9.13])

第 7 章

普遍微分方程式

Fuchs 型微分方程式が与えられたときに，そのスペクトル型と Riemann 図式を考えることによって， n の分割の組，複素数の組を得ることができた．一方で逆に n の分割の組と Fuchs の関係式を満たすような複素数の組が勝手に与えられたとして，それらを Riemann 図式として持つような Fuchs 型微分方程式は存在するだろうか？

しかし例 6.4.4 で見たように，これは一般には正しくない．ならば，微分方程式で実現できるような n の分割の組の条件を求め，その条件が満たされるとき，実際に微分方程式を構成しようというのが本章の目標である．

特に行列で表示された一階連立 Fuchs 型方程式の場合，各特異点での留数行列の共役類を勝手に与えたとき，実際にそれを共役類として持つように微分方程式を作れるか？さらにそれが既約方程式となるときはいつか？という問題が我々の問題の類似としてある．これは Deligne-Simpson 問題と呼ばれている．さらにこの問題は籓 (quiver) の表現論とも深く関係しており面白い*1．

7.1 補題

ここでは今後のための基本的な補題をいくつか示しておく．

補題 7.1.1. $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})_{\substack{0 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}} \in \mathcal{P}_{p+1}^{(n)}$ を

$$m_{j,1} \geq m_{j,2} \geq \cdots \geq m_{j,n_j} > 0, \quad n > m_{0,1} \geq m_{1,1} \geq \cdots \geq m_{p,1} > 0, \quad (7.1)$$

$$m_{0,1} + \cdots + m_{p,1} \leq (p-1)n \quad (7.2)$$

を満たすようにとる．また，

$$\tilde{m}_{j,i} = \sum_{\nu=1}^{n_j} \max\{m_{j,\nu} - i, 0\} \quad \left(\text{例 : } 86631 \xrightarrow{i=2} 15 \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & + & + & + & + \\ & & & + & + & + & + & + \\ & & + & + & + & + & + & + \\ & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + & + & + & + \end{array} \right)$$

*1 Deligne-Simpson 問題は W. Crawley-Boevey [CB] によって関係式を持つ籓の表現論に帰着され，彼によって解決されている．また， $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})/\{c_0, \dots, c_p\}$ のモノドロミー表現に関する同様の問題があり，これらを区別するため微分方程式の方は加法的，モノドロミー表現は乗法的 Deligne-Simpson 問題とも呼ばれる (cf. [Ha2], [Ko2])

とおく . このとき , $\nu = 2, 3, \dots, n-1$ に対し

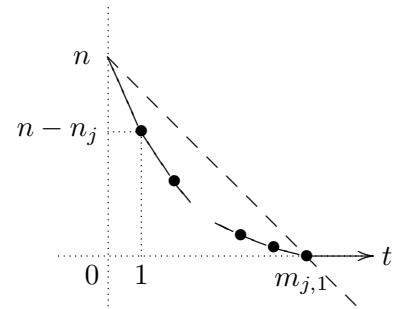
$$\#\{(j, i) \in \mathbb{Z}^2 \mid i \geq 0, 0 \leq j \leq p, \tilde{m}_{j,i} \geq n - \nu\} \leq (p-1)(\nu+1) + 1 \quad (7.3)$$

となるのは \mathbf{m} が次のどれかではない時 , またその時に限る . すなわち $k \geq 2$ であって

$$\begin{aligned} & (k, k; k, k; k, k; k, k), \quad (k, k, k; k, k, k; k, k, k), \\ & (2k, 2k; k, k, k, k; k, k, k, k), \quad (3k, 3k; 2k, 2k, 2k; k, k, k, k, k, k). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Proof. 次のような関数を用意する .

$$\phi_j(t) = \sum_{\nu=1}^{n_j} \max\{m_{j,\nu} - t, 0\}, \quad \bar{\phi}_j(t) = n\left(1 - \frac{t}{m_{j,1}}\right)$$



これらの関数は $0 < t < m_{j,1}$ の間では

$$\begin{aligned} \phi_j(t) &= \bar{\phi}_j(t) && (n = m_{j,1}n_j \text{ であるとき}), \\ \phi_j(t) &< \bar{\phi}_j(t) && (\text{それ以外}), \end{aligned}$$

という大小関係にあることを注意しておく . このとき , $\nu = 2, \dots, n-1$ に対して ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^p \#\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \phi_j(i) \geq n - \nu\} &= \sum_{j=0}^p \lfloor \phi_j^{-1}(n - \nu) + 1 \rfloor \\ &\leq \sum_{j=0}^p (\phi_j^{-1}(n - \nu) + 1) \\ &\leq \sum_{j=0}^p (\bar{\phi}_j^{-1}(n - \nu) + 1) = \sum_{j=0}^p \left(\frac{\nu m_{j,1}}{n} + 1\right) \\ &\leq (p-1)\nu + (p+1) = (p-1)(\nu+1) + 2 \end{aligned}$$

が成り立つ . ここで $\lfloor r \rfloor$ は実数 r を超えない最大の整数を表す .

ある $2 \leq \nu \leq n-1$ なる ν があって (7.3) が成り立たないとしよう . すると上のすべての不等式で等号が成立することになる . つまり ,

$$\begin{aligned} \phi_j^{-1}(n - \nu) &\in \mathbb{Z} \quad (j = 0, \dots, p), \\ n &= m_{j,1}n_j \quad (j = 0, \dots, p), \\ (p-1)n &= m_{0,1} + \dots + m_{p,1}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

が成り立つ . $n = m_{j,1}n_j$ より $m_{j,1} = \dots = m_{j,n_j} = \frac{n}{n_j}$ かつ $p-1 = \frac{1}{n_0} + \dots + \frac{1}{n_p} \leq \frac{p+1}{2}$ となる . よって $p = 2, 3$ であり , $p = 3$ のときは $n_0 = n_1 = n_2 = n_3 = 2$ で , $p = 2$ のときは $1 = \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$ でなければならない . つまり , $p = 2$ のときは $\{n_0, n_1, n_2\}$ は $\{3, 3, 3\}$, $\{2, 4, 4\}$, $\{2, 3, 6\}$ のいずれかである . よって (7.4) が $k \geq 1$ に対して成り立つ . さらに

$$\phi_j^{-1}(n - \nu) = \bar{\phi}_j^{-1}(n - \nu) = \frac{\nu m_{j,1}}{n} = \frac{\nu}{n_j} \in \mathbb{Z} \quad (j = 0, \dots, p)$$

となるので, ν は n_0, \dots, n_p の公倍数となり $\nu < n$ より $k \geq 2$ が従う. 逆に $k \geq 2$ ならば, ν が n_0, \dots, n_p の最小公倍数のとき (7.5) が成り立って上の不等式ですべて等号が成立し, (7.3) は成立しない. □

系 7.1.2 (Kostov [Ko1]). $\mathbf{m} \in \mathcal{P}$ が $\text{idx } \mathbf{m} = 0, d_{\max}(\mathbf{m}) \leq 0$ を満たすならば, \mathbf{m} は (7.4) で $k = 1, 2, 3, \dots$, としたもののいずれかである*2

Proof. $\mathbf{m} \in \mathcal{P}_{p+1}^{(n)}$ として, $l_{\max} = (l_0, \dots, l_p)$ とおこう. このとき,

$$\left(\sum_{j=0}^p m_{j,l_j} - (p-1)n \right) n = \text{idx } \mathbf{m} + \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} (m_{j,l_j} - m_{j,\nu}) m_{j,\nu}$$

であったから, 括弧の中身が $d_{\max}(\mathbf{m})$ であったことを思い出すと,

$$d_{\max}(\mathbf{m}) = 0, n = m_{j,1} n_j$$

となる. よって上の補題の証明から主張が従う. □

補題 7.1.3. $c_p = \infty, c_0, \dots, c_{p-1}$ を相異なる複素数としよう. また n_0, \dots, n_p を正整数とし, $\tilde{n} = n_0 + \dots + n_p$ とおく. このとき複素数の組 $(a_{j,\nu})_{\substack{0 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}}$ に対して次を満たす $(\tilde{n} - 1)$ 次多項式 $f(x)$ がただ一つ存在する.

$f(x)$ を $x = c_j (j = 0, \dots, p-1)$ で展開すると,

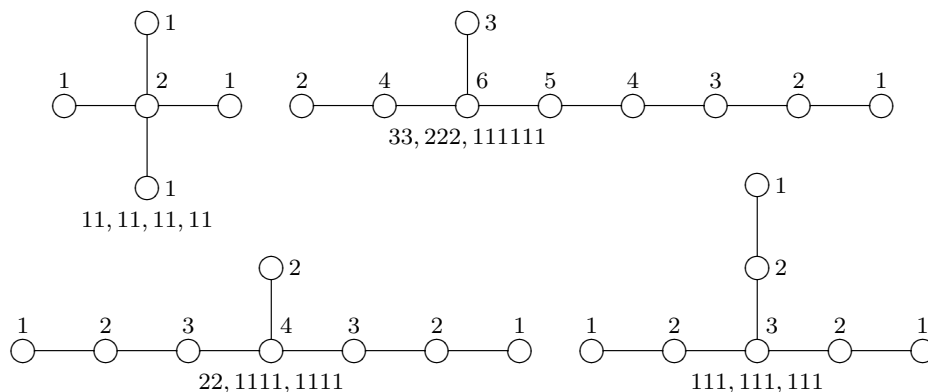
$$f(x) = a_{j,1} + a_{j,2}(x - c_j)^{-1} + \dots + a_{j,n_j}(x - c_j)^{n_j-1} + o(|x - c_j|^{n_j-1}),$$

また $x = c_p = \infty$ では,

$$x^{1-\tilde{n}} f(x) = a_{0,1} + a_{0,2}x^{-1} + \dots + a_{0,n_0}x^{-n_0+1} + o(|x|^{-n_0+1}),$$

となる.

*2 正確には \mathbf{m} の 0 となる成分を無視すると一致する. 素な $k = 1$ のときの \mathbf{m} を次章で述べる Kac-Moody ルート系のルートで表すと以下の様になる. Dynkin 図式には単純ルートの一次結合で表したときの係数が書いてある.



これらの Dynkin 図式は $\tilde{D}_4, \tilde{E}_8, \tilde{E}_7, \tilde{E}_6$ と呼ばれる affine 型のものになる

Proof. $\tilde{n}_i = n_0 + \cdots + n_{i-1}$ とおく . ただし $\tilde{n}_0 = 0$. このとき $k = 0, \dots, \tilde{n} - 1$ に対し ,

$$f_k(x) = \begin{cases} (x - c_i)^{k - \tilde{n}_i} \prod_{\nu=0}^{i-1} (x - c_\nu)^{n_\nu} & (\tilde{n}_i \leq k < \tilde{n}_{i+1}, 0 \leq i < p), \\ x^{k - \tilde{n}_p} \prod_{\nu=0}^{p-1} (x - c_\nu)^{n_\nu} & (\tilde{n}_p \leq k < \tilde{n}) \end{cases}$$

とおく . 特にこれらは \mathbb{C} 上 1 次独立となる . $f(x) = \sum_{k=0}^{\tilde{n}-1} u_k f_k(x)$ において , $f(x)$ の各 $x = c_j$ での展開係数の初めの n_j 項を主張の様に $a_{j,\nu}$ と書くことにする . そして

$$v_k = \begin{cases} a_{i,k-\tilde{n}_i} & (\tilde{n}_i \leq k < \tilde{n}_{i+1}, 0 \leq i < p), \\ a_{p,\tilde{n}-k} & (\tilde{n}_p \leq k < \tilde{n}), \end{cases}$$

とおこう . この時 $u = (u_0, \dots, u_{\tilde{n}-1})$ に $v = (v_0, \dots, v_{\tilde{n}-1})$ を対応させる $v = Au$ なる \tilde{n} 次の正方行列 A は対角成分が 0 でない下三角行列となる . よって u から v の対応は全単射となり主張が従う . \square

7.2 存在定理

補題 7.1.1 の条件が成り立つようなスペクトル型に対して , 実際それをスペクトル型として持つ微分方程式が存在することを示そう .

定義 7.2.1. $P = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{l_i} a_{i,k} x^k \partial^i$ ($a_{n,l_n} \neq 0$) と書けているとき , a_{n,l_n} を最高次係数とよび

$$\text{Top}(P) = a_{n,l_n}$$

と書くことにする .

定理 7.2.2 (存在定理). ここでは補題 7.1.1 の記号をそのまま使う . $\mathbf{m} \in \mathcal{P}_{p+1}^{(n)}$ を (7.1) を満たすようにとってくる .

$$N_\nu := (p-1)(\nu+1) + 1 - \#\{(j,i) \in \mathbb{Z}^2 \mid i \geq 0, 0 \leq j \leq p, \tilde{m}_{j,i} \geq n - \nu\} \quad (7.6)$$

とおく .

i) $N_1 = p - 2$ であり , さらに

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} N_\nu = \text{Pid} \mathbf{m}$$

となる .

ii) $p \geq 2$ としよう . さらにすべての $\nu = 2, 3, \dots, n-1$ に対して $N_\nu \geq 0$ が成り立つとする . このとき , Riemann 図式 (5.9) をもつ Fuchs 型微分作用素 P が存在する .

さらに , P を標準形 (5.15) で書いておき ,

$$q_\nu^0 := \#\{i \mid \tilde{m}_{0,i} \geq n - \nu, i \geq 0\}, \\ I_{\mathbf{m}} := \{(j,\nu) \in \mathbb{Z}^2 \mid q_\nu^0 \leq j \leq q_\nu^0 + N_\nu - 1, 1 \leq \nu \leq n-1\}$$

とおくと, $(j, \nu) \in I_m$ に対し, P の係数 $a_{n-\nu-1}(x)$ の第 $np - j - \nu$ 次の項は特性指数とは独立で, しかもそれぞれ任意に取れる*3. これらを $g_{j,\nu}$ をおこう. P の係数は $x, \lambda_{j,\nu}, g_{j,\nu}$ の多項式となり,

$$x^{j+\nu} \partial^{\nu+1} \text{Top} \left(\frac{\partial P}{\partial g_{j,\nu}} \right) = \text{Top}(P), \quad \frac{\partial^2 P}{\partial g_{j,\nu} \partial g_{j',\nu'}} = 0$$

が成り立つ.

Proof. まず i) を示す. $\tilde{m}_{j,1} = n - n_j \leq n - 2$ より, $N_1 = 2(p-1) + 1 - (p+1) = p-2$ となる. また,

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^{n-1} \#\{(j, i) \in \mathbb{Z}^2 \mid i \geq 0, 0 \leq j \leq p, \tilde{m}_{j,i} \geq n - \nu\} \\ &= \sum_{j=0}^p \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} \#\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{m}_{j,i} \geq n - \nu\} - 1 \right) \\ &= \sum_{j=0}^p \left(\sum_{i=0}^{m_{j,1}} \tilde{m}_{j,i} - 1 \right) = \sum_{j=0}^p \left(\sum_{i=0}^{m_{j,1}} \sum_{\nu=1}^{n_j} \max\{m_{j,\nu} - i, 0\} - 1 \right) \\ &= \sum_{j=0}^p \left(\sum_{\nu=1}^{n_j} \frac{m_{j,\nu}(m_{j,\nu} + 1)}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu}^2 + (p+1)(n-2) \right) \end{aligned}$$

となる. 従って, 以下がわかる.

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n-1} N_\nu &= (p-1) \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) + (n-1) - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu}^2 + (p+1)(n-2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((p-1)n^2 + 2 - \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu}^2 \right) = \text{Pidx } \mathbf{m}. \end{aligned}$$

次に ii) を示す. P を標準形 (5.15) の Fuchs 型微分作用素とすると, 各特異点に対して

$$\begin{aligned} P &= \sum_{l=0}^{pn} x^{pn-l} p_{0,l}^P(\vartheta) \\ &= \sum_{l=0}^{pn} (x - c_j)^l p_{j,l}^P((x - c_j)\partial) \quad (1 \leq j \leq p) \end{aligned}$$

と適当な多項式 $p_{j,l}^P(t)$ を用いて書くことができる. このとき,

$$h_{j,l}(t) = \begin{cases} \prod_{\nu=1}^{n_0} \prod_{i=0}^{m_{0,\nu}-l-1} (t + \lambda_{0,\nu} + i) & (j=0), \\ \prod_{\nu=1}^{n_j} \prod_{i=0}^{m_{j,\nu}-l-1} (t - \lambda_{j,\nu} - i) & (1 \leq j \leq p) \end{cases}$$

*3 つまりアクセサリ・パラメーターとなる

とにおいて, この $h_{j,l}$ と $p_{j,l}^P$ との商をとって,

$$p_{j,l}^P(t) = q_{j,l}^P(t)h_{j,l}(t) + r_{j,l}^P(t) \quad (\deg r_{j,l}^P(t) < \deg h_{j,l}(t))$$

としよう. こうした上で我々の目標は余り $r_{j,l}^P(t) = 0$ となるような P を見つけてくることである.

以下, 余り $r_{j,l}^P(t)$ が 0 になるように P の係数 $a_i(x)$ を決めていこう. そこで, $n-k$ 階未満の項を無視して

$$P(k) = \left(\prod_{j=1}^p (x - c_j)^n \right) \partial^n + a_{n-1}(x) \partial^{n-1} + \cdots + a_{n-k}(x) \partial^{n-k}$$

と書くことにする. そして $a_{n-1}(x), \dots, a_{n-k+1}(x)$ をうまく取ってきて $\deg r_{j,l}^{P(k-1)} < n-k+1$ となるようにできたと仮定して, $\deg r_{j,l}^{P(k)} < n-k$ となるように $a_{n-k}(x)$ を決めることを考える.

まず $k=1$ のときは,

$$a_{n-1}(x) = - \left(\prod_{j=1}^p (x - c_j)^n \right) \left(\sum_{j=1}^p (x - c_j)^{-1} \left(\sum_{\nu=1}^{n_j} \sum_{i=0}^{m_{j,\nu}-1} (\lambda_{j,\nu} + i) - \frac{n(n-1)}{2} \right) \right)$$

とすればよい. 実際このとき, 簡単のため $c_1 = 0$ と仮定して考えると,

$$\begin{aligned} P(1) &= \left(\prod_{j=1}^p (x - c_j)^n \right) \partial^n + a_{n-1}(x) \partial^{n-1} \\ &= \left(\prod_{j=2}^p (x - c_j)^n \right) \left(\vartheta(\vartheta - 1) \cdots (\vartheta - n + 1) \right. \\ &\quad - \left. \left(\sum_{\nu=1}^{n_1} \sum_{i=0}^{m_{1,\nu}-1} (\lambda_{1,\nu} + i) - \frac{n(n-1)}{2} \right) \vartheta(\vartheta - 1) \cdots (\vartheta - n + 2) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=2}^p \left(\frac{x}{x - c_j} \sum_{\nu=1}^{n_j} \sum_{i=0}^{m_{j,\nu}-1} (\lambda_{j,\nu} + i) - \frac{n(n-1)}{2} \right) \vartheta(\vartheta - 1) \cdots (\vartheta - n + 2) \right) \end{aligned}$$

となる. ここで $p_{1,0}^{P(1)}(t)$ を $h_{1,0}(t)$ で割ることを考える. 上の式の第3項は x で括れているので $p_{1,0}^{P(1)}$ には寄与しない. 従って,

$$p_{1,0}^{P(1)}(t) = \left(\prod_{j=2}^p (-c_j)^n \right) \cdot \left(t^n - \sum_{\nu=1}^{n_1} \sum_{i=0}^{m_{1,\nu}-1} (\lambda_{1,\nu} + i) t^{n-1} + \text{低次の項} \right)$$

となり, 余りは $\deg r_{1,0}^{P(1)} < n-1$ とできる. 同様に, $\deg r_{j,l}^{P(1)} < n-1$ ($j=2, \dots, p$) もわかる.

一方, 上式から

$$\begin{aligned} p_{0,0}^{P(1)}(t) &= t(t-1) \cdots (t-n+1) \\ &\quad - \sum_{j=1}^p \left(\sum_{\nu=1}^{n_j} \sum_{i=0}^{m_{j,\nu}-1} (\lambda_{j,\nu} + i) - \frac{n(n-1)}{2} \right) t(t-1) \cdots (t-n+2) \\ &= t^n - \left(\sum_{j=1}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} \sum_{i=0}^{m_{j,\nu}-1} (\lambda_{j,\nu} + i) - \frac{(p-1)n(n-1)}{n} \right) t^{n-1} + \text{低次の項} \end{aligned}$$

となるので, Fuchs の関係式 (5.10) から上式の t^{n-1} の係数は $\sum_{\nu=1}^{n_0} \sum_{i=0}^{m_{i,\nu}-1} (\lambda_{0,\nu} + i)$ となり, $\deg p_{0,0}^{P(1)} < n-1$ もわかる.

また $\deg h_{j,l}(t) \leq n-l$ より $l \geq 1$ のときも $\deg r_{j,l}^{P(1)} < n-1$ となる.

次に $k \geq 2$ を固定して考えよう.

$$a_{n-k}(x) = \begin{cases} \sum_{l \geq 0} c_{0,k,l} x^{pn-k-l} & (j=0), \\ \sum_{l \geq 0} c_{j,k,l} (x-c_j)^{n-k+l} & (j=1, \dots, p) \end{cases}$$

と書く. $P(k) = P(k-1) + a_{n-k}(x)\partial^{n-k}$ および $\deg r_{j,l}^{P(k-1)}(t) \leq n-k$ に注意すると, $\deg r_{j,l}^{P(k)}(t) < n-k$ とするためには, $\deg h_{j,l} > n-k$ となる j, l に対し, $c_{j,k,l}$ を $-r_{j,l}^{P(k-1)}(t)$ の $n-k$ 次の係数に等しくとればよい. 従って, $l \geq 0$ かつ $0 \leq j \leq p$ であって

$$\deg h_{j,l} = \tilde{m}_{j,l} = \sum_{\nu=1}^{n_j} \max\{m_{j,\nu} - l, 0\} > n-k$$

を満たす (j, l) に対して $c_{j,k,l}$ の値が決まるが, このような (j, l) 全体の個数は

$$(p-1)k + 1 - N_{k-1}$$

個である. さらに $x = c_j$ が確定特異点であることから, $l_j = \max\{l \mid \tilde{m}_{j,l} > n-k\}$ とおくと, $a_{n-k}^{(\nu)}(c_j) = 0$ が $j = 1, \dots, p, \nu = 0, \dots, n-k-1$ に対して成り立つので, $a_{n-k}(x)$ は各 $x = c_j$ ($j = 1, \dots, p$) で展開したときの $(n-k+l_j)$ 次までの係数がすべて定まることになり, さらに $c_{0,k,l}$ ($0 \leq l \leq l_0$) すなわち $a_{n-k}(x)$ の $pn-k$ 次から $pn-k-l_0$ 次までの係数も定まる. $a_{n-k}(x)$ の多項式としての次数は高々 $pn-k$ であり, 各特異点で定められた展開係数の個数の総数は

$$(p-1)k + 1 - N_{k-1} + p(n-k) = (pn-k+1) - N_{k-1}$$

個である. よって $q_{k-1}^0 = l_0 + 1$ に注意すると, $q_{k-1}^0 \leq l \leq q_{k-1}^0 + N_{k-1}$ に対して $c_{0,k,l}$ を任意にとつてくれば, $\deg r_{j,l}^{P(k)} < n-k$ という条件を満たす $a_{n-k}(x)$ が求まって一意に定まることが補題 7.1.3 からわかる. 以下帰納的に P を構成することができる. よって定理が示された. \square

7.3 素でないスペクトル型

上で見た定理から補題 7.1.1 の条件を満たすスペクトル型については, それを実現する微分方程式が構成できることがわかった. では補題 7.1.1 で除外された (7.4) の場合はどうであろうか?

命題 7.3.1. \mathbf{m} は補題 7.1.1 の (7.4) のいずれかであるとする. この時 \mathbf{m} は実現可能であるが, 既約には実現できない.

Proof. \mathbf{m}' を補題 7.1.1 の (7.4) のいずれかとする. そして $\frac{1}{k}\mathbf{m}' = \mathbf{m}$ とし, $\text{ord } \mathbf{m} = n$ とおこう. この

\mathbf{m} に関しては存在定理が成り立つので, $P(k, \alpha)$ を Riemann 図式

$$\left\{ \begin{array}{cc} c_0 = \infty & c_j (j = 1, \dots, p) \\ [\lambda_{0,1} - k(p-1)n + km_{0,1}]_{(m_{0,1})} & [\lambda_{j,1} + km_{j,1}]_{(m_{j,1})} \\ \vdots & \vdots \\ [\lambda_{0,n_1} - k(p-1)n + km_{0,1}]_{(m_{0,n_0})} & [\lambda_{j,n_j} + km_{j,n_j}]_{(m_{j,n_j})} \end{array} \right\}$$

を持つ微分方程式としよう. ここで α はアクセサリー・パラメーター. いま $\text{Pid } \mathbf{m} = 0$, つまり

$$\sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu}^2 = (p-1)n^2 = \sum_{\nu=0}^{n_0} (p-1)nm_{0,\nu}$$

なので, Fuchs の条件はすべての k に対して成り立っている. すると命題 5.6.2 より, $P_k(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = P(k-1, \alpha_k)P(k-2, \alpha_{k-1}) \cdots P(0, \alpha_1)$ の Riemann 図式は

$$\left\{ \begin{array}{cc} c_0 = \infty & c_j (j = 1, \dots, p) \\ [\lambda_{0,1}]_{(km_{0,1})} & [\lambda_{j,1}]_{(km_{j,1})} \\ \vdots & \vdots \\ [\lambda_{0,n_1}]_{(km_{0,n_0})} & [\lambda_{j,n_j}]_{(km_{j,n_j})} \end{array} \right\}$$

となる.

また, 存在定理の記号をそのまま使うと, \mathbf{m}' においては $j = 1, \dots, kn-1$ に対して

$$N_j = \begin{cases} 1 & (j \equiv n-1 \pmod{n}), \\ -1 & (j \equiv 0 \pmod{n}), \\ 0 & (j \not\equiv 0, n-1 \pmod{n}) \end{cases}$$

となる. もし $\{\lambda_{\mathbf{m}'}\}$ を実現する微分作用素が存在するならば, 定理 7.2.2 の証明から, 入りうるアクセサリー・パラメーターの数は最大 k 個^{*4}となり, これらのアクセサリー・パラメーターを決めれば微分作用素は一意に決まる. 存在はすでに示したので $P_k(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ が求める微分作用素である. \square

7.4 Fuchs 型普遍微分作用素

次の定理が本章の主定理である.

定理 7.4.1. $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})_{\substack{0 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}} \in \mathcal{P}_{p+1}^{(n)}$ を固定する.

i) \mathbf{m} が実現可能であるためには, ある非負整数 K があって, $\partial_{\max}^i \mathbf{m}$ が $j = 0, \dots, K$ に対して well-defined であって,

$$\text{ord } \mathbf{m} > \text{ord } \partial_{\max} \mathbf{m} > \cdots > \text{ord } \partial_{\max}^K \mathbf{m} \text{ となり,} \\ d_{\max}(\partial_{\max}^K \mathbf{m}) = 2 \text{ord } \partial_{\max}^K \mathbf{m} \text{ あるいは } d_{\max}(\partial_{\max}^K \mathbf{m}) \leq 0$$

^{*4} 定理 7.2.2 ii) の証明で, 微分作用素の係数を最高階から順に決めていくとき, $N_j = -1$ となっているところ, すなわち $kn - j - 1$ 階の係数を定める際に, それより高い階数の係数で定めた自由なパラメーターに制限がつく可能性がある

が成り立つことが必要十分である (cf. 定義 6.4.1).

ii) \mathbf{m} が実現可能ならば, 次を満たす Fuchs 型微分作用素 $P_{\mathbf{m}} \in W[x] \otimes \mathbb{C}[\lambda_{j,\nu}, g_1, \dots, g_N]$ が一意に存在する.

$P_{\mathbf{m}}$ は標準形

$$P_{\mathbf{m}} = \left(\prod_{j=1}^p (x - c_j)^{n-1} \right) \partial^n + a_{n-1}(x) \partial^{n-1} + \dots + a_1(x) \partial + a_0(x),$$

$a_j(x) \in \mathbb{C}[\lambda_{j,\nu}, g_1, \dots, g_N]$ であり, $x = c_0 = \infty, c_1, \dots, c_p$ に確定特異点を持ち, Riemann 図式 (5.9) を持つ. またアクセサリー・パラメーター g_1, \dots, g_N の数 N は以下の $\text{Ridx } \mathbf{m}$ に等しい.

$$\text{Ridx } \mathbf{m} := \begin{cases} 0 & (\text{idx } \mathbf{m} > 0), \\ \text{gcd } \mathbf{m} & (\text{idx } \mathbf{m} = 0), \\ \text{Pidx } \mathbf{m} & (\text{idx } \mathbf{m} < 0). \end{cases} \quad (7.7)$$

さらに, 定義 6.4.4 の記号のもとに, \mathbf{m} を $\mathbf{m}(K)$ に置き換えて N_{ν} と $I_{\mathbf{m}(K)}$ を定義すると, 定理 7.2.2

ii) のアクセサリー・パラメーターについての主張が, $(j, \nu) \in I_{\mathbf{m}(K)}$ と $P = P_{\mathbf{m}}$ に対して成立する.

特にこのような $P_{\mathbf{m}}$ をスペクトル型 \mathbf{m} の普遍微分作用素あるいは普遍型の微分作用素と呼ぶ.

iii) 複素数 $\lambda_{j,\nu} \in \mathbb{C}$ を固定した場合も次がいえる.

定義 6.4.4 の記号をそのまま使う. このとき, $k = 0, 1, \dots, K-1$ と,

$$m(k)_{j_0, \nu_0} \geq m(k)_{j_0, l(k)_{j_0}} - d(k) + 2$$

を満たす (j_0, ν_0) に対して,

$$\sum_{j=0}^p \lambda^{(k)}_{j, l(k)_{j+\delta_{j,j_0}(\nu_0-l(k)_j)}} \notin \{0, -1, -2, \dots, m(k)_{j_0, l(k)_{j_0}} - m(k)_{j_0, \nu_0} - d(k) + 2\}$$

が成り立つならば, Riemann 図式 (5.9) を実現する微分方程式 P はすべて普遍型 $P_{\mathbf{m}}$ の中に取れる.

Proof. i) を示す. $l_{\max} = (l_0, \dots, l_p)$ とおく.

$$d_{\max}(\mathbf{m}) \leq 0 \Leftrightarrow m_{0, l_0} + \dots + m_{p, l_p} \leq (p-1) \text{ord } \mathbf{m}$$

より $d_{\max}(\mathbf{m}) \leq 0$ ならば補題 7.1.1 の仮定がみたされるので, 定理 7.2.2 より \mathbf{m} は実現可能となる. また $d_{\max}(\mathbf{m}) = 2 \text{ord } \mathbf{m}$ は $s\mathbf{m}$ が自明な n の分割であることと同値なので, 定理 6.4.3 より実現可能である. 従って \mathbf{m} が主張の仮定をみたせば, 定理 5.6.2 より実現可能となる.

ii) を示す. $s\mathbf{m}$ が自明な分割であるときは, 普遍型の存在は明らか. また $d_{\max}(\mathbf{m}) \leq 0$ のときは定理 7.2.2, 命題 7.3.1, 系 7.1.2 より普遍型の存在が従う. よって $\partial_{\max}^K \mathbf{m}$ に対しては普遍型の存在がいった. Riemann 図式 $\partial_{\max}^i \{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ の普遍型 P_i は, $\partial_{l_{\max}(\partial_{\max}^i \mathbf{m})}$ を Riemann 図式 $\partial_{\max}^{i+1} \{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ の普遍型 P_{i+1} に作用させることによって得ることができる. よってこれを繰り返せばよい.

また, 定理 7.2.2 ii) の $g_{j,\nu}$ に対する主張は, addition や middle convolution で保たれることに注意.

iii) を示す. $\lambda_{j,\nu} \in \mathbb{C}$ を固定しよう. 定理 7.2.2 と命題 7.3.1 より $K = 0$, あるいは $N_j = 0$ ($j = 1, \dots, n-1$) ならば, $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ を実現する微分方程式はすべて普遍型の中にある.

一方仮定より定理 6.1.2 の仮定 (6.2), (6.3) が満たされるので, P_k が Riemann 図式 $\{\lambda(k)_{\mathbf{m}(k)}\}$ を持つ普遍型の中にあるとすると, $\partial_{l(k-1)}P_k$ は Riemann 図式 $\{\lambda(k-1)_{\mathbf{m}(k-1)}\}$ を持つ普遍型の中にある. よって ii) と同様に示すことができる. \square

注意 7.4.2. i) Riemann 図式 $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ をもつ P が既約とする. P の解のモノドロミーのスペクトル型も \mathbf{m} とすると (\mathbf{m} が rigid ならば常に満たされる), P が普遍微分作用素 $P_{\mathbf{m}}$ の中にあることが, [O6, Theorem 8.13 v)] により示されている.

ii) \mathbf{m} が実現可能なとき, $K = 0$, または $K > 0$ で

$$d_{\max}(\mathbf{m}) = d_{\max}(\partial\mathbf{m}) = \cdots = d_{\max}(\partial^{K-1}\mathbf{m}) = 1$$

となるならば, 定理 7.4.1 iii) の仮定が常に満たされる. 後者の場合, 分割の組 \mathbf{m} が単純簡約可能 (simply reducible) という. その分類と特徴付けが [O6, §6] で議論され, たとえば定理 7.2.2 ii) の $N_{\nu} \geq 0$ ($\nu = 2, 3, \dots, n-1$) という条件と同等であることが示されている.

iii) スペクトル型 $\mathbf{m} = 21, 21, 21, 21$ をもつ可約 Fuchs 型作用素 P で, 普遍微分作用素 $P_{\mathbf{m}}$ の中にないものの例が [O6, Example 7.5] に示されている. なお, \mathbf{m} は既約 rigid であるが, この P はアクセサリ・パラメーターをもつ.

例 7.4.3. $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})_{\substack{j=0,\dots,p \\ \nu=1,\dots,n_j}} \in \mathcal{P}^{(n)}$ が実現可能で, $m_{j,1} = m_{j,2} = \cdots = m_{j,n_j} = 1$ となる j が存在するならば, 単純簡約可能なので, $N_{\nu} \geq 0$ ($\nu = 1, \dots, n-1$) となることが, 上の注意の ii) からわかる. その他も含め, いくつかの例を挙げる.

$\mathbf{m} = \{m_{j,\nu}\}$	Pidx	$\tilde{\mathbf{m}} = \{\tilde{m}_{j,\nu}\}$	$N_1, N_2, \dots, N_{\text{ord } \mathbf{m}-1}$
221, 221, 221	0	52, 52, 52	0, 1, -1, 0
21, 21, 21, 21 (P_3)	0	31, 31, 31, 31	1, -1
22, 22, 22	-3	42, 42, 42	0, -2, -1
11, 11, 11, 11 (\tilde{D}_4)	1	2, 2, 2, 2	1
111, 111, 111 (\tilde{E}_6)	1	3, 3, 3	0, 1
22, 1111, 1111 (\tilde{E}_7)	1	42, 4, 4	0, 0, 1
33, 222, 111111 (\tilde{E}_8)	1	642, 63, 6	0, 0, 0, 0, 1
21, 21, 21, 111	1	31, 31, 31, 3	1, 0
222, 222, 222	1	63, 63, 63	0, 1, -1, 0, 1
11, 11, 11, 11, 11	2	2, 2, 2, 2, 2	2
55, 3331, 22222	2	10, 8, 6, 4, 2; 10, 6, 3; 10, 5	0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1
22, 22, 22, 211	2	42, 42, 42, 41	1, 0, 1
22, 22, 22, 22, 22	5	42, 42, 42, 42, 42	2, 0, 3
32111, 3221, 2222	8	831, 841, 84	0, 1, 2, 1, 1, 2, 1

第 8 章

Kac-Moody ルート系

8.1 Weyl 群作用と微分作用素の変換

今までに見てきた代数的変換に対する Riemann 図式やスペクトル型の変化は Kac-Moody ルート系とその Weyl 群の作用によって書き直すことができる。Fuchs 型の一階微分方程式系と籠の表現と関連を示した Crawley-Boevey によって、Kac-Moody ルート系との対応が初めて指摘された。ここでは籠の言葉は使わずにルート系との対応を見ていくことにする。

インデックスの集合 I を

$$I := \{0, (j, \nu) \mid j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \nu \in \mathbb{Z}_{>0}\}$$

と定める。また、基底の集合を

$$\Pi := \{\alpha_i \mid i \in I\} = \{\alpha_0, \alpha_{j,\nu} \mid j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \nu \in \mathbb{Z}_{>0}\}$$

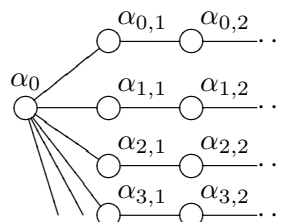
として、この基底で生成されるベクトル空間、格子、正格子を

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &:= \sum_{\alpha \in \Pi} \mathbb{C}\alpha, & Q &:= \sum_{\alpha \in \Pi} \mathbb{Z}\alpha \\ Q^+ &:= \left\{ \alpha = \sum_{i \in I} c_i \alpha_i \in Q \mid c_i \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

と書き^{*1}。 \mathfrak{h} , Q に以下の様に双線型形式を定義する。

$$\begin{aligned} (\alpha | \alpha) &= 2 \quad (\alpha \in \Pi), \\ (\alpha_0 | \alpha_{j,\nu}) &= -\delta_{\nu,1}, \\ (\alpha_{i,\mu} | \alpha_{j,\nu}) &= \begin{cases} 0 & (i \neq j \text{ あるいは } |\mu - \nu| > 1), \\ -1 & (i = j \text{ かつ } |\mu - \nu| = 1). \end{cases} \end{aligned}$$

対応する Dynkin 図式は右のようになる。



^{*1} ベクトル空間 \mathfrak{h} , あるいは格子 Q の元を $\alpha \in \Pi$ の一次結合で書いたときの係数が 0 でないものは有限個である

すなわち Π の元に各頂点对応し、頂点 α, β を結ぶ辺の数は $-(\alpha|\beta)$ を表している。

各 $\alpha = \sum_{i \in I} c_i \alpha_i \in \mathfrak{h}$ に対して、

$$h(\alpha) = \sum_{i \in I} c_i$$

を α の高さと呼ぶ。また、

$$\text{supp } \alpha = \{\alpha_i \in \Pi \mid c_i \neq 0\}$$

を α の台と呼ぶ。

各 $\alpha \in \Pi$ に対して \mathfrak{h} の元 β の α に対する鏡映変換を

$$s_\alpha: \mathfrak{h} \ni \beta \mapsto \beta - 2 \frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \alpha$$

で定義し、単純鏡映と呼ぶことにする。そして単純鏡映たちで生成される群

$$W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Pi \rangle$$

を Weyl 群と呼ぶ。これにより \mathfrak{h}, Q には Weyl 群による群作用を考えることができる。

次にルートと呼ばれる Q の中の特別な元の集合を定義しよう。まず、

$$\Delta_{\text{re}} = \bigcup_{\alpha \in \Pi} W\alpha$$

で Π の元の W 軌道全体を表し、 Δ_{re} の元のことを実ルートと呼ぶ。また、

$$B = \{\beta \in Q^+ \mid (\beta|\alpha) \leq 0 \ (\forall \alpha \in \Pi) \text{ かつ } \text{supp } \beta \text{ は連結}\}$$

とおいて*2、

$$\Delta_{\text{im}}^+ = WB$$

で B の Weyl 群軌道全体をあらわし、さらに

$$\Delta_{\text{im}} = \Delta_{\text{im}}^+ \cup -\Delta_{\text{im}}^+$$

と書いて、 Δ_{im} の元を虚ルートと呼ぶことにする。そして、

$$\Delta = \Delta_{\text{re}} \cup \Delta_{\text{im}}$$

でルート全体の集合を表す。また $\Delta^+ = \Delta \cap Q^+$ で正ルート全体の集合を表し、 $\Delta^- = -\Delta^+$ 、 $\Delta_{\text{re}}^\pm = \Delta_{\text{re}} \cap \Delta^\pm$ とおく。

注意 8.1.1. いくつかルートに対する一般的な注意をしておく。詳しくは V. Kac [Kc] 等を参照のこと。

i) $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$.

ii) W の作用は双線型形式 (\mid) を不変にする。

*2 この章の Π の場合、 B の定義で「 $\text{supp } \beta$ が連結」という条件は、自動的に成り立つので不要

iii) $\alpha \in \Delta$ は,

$$(\alpha|\alpha) \begin{cases} = 2 & (\alpha \in \Delta_{\text{re}}), \\ \leq 0 & (\alpha \in \Delta_{\text{im}}) \end{cases}$$

を満たす.

iv) $\alpha \in \Pi$ に対する単純鏡映 s_α は $\Delta^+ \setminus \{\alpha\}$ を保つ.

v) $\beta \in \Delta$ ならば $\text{supp } \beta$ は連結である.

以上の準備の下, n の分割とルート系との対応を見ていく. $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})_{\substack{0 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}} \in \mathcal{P}_{p+1}^{(n)}$ に対し, Q の元を次の様に対応させる.

$$l_{j,\nu} = m_{j,\nu+1} + m_{j,\nu+2} + \cdots + m_{j,n_j},$$

$$\alpha_{\mathbf{m}} = n\alpha_0 + \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j-1} l_{j,\nu} \alpha_{j,\nu}.$$

このとき, \mathbf{m} に対する ∂_l などの作用は $\alpha_{\mathbf{m}}$ への Weyl 群作用によって次の様に実現できる.

命題 8.1.2. i) $\text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{m}') = (\alpha_{\mathbf{m}}|\alpha_{\mathbf{m}'})$

が成り立つ.

ii) \mathbf{m} の $m_{j,\nu}$ と $m_{j,\nu+1}$ を入れ替えて,

$$\mathbf{m}' = (m_{0,1} \cdots, \cdots, m_{j,1} \cdots \overset{\nu}{m}_{j,\nu+1} \overset{\nu+1}{m}_{j,\nu} \cdots, \cdots)$$

とおくと,

$$\alpha_{\mathbf{m}'} = s_{\alpha_{j,\nu}}(\alpha_{\mathbf{m}}) \quad (8.1)$$

が成り立つ.

また, $l = (l_0, \dots, l_p)$ ($1 \leq l_j \leq n_j$) に対し

$$s_{l_j} = s_{\alpha_{j,1}} s_{\alpha_{j,2}} \cdots s_{\alpha_{j,l_j-1}}, \quad s_l = s_{l_0} \cdots s_{l_p}$$

とおくと,

$$\alpha_{\partial_l \mathbf{m}} = s_l^{-1} s_{\alpha_0} s_l(\alpha_{\mathbf{m}}) \quad (8.2)$$

が成り立つ. 特に $l = (1, \dots, 1)$ のときは,

$$\alpha_{\partial_l \mathbf{m}} = s_{\alpha_0}(\alpha_{\mathbf{m}}) \quad (8.3)$$

となる.

Proof. $\alpha_{\mathbf{m}} = n\alpha_0 + \sum l_{j,\nu} \alpha_{j,\nu}$, $\alpha_{\mathbf{m}'} = n'\alpha_0 + \sum l'_{j,\nu} \alpha_{j,\nu}$ とおく. 十分大きな p に対して

$$\text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{m}') = \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{\infty} m_{j,\nu} m'_{j,\nu} - (p-1)nn'$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^p (n - l_{j,1})(n' - l'_{j,1}) + \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{\infty} (l_{j,\nu} - l_{j,\nu+1})(l'_{j,\nu} - l'_{j,\nu+1}) - (p-1)nn' \\
&= 2nn' + 2 \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{\infty} l_{j,\nu} l'_{j,\nu} - \sum_{j=0}^p (nl'_{j,1} + n'l_{j,1}) + \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{\infty} (l_{j,\nu} l'_{j,\nu+1} + l'_{j,\nu} l_{j,\nu+1}) \\
&= (n\alpha_0 + \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{\infty} l_{j,\nu} \alpha_{j,\nu} | n'\alpha_0 + \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{\infty} l'_{j,\nu} \alpha_{j,\nu}) = (\alpha_{\mathbf{m}} | \alpha_{\mathbf{m}'}).
\end{aligned}$$

次に ii) を示す. (8.1) は明らかだろう. (8.2) は (8.1) と (8.3) より従うので, (8.3) を確かめればよい.

$$\begin{aligned}
s_{\alpha_0}(\alpha_{\mathbf{m}}) &= \left(n - 2n + \sum_{j=0}^p l_{j,1} \right) \alpha_0 + \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{\infty} l_{j,\nu} \alpha_{j,\nu} \\
&= \left(n - \sum_{j=0}^p m_{j,1} + (p-1)n \right) \alpha_0 + \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{\infty} l_{j,\nu} \alpha_{j,\nu} \\
&= \left(n - d_{(1,\dots,1)}(\mathbf{m}) \right) \alpha_0 + \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{\infty} l_{j,\nu} \alpha_{j,\nu} \\
&= \alpha_{\partial_{(1,\dots,1)} \mathbf{m}}. \quad \square
\end{aligned}$$

次に特性指数や Riemann 関式を Kac-Moody ルート系の言葉で表すことを考えよう. $\alpha \in \Pi$ を基底とする 1 次元の複素ベクトル空間の無限直積 $\prod_{\alpha \in \Pi} \mathbb{C}\alpha$ を考え, その元を

$$\lambda_0 \alpha_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{j,\nu} \alpha_{j,\nu} \quad (\lambda_0, \lambda_{j,\nu} \in \mathbb{C})$$

と書く. その中で $j \gg 1 \Rightarrow \lambda_{j,1} = 0$ となる元の全体を \mathfrak{h}^\vee と書く. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}^\vee$ より, \mathfrak{h}^\vee 上に W の作用が自然に拡張され, $\mathfrak{h}^\vee \times \mathfrak{h}$ 上には W 不変双線型形式が拡張される. 以下のように \mathfrak{h}^\vee の元

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &:= \frac{1}{2} \alpha_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (1 - \nu) \alpha_{j,\nu}, \\
\Lambda_{j,\nu} &:= \sum_{i=\nu+1}^{\infty} (\nu - i) \alpha_{j,i} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, \nu = 0, 1, 2, \dots), \\
\Lambda^0 &:= 2\Lambda_0 - 2\Lambda_{0,0} = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (1 + \nu) \alpha_{0,\nu} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (1 - \nu) \alpha_{j,\nu}, \\
\Lambda_{j,k}^0 &:= \Lambda_{j,0} - \Lambda_{k,0} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu (\alpha_{k,\nu} - \alpha_{j,\nu}) \quad (0 \leq j < k), \\
\Lambda(\lambda) &:= -\Lambda_0 - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\nu} \lambda_{j,i} \right) \alpha_{j,\nu} \\
&= -\Lambda_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{j,\nu} (\Lambda_{j,\nu-1} - \Lambda_{j,\nu}). \tag{8.4}
\end{aligned}$$

を定義すると

$$(\Lambda^0|\alpha) = (\Lambda_{j,k}^0|\alpha) = 0 \quad (\forall \alpha \in \Pi), \quad (8.5)$$

$$(\Lambda_{j,\nu}|\alpha_{j',\nu'}) = \delta_{j,j'}\delta_{\nu,\nu'} \quad (j, j' = 0, 1, \dots, \nu, \nu' = 1, 2, \dots),$$

$$(\Lambda_0|\alpha_i) = (\Lambda_{j,0}|\alpha_i) = \delta_{i,0} \quad (\forall i \in I),$$

$$|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}| = (\Lambda(\lambda) + \frac{1}{2}\alpha_{\mathbf{m}}|\alpha_{\mathbf{m}}), \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned} s_0(\Lambda(\lambda)) &= -\left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j,1} - 1\right)\alpha_0 + \Lambda(\lambda) \\ &= -\mu\Lambda^0 - \Lambda_0 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\nu} (\lambda_{0,i} - (1 + \delta_{i,0})\mu)\right)\alpha_{0,\nu} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\nu} (\lambda_{j,i} + (1 - \delta_{i,0})\mu)\right)\alpha_{j,\nu} \quad \left(\mu = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j,1} - 1\right) \end{aligned} \quad (8.7)$$

が成立することが容易に確かめられる。

さて, (8.5) に注意すると, \mathfrak{h}^\vee をその余次元 1 の商空間 $\tilde{\mathfrak{h}} := \mathfrak{h}^\vee / \mathbb{C}\Lambda^0$ で置き換えても, $\tilde{\mathfrak{h}}$ 上の W の作用や $\tilde{\mathfrak{h}} \times \mathfrak{h}$ 上の W 不変双線型形式が定義されることがわかる。また $\Lambda(\lambda)$ などの元も $\tilde{\mathfrak{h}}$ の元と見なすことができる。

実現可能な $\mathbf{m} \in \mathcal{P}_{p+1}^{(n)}$ をもつ Riemann 関式 $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ に対し, $\Lambda(\lambda) \in \tilde{\mathfrak{h}}$ を対応させ, $\tilde{\mathfrak{h}}$ の中で addition や ∂_ℓ によりそれがどのように変換されるか見てみよう。

$\{\lambda'_{\mathbf{m}'}\} = \partial_\ell\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ とすると $(\lambda_{j,1} = 0, m_{j,1} = n \ (j > p)$ とし, $m_{j,\nu} = 0$ に対する $\lambda_{j,\nu}$ は適当にとる)

$$\Lambda(\lambda') = s_{\alpha_\ell}(\Lambda(\lambda)), \quad \alpha_{\mathbf{m}'} = s_{\alpha_\ell}(\alpha_{\mathbf{m}}),$$

$\text{Ad}((x - c_j)^\tau)$ の作用で $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ が $\{\lambda'_{\mathbf{m}'}\}$ になったとすると

$$\Lambda(\lambda'') = \Lambda(\lambda) + \tau\Lambda_{0,j}^0$$

が成立することが (8.7) などからわかる。これをまとめると以下の定理が得られる。

定理 8.1.3. 以下の可換関式が得られる。

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Riemann 関式 } \{\lambda_{\mathbf{m}}\} \text{ をもつ Fuchs 型微分作用素 } P_{\mathbf{m}}\} & \rightarrow & \{(\Lambda(\lambda), \alpha_{\mathbf{m}})\} \\ \downarrow \text{ある分数化演算} & & \circlearrowleft s_{\alpha_\ell} \text{ や } +\tau\Lambda_{0,j}^0 \\ \{\text{Riemann 関式 } \{\lambda_{\mathbf{m}}\} \text{ をもつ Fuchs 型微分作用素 } P_{\mathbf{m}}\} & \rightarrow & \{(\Lambda(\lambda), \alpha_{\mathbf{m}})\} \end{array}$$

注意 8.1.4. i) Fuchs 型普遍方程式 $P_{\mathbf{m}}$ と Riemann 関式 $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ の組の集合への s_α ($\alpha \in \Pi$) の作用が定義される。実は W の元 w を s_α の積で表すことにより w の作用が定義できる。すなわちこの作用が積の書き方に依らないことが [O6, Theorem 9.5] によって示されている。

ii) 命題 6.1.3 において, $\text{idx } \mathbf{m}$ や $|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}|$ が middle convolution や addition によって不変なことを示したが, それらが (命題 8.1.2 i) や (8.6) にあるように) W 不変な双線型形式によって表されていることや (8.5) から自然に従う。

8.2 Deligne-Simpson-Katz の問題

今までに得たことを総合すると、次のような問題に答えることができる。

「勝手な n の分割の組 \mathbf{m} を与えたとき、それを実現する既約 Fuchs 型微分作用素 $P_{\mathbf{m}}$ が存在するための必要十分条件をみつけれよ。」

この問題は一階の Fuchs 型微分方程式系の場合には Kostov [Kz] におけるように Deligne-Simpson 問題とよばれており、W. Crawley-Boevey によって関係式付きの籠の表現論を用いて最終的に解決された。我々の扱う単独微分作用素に関しても同様の問題に言及した N. Katz の Rigid local systems [Kz] にならって、単独方程式の場合はこれを Deligne-Simpson-Katz の問題と呼ぶことにしよう。

Q^+ のなかで、

$$Q_{\text{par}}^+ := \left\{ c_0 \alpha_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{j,\nu} \alpha_{j,\nu} \in Q^+ \mid c_0 \geq c_{j,1} \geq \cdots \geq c_{j,\nu} \geq c_{j,\nu+1} \geq \cdots \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \right\}$$

なる部分集合を考える。勝手な $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})_{\substack{0 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}} \in \mathcal{P}$ に対し $\alpha_{\mathbf{m}}$ は Q_{par}^+ の元となり、逆に勝手な $\alpha = c_0 \alpha_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{j,\nu} \alpha_{j,\nu} \in Q_{\text{par}}^+$ に対し、

$$\mathbf{m}(\alpha) := (c_{j,\nu-1} - c_{j,\nu})_{\substack{j=0,1,2,\dots \\ \nu=1,2,\dots}}$$

は \mathcal{P} の元を与える。ただしここで $c_{j,0} = c_0$ とした。

また

$$Q_{\text{triv}}^+ := \left\{ \alpha = \sum_{i \in I} c_i \alpha_i \in Q_{\text{par}}^+ \mid c_0 = 1, c_{j,\nu} \in \{0, 1\} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, \nu = 1, 2, \dots) \right\}$$

としよう。ここで $Q_{\text{triv}}^+ \subset \Delta^+$ に注意しておく。

補題 8.2.1. i) $\alpha \in \Delta^+$ が $\text{supp } \alpha \ni \alpha_0$ となるならば、 $\alpha \in Q_{\text{par}}^+$ となる。

ii) $\alpha \in \Delta^+$ が $\text{supp } \alpha \ni \alpha_0$ であるとしよう。ここである $\alpha_i \in \Pi$ があって、 $\text{supp } s_{\alpha_i}(\alpha) \not\ni \alpha_0$ となるならば、 $\alpha_i = \alpha_0$ が成立し、ある $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ があって、

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_{j,1} + \alpha_{j,2} + \cdots + \alpha_{j,m} \in Q_{\text{triv}}^+.$$

と書ける。

Proof. i) を示す。 $\alpha = c_0 \alpha_0 + \sum_{j,\nu} c_{j,\nu} \alpha_{j,\nu}$ と書こう。今 $\text{supp } \alpha \ni \alpha_0$ より $\alpha \neq \alpha_0$ ならば、 $\alpha_i \in \Pi$ に対し $s_{\alpha_i}(\alpha) \in \Delta^{+*3}$ となる。正整数 μ に対し、より大きな正整数 ν を十分大きくとって、 $k \geq \nu - 1$ ならば $c_{j,k} = 0$ となるようにする。

$$\beta = \alpha_{j,\mu} + \alpha_{j,\mu+1} + \cdots + \alpha_{j,\nu} \in \Delta^+$$

*3 例えば V. Kac [Kc, lemma 1.3] を参照

に対する鏡映 s_β は $s_{\alpha_{j,\nu}} \cdots s_{\alpha_{j,\mu+1}} s_{\alpha_{j,\mu}} s_{\alpha_{j,\mu+1}} \cdots s_{\alpha_{j,\nu}}$ と表せ,

$$s_\beta(\alpha) = \alpha + (c_{j,\mu-1} - c_{j,\mu})\beta \in \Delta^+$$

であるから, $\alpha_{j,\nu}$ の係数より $c_{j,\mu-1} \geq c_{j,\mu}$ がわかる. ただしここで $c_{j,0} = c_0$ とした. よって

$$c_0 \geq c_{j,1} \geq c_{j,2} \geq \cdots$$

が従う.

ii) を示す. $\alpha_i = \alpha_0$ は明らか. もし二つ以上の $c_{j,1}$ が 0 でなかったとして, $\text{supp } s_{\alpha_0}(\alpha) \not\equiv \alpha_0$ であるならば, $\text{supp } s_{\alpha_0}(\alpha)$ は連結でなくなるので $s_{\alpha_0}(\alpha) \in \Delta$ に矛盾. よってただ一つの $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ があって,

$$\alpha = c_0\alpha_0 + c_{j,1}\alpha_{j,1} + \cdots + c_{j,n_j-1}\alpha_{j,n_j-1}$$

と書ける. さらに i) より $c_0 \geq c_{j,1} \geq c_{j,2} \geq \cdots$ が成り立っている. $c_0 > c_{j,\nu}$ となる最初の ν を ν_0 とおくと, $c_{j,\nu_0} > 0$ ならば $s_{\alpha_{j,1}} \cdots s_{\alpha_{j,\nu_0-1}}(\alpha) \neq \alpha_0$ であるが, $s_{\alpha_0} s_{\alpha_{j,1}} \cdots s_{\alpha_{j,\nu_0-1}}(\alpha)$ の α_0 の係数は負となって矛盾. よって $c_{j,\nu_0} = 0$. また, $(\alpha|\alpha) = 2$ であることを考慮すれば主張が従う. \square

定理 8.2.2 (Deligne-Simpson-Katz の問題). $\alpha \in Q_{\text{par}}^+$ をとってくる. このとき $\mathbf{m}(\alpha)$ を実現し, Riemann 図式 $\{\lambda_{\mathbf{m}(\alpha)}\}$ をもつ既約な微分作用素 $P_{\mathbf{m}(\alpha)} \in \overline{W}[x; \lambda]$ が存在するのは, $\text{supp } \alpha \ni \alpha_0$ であり,

$$\alpha \in \begin{cases} \Delta^+ & ((\alpha|\alpha) \neq 0), \\ \Delta^+ \text{ かつ } \alpha \text{ は素} & ((\alpha|\alpha) = 0) \end{cases}$$

となるとき, かつその時に限る. ただし $\mathbb{Z}\alpha = \mathbb{R}\alpha \cap Q$ のとき, α が素と定義する.

*Proof.**4 $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})_{\substack{0 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}} \in \mathcal{P}_{p+1}$ が既約に実現可能で, $P \in \overline{W}[x; \lambda]$ が $x = c_0 = \infty, c_1, \dots, c_p$ に確定特異点を持ち, $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ を実現する既約な Fuchs 型微分作用素とする.

定理 6.2.5 より, $\text{ord } P > 1$ ならば任意の $l = (l_0, \dots, l_p)$ ($1 \leq l_j \leq n_j$) に対し, $\text{ord } \partial_l P \geq 1$ となる. また定理 6.3.2 より, ∂_l の繰り返しで 1 階の作用素にできるのは P が既約かつ $\text{Pid } \mathbf{m} = 0$, すなわち $\text{idx } \mathbf{m} = (\alpha_{\mathbf{m}}|\alpha_{\mathbf{m}}) = 2$ のときに限る. またこの時は一階の作用素のスペクトル型 \mathbf{m} は自明な n の分割の組となるので $\alpha(\mathbf{m}) \in Q_{\text{triv}}^+ \subset \Delta_{\text{re}}$.

一方 $(\alpha_{\mathbf{m}}|\alpha_{\mathbf{m}}) \neq 2$ ならば, ∂_l を何度繰り返しても微分作用素の階数 > 1 であるから, $W\alpha_{\mathbf{m}} \subset Q_{\text{par}}^+ \subset Q^+$ であることがわかる. このとき $(\alpha_{\mathbf{m}}|\alpha_{\mathbf{m}}) \leq 0$ かつ $\alpha_{\mathbf{m}} \in \Delta_{\text{im}}$ であることを示そう.

まず $(\alpha_{\mathbf{m}}|\alpha_{\mathbf{m}}) > 0$ と仮定する. $W\alpha_{\mathbf{m}} \cap Q^+$ の中でもっとも高さが小さい元をとってきて β とおく. $(\beta|\beta) > 0$ より, ある $\alpha_i \in \Pi$ があって $(\beta|\alpha_i) > 0$ となる. もし $\beta \neq \alpha_i$ ならば $h(s_i(\beta)) < h(\beta)$ となり β のとり方に矛盾する. よって $\beta = \alpha_i$ となって, $(\beta|\beta) = (\alpha_i|\alpha_i) = 2$ となる. 一方 $(\beta|\beta) = (\alpha_{\mathbf{m}}|\alpha_{\mathbf{m}}) \neq 2$ なので矛盾. よって $(\alpha_{\mathbf{m}}|\alpha_{\mathbf{m}}) \leq 0$ がわかった.

このとき先と同様に $W\alpha_{\mathbf{m}} \cap Q^+$ の中から高さが最小のものを β とおくと, $(\beta, \beta) \leq 0$ より, すべての $\alpha_i \in \Pi$ に対して $(\beta, \alpha_i) \leq 0$ となる. また $\text{supp } \beta$ は連結なので $\beta \in B$. 従って $\alpha_{\mathbf{m}} \in WB = \Delta_{\text{im}}$.

*4 この定理は, 既に示したことの言い換えに過ぎないので自明であるが, 一部ルート系の言葉による証明に言い換える

十分性を示す．補題 8.2.1 より， $\alpha \in Q_{\text{par}}^+$ が定理の条件を満たすならば， Π の元の列 β_1, \dots, β_l があって，

$$s_{\beta_j} \cdots s_{\beta_1}(\alpha) \in Q_{\text{par}}^+ \quad (1 \leq j \leq l)$$

であり，

$$s_{\beta_l} \cdots s_{\beta_1}(\alpha) \in \begin{cases} Q_{\text{triv}}^+ & (\alpha|\alpha) = 2, \\ B & (\alpha|\alpha) \leq 0 \end{cases}$$

となるようにできる．従って，定理 6.4.3 と定理 7.4.1 より $\mathbf{m}(\alpha)$ は実現可能である．また既約であることは定理 6.3.2，命題 7.3.1，命題 6.2.2 より従う． \square

$\mathbf{m} \in \mathcal{P}$ を既約 rigid とするとき，Riemann 関式 $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ をもつ Fuchs 型微分方程式 $P_{\mathbf{m}}u = 0$ の既約条件は，Kac-Moody ルート系の言葉で明快に記述できるので，それを紹介しておこう．

$\alpha_0 = w(\alpha_{\mathbf{m}})$ となる $w \in W$ が存在する． s_{α} ($\alpha \in \Pi$) の積でこの w を表したとき，その長さが最小となる w が一意に決まるので (cf. [O6, Proposition 9.9])，それを $w_{\mathbf{m}}$ と書き

$$\Delta(\mathbf{m}) := \Delta_{\text{re}}^+ \cap w_{\mathbf{m}}^{-1} \Delta_{\text{re}}^-$$

とおく． $\Delta(\mathbf{m})$ の元の数， w を s_{α} の積で書いたときの最小の長さに等しい．

定理 8.2.3 (既約性判定条件 [O6, Theorem 12.10, 12.13]). 既約 rigid な $\mathbf{m} \in \mathcal{P}$ に対し Riemann 関式 $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ を持つ Fuchs 型方程式 $Pu = 0$ が既約となるための必要十分条件は

$$(\Lambda(\lambda)|\alpha) \notin \mathbb{Z} \quad (\forall \alpha \in \Delta(\mathbf{m})).$$

この条件が成り立つとき， $x = c_j$ での局所モノドロミー行列は $L(m_{i,1}, \dots, m_{j,n_j}; e(\lambda_{j,1}), \dots, e(\lambda_{j,n_j}))$ に共役となる*5．よって，特に $\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'} \in \mathbb{Z}$ となる j と $1 \leq \nu < \nu' \leq n_j$ があると，rigid で既約ならば，対応する局所モノドロミー行列は対角化可能ではない．

*5 [O6] における locally non-degenerate という条件に対応する

第 9 章

接続問題

Fuchs 型微分方程式の場合，各特異点の周りの局所解は比較的わかりやすい．従って解の大域的性質を知るためには，各特異点での局所解が他の特異点へどう解析接続されるかを知ることが重要となる．

9.1 Gauss の超幾何関数の接続問題

まず Gauss の超幾何関数を例にとって接続問題を見てみよう．すなわち $x = 0$ での局所解 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ が他の特異点 $x = 1$ での局所解を用いてどう書けるかを見る．Gauss の超幾何微分方程式の Riemann 図式は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1 - \gamma & \gamma - \alpha - \beta & \beta \end{array} \right\}$$

であったから， $x = 0$ の近傍での正則関数 $\phi(x)$ ($\phi(0) \neq 0$) と定数 $C_{\alpha, \beta, \gamma}$ があって，

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \phi(1-x) + C_{\alpha, \beta, \gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1+a_1(1-x)+a_2(1-x)^2+\cdots) \quad (9.1)$$

と書ける．この定数 $C_{\alpha, \beta, \gamma}$ を求めてみよう．

準備としていくつか基本的な関係式を思い出しておく．

$$\frac{d}{dx}F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; x), \quad (9.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\alpha, \beta, \gamma+n; x) = 1 \quad (|x| \leq 1), \quad (9.3)$$

$$(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}F(\alpha, \beta, \gamma; x) = F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, \gamma; x). \quad (9.4)$$

これらはいずれも $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ の定義から容易に従う．まず (9.1) の両辺を x で微分してみよう．

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; x) \\ &= -\phi'(1-x) + C_{\alpha, \beta, \gamma}(\alpha+\beta-\gamma)(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}(1+b_1(1-x)+\cdots) \end{aligned}$$

よって

$$C_{\alpha+1, \beta+1, \gamma+1} = \frac{\gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\alpha\beta}C_{\alpha, \beta, \gamma}$$

となる．一方 (9.4) より，

$$F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma; x) = (1 - x)^{\alpha + \beta - \gamma} \phi(1 - x) + C_{\alpha, \beta, \gamma} (1 + a_1 + (1 - x) + \dots)$$

であるが，(9.3) より，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma + n; x) = 1 \quad (|x| \leq 1)$$

なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{\alpha + n, \beta + n, \gamma + n} = 1$$

が従う．よって

$$C_{\alpha, \beta, \gamma} = \frac{(\alpha)_n (\beta)_n C_{\alpha + n, \beta + n, \gamma + n}}{(\gamma)_n (\alpha + \beta - \gamma)_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n (\alpha + \beta - \gamma)_n} = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}.$$

9.2 接続公式

$\mathbf{m} \in \mathcal{P}_{p+1}$ を実現可能であるとし，その普遍型 $P_{\mathbf{m}}$ は次の Riemann 図式を持つとしよう．

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x = 0 & c_1 = 1 & \cdots & c_j & \cdots & c_p = \infty \\ [\lambda_{0,1}]_{(m_{0,1})} & [\lambda_{1,1}]_{(m_{1,1})} & \cdots & [\lambda_{j,1}]_{(m_{j,1})} & \cdots & [\lambda_{p,1}]_{(m_{p,1})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\lambda_{0,n_0}]_{(m_{0,n_0})} & [\lambda_{1,n_1}]_{(m_{1,n_1})} & \cdots & [\lambda_{j,n_j}]_{(m_{j,n_j})} & \cdots & [\lambda_{p,n_p}]_{(m_{p,n_p})} \end{array} \right\}. \quad (9.5)$$

ここでは $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_p = \infty$, $c_j \notin [0, 1]$ ($j = 2, \dots, p-1$) とした．

定義 9.2.1 (接続係数)． $\lambda_{j,\nu}$ を Fuchs の関係式を満たす一般の値に取っておく． $u_0^{\lambda_0, \nu_0}$, $u_1^{\lambda_1, \nu_1}$ をそれぞれ $P_{\mathbf{m}} u = 0$ の $x = 0$, $x = 1$ での局所解で以下のように正規化されたものとする．すなわち，

$$\begin{aligned} u_0^{\lambda_0, \nu_0} &\equiv x^{\lambda_0, \nu_0} \pmod{x^{\lambda_0, \nu_0 + 1} \mathcal{O}_0}, \\ u_1^{\lambda_1, \nu_1} &\equiv (1 - x)^{\lambda_1, \nu_1} \pmod{(1 - x)^{\lambda_1, \nu_1 + 1} \mathcal{O}_1}. \end{aligned}$$

いま $m_{0,\nu_0} = 1$ とすると $u_0^{\lambda_0, \nu_0}$ は一意に定まる．このとき， $u_0^{\lambda_0, \nu_0}$ を $(0, 1) \in \mathbb{R}$ にそって $x = 1$ まで解析接続すると，

$$u_0^{\lambda_0, \nu_0} = c(0 : \lambda_0, \nu_0 \rightsquigarrow 1 : \lambda_1, \nu_1) u_1^{\lambda_1, \nu_1} + (\text{他の特性指数に対応する } x = 1 \text{ での局所解の線型結合})$$

と書ける．この $u_1^{\lambda_1, \nu_1}$ の係数 $c(0 : \lambda_0, \nu_0 \rightsquigarrow 1 : \lambda_1, \nu_1)$ を $u_0^{\lambda_0, \nu_0}$ の $u_1^{\lambda_1, \nu_1}$ に対する接続係数と呼ぶ．なお， $c(0 : \lambda_0, \nu_0 \rightsquigarrow 1 : \lambda_1, \nu_1)$ は，混乱のない場合は特異点の位置を省略し，単に $c(\lambda_0, \nu_0 \rightsquigarrow \lambda_1, \nu_1)$ と書いてもよいものとする*1．

ここでは $x = 0$ から $x = 1$ への接続係数のみを定義したが他の点でも同様に定義される．

これまでに $\text{RAd}(\partial^{-\mu})P$ によって P から新しい微分方程式を作り，さらに解は $Pu = 0$ の解から Riemann-Liouville 変換 $I_c^\mu u$ によって与えられることを見てきた．従って u の接続係数が $I_c^\mu u$ でどのように変化するかがわかれば，帰納的に接続係数を求めていけることになる．

*1 定義から， $c(\lambda_0, \nu_0 \rightsquigarrow \lambda_1, \nu_1)$ は $\lambda_{j,\nu}$ とアクセサリー・パラメーターの有理型関数となることが従う

命題 9.2.2. 区間 $[0, 1]$ で連続な関数 $u(x)$ に対して次の積分変換を定義する .

$$\begin{aligned} T_{a,b}^\mu u(x) &= x^{-a-\mu}(1-x)^{-b-\mu} I_0^\mu x^a (1-x)^b u(x), \\ S_{a,b}^\mu u(x) &= x^{-a-\mu} I_0^\mu x^a (1-x)^b u(x). \end{aligned}$$

ここで $\operatorname{Re} a \geq 0$, $\operatorname{Re} \mu > 0$, $0 < x < 1$ とする . このとき , $\operatorname{Re} b + \operatorname{Re} \mu < 0$ ならば $T_{a,b}^\mu u(x)$ は $[0, 1]$ で連続な関数に , また , $\operatorname{Re} b + \operatorname{Re} \mu > 0$ ならば $S_{a,b}^\mu u(x)$ が $[0, 1]$ で連続な関数に拡張され ,

$$\begin{aligned} T_{a,b}^\mu u(0) &= S_{a,b}^\mu u(0) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\mu+1)} u(0), \\ \frac{T_{a,b}^\mu u(1)}{T_{a,b}^\mu u(0)} &= \frac{u(1)}{u(0)} C_{a,b}^\mu, \quad C_{a,b}^\mu = \frac{\Gamma(a+\mu+1)\Gamma(-\mu-b)}{\Gamma(a+1)\Gamma(-b)}, \\ \frac{S_{a,b}^\mu u(1)}{S_{a,b}^\mu u(0)} &= \frac{1}{u(0)} \frac{\Gamma(a+\mu+1)}{\Gamma(\mu)\Gamma(a+1)} \int_0^1 t^a (1-t)^{b+\mu-1} u(t) dt \end{aligned}$$

が成り立つ .

Proof. $\operatorname{Re} a \geq 0$, $0 < \operatorname{Re} \mu < -\operatorname{Re} b$ と仮定しよう . すると ,

$$\begin{aligned} \Gamma(\mu) T_{a,b}^\mu u(x) &= x^{-a-\mu}(1-x)^{-b-\mu} \int_0^x t^a (1-t)^b (x-t)^{\mu-1} u(t) dt \quad (t = xs_1, 0 < x < 1) \\ &= (1-x)^{-b-\mu} \int_0^1 s_1^a (1-s_1)^{\mu-1} (1-xs_1)^b u(xs_1) ds_1 \\ &= \int_0^1 s_1^a \left(\frac{1-s_1}{1-x}\right)^\mu \left(\frac{1-xs_1}{1-x}\right)^b u(xs_1) \frac{ds_1}{1-s_1} \\ &= \int_0^1 (1-s_2)^a \left(\frac{s_2}{1-x}\right)^\mu \left(1+\frac{xs_2}{1-x}\right)^b u(x-xs_2) \frac{ds_2}{s_2} \quad (s_1 = 1-s_2) \\ &= \int_0^{\frac{1}{1-x}} (1-s(1-x))^a s^\mu (1+xs)^b u(x-x(1-x)s) \frac{ds}{s} \quad (s_2 = (1-x)s). \end{aligned}$$

ここで

$$|s_1^a (1-s_1)^{\mu-1} (1-xs_1)^b u(xs_1)| \leq \max\{(1-s_1)^{\operatorname{Re} \mu-1}, 1\} \cdot 3^{-\operatorname{Re} b} \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|$$

が $0 \leq s_1 < 1$, $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ で成り立つから , $T_{a,b}^\mu u(x)$ は $x \in [0, \frac{2}{3})$ で連続 . また ,

$$\left| (1-s(1-x))^a s^{\mu-1} (1+xs)^b u(x-x(1-x)s) \right| \leq s^{\operatorname{Re} \mu-1} \left(1+\frac{s}{2}\right)^{\operatorname{Re} b} \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|$$

が $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, $0 < s \leq \frac{1}{1-x}$ で成り立つので , $T_{a,b}^\mu u(x)$ は $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ で連続となる . よって $T_{a,b}^\mu u(x)$ は $x \in [0, 1]$ で連続な関数を定義し ,

$$\begin{aligned} T_{a,b}^\mu u(0) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 (1-s_2)^a s_2^\mu u(0) \frac{ds_2}{s_2} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\mu+1)} u(0), \\ T_{a,b}^\mu u(1) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty s^\mu (1+s)^b u(1) \frac{ds}{s} \quad \left(t = \frac{s}{1+s}\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\mu-1} (1-t)^{-b-2} u(1) dt = \frac{\Gamma(-\mu-b)}{\Gamma(-b)} u(1) \end{aligned}$$

となる . $S_{a,b}^\mu$ も同様 (より易しい). □

例 9.2.3 (Jordan-Pochhammer 関数, 一般超幾何関数 ${}_3F_2$). この命題を用いて実際に Jordan-Pochhammer 関数と一般超幾何関数 ${}_3F_2$ の接続係数を求めてみよう.

まず,

$$u_0^{\lambda_0+\mu} = \int_0^x t^{\lambda_0} (1-t)^{\lambda_1} \left(\prod_{j=2}^{p-1} \left(1 - \frac{t}{c_j}\right)^{\lambda_j} \right) (x-t)^{\mu-1} dt$$

は Riemann 図式

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x=0 & c_1=1 & \cdots & c_j & \cdots & c_p=\infty \\ [0]_{(p-1)} & [0]_{(p-1)} & \cdots & [0]_{(p-1)} & \cdots & [1-\mu]_{(p-1)} \\ \lambda_0+\mu & \lambda_1+\mu & \cdots & \lambda_j+\mu & \cdots & -\sum_{\nu=0}^{p-1} \lambda_\nu - \mu \end{array} \right\}$$

を持つ Jordan-Pochhammer 方程式の解となる. すると前の命題より,

$$c(0 : \lambda_0 + \mu \rightsquigarrow 1 : \lambda_1 + \mu) = \frac{\Gamma(\lambda_0 + \mu + 1)\Gamma(-\lambda_1 - \mu)}{\Gamma(\lambda_0 + 1)\Gamma(-\lambda_1)} \prod_{j=2}^{p-1} \left(1 - \frac{1}{c_j}\right)^{\lambda_j},$$

$$c(0 : \lambda_0 + \mu \rightsquigarrow 1 : 0) = \frac{\Gamma(\lambda_0 + \mu + 1)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda_0 + 1)} \int_0^1 t^{\lambda_0} (1-t)^{\lambda_1+\mu-1} \prod_{j=1}^{p-1} \left(1 - \frac{t}{c_j}\right)^{\lambda_j} dt$$

であることがわかる.

さらに ${}_3F_2$ の満たす一般超幾何方程式は

$$P = \text{RAd}(\partial^{-\mu'}) \text{RAd}(x^{\lambda'}) \text{RAd}(\partial^{-\mu}) \text{RAd}(x^{\lambda_0}(1-x)^{\lambda_1}) \partial$$

によって $Pu = 0$ と書くことができ, Riemann 図式は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ 0 & [0]_{(2)} & 1-\mu' \\ \lambda'+\mu' & & 1-\lambda'-\mu-\mu' \\ \lambda_0+\lambda'+\mu+\mu' & \lambda_1+\mu+\mu' & -\lambda_0-\lambda_1-\lambda'-\mu-\mu' \end{array} \right\}$$

となる. 従って

$$\begin{aligned} c(\lambda_0 + \lambda' + \mu + \mu' \rightsquigarrow \lambda_1 + \mu + \mu') &= C_{\lambda_0, \lambda_1}^{\mu} \cdot C_{\lambda_0 + \lambda' + \mu, \lambda_1 + \mu}^{\mu'} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda_0 + \mu + 1)\Gamma(-\lambda_1 - \mu)}{\Gamma(\lambda_0 + 1)\Gamma(-\lambda_1)} \cdot \frac{\Gamma(\lambda_0 + \lambda' + \mu + \mu' + 1)\Gamma(-\lambda_1 - \mu - \mu')}{\Gamma(\lambda_0 + \lambda' + \mu + 1)\Gamma(-\lambda_1 - \mu)} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda_0 + \mu + 1)\Gamma(\lambda_0 + \lambda' + \mu + \mu' + 1)\Gamma(-\lambda_1 - \mu - \mu')}{\Gamma(\lambda_0 + 1)\Gamma(-\lambda_1)\Gamma(\lambda_0 + \lambda' + \mu + 1)} \end{aligned}$$

となる.

$\text{RAd}((x-c)^\tau)$ や $\text{RAd}(\partial^{-\mu})$ をほどこすことによって接続係数がどう変わるかを次で見る.

定理 9.2.4. $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_p = \infty$, $c_j \in \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ ($j = 2, \dots, p-1$) とする.

$$\text{RAd} \left(x^{\lambda_{0,1}} \prod_{j=1}^{p-1} \left(1 - \frac{x}{c_j}\right)^{\lambda_{j,1}} \right) \circ \text{RAd} \left(\partial^{1-\sum_{k=0}^p \lambda_{k,1}} \right) \circ \text{RAd} \left(x^{-\lambda_{0,1}} \prod_{j=1}^{p-1} \left(1 - \frac{x}{c_j}\right)^{-\lambda_{j,1}} \right) \quad (9.6)$$

の作用によって Riemann 図式は

$$\begin{aligned} \{\lambda_{\mathbf{m}}\} &= \{[\lambda_{j,\nu}]_{(m_{j,\nu})}\} = \left\{ \begin{array}{cc} x = c_j \ (j = 0, \dots, p-1) & \infty \\ [\lambda_{j,1}]_{(m_{j,1})} & [\lambda_{p,1}]_{(m_{p,1})} \\ [\lambda_{j,\nu}]_{(m_{j,\nu})} & [\lambda_{p,\nu}]_{(m_{p,\nu})} \end{array} \right\} \\ \mapsto \{\lambda'_{\mathbf{m}'}\} &= \{[\lambda'_{j,\nu}]_{(m'_{j,\nu})}\} \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} x = c_j \ (j = 0, \dots, p-1) & \infty \\ [\lambda_{j,1}]_{(m_{j,1}-d)} & [\lambda_{p,1} - 2 \sum_{k=0}^p \lambda_{k,1} + 2]_{(m_{p,1}-d)} \\ [\lambda_{j,\nu} + \sum_{k=0}^p \lambda_{k,1} - 1]_{(m_{j,\nu})} & [\lambda_{p,\nu} - \sum_{k=0}^p \lambda_{k,1} + 1]_{(m_{p,\nu})} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

となることは前に見た．このとき， $m_{0,n_0} = 1$ ， $n_0 > 1$ ， $n_1 > 1$ と仮定すると，

$$\frac{c(\lambda'_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda'_{1,n_1})}{\Gamma(\lambda'_{0,n_0} - \lambda'_{0,1} + 1) \cdot \Gamma(\lambda'_{1,1} - \lambda'_{1,n_1})} = \frac{c(\lambda_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda_{1,n_1})}{\Gamma(\lambda_{0,n_0} - \lambda_{0,1} + 1) \cdot \Gamma(\lambda_{1,1} - \lambda_{1,n_1})}$$

が成り立つ．

Proof. 作用素 (9.6) を簡単のため Q と書く． $\mu = \sum_{k=0}^p \lambda_{k,1} - 1$ とおく．このとき，

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x = 0 & 1 & c_j & \infty \\ [\lambda_{0,1} - \lambda_{0,n_0}]_{(m_{0,1})} & [\lambda_{1,1} - \lambda_{1,n_1}]_{(m_{1,1})} & [\lambda_{j,1}]_{(m_{j,1})} & [\lambda_{p,1} + \lambda_{0,n_0} + \lambda_{1,n_1}]_{(m_{p,1})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\lambda_{0,\nu} - \lambda_{0,n_0}]_{(m_{0,\nu})} & [\lambda_{1,\nu} - \lambda_{1,n_1}]_{(m_{1,\nu})} & [\lambda_{j,\nu}]_{(m_{j,\nu})} & [\lambda_{p,\nu} + \lambda_{0,n_0} + \lambda_{1,n_1}]_{(m_{p,\nu})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [0]_{(m_{0,n_0})} & [0]_{(m_{1,n_1})} & \vdots & \vdots \end{array} \right\} \\ \xrightarrow{x^{\lambda_{0,n_0}}(1-x)^{\lambda_{1,n_1}}} \left\{ \begin{array}{cc} x = c_j & \infty \\ [\lambda_{j,\nu}]_{(m_{j,\nu})} & [\lambda_{p,\nu}]_{(m_{p,\nu})} \end{array} \right\} \xrightarrow{Q} \{[\lambda'_{j,\nu}]_{m'_{j,\nu}}\}$$

である．初めの Riemann 図式の $[0]_{(m_{0,n_0})}$ に対応する解を $u_0(x)$ と書くと， $[\lambda'_{0,n_0}]_{(m_{0,n_0})}$ に対応する解は

$$\begin{aligned} x^{\lambda_{0,1}} \prod_{j=1}^{p-1} \left(1 - \frac{x}{c_j}\right)^{\lambda_{j,1}} \times I_0^{\lambda_1} x^{\lambda_{0,n_0} - \lambda_{0,1}} (1-x)^{\lambda_{1,n_1} - \lambda_{1,1}} \prod_{j=2}^{p-1} \left(1 - \frac{x}{c_j}\right)^{-\lambda_{j,1}} u(x) \\ = \prod_{j=2}^{p-1} \left(1 - \frac{x}{c_j}\right)^{\lambda_{j,1}} T_{\lambda_{0,n_0} - \lambda_{0,1}, \lambda_{1,n_1} - \lambda_{1,1}}^{\lambda_1} \prod_{j=2}^{p-1} \left(1 - \frac{x}{c_j}\right)^{-\lambda_{j,1}} u(x). \end{aligned}$$

よって

$$C_{\lambda_{0,n_0} - \lambda_{0,1}, \lambda_{1,n_1} - \lambda_{1,1}}^{\mu} = \frac{\Gamma(\lambda_{0,n_0} - \lambda_{0,1} + \mu + 1) \cdot \Gamma(\lambda_{1,1} - \lambda_{1,n_1} - \mu)}{\Gamma(\lambda_{0,n_0} - \lambda_{0,1} + 1) \cdot \Gamma(\lambda_{1,1} - \lambda_{1,n_1})}$$

であることと， $\text{Ad}((x-c)^\tau)$ による接続係数の自明な対応から主張が従う． \square

一般化特性指数が一般の値であるとき，既約な Fuchs 型微分方程式は $\text{Pid}x_{\mathbf{m}} = 0$ ならば適当な addition と ∂_l の繰返しで一階の Fuchs 型微分方程式に帰着できた．一階の Fuchs 型微分方程式の接続係数は自明なので，この場合は定理 9.2.4 から帰納的に接続係数を定めることができる．

すこし記号の準備をする．

定義 9.2.5 (直和分解). $\mathbf{m} \in \mathcal{P}$ が実現可能であり, $\mathbf{m} = \mathbf{m}' + \mathbf{m}''$ と実現可能な \mathbf{m}' と \mathbf{m}'' の和に分解できているとする. ここでさらに (7.7) の記号のもとに

$$\text{Ridx } \mathbf{m} = \text{Ridx } \mathbf{m}' + \text{Ridx } \mathbf{m}''$$

が成り立つとき, \mathbf{m} は \mathbf{m}' と \mathbf{m}'' に直和分解するといいい,

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}''$$

とかくことにする.

注意 9.2.6. rigid な $\mathbf{m}, \mathbf{m}', \mathbf{m}''$ に対して直和分解 $\mathbf{m} = \mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}''$ が成り立つならば, $\text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{m}'') = \frac{1}{2}(\text{idx}(\mathbf{m}) - \text{idx}(\mathbf{m}') - \text{idx}(\mathbf{m}'')) = -1$ となり, 逆に $\mathbf{m}', \mathbf{m}''$ が rigid で $\text{idx}(\mathbf{m}', \mathbf{m}'') = -1$ ならば, $s_{\alpha_{\mathbf{m}'}}(\alpha_{\mathbf{m}'}) = \alpha_{\mathbf{m}'} + \alpha_{\mathbf{m}''}$ となるので, $\mathbf{m} = \mathbf{m}' + \mathbf{m}''$ は rigid で上の直和分解が成り立つ.

補題 9.2.7. 実現可能な $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})_{\substack{0 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}} \in \mathcal{P}$ で, $m_{k,1} > 0, m_{k,n_k} = 1, n_k > 1$ となる k を固定し, $\mathbf{a}^{(k)} \in \mathcal{P}^{(1)}$ を $a_{j,1}^{(k)} = 1 (j \neq k), a_{k,n_k}^{(k)} = 1$ となるように定義する.

i) $d(\mathbf{m}) = m_{k,1}$ ならば, $\mathbf{m}'' = \mathbf{m} - \mathbf{a}^{(k)}$ とおくと, 直和分解 $\mathbf{m} = \mathbf{a}^{(k)} \oplus \mathbf{m}''$ が成り立つ.

ii) 直和分解 $\mathbf{m} = \mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}''$ が存在し, \mathbf{m}, \mathbf{m}'' は素で, $m'_{k,n_k} = 1$ とする. もし $\partial \mathbf{m}'$ が well-defined でないなら, $d(\mathbf{m}) = m_{k,1}$ で $\mathbf{m}' = \mathbf{a}^{(k)}$ となる.

Proof. i) $l = (l_0, \dots, l_p), l_j = 1 (j \neq k), l_k = n_k$ とおくと $d_l(\mathbf{m}) = m_{0,1} + \dots + m_{p,1} - (p-1) \text{ord } \mathbf{m} - m_{k,1} + m_{k,n_k} = d(\mathbf{m}) - m_{k,1} + m_{k,n_k} = 1$ より $\partial_l(\mathbf{m}) = \mathbf{m} - \mathbf{a}^{(k)}$ となるので, 主張の直和分解が成り立つ.

ii) 仮定から, $\mathbf{m}' = \mathbf{a}^{(k)}$ および $\text{idx } \mathbf{m} = \text{idx } \mathbf{m}''$ がわかり, $d_l(\mathbf{m}) = \text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{a}^{(k)}) = 1$ となることから $d(\mathbf{m}) = d_l(\mathbf{m}) - m_{k,n_k} + m_{k,1} = m_{k,1}$ が得られる. \square

定理 9.2.8. Fuchs 型微分作用素 P が Riemann 関式 (5.9) を持つとする. また $\lambda_{j,\nu}$ は一般の値であるとし, $\text{Pidx } \mathbf{m} = 0$ であるとする. さらに $m_{0,n_0} = m_{1,n_1} = 1$ かつ $n_0 > 1, n_1 > 1$ であるとする. このとき, ある複素数 L_j があって

$$c(\lambda_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda_{1,n_1}) = \frac{\prod_{\nu=1}^{n_0-1} \Gamma(\lambda_{0,n_0} - \lambda_{0,\nu} + 1) \prod_{\nu=1}^{n_1-1} \Gamma(\lambda_{1,\nu} - \lambda_{1,n_1})}{\prod_{\substack{\mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}'' = \mathbf{m} \\ m'_{0,n_0} = m''_{1,n_1} = 1}} \Gamma(|\{\lambda_{\mathbf{m}'}\}|) \prod_{j=2}^{p-1} \left(1 - \frac{1}{c_j}\right)^{-L_j}$$

が成り立つ.

Proof. $\text{ord } \mathbf{m}$ に関する帰納法で証明しよう. まず $\text{ord } \mathbf{m} > 1$ とする. 簡単のため $m_{j,1} = \max\{m_{j,\nu} \mid 1 \leq \nu \leq n_j\}$ ($j = 0, \dots, p$) であるとする. このとき ∂P を考えれば, $d(\mathbf{m}) > 0$ なので $\text{ord } \partial \mathbf{m} < \text{ord } \mathbf{m}$ である. ここで $\mathbf{m}' = \partial \mathbf{m}, \{\lambda_{\mathbf{m}'}\} = \partial\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ とおく.

帰納法の仮定から

$$c(\lambda'_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda'_{1,n_1}) = \frac{\prod_{\nu=\epsilon_0}^{n_0-1} \Gamma(\lambda'_{0,n_0} - \lambda'_{0,\nu} + 1) \prod_{\nu=\epsilon_1}^{n_1-1} \Gamma(\lambda'_{1,\nu} - \lambda'_{1,n_1})}{\prod_{\substack{\mathbf{a}' \oplus \mathbf{b}' = \mathbf{m}' \\ a'_{0,n_0} = b'_{1,n_1} = 1}} \Gamma(|\{\lambda'_{\mathbf{a}'}\}|) \prod_{j=2}^{p-1} \left(1 - \frac{1}{c_j}\right)^{-L_j}}, \quad \epsilon_i = \begin{cases} 1 & (m_{i,1} > d(\mathbf{m})), \\ 2 & (m_{i,1} = d(\mathbf{m})). \end{cases}$$

まず, $m_{i,1} > d(\mathbf{m})$ ($i = 1, 2$) の場合を考える. \mathbf{m} が

$$\mathbf{m} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}, \quad a_{0,n_0} = b_{1,n_1} = 1 \quad (9.7)$$

と分解できているとすると, 補題 9.2.7 より, $\mathbf{m}' = \partial \mathbf{m} = \partial \mathbf{a} \oplus \partial \mathbf{b}$ も同様の分解を与える. また, $|\partial_1 \{\lambda_{\mathbf{m}}\}| = |\{\lambda_{\mathbf{m}}\}|$ であったことを思い出すと,

$$\prod_{\substack{\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{m} \\ a_{0,n_0} = b_{1,n_1} = 1}} \Gamma(|\{\lambda_{\mathbf{a}}\}|) = \prod_{\substack{\mathbf{a}' \oplus \mathbf{b}' = \mathbf{m}' \\ a'_{0,n_0} = b'_{1,n_1} = 1}} \Gamma(|\{\lambda'_{\mathbf{a}'}\}|).$$

さらに, 定理 9.2.4 より,

$$c(\lambda_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda_{1,n_1}) = \frac{\Gamma(\lambda_{0,n_0} - \lambda_{0,1} + 1) \Gamma(\lambda_{1,1} - \lambda_{1,n_1})}{\Gamma(\lambda'_{0,n_0} - \lambda'_{0,1} + 1) \Gamma(\lambda'_{1,1} - \lambda'_{1,n_1})} c(\lambda'_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda'_{1,n_1}).$$

さらに

$$\begin{aligned} \lambda'_{0,n_0} - \lambda'_{0,\nu} + 1 &= \lambda_{0,n_0} - \lambda_{0,\nu} + 1 \quad (\nu \neq 1), \\ \lambda'_{1,\nu} - \lambda'_{1,n_1} &= \lambda_{1,\nu} - \lambda_{1,n_1} \quad (\nu \neq 1) \end{aligned}$$

に注意すると, 以上より $c(\lambda_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda_{1,n_1})$ が主張の様に書けることがわかる.

一方 $d(\mathbf{m}) = m_{0,1}$ とすると, 補題 9.2.7 より $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(0)}$ となる直和分解 $\mathbf{m} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$ があって, このときのみ $\partial \mathbf{a}$ が well-defined でない. このときは $\partial \mathbf{b}$ は well-defined であって,

$$\Gamma(|\{\lambda_{\mathbf{a}}\}|) = \Gamma(\lambda_{0,n_0} + \lambda_{1,1} + \cdots + \lambda_{p,1}) = \Gamma(\lambda'_{0,n_0} - \lambda'_{0,1} + 1)$$

となる. 同様に $d(\mathbf{m}) = m_{1,1}$ とすると $\mathbf{b} = \mathbf{a}^{(1)}$ となる直和分解 $\mathbf{m} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$ があって, このときのみ $\partial \mathbf{b}$ が well-defined でない. このときは $\partial \mathbf{a}$ は well-defined であって, $|\{\lambda_{\mathbf{a}}\}| + |\{\lambda_{\mathbf{b}}\}| = \sum_{j,\nu} m_{j,\nu} \lambda_{j,\nu} - \text{ord } \mathbf{m} + 2 = 1$ であるから

$$\Gamma(|\{\lambda_{\mathbf{a}}\}|) = \Gamma(1 - |\{\lambda_{\mathbf{b}}\}|) = \Gamma(1 - \lambda_{0,1} - \lambda_{1,n_1} - \lambda_{2,1} - \cdots - \lambda_{p,1}) = \Gamma(\lambda'_{1,1} - \lambda'_{1,n_1})$$

となる. 従っていずれの場合も定理 9.2.4 より主張が従う.

以上より最終的に一階の微分方程式に帰着されるが, 一階の Fuchs 型微分方程式の解はある複素数 L_j ($j = 0, \dots, p-1$) があって

$$u(x) = x^{L_0} (1-x)^{L_1} \prod_{j=2}^{p-1} \left(1 - \frac{x}{c_j}\right)^{L_j}$$

の定数倍となるので, $v(x) = x^{-L_0}(1-x)^{-L_1}u(x)$ とおくと

$$\frac{v(1)}{v(0)} = \prod_{j=2}^{p-1} \left(1 - \frac{1}{c_j}\right)^{L_j}.$$

よって定理が従う. □

系 9.2.9. 定理 9.2.8 の仮定の下に, 定理の $c(\lambda_0, n_0 \rightsquigarrow \lambda_1, n_1)$ の公式の分子のガンマ関数の中身の和は, 分母のガンマ関数の中身の和に等しい. すなわち,

$$\sum_{\nu=1}^{n_0-1} (\lambda_{0,n_0} - \lambda_{0,\nu} + 1) + \sum_{\nu=1}^{n_1-1} (\lambda_{1,\nu} - \lambda_{1,n_1}) = \sum_{\substack{\mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}'' = \mathbf{m} \\ m'_{0,n_0} = m''_{1,n_1} = 1}} |\{\lambda_{\mathbf{m}'}\}|.$$

Proof. 定理 9.2.4 で示される接続係数の比 $C_{\lambda_{0,n_0} - \lambda_{0,1}, \lambda_{1,n_1} - \lambda_{1,1}}^{\mu}$ が同様の主張を満たしているので, $c(\lambda_0, n_0 \rightsquigarrow \lambda_1, n_1)$ に対する上の主張は帰納的に示すことができる. □

注意 9.2.10. i) 定理 9.2.8 の接続公式の分母と分子のガンマ関数の個数は等しい. 従って, $\mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}'' = \mathbf{m}$ かつ $m'_{0,n_0} = m''_{1,n_1} = 1$ となる直和分解が $(n_0 + n_1 - 2)$ 個あるので, それがわかれば分母がわかる.

ii) 定理 9.2.4 を直接使い, Riemann 関式の簡約化によって接続公式を求めることも出来る. 確定特異点が 4 点以上ある場合に現れる接続公式の L_j はこのやり方で求められ, 定義 6.4.6 の記号を使うと

$$L_j = \lambda(K)_{j, \ell(K)_j} \quad (j = 2, \dots, p-1)$$

がわかる.

iii) 定理 9.2.8 の仮定の下で, 以下の等式が成り立つ.

$$c(\lambda_0, n_0 \rightsquigarrow \lambda_1, n_1) \cdot c(\lambda_1, n_1 \rightsquigarrow \lambda_0, n_0) = \frac{\prod_{\substack{\mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}'' = \mathbf{m} \\ m'_{0,n_0} = m''_{1,n_1} = 1}} \sin |\{\lambda_{\mathbf{m}'}\}|}{\prod_{\nu=1}^{n_0-1} \sin(\lambda_{0,\nu} - \lambda_{0,n_0}) \prod_{\nu=1}^{n_1-1} \sin(\lambda_{1,\nu} - \lambda_{1,n_1})}.$$

注意 9.2.11. 定義 9.2.1 の記号のもとで $\lambda_{j,\nu}$ を複素パラメーターとして動かして考えると, 定理 9.2.8 の接続係数 $c(\lambda_0, n_0 \rightsquigarrow \lambda_1, n_1)$ の零点と極には, 以下のように意味がつく (cf. [O6, §14.3]).

零点 \Leftrightarrow 方程式が可約となり, $u_0^{\lambda_{0,n_0}}$ は特異点 1 で特性指数 λ_{1,n_1} を持たない方程式を満たす.

極 $\Leftrightarrow u_0^{\lambda_{0,n_0}}$ が極をもつ, あるいは, 特異点 1 でのある局所解が極をもち, その留数が $u_1^{\lambda_{1,n_1}}$.

また, 分母の表示に現れる分解 $\mathbf{m} = \mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}''$ において, $\alpha_{\mathbf{m}'} \in \Delta(\mathbf{m})$ または $\alpha_{\mathbf{m}''} \in \Delta(\mathbf{m})$ が成立することを用いて接続公式を表すこともできる (cf. [O6, Corollary 14.7]).

問 9.2.12. i) 定理 9.2.4 を機能的に用いて, 定理 9.2.8 の接続係数を定義 6.4.6 の記号を用いて書け.

ii) 既約 rigid なスペクトル型 \mathbf{m} をもつ普遍微分方程式 $Pu = 0$ において, $m_{0,n_0} = 1$ とするとき, 対応する局所解のべき級数表示と積分表示を, 定義 6.4.6 の記号を用いて書け.

第 10 章

例

今までに得ることができた結果を用いて，具体的な微分方程式たちに対して，その解の積分表示，級数展開，接続係数などを求めてみる．またこのノートではその証明に触れることができなかった既約性の必要十分条件 (cf. 定理 8.2.3) も書いておく．より多くの例が，[O6, §15] に書かれている．

Simpson [Si] は， $111\dots$ という分割を少なくとも 1 つ含んでいる既約 rigid な分割の組を分類した．それは Simpson リストと呼ばれ，ここで扱う 3 つの属と例外型と呼ばれる $42, 222, 111111$ になるというのがその分類の結果である．Glaiser [Gl] は，対応する一階の正規型方程式を具体的に与えた．

Simpson のリストに属さない既約 rigid な分割の組は，3 階以下には存在せず，4 階には $211, 211, 211$ と $211, 22, 31, 31$ と $22, 22, 22, 31$ の 3 個ある．既約 rigid な分割の組は 10 階が 306 個，20 階が 19269 個，30 階が 310804 個というように，階数が上がると飛躍的にその個数が増大する．

10.1 Jordan-Pochhammer 族 P_n

$\mathbf{m} = (p-11, p-11, \dots, p-11)$. Riemann 図式は，

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x=0 & \frac{1}{c_1}=1 & \cdots & \frac{1}{c_{p-1}} & \cdots & \infty & \\ [0]_{(p-1)} & [0]_{(p-1)} & \cdots & [0]_{(p-1)} & \cdots & [1-\mu]_{(p-1)} & \\ \lambda_0 + \mu & \lambda_1 + \mu & \cdots & \lambda_{p-1} + \mu & \cdots & -\lambda_0 - \cdots - \lambda_{p-1} - \mu & \end{array} \right\}.$$

また微分作用素は

$$P_{P_p}(\lambda, \nu) = \text{RAd}(\partial^{-\mu}) \circ \text{RAd}\left(x^{\lambda_0} \prod_{j=1}^{p-1} (1 - c_j x)^{\lambda_j}\right) \partial,$$

または

$$\begin{aligned} P_{P_p}(\lambda, \mu) &= \sum_{k=0}^p p_k(x) \partial^{p-k}, \\ p_k(x) &= \binom{-\mu + p - 1}{k} p_0^{(k)}(x) + \binom{-\mu + p - 1}{k-1} q^{(k-1)}(x), \\ p_0(x) &= x \prod_{j=1}^{p-1} (1 - c_j x), \quad q(x) = p_0(x) \left(-\frac{\lambda_0}{x} + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{c_j \lambda_j}{1 - c_j x} \right) \end{aligned}$$

とも書き直せる．この微分作用素が既約になるのは

$$\lambda_j \notin \mathbb{Z} \quad (j = 0, \dots, p-1), \quad \mu \notin \mathbb{Z} \quad \text{かつ} \quad \lambda_0 + \dots + \lambda_{p-1} + \mu \notin \mathbb{Z}$$

の時，またその時に限る．

$x = 0$ のまわりでの特性指数 $\lambda_0 + \mu$ を持つ正規化された解は

$$\begin{aligned} u_0^{\lambda_0 + \mu}(x) &= \frac{\Gamma(\lambda_0 + \mu + 1)}{\Gamma(\lambda_0 + 1)\Gamma(\mu)} \int_0^x \left(t^{\lambda_0} \prod_{j=1}^{p-1} (1 - c_j t)^{\lambda_j} \right) (x-t)^{\mu-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(\lambda_0 + \mu + 1)}{\Gamma(\lambda_0 + 1)\Gamma(\mu)} \int_0^x \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{p-1}=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_1)_{m_1} \dots (-\lambda_{p-1})_{m_{p-1}}}{m_1! \dots m_{p-1}!} \\ &\quad \times c_2^{m_2} \dots c_{p-1}^{m_{p-1}} t^{\lambda_0 + m_1 + \dots + m_{p-1}} (x-t)^{\mu-1} dt \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{p-1}=0}^{\infty} \frac{(\lambda_0 + 1)_{m_1 + \dots + m_{p-1}} (-\lambda_1)_{m_1} \dots (-\lambda_{p-1})_{m_{p-1}}}{(\lambda_0 + \mu + 1)_{m_1 + \dots + m_{p-1}} m_1! \dots m_{p-1}!} \\ &\quad \times c_2^{m_2} \dots c_{p-1}^{m_{p-1}} x^{\lambda_0 + \mu + m_1 + \dots + m_{p-1}} \\ &= x^{\lambda_0 + \mu} \left(1 - \frac{(\lambda_0 + 1)(\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_{p-1} c_{p-1})}{\lambda_0 + \mu + 1} x + \dots \right). \end{aligned}$$

\mathbf{m} の直和分解は

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= 10, \dots, \overset{\nu}{0}1, \dots, 10 \oplus p-21, \dots, p-\overset{\nu}{1}0, \dots, p-21 \quad (\nu = 0, \dots, p) \\ &= (p-1)(10, \dots, 10) \oplus 01, \dots, 01. \end{aligned}$$

これによって接続係数は，

$$\begin{aligned} c(0 : \lambda_0 + \mu \rightsquigarrow 1 : \lambda_1 + \mu) &= \frac{\Gamma(\lambda_0 + \mu + 1)\Gamma(-\lambda_1 - \mu)}{\Gamma(\lambda_0 + 1)\Gamma(-\lambda_1)} \prod_{j=2}^{p-1} (1 - c_j)^{\lambda_j}, \\ c(0 : \lambda_0 + \mu \rightsquigarrow 1 : 0) &= \frac{\Gamma(\lambda_0 + \mu + 1)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda_0 + 1)} \int_0^1 t^{\lambda_0} (1-t)^{\lambda_1 + \mu - 1} \prod_{j=2}^{p-1} (1 - c_j t)^{\lambda_j} dt. \end{aligned}$$

特に $p = 3$ ならば，

$$c(0 : \lambda_0 + \mu \rightsquigarrow 1 : 0) = \frac{\Gamma(\lambda_0 + \mu + 1)\Gamma(\lambda_1 + \mu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda_0 + \lambda_1 + \mu + 1)} F(\lambda_0 + 1, -\lambda_2, \lambda_0 + \lambda_1 + \mu + 1; c_2)$$

となる．さらに $0 < x < 1$ の範囲で

$$u_0^{\lambda_0 + \mu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x-1)^k + \sum_{k=0}^{\infty} C'_k (1-x)^{\lambda_1 + \mu + k}$$

とでき，それぞれの係数は

$$\begin{aligned} C_0 &= c(0 : \lambda_0 + \mu \rightsquigarrow 1 : 0), \\ C'_0 &= c(0 : \lambda_0 + \mu \rightsquigarrow 1 : \lambda_1 + \mu), \\ C_k &= \frac{\Gamma(\lambda_0 + \mu + 1)}{\Gamma(\mu - k)\Gamma(\lambda_0 + 1)k!} \int_0^1 t^{\lambda_0} (1-t)^{\lambda_1 + \mu - k - 1} \prod_{j=2}^{p-1} (1 - c_j t)^{\lambda_j} dt. \end{aligned}$$

また,

$$u_{\lambda,\mu}(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x \left(t^{\lambda_0} \prod_{j=1}^{p-1} (1 - c_j t)^{\lambda_j} \right) (x-t)^{\mu-1} dt = \partial^{-\mu} v_{\lambda},$$

$$v_{\lambda}(x) = x^{\lambda_0} \prod_{j=1}^{p-1} (1 - c_j x)^{\lambda_j}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} u_{\lambda,\mu+1} &= \partial^{-\mu-1} v_{\lambda} = \partial^{-1} \partial^{-\mu} v_{\lambda} = \partial^{-1} u_{\lambda,\mu}, \\ u_{\lambda_0+1,\lambda_1,\dots,\mu} &= \partial^{-\mu} v_{\lambda_0+1,\lambda_1,\dots} = \partial^{-\mu} x v_{\lambda} = -\mu \partial^{-\mu-1} v_{\lambda} + x \partial^{-\mu} v_{\lambda} \\ &= -\mu \partial^{-1} u_{\lambda,\mu} + x u_{\lambda,\mu}, \\ u_{\dots,\lambda_j+1,\dots} &= \partial^{-\mu} (1 - c_j x) v_{\lambda} = \partial^{-\mu} v_{\lambda} + c_j \mu \partial^{-\mu-1} v_{\lambda} - c_j x \partial^{-\mu} v_{\lambda} \\ &= (1 - c_j x) u_{\lambda,\mu} + c_j \partial^{-1} u_{\lambda,\mu}. \end{aligned}$$

これより次のような隣接関係式を得ることができる.

$$\begin{aligned} \partial u_{\lambda_0,\dots,\lambda_{p-1},\mu+1} &= u_{\lambda,\mu}, \\ \partial u_{\lambda_0+1,\lambda_1,\dots,\lambda_{p-1},\mu} &= (x\partial + 1 - \mu) u_{\lambda,\mu}, \\ \partial u_{\dots,\lambda_j+1,\dots,\mu} &= ((1 - c_j x)\partial - c_j(1 - \mu)) u_{\lambda,\mu}. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} P_{P_p}(\lambda, \mu + 1) &= \sum_{j=0}^{p-1} p_j(x) \partial^{p-j} + p_n, \\ p_n &= (-1)^{p-1} c_1 \cdots c_{p-1} \left((-\mu - 1)_p + (-\mu)_{p-1} \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j \right) \\ &= c_1 \cdots c_{p-1} (\mu + 2 - p)_{p-1} (\lambda_0 + \cdots + \lambda_{p-1} - \mu - 1) \end{aligned}$$

であるから,

$$\left(\sum_{j=0}^{p-1} p_j(x) \partial^{p-j-1} \right) u_{\lambda,\mu} = -p_n u_{\lambda,\mu+1} = -p_n \partial^{-1} u_{\lambda,\mu}$$

を得る.

なお, Jordan-Pochhammer の方程式の合流についての計算を, 第 3 章 3 節の例で行なった.

10.2 超幾何族 H_n

$\mathbf{m} = (1^n, n-11, 1^n)$. Riemann 関式は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ \lambda_{0,1} & [\lambda_{1,1}]_{(n-1)} & \lambda_{2,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{0,n} & \lambda_{1,2} & \lambda_{2,n} \end{array} \right\}. \quad (10.1)$$

ここで Fuchs の関係式より ,

$$\sum_{\mu=1}^n (\lambda_{0,\nu} + \lambda_{2,\nu}) + (n-1)\lambda_{1,1} + \lambda_{2,1} = n-1$$

が成り立つ . また一般的には

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ 1-\beta_1 & [0]_{(n-1)} & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1-\beta_{n-1} & & \alpha_{n-1} \\ 0 & -\beta_n & \alpha_n \end{array} \right\} \quad (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \beta_1 + \cdots + \beta_n)$$

の方が馴染みがあるかもしれない . 微分作用素は

$$P = \text{RAd}(\partial^{-\mu_{n-1}}) \circ \text{RAd}(x^{\gamma_{n-1}}) \circ \cdots \circ \text{RAd}(\partial^{-\mu_1}) \circ \text{RAd}(x^{\gamma_1}(1-x)^{\gamma'}) \partial$$

で書ける . またこの時の Riemann 図式は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ 0 & [0]_{(n-1)} & 1-\mu_{n-1} \\ \gamma_{n-1} + \mu_{n-1} & & 1 - (\gamma_{n-1} + \mu_{n-1}) - \mu_{n-2} \\ \sum_{j=n-2}^{n-1} (\gamma_j + \mu_j) & & 1 - \sum_{j=n-2}^{n-1} (\gamma_j + \mu_j) - \mu_{n-3} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=2}^{n-1} (\gamma_j + \mu_j) & & 1 - \sum_{j=2}^{n-1} (\gamma_j + \mu_j) - \mu_1 \\ \sum_{j=1}^{n-1} (\gamma_j + \mu_j) & \gamma' + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j & -\gamma' - \sum_{j=1}^{n-1} (\gamma_j + \mu_j) \end{array} \right\}$$

である . ここで

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \alpha_{j+1} - \beta_j \quad (j=1, \dots, n-2), & \gamma' &= -\alpha_1 + \beta_1 - 1, \\ \mu_j &= -\alpha_{j+1} + \beta_{j+1} \quad (j=1, \dots, n-1), & \mu_{n-1} &= 1 - \alpha_n \end{aligned}$$

とおけば , 上の Riemann 図式が得られる . この時の微分作用素はよく知られているように ,

$$P_n(\alpha, \beta) = \left(\prod_{j=1}^{n-1} (\vartheta - \beta_j) \right) \partial - \prod_{j=1}^n (\vartheta - \alpha_j).$$

実際 $n=1$ の時は明らかであり ,

$$\begin{aligned} & \text{RAd}(\partial^{-\mu}) \circ \text{RAd}(x^\gamma) P_n(\alpha, \beta) \\ &= \text{RAd}(\partial^{-\mu}) \circ \text{Ad}(x^\gamma) \left(x \left(\prod_{j=1}^{n-1} (\vartheta + \beta_j) \right) \partial - x \prod_{j=1}^n (\vartheta - \alpha_j) \right) \\ &= \text{RAd}(\partial^{-\mu}) \left(\left(\prod_{j=1}^{n-1} (\vartheta + \beta_j - \gamma - 1) \right) (\vartheta - \gamma) - x \prod_{j=1}^n (\vartheta + \alpha_j - \gamma) \right) \\ &= \text{Ad}(\partial^{-\mu}) \left(\left(\prod_{j=1}^{n-1} (\vartheta + \beta_j - \gamma) \right) (\vartheta - \gamma + 1) \partial - (\vartheta + 1) \prod_{j=1}^n (\vartheta + \alpha_j - \gamma) \right) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{n-1} (\vartheta + \beta_j - \gamma - \mu) \right) (\vartheta - \gamma - \mu + 1) \partial - \left(\prod_{j=1}^n (\vartheta + \alpha_j - \gamma - \mu) \right) (\vartheta + 1 - \mu) \end{aligned}$$

となることから帰納的にわかる .

$x = 0$ で特性指数 $\sum_{j=1}^{n-1} (\gamma_j + \mu_j)$ をもつ解の積分表示は

$$I_0^{\mu_{n-1}} x^{\gamma_{n-1}} I_0^{\mu_{n-2}} \cdots I_0^{\mu_1} x^{\gamma_1} (1-x)^{\gamma'}$$

となる . また上式の I_0^μ を I_1^μ, I_∞^μ に変えれば , $x = 1$ で特性指数 $\gamma' + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j$ を持つ解 , $x = \infty$ で特性指数 $-\gamma' - \sum_{j=1}^{n-1} (\gamma_j + \mu_j)$ を持つ解の積分表示がそれぞれ得られる .

$\lambda_{1,1} = 0$ と置いて ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda_{2,j} - \lambda_{0,n})_k}{\prod_{j=1}^{n-1} (\lambda_{0,n} - \lambda_{0,j} + 1)_k k!} x^{\lambda_{0,n} + k}$$

が特性指数 $\lambda_{0,n}$ をもつ $x = 0$ での解になっていることを見てみよう . 今

$${}_n F_{n-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_n)_k}{(\beta_1)_k \cdots (\beta_{n-1})_k k!} x^k$$

とおくと , 上の級数は

$$x^{\lambda_{0,n}} {}_n F_{n-1}((\lambda_{2,j} - \lambda_{0,n})_{j=1, \dots, n}, (\lambda_{0,n} - \lambda_{0,j} + 1)_{j=1, \dots, n-1}; x)$$

と書けることに注意しておく . この ${}_n F_{n-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}; x)$ は一般超幾何級数と呼ばれ , 前ページの Riemann 図式における原点での正則解を与える .

$n = 1$ のときは対応する解として $(1-x)^{-\lambda_{2,1}}$ が取れるから ,

$$\begin{aligned} & I_0^\mu x^\gamma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda_{2,j} - \lambda_{0,n})_k}{\prod_{j=1}^{n-1} (\lambda_{0,n} - \lambda_{0,j} + 1)_k k!} x^{\lambda_{0,n} + k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda_{2,j} - \lambda_{0,n})_k \Gamma(\lambda_{0,n} + \gamma + k + 1)}{\prod_{j=1}^{n-1} (\lambda_{0,n} - \lambda_{0,j} + 1)_k \cdot k! \Gamma(\lambda_{0,n} + \gamma + \mu + k + 1)} x^{\lambda_{0,n} + \gamma + \mu + k} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda_{0,n} + \gamma + 1)}{\Gamma(\lambda_{0,n} + \gamma + \mu + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda_{2,j} - \lambda_{0,n})_k \cdot (\lambda_{0,n} + \gamma + 1)_k \cdot x^{\lambda_{0,n} + \gamma + \mu + k}}{\prod_{j=1}^{n-1} (\lambda_{0,n} - \lambda_{0,j} + 1)_k \cdot (\lambda_{0,n} + \gamma + \mu + 1)_k k!} \end{aligned}$$

となる .

Riemann 図式

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = \infty & 0 & 1 \\ -\mu_2 + 1 & [0]_{(2)} & 0 \\ 1 - \gamma_2 - \mu_1 - \mu_2 & & \gamma_2 + \mu_2 \\ -\gamma' - \gamma_1 - \gamma_2 - \mu_1 - \mu_2 & \gamma' + \mu_1 + \mu_2 & \gamma_1 + \gamma_2 + \mu_1 + \mu_2 \end{array} \right\}$$

を持つ微分方程式の $x = 0$ での局所解は

$$\begin{aligned} & I_0^{\mu_2} (1-x)^{\gamma_2} I_0^{\mu_1} x^{\gamma'} (1-x)^{\gamma_1} = I_0^{\mu_2} (1-x)^{\gamma_2} I_0^{\mu_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\gamma_1)_n}{n!} x^{\gamma' + n} \\ &= I_0^{\mu_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma' + 1 + n) (-\gamma_1)_n}{\Gamma(\gamma' + \mu_1 + 1 + n) n!} x^{\gamma' + \mu_1 + n} (1-x)^{\gamma_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= I_0^{\mu_2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma' + 1 + n)(-\gamma_1)_n(-\gamma_2)_m}{\Gamma(\gamma' + \mu_1 + 1 + n)m!n!} x^{\gamma' + \mu_1 + m + n} \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma' + \mu_1 + 1 + m + n)\Gamma(\gamma' + 1 + n)(-\gamma_1)_n(-\gamma_2)_m x^{\gamma' + \mu_1 + \mu_2 + m + n}}{\Gamma(\gamma' + \mu_1 + \mu_2 + 1 + m + n)\Gamma(\gamma' + \mu_1 + 1 + n)m!n!} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma' + 1)x^{\gamma' + \mu_1 + \mu_2}}{\Gamma(\gamma' + \mu_1 + \mu_2 + 1)} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\gamma' + \mu_1 + 1)_{m+n}(\gamma' + 1)_n(-\gamma_1)_n(-\gamma_2)_m x^{m+n}}{(\gamma' + \mu_1 + \mu_2 + 1)_{m+n}(\gamma' + \mu_1 + 1)_n m!n!}
\end{aligned}$$

となる . また ,

$$\begin{aligned}
I_0^{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\lambda+n} (1-x)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1)_{m+n}(-\beta)_m c_n}{(\lambda+\mu+1)_{m+n} m!} x^{\lambda+\mu+m+n} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+1)} (1-x)^{-\beta} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+1)_n (\mu)_m (-\beta)_m c_n}{(\lambda+\mu+1)_{m+n} m!} x^{\lambda+\mu+n} \left(\frac{x}{x-1}\right)^m
\end{aligned}$$

に注意すると , 上の局所解は

$$\begin{aligned}
&I_0^{\mu_2} (1-x)^{\gamma_2} I_0^{\mu_1} x^{\gamma'} (1-x)^{\gamma_1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma' + 1 + n)(-\gamma_1)_n}{\Gamma(\gamma' + \mu_1 + 1 + n)n!} x^{\gamma' + \mu_1 + \mu_2 + n} (1-x)^{-\gamma_2} \\
&\quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma' + \mu_1 + 1 + n)(\mu_2)_m (-\gamma_2)_m}{\Gamma(\gamma' + \mu_1 + \mu_2 + 1 + n)(\gamma' + \mu_1 + \mu_2 + n + 1)_m m!} \left(\frac{x}{x-1}\right)^m \\
&= \frac{\Gamma(\gamma' + 1)x^{\gamma' + \mu_1 + \mu_2} (1-x)^{-\gamma_2}}{\Gamma(\gamma' + \mu_1 + \mu_2 + 1)} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\gamma' + 1)_n (-\gamma_1)_n (-\gamma_2)_m (\mu_2)_m}{(\gamma' + \mu_1 + \mu_2 + 1)_{m+n} m!n!} x^n \left(\frac{x}{x-1}\right)^m \\
&= \frac{\Gamma(\gamma' + 1)x^{\gamma' + \mu_1 + \mu_2} (1-x)^{-\gamma_2}}{\Gamma(\gamma' + \mu_1 + \mu_2 + 1)} F_3(-\gamma_2, -\gamma_1; \mu_2, \gamma' + 1; \gamma' + \mu_1 + \mu_2 + 1; x, \frac{x}{x-1})
\end{aligned}$$

とも書くとができる . ここで

$$F_3(\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\alpha')_n (\beta)_m (\beta')_n}{(\gamma)_{m+n} m!n!} x^m y^n$$

は Appell の超幾何関数である .

またここからは Riemann 関式 (10.1) に戻って話をする . 既約性の必要十分条件は

$$\lambda_{0,\nu} + \lambda_{1,1} + \lambda_{2,\nu'} \notin \mathbb{Z} \quad (1 \leq \nu \leq n, 1 \leq \nu' \leq n)$$

となる .

\mathbf{m} の直和分解は

$$\begin{aligned}
&1 \dots 11; n-11; 1 \dots 1 = 0 \dots 01; 10; 0 \dots 010 \dots 0 \\
&\quad \oplus 1 \dots 10; n-21; 1 \dots 101 \dots 1
\end{aligned}$$

従って接続係数は

$$\begin{aligned} c(\lambda_{0,n} \rightsquigarrow \lambda_{1,2}) &= \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} \Gamma(\lambda_{0,n} - \lambda_{0,\nu} + 1) \cdot \Gamma(\lambda_{1,1} - \lambda_{1,2})}{\prod_{\nu=1}^n \Gamma(\lambda_{0,n} + \lambda_{1,1} + \lambda_{2,\nu})} = \prod_{\nu=1}^n \frac{\Gamma(\beta_\nu)}{\Gamma(\alpha_\nu)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{\beta_n} {}_nF_{n-1}(\alpha, \beta; x) \quad (\operatorname{Re} \beta_n > 0) \end{aligned}$$

である .

よって $n = 2$ のときは , Riemann 関式 $\left\{ \begin{array}{ccc} x = 0 & 1 & \infty \\ \lambda_{0,1} & \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1} \\ \lambda_{0,2} & \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2} \end{array} \right\}$ (Fuchs の関係式は , $\sum \lambda_{j,\nu} = 1$) に

対し , $(0, 1)$ 上で

$$\begin{aligned} u_0^{\lambda_{0,2}} &= \frac{\Gamma(\lambda_{0,2} - \lambda_{0,1} + 1)\Gamma(\lambda_{1,2} - \lambda_{1,1})}{\Gamma(\lambda_{0,2} + \lambda_{1,2} + \lambda_{2,1})\Gamma(\lambda_{0,2} + \lambda_{1,2} + \lambda_{2,2})} u_1^{\lambda_{1,1}} \\ &\quad + \frac{\Gamma(\lambda_{0,2} - \lambda_{0,1} + 1)\Gamma(\lambda_{1,1} - \lambda_{1,2})}{\Gamma(\lambda_{0,2} + \lambda_{1,1} + \lambda_{2,1})\Gamma(\lambda_{0,2} + \lambda_{1,1} + \lambda_{2,2})} u_1^{\lambda_{1,2}} \end{aligned}$$

という Gauss の超幾何関数の接続公式が得られる (cf. 定義 9.2.1) . このようにパラメーターを一般的に書いた方が , 各項の意味がついて (cf. 注意 9.2.11) 公式が一つで済み , わかりやすい .

また超幾何族のその他の接続係数も

$$\begin{aligned} c(\lambda_{0,n} \rightsquigarrow \lambda_{2,n}) &= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(\lambda_{2,k} - \lambda_{2,n})}{\Gamma(\{\lambda_{0,n} \lambda_{1,1} \lambda_{2,k}\})} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(\lambda_{0,n} - \lambda_{0,k} + 1)}{\Gamma\left(\left\{ \begin{array}{ccc} (\lambda_{0,\nu})_{1 \leq \nu \leq n} & [\lambda_{1,1}]_{(n-2)} & (\lambda_{2,\nu})_{1 \leq \nu \leq n-1} \\ \nu \neq k & & \end{array} \right\} \right)} \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(\beta_k)\Gamma(\alpha_k - \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\beta_k - \alpha_n)}, \\ c(\lambda_{1,2} \rightsquigarrow \lambda_{0,n}) &= \frac{\Gamma(\lambda_{1,2} - \lambda_{1,1} + 1) \prod_{\nu=1}^{n-1} \Gamma(\lambda_{0,\nu} - \lambda_{0,n})}{\prod_{j=1}^n \Gamma\left(\left\{ \begin{array}{ccc} (\lambda_{0,\nu})_{1 \leq \nu \leq n-1} & [\lambda_{1,1}]_{(n-2)} & (\lambda_{2,\nu})_{1 \leq \nu \leq n, \nu \neq j} \\ & \lambda_{1,2} & \end{array} \right\} \right)} \\ &= \prod_{\nu=1}^n \frac{\Gamma(1 - \beta_\nu)}{\Gamma(1 - \alpha_\nu)} \end{aligned}$$

となることがわかる .

また ,

$$\begin{aligned} {}_nF_{n-1}(\alpha, \beta; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k (1-x)^k + \sum_{k=0}^{\infty} C'_k (1-x)^{k-\beta_n}, \\ C_0 &= {}_nF_{n-1}(\alpha, \beta; 1) \quad (\operatorname{Re} \beta_n > 0), \\ C'_0 &= \prod_{\nu=1}^n \frac{\Gamma(\beta_\nu)}{\Gamma(\alpha_\nu)} \end{aligned}$$

と $0 < x < 1$ の範囲で書ける . さらに

$$\frac{d^k}{dx^k} {}_nF_{n-1}(\alpha, \beta; x) = \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_n)_k}{(\beta_1)_k \cdots (\beta_{n-1})_k} {}_nF_{n-1}(\alpha_1 + k, \dots, \alpha_n + k, \beta_1 + k, \dots, \beta_{n-1} + k; x)$$

より,

$$C_k = \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_n)_k}{(\beta_1)_k \cdots (\beta_{n-1})_k} {}_n F_{n-1}(\alpha_1 + k, \dots, \alpha_n + k, \beta_1 + k, \dots, \beta_{n-1} + k; 1)$$

がわかる.

10.3 even/odd 族 EO_n

EO_{2m} ($\mathbf{m} = (1^{2m}, m m - 1 1, m m)$): even 族). Riemann 図式は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = \infty & 0 & 1 \\ \lambda_{0,1} & [\lambda_{1,1}]_{(m)} & [\lambda_{2,1}]_{(m)} \\ \vdots & [\lambda_{1,2}]_{(m-1)} & [\lambda_{2,2}]_{(m)} \\ \lambda_{0,2m} & \lambda_{1,3} & \end{array} \right\}.$$

ここで以下の Fuchs の関係式が成り立つ.

$$\sum_{\nu=1}^{2m} \lambda_{0,\nu} + m(\lambda_{1,1} + \lambda_{2,1} + \lambda_{2,2}) + (m-1)\lambda_{1,2} + \lambda_{1,3} = 2m - 1.$$

\mathbf{m} の直和分解は

$$\begin{aligned} 1^{2m}, m m - 1 1, m^2 &= 1^{2m-1}; (m-1)^2 1; m m - 1 \oplus 1; 100; 1 \\ &= 1^{2m-2}; m - 1 m - 2 1; (m-1)^2 \oplus 1^2; 110; 1^2. \end{aligned}$$

よって接続係数は

$$\begin{aligned} c(\lambda_{0,2m} \rightsquigarrow \lambda_{1,3}) &= \prod_{i=1}^2 \frac{\Gamma(\lambda_{i,1} - \lambda_{1,3})}{\Gamma(|\{\lambda_{0,2m} \lambda_{1,1} \lambda_{2,i}\}|)} \cdot \prod_{j=1}^{2m-1} \frac{\Gamma(\lambda_{0,2m} - \lambda_{0,j} + 1)}{\Gamma\left(\left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_{0,j} & \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1} \\ \lambda_{0,2m} & \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2} \end{array} \right\}\right)}, \\ c(\lambda_{1,3} \rightsquigarrow \lambda_{0,2m}) &= \prod_{i=1}^2 \frac{\Gamma(\lambda_{1,3} - \lambda_{1,i} + 1)}{\Gamma\left(\left\{ \begin{array}{ccc} (\lambda_{0,\nu})_{1 \leq \nu \leq 2m-1} & [\lambda_{1,1}]_{(m-1)} & [\lambda_{2,\nu}]_{(m)} \\ & [\lambda_{1,2}]_{(m-1)} & [\lambda_{2,3-i}]_{(m-1)} \\ & \lambda_{1,3} & \end{array} \right\}\right)} \\ &\quad \times \prod_{j=1}^{2m-1} \frac{\Gamma(\lambda_{0,j} - \lambda_{0,2m})}{\Gamma\left(\left\{ \begin{array}{ccc} (\lambda_{0,\nu})_{1 \leq \nu \leq 2m-1} & [\lambda_{1,1}]_{(m-1)} & [\lambda_{2,\nu}]_{(m)} \\ & [\lambda_{1,2}]_{(m-2)} & [\lambda_{2,2}]_{(m-1)} \\ & \lambda_{1,3} & \end{array} \right\}\right)}. \end{aligned}$$

また既約性の必要十分条件は

$$\begin{cases} \lambda_{0,\nu} + \lambda_{1,1} + \lambda_{2,k} \notin \mathbb{Z} & (1 \leq \nu \leq 2m, k = 1, 2), \\ \lambda_{0,\nu} + \lambda_{0,\nu'} + \lambda_{1,1} + \lambda_{1,2} + \lambda_{2,2} - 1 \notin \mathbb{Z} & (1 \leq \nu < \nu' \leq 2m, k = 1, 2). \end{cases}$$

たとえば

$$\begin{aligned} P &= \prod_{j=1}^4 (\vartheta + \alpha_j) + \vartheta(\vartheta - \beta) ((\vartheta - 2\vartheta + \gamma_1 + \gamma_2 - 1)(\vartheta - \beta) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \alpha_i \alpha_j - (\beta - 2\gamma_1 - 2\gamma_2 - 4)(\beta - 1) - \gamma_1 \gamma_2 + 1). \end{aligned}$$

によって次の Riemann 関式を持つ方程式 $Pu = 0$ が与えられる .

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = \infty & 0 & 1 \\ \alpha_1 & [0]_{(2)} & [0]_{(2)} \\ \alpha_2 & [\beta]_{(2)} & \gamma_1 \\ \alpha_3 & & \gamma_2 \\ \alpha_4 & & \end{array} \right\} \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + 2\beta + \gamma_1 + \gamma_2 = 3).$$

EO_{2m+1} ($\mathbf{m} = (1^{2m+1}, mm1, m+1m)$) : odd 族) . Riemann 関式は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = \infty & 0 & 1 \\ \lambda_{0,1} & [\lambda_{1,1}]_{(m)} & [\lambda_{2,1}]_{(m+1)} \\ \vdots & [\lambda_{1,2}]_{(m)} & [\lambda_{2,2}]_{(m)} \\ \lambda_{0,2m+1} & \lambda_{1,3} & \end{array} \right\}$$

であり , Fuchs の関係式

$$\sum_{\nu=1}^{2m+1} \lambda_{0,\nu} + m(\lambda_{1,1} + \lambda_{1,2} + \lambda_{2,2}) + (m+1)\lambda_{2,1} + \lambda_{1,3} = 2m$$

が成り立っている .

\mathbf{m} の直和分解は

$$\begin{aligned} 1^{2m+1}; m^2 1; m+1 m &= 1^{2m}; mm-1 1; m^2 \oplus 1; 10; 10 \\ &= 1^{2m-1}(m-2)^2 1; mm-1 \oplus 1^2; 1^2 0; 1^2. \end{aligned}$$

よって接続係数は

$$\begin{aligned} c(\lambda_{0,2m+1} \rightsquigarrow \lambda_{1,3}) &= \prod_{k=1}^2 \frac{\Gamma(\lambda_{1,k} - \lambda_{1,3})}{\Gamma(|\{\lambda_{0,2m+1} \lambda_{1,k} \lambda_{2,1}\}|)} \cdot \prod_{k=1}^2 \frac{\Gamma(\lambda_{0,2m+1} - \lambda_{0,k} + 1)}{\Gamma\left(\left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_{0,k} & \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1} \\ \lambda_{0,2m+1} & \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2} \end{array} \right\}\right)}, \\ c(\lambda_{1,3} \rightsquigarrow \lambda_{0,2m+1}) &= \prod_{k=1}^2 \frac{\Gamma(\lambda_{1,3} - \lambda_{1,k} + 1)}{\Gamma\left(\left\{ \begin{array}{ccc} (\lambda_{0,\nu})_{1 \leq \nu \leq 2m} & [\lambda_{1,k}]_{(m)} & [\lambda_{2,1}]_{(m)} \\ & [\lambda_{1,3-k}]_{(m-1)} & [\lambda_{2,2}]_{(m)} \\ & \lambda_{1,3} & \end{array} \right\}\right)} \\ &\quad \times \prod_{k=1}^2 \frac{\Gamma(\lambda_{0,k} - \lambda_{0,2m+1})}{\Gamma\left(\left\{ \begin{array}{ccc} (\lambda_{0,\nu})_{1 \leq \nu \leq 2m} & [\lambda_{1,1}]_{(m-1)} & [\lambda_{2,1}]_{(m)} \\ & [\lambda_{1,2}]_{(m-1)} & [\lambda_{2,2}]_{(m-1)} \\ & \lambda_{1,3} & \end{array} \right\}\right)}. \end{aligned}$$

既約性の必要十分条件は

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda_{0,\nu} + \lambda_{1,k} + \lambda_{2,1} \notin \mathbb{Z} & (1 \leq \nu \leq 2m+1, k=1, 2), \\ \lambda_{0,\nu} + \lambda_{0,\nu'} + \lambda_{1,1} + \lambda_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_{2,2} - 1 \notin \mathbb{Z} & (1 \leq \nu < \nu' \leq 2m+1, k=1, 2). \end{array} \right.$$

10.4 三角関数の恒等式

Riemann 関式 (9.5) をもつ Fuchs 型方程式 $Pu = 0$ の接続係数を考える. $1 \leq l \leq n_1$ となる正整数 l を固定したとき, $m_{0,1} = m_{0,2} = \cdots = m_{0,n_0} = m_{1,l} = m_{1,n_1} = 1$ ならば, 接続係数の定義から

$$\sum_{k=1}^{n_0} c(0 : \lambda_{0,k} \rightsquigarrow 1 : \lambda_{1,l}) \cdot c(1 : \lambda_{1,n_1} \rightsquigarrow 0 : \lambda_{0,k}) = \delta_{l,n_1}$$

が成り立つ.

超幾何属の場合にこの等式を書くと, 注意 9.2.10 iii) より, 以下の恒等式が得られる.

$$\sum_{k=1}^n \frac{\prod_{\nu \in \{1, \dots, n\}} \sin(x_k - y_\nu)}{\prod_{\nu \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}} \sin(x_k - x_\nu)} = \sin\left(\sum_{\nu=1}^n x_\nu - \sum_{\nu=1}^n y_\nu\right),$$

$$\sum_{k=1}^n \prod_{\nu \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}} \frac{\sin(y_i - x_\nu)}{\sin(x_k - x_\nu)} \prod_{\nu \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} \frac{\sin(x_k - y_\nu)}{\sin(y_j - y_\nu)} = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

even/odd 属の時は, 以下の恒等式が得られる.

$$\sum_{k=1}^n \sin(x_k + s) \cdot \sin(x_k + t) \cdot \prod_{\nu \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}} \frac{\sin(x_k + x_\nu + 2u)}{\sin(x_k - x_\nu)}$$

$$= \begin{cases} \sin\left(nu + \sum_{\nu=1}^n x_\nu\right) \cdot \sin\left(s + t + (n-2)u + \sum_{\nu=1}^n x_\nu\right) & (n = 2m), \\ \sin\left(s + (n-1)u + \sum_{\nu=1}^n x_\nu\right) \cdot \sin\left(t + (n-1)u + \sum_{\nu=1}^n x_\nu\right) & (n = 2m + 1). \end{cases}$$

問 10.4.1. 上の三角関数の恒等式をいくつかの方法で証明せよ.*¹

*¹ even/odd 族における接続公式を初めて具体的に得たとき, その正当性のチェックに役立った

第 11 章

あとがき

まず最初に、大島がこの講義に係わる研究を行なった動機、および現在進行形の研究の歩みと背景について述べたい。

Riemann 対称空間上の解析において帯球関数は、ユークリッド空間の調和解析における指数関数や群の有限次元表現における指標などと同様の重要な役割を演じる関数である。この帯球関数のパラメーターを拡張した Heckman-Opdam の超幾何関数 [HeO] について、その合流や接続問題の研究を大島は示野と 2007 年に行なっていた (cf. [OS])。この関数の原点と無限遠との接続係数は Opdam [Op] により得られていたが、その証明は結果を理解するのに分かりやすいものと思えなかった。最も特異性の高い 1 次元の直線上への制限の満たす常微分方程式を求め、その接続公式から結果を得よう考えた。

Heckman-Opdam の超幾何関数は有限ルート系の Weyl 群で不変で、無限遠を確定特異点とする完全積分可能量子系の解として特徴付けられるが (cf. [OOS])、ルート系が A_n 型の時は、うまい直線を選ぶとそこへの制限常微分方程式は ${}_{n+1}F_n$ の満たす方程式^{*1}になり、その接続公式を使うことが出来た。 BC_n 型の時にはうまい直線で試みても、そのような超幾何方程式にはならなかった。このころ代数的線型常微分方程式の最近の一般的知識を得るの最も役だったのが原岡の本 [Ha]^{*2}で、著者の原岡とも交流を持ち、その方程式は Simpson が分類した $2n$ 階の even 族になることがわかった^{*3}。分類によってのみ定義された方程式が、別の分野の数学に自然に現れたことは、常微分方程式の研究者にも興味を持たれたようである、その方程式の接続係数は当時知られていなかった。複素積分表示が可能なことは知られていたが、欲しい解の積分表示を具体的に得て接続係数を計算することは、当時はかなり困難であったように思われる^{*4}。

大島は 2007 年の 11 月から 4 階の even 族などの接続問題を調べ始め、まず有理関数係数の微分作用素の複雑な計算が行なえるよう数式処理のプログラムのライブラリの開発を行なった^{*5}。「rigid な場合の重

^{*1} ${}_{n+1}F_n$ が満たす方程式の 1 における重複度 1 の局所モノドロミーの固有値に対応する局所解が制限された関数に対応する

^{*2} この 5 年以内の急激な発展があつて少し古くなったが、今でも最近の代数的常微分方程式の分野の様子を広く知るにはもつともお薦めの本。大島が知りたかつた情報 (スペクトル型の話など) を易しく解説してあつた。他に類書は見当たらない

^{*3} BC_2 のときは 2 種の特異直線があり、一方の制限は 4 階の even 族に、他方の制限は middle convolution で 3 階の Dotsenko-Fateev 方程式 [DF] に帰着できる 4 階方程式になる (cf. [OS])。後者は rigid ではないが、解の積分表示をもつ面白い方程式であり、原岡 [Ha2] の注目している方程式でもある

^{*4} 4 階の even 族の接続公式が、適当なサイクルでの Euler 型複素積分で解を表示する方法でも、最近、原岡-三町 [HM] によって示された。

^{*5} Risa/Asir のライブラリで、[O5] として公開している

複度 1 の局所解の間の接続係数は、ガンマ関数の積の商で表せ、それぞれの項は意味が付く^{*6}という予想のもとに調べた。超幾何族や even/odd 族では、その予想の正しいことを示すことができ、4 階の even 族などの接続公式を得たのは、その 11 月の末であった。特異点が 3 点で rigid な場合の上記予想は、「組み合わせ論的予想」^{*7}に帰着でき、それは 2008 年 4 月に証明が成功し、[O2] にある接続公式になった。

一方、rigid な方程式の研究は、日本では大久保が方向性を提唱し、一階の大久保型標準形^{*8}による拡大・縮小操作を定義して用いた横山等の研究 [Yo], [HY] に引き継がれ、方程式の簡約・構成理論や解の積分表示を得ていた。

rigid なモノドロミー群や一階正規型方程式の研究は、ある条件を満たす行列の問題と見なせ、Simpson [Si] の研究などがあるが、Katz [Kz] が middle convolution を導入して、方程式の簡約・構成理論を作った。Katz の理論は、Dettweiler-Reiter [DR] が行列の枠組みの中でわかりやすく再構成した。

rigid とは限らないスペクトル型に対する既約モノドロミーや既約方程式の存在条件を決定する問題は、乗法的 / 加法的 Deligne-Simpson 問題と呼ばれた。middle convolution が有効に用いられ、Kostov [Ko2] や Dettweiler-Reiter [DR2] 等の研究があったが、加法的問題は quiver の表現論を用いて Kac-Moody ルート系との関連を明らかにした Crawley-Boevey [CB] によって解決された。

このような状況の中で、「組み合わせ論的予想」を証明するには rigid な分割の組の性質を知る必要があり、大島は横山や Katz に依る「分割の組の操作」や予想をチェックするためのプログラム [O4] を作成した。それがこの予想の解決^{*9}に繋がった（40 階以下のものすべて、異なる 400 万以上の場合をチェックした）。さらには、[O3] で横山の操作と Katz の操作との関係を明らかにし、両者が同等となることを示した。

2009 年 2 月初めの京都大学数理解析研究所での常微分方程式の集会のあと、Weyl 代数に対する基本的操作を定義することによって、既約 rigid な単独方程式が具体的に構成できること^{*10}がわかり、その内容を 2 月末の熊本大でのアクセサリー・パラメーター研究会で説明した。また 4 月には、この操作における接続係数の変化の具体的記述ができることがわかった^{*11}。この講義録での接続公式の証明はこれを使う証明で、特異点の数が 4 点以上でも通用する。最初の証明と比較すると、序で述べた Gauss の和公式の 2 つの証明の違いに似ている^{*12}。

rigid とは限らない場合の方程式の構成問題、すなわち普遍微分作用素の構成は補題 7.1.1 に帰着されることはわかっていたが、rigid な場合が解決した段階に来て、この補題の主張をチェックするプログラムを作成し^{*13}、正しいであろうと確信を持った後の 2009 年 5 月の連休直後に証明が得られた。

Fuchs 型普遍微分方程式の構成問題が解決し、結果がまとめられる段階になったと判断して関連結果を論文の形にする作業を 2009 年 6 月頃から始め、Kostov を招いた玉原でのアクセサリー・パラメーター

*6 注意 9.2.11

*7 注意 9.2.10 で最初に述べた条件を満たす直和分解 $\mathbf{m} = \mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}''$ を $(n_0 + n_1 - 2)$ 個ある、という予想

*8 n 次対角行列と T と n 次正方行列 A によって $(x - T)u' = Au$ と表せる方程式

*9 Katz による簡約化に基づいた証明で解決したが、今は Kac-Moody ルート系の言葉を導入して示すことができる

*10 一階正規型方程式での解決は、単独方程式での解決にならない。rigid な場合は、前者が解けていると、前者の方程式からうまい生成元の一つを選んで見かけの特異点を無くせるか？ということと同値。Katz [Kz] の序文には残された問題として書かれている

*11 命題 9.2.2 を得た。定理 9.2.4 の対称的な形に直したのはその後の 5 月

*12 even/odd 族などの場合には、現在数種類の異なる証明を得ている。さらに別の方法については、[HM] や [Yo2] など

*13 これは定理 7.2.2 の N_ν を計算するプログラムとして [O4] の中にある

研究会で結果を説明した．この講義録の元となった 2010 年 4 月から 7 月の「代数解析」の講義は，まとめつつあった論文を元にした．講義の準備で，既約条件などをより詳細に見ていくと，Kac-Moody ルート系の概念を導入することによって既約性や接続係数などが自然に記述できることがわかり，2011 年 2 月にまとめ上がったもの [O6] では，それを取り入れている．

この方面のより広い立場からの関連する研究に関しては，[Ha2] に解説がある．

この講義録の方向に基づいたより詳しい Fuchs 型方程式の解析については [O6] を参照して下さい．特にこの講義録では扱わなかった，既約性の必要十分条件，具体的な隣接関係式や多項間関係式，Fuchs 型方程式が普遍微分方程式に含まれるための条件，簡約化が出来ない分割の組，多項式解，可約なモノドロミーの解析，特性指数が ∞ に発散するときの解の挙動，解空間の部分 Wronskian 間の接続問題や接続係数の極と零点の解析，多変数の Appell 超幾何への応用などの話題と共に多くの例が計算されている．また，現時点での残された多くの問題も最後に記してある．

簡約化で階数を下げることが出来ないものは，rigidity 指数毎に有限種のスペクトル型しかないことが [O2] で示されたが，[O6, Proposition 9.13] にはより精密な結果の他，rigidity 指数が -6 以上の簡約化不可能なスペクトル型の表，既約 rigid で階数が 8 以下のスペクトル型の表，などがある．

数式処理プログラム Risa/Asir のライブラリ [O5] には，有理関数係数の微分作用素の計算を中心に 120 種以上の関数が定義されている．特に，スペクトル型または Riemann 図式を与えると，[O6] から得られるアルゴリズムに基づいて，接続係数，局所解の級数表示，積分表示，普遍微分方程式，既約性の必要十分条件，隣接関係式などを出力する関数，また任意の数式を T_EX 出力し， T_EX のプレビューア dviout を通じて表示する関数などが含まれている．スペクトル型を与えて，結果の接続係数や微分方程式を dviout の画面で直接綺麗に見ることができる．

既約実現可能なスペクトル型に対応する単独高階方程式は Pid_x の数のアクセサリー・パラメーターを持つ．一階の正規型の場合は，その 2 倍の数のアクセサリー・パラメーターを持つことが知られている（たとえば，[O2]）．rigidity 指数が 0 の場合，アクセサリー・パラメーターは 2 個となる．モノドロミー群についても，一階の正規型と同じ個数のアクセサリー・パラメーターを持つので，特異点が 4 個以上ある場合は，特異点の位置のモジュライが存在し，モノドロミーを不変に保つ変形がアクセサリー・パラメーターと位置のモジュライを併せた空間の中で可能になる．これを記述する微分方程式は，モノドロミー保存変形方程式と呼ばれる^{*14}．

スペクトル型が $11, 11, 11, 11$ の場合，単独方程式の普遍型は Heun の方程式であるが，モノドロミー保存変形方程式は非線型の Painlevé VI 方程式になることが知られている．一方，Katz の定義した middle convolution によって，Fuchs 型方程式は変わってもモノドロミー保存変形方程式は変わらないことが，原岡-Filipuk [HF] により証明された．一方，rigidity 指数が 0 の Fuchs 型方程式のスペクトル型は，middle convolution などの操作で， $(11, 11, 11, 11)$ ， $(111, 111, 111)$ ， $(22, 1111, 1111)$ ， $(33, 222, 111111)$ の 4 つのいずれかに簡約化されることが，[Kol] により示されている（系 7.1.2）．対応する Kac-Moody ルート系のルートは，affine ルート系の \tilde{D}_4 ， \tilde{E}_6 ， \tilde{E}_7 ， \tilde{E}_8 のルートに対応する．特異点が 4 点以上のものは \tilde{D}_4 のみなので，rigidity 指数が 0 の Fuchs 型方程式のモノドロミー保存変形は，すべて Painlevé VI で記述さ

^{*14} 単独方程式では，見かけの特異点を導入することによりモノドロミー保存変形理論が可能になる（cf. [Ok]）

れるということになる．なお， \tilde{D}_4 の Weyl 群は Painlevé VI の対称性を表す群で，具体的には Bäcklund 変換と呼ばれるものが対称性を記述するが，それはスペクトル型を不変にする middle convolution (対応するルートを不変にする単純鏡映にあたる) などで実現される．

同様なことが，rigidity 指数が -2 の場合に考えられる．この場合の分類は [O2] でなされ，13 個の異なるものになるが，Garnier 系の $(11, 11, 11, 11, 11)$ の他，特異点が 4 点のものが 3 つ現れる．この 3 つ，すなわち $(21, 21, 111, 111)$, $(22, 22, 22, 211)$, $(31, 22, 22, 1111)$ から導かれる相空間が 4 次元の場合のモノドロミー保存変形方程式が坂井 [Sa] により解析され，既に知られていた Painlevé 型方程式の他に，行列 Painlevé と呼ばれる新しいものが見つかり，この方面の研究も急速に進展している．

一方，Katz の middle convolution にあたる変換を不確定特異点にも拡張して解析を行なう試みが，現在盛んに行なわれており，たとえば Boalch [Bo]，川上 [Ka]，廣惠 [Hi, Hi2]，廣惠-大島 [HiO]，竹村 [Ta]，山川 [Ya] などがある．特に廣惠 [Hi2] における結果から，既約 rigid な代数的単独線型常微分方程式は，特性指数が一般であって不確定特異点において分岐がない^{*15}ならば，versal addition と $\text{Ad}(\partial^{-\mu})$ によって自明なものに帰着できることがわかる．すなわち，逆にたどれば，例 3.3.1 のように，どれも Fuchs 型の既約 rigid な普遍方程式を拡張した versal rigid 普遍方程式の中にあるものと見なせる ([HiO])．よって特に Fuchs 型からの具体的な合流操作がわかる．従って，今後この講義録や [O6] にあるような具体的な解析が期待できる．

不確定特異点を持つときは，rigid とは限らない場合や分岐がある場合など，まだ解明すべき点は多いが，現在研究の方向性が見えつつある段階である．そのほかにも，合流理論を含めた不確定特異点の場合のモノドロミー保存変形方程式の理論や rigid でない場合に「分かる方程式」を得るためのアクセサリー・パラメーターの特化の問題など，今後も研究を楽しませてくれ，新たな発見と大いなる研究の進展が期待される．この講義録がそのような分野に興味を持つきっかけのひとつになることがあるならば幸いである．

大島利雄 記

^{*15} 不確定特異点を無限遠にとると，形式解は $(1 + c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2} + \dots)x^\lambda \exp h(x)$ の形になり， $h(x)$ は $x^{\frac{1}{N}}$ の多項式であるが，正整数 N を 1 としてよい場合を分岐しないという．たとえば Kummer や Hermite の方程式では不確定特異点において分岐がなく，Airy の方程式では分岐がある．

参考文献

- [Bo] P. Boalch, Irregular connections and Kac-Moody root system, 2008, arXiv:math.DG/0806.1050, 31pp.
- [CB] W. Crawley-Boevey, On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspaces and sum zero, *Duke Math. J.* **118** (2003), 339–352.
- [DR] M. Dettweiler and S. Reiter, An algorithm of Katz and its applications to the inverse Galois problems, *J. Symbolic Comput.* **30** (2000), 761–798.
- [DR2] ———, Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems, *J. Algebra* **318** (2007), 1–24.
- [DF] V. I. S. Dotsenko and V. A. Fateev, Conformal algebra and multipoint correlation function in 2D statical models, *Nuclear Phys. B* **240** (1984), 312–348.
- [Gl] O. Gleizer, Some explicit solutions of additive Deligne-Simpson problem and their applications, *Adv. Math.* **178** (2003), 311–374.
- [Ha] 原岡喜重, 超幾何関数, すうがくの風景 7, 朝倉書店, 2002.
- [Ha2] ———, 大域解析可能な Fuchs 型方程式, 数学 **63** (2011), 257–280, 岩波書店.
- [HF] Y. Haraoka and G. M. Filipuk, Middle convolution and deformation for Fuchsian systems, *J. Lond. Math. Soc.* **76** (2007), 438–450.
- [HM] Y. Haraoka and K. Mimachi, A connection problem for Simpson’s even family of rank four, *Funkcialaj Ekvacioj.* **54** (2011), 495–515.
- [HY] Y. Haraoka and T. Yokoyama, Construction of rigid local systems and integral representation of their sections, *Math. Nachr.* **279** (2006), 255–271.
- [HeO] G. J. Heckman and E. M. Opdam, Root systems and hypergeometric functions I, *Comp. Math.* **64** (1987), 329–352.
- [Hi] K. Hiroe, The twisted Euler transform of differential equations with an irregular singular point, 2009, arXiv:0912.5124, 48pp.
- [Hi2] ———, Linear differential equations on \mathbb{P}^1 and root systems, 2010, arXiv:1010.2580v3, 47pp.
- [HiO] 廣惠一希 – 大島利雄, 代数的線形常微分方程式と Kac-Moody root 系, 2011 年表現論シンポジウム講演集, 2011 年表現論シンポジウム, 和歌山.
- [Kc] V. C. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Third Edition, Cambridge Univ. Press, 1990.
- [Kz] N. M. Katz, *Rigid Local Systems*, Annals of Mathematics Studies **139**, Princeton University

- Press, 1995.
- [Ka] H. Kawakami, Generalized Okubo systems and the middle convolutions, *Int. Math. Res. Notices* **2010** (2010), 3394–3421.
- [Ko1] V. P. Kostov, On the Deligne–Simpson problem for zero index of rigidity, Prospects of complex analysis, differential geometry and mathematical physics, *Proceedings of the 5th International Workshop on Complex Structures and Vector Fields*, St. Konstantin, 2000, World Scientific, 2001, 1–35.
- [Ko2] ———, The Deligne–Simpson problem — a survey, *J. Algebra* **281** (2004), 83–108.
- [MU1] 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信, 数学公式 III –特殊函数–, 岩波全書, 岩波書店, 1960.
- [OOS] H. Ochiai, T. Oshima and H. Sekigichi, Commuting families of symmetric differential operators, *Proc. Japan. Acad.* **70** Ser. A (1994), 62–64.
- [Ok] 岡本和夫, パンルヴェ方程式, 岩波書店, 2009.
- [Op] E. M. Opdam, An analogue of the Gauss summation formula for hypergeometric functions related to root systems, *Math. Z.* **212** (1993), 313–336.
- [O1] T. Oshima, Commuting differential operators with regular singularities, *Algebraic Analysis of Differential Equations*, 195–224, Springer-Verlag, Tokyo, 2007.
- [O2] ———, Classification of Fuchsian systems and their connection problem, arXiv:0811.2916, 2008, 29pp, to appear in *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*.
- [O3] ———, Katz’s middle convolution and Yokoyama’s extending operation, 2008, arXiv:0812.1135, 19pp.
- [O4] ———, Okubo, a computer program for Katz/Yokoyama/Oshima algorithms on MS-Windows, <ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/okubo/okubo.zip>, 2007–2008.
- [O5] ———, muldif.rr, a library of the calculation of differential operators for computer algebra Risa/Asir, <ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/muldif/>, 2009–2010.
- [O6] ———, Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations, 2011, arXiv:1102.2792v1 (<http://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima/index-j.html>), 196pp.
- [O7] 大島利雄, 確定特異点型の境界値問題と表現論, 上智大学数学講究録 **8**, 1979.
- [O8] ———, Fuchs 型常微分方程式と Kac-Moody root 系, 2010 年表現論シンポジウム講演集, 2010 年表現論シンポジウム, 伊豆長岡, <http://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima/index-j.html>.
- [OS] T. Oshima and N. Shimeno, Heckman-Opdam hypergeometric functions and their specializations, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B20** (2010), 129–162.
- [Sa] H. Sakai, Isomonodromic deformation and 4-dimensional Painlevé type equations, 2010, UTMS 2010–17, 21pp.
- [Si] C. T. Simpson, Products of Matrices, *Canadian Math. Soc. Conference Proceedings* **12**, AMS, Providence RI (1991), 157–185.
- [Ta] T. Takemura, Introduction to middle convolution for differential equations with irregular singularities, 2010, arXiv:1002.2535, 24pp.
- [Ts] H. Tsai, Weyl Closure of a Linear Differential Operator, *J. Symb. Compt.* **29** (2000), 747–775.

- [Wa] G. N. Watson, *A Treatise on Bessel Functions*, 2nd edition, Cambridge Univ. Press, London, 1948.
- [WW] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th edition, Cambridge University Press, London, 1955.
- [Ya] D. Yamakawa, Middle convolution and Harnad duality, *Math. Ann.* **349** (2011), 215–262.
- [Yo] T. Yokoyama, Construction of systems of differential equations of Okubo normal form with rigid monodromy, *Math. Nachr.* **279** (2006), 327–348,
- [Yo2] ———, Recursive calculations of connection formulas for systems of differential equations of Okubo normal form, 2009, arXiv:0912.1058, 44pp.

索引

- $(|)$, 77
 $\alpha_0, \alpha_{j,\nu}$, 77
 $\alpha_{\mathbf{m}}$, 79
 $(\alpha)_n$, 3
 $\Delta, \Delta_{\text{re}}, \Delta_{\text{im}}$, 78
 $\Delta(\mathbf{m})$, 84
 $\Delta^\pm, \Delta_{\text{re}}^\pm, \Delta_{\text{im}}^\pm$, 78
 $\partial_l, \partial_{\mathbf{m}}$, 64
 ∂_{\max} , 64
 \mathcal{F} , 5
 \mathfrak{h} , 77
 $\mathfrak{h}^\vee, \tilde{\mathfrak{h}}$, 80, 81
 $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$, 45
 $\Lambda_{j,k}^0$, 80
 $[\lambda]_{(k)}$, 7
 $\lambda(k)_{j,\nu}$, 65
 $\Lambda(\lambda)$, 80
 $|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}|$, 45, 80
 $\mathcal{O}(U)$, 5
 $\mathcal{O}_{B_r}(\lambda, m)$, 34
 \mathcal{O}_c , 28
 $\mathcal{O}_c(\lambda, m)$, 28
 $\hat{\mathcal{O}}_0$, 32
 $\mathcal{P}, \mathcal{P}_{p+1}, \mathcal{P}^{(n)}, \mathcal{P}_{p+1}^{(n)}$, 45
 Π , 77
 ϑ , 4
Adei, Ade, Ad, 12
AdV, 23
 B , 78
 B_r , 32
 $c(\lambda_0, \nu_0 \rightsquigarrow \lambda_1, \lambda_1)$, 86
deg, 10
 $d(\mathbf{m}), d_l(\mathbf{m}), d_{\max}(\mathbf{m})$, 52, 64
 $e(\lambda)$, 6
 ${}_3F_2$, 88
 ${}_nF_{n-1}$, 97
 I , 77
idx, 45
 I_c^λ , 14
 $I_{\mathbf{m}}$, 71
Im, 4
 L, L_I , 10
 $l_{\max}(\mathbf{m})$, 64
 $L(m_1, \dots, m_N; \lambda_1, \dots, \lambda_N)$, 46
 \mathbf{m} , 45
 $\mathbf{m}(k)$, 65
 $\mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}''$, 90
 N_ν , 70
ord, 44
Pidx, 45
 Q, Q^+ , 77
 $Q_{\text{par}}^+, Q_{\text{triv}}^+$, 82
 R , 10
RAd, RAd_e, RAd_e_i, 13
RAdV, 23
Re, 4
Ridx, 75
 s_α , 78
supp, 78
Top, 70
 W , 78
 $W[x], W(x)$, 9
 $W[x][\xi], W[x; \xi], W(x, \xi)$, 10
 $W_L(x; \xi)$, 11
 $\overline{W}[x; \lambda], \overline{W}(x; \lambda)$, 59
 $\mathbb{Z}_{>0}, \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 35
Airy 関数, 17
Cauchy-Kowalevskaja の定理, 34
Deligne-Simpson 問題, 7, 8, 67, 82
Dynkin 図式, 69, 77
Euler 変換, 14, 27
even/odd 族, 100
Fourier-Laplace 変換, 10
Fuchs の関係式, 6, 43, 45
gauge transformation, 12
Gauss の和公式, 4
Gauss の超幾何関数, 16, 85, 99
Gauss の超幾何微分方程式, 3
Hermite の微分作用素, 25
Heun の微分方程式, 61
Jordan-Pochhammer 族, 23, 93
Jordan-Pochhammer 関数, 17, 88
Kummer の微分作用素, 25
Laplace 変換, 14
Leibniz の法則, 11, 15
monodromy, 6
Riemann scheme, 5
Riemann-Liouville 変換, 14
Riemann 図式, 5, 42
rigid, 7, 8, 62, 76, 84, 93
rigidity 指数, 45

Schlesinger 標準形, 60
 simply reducible, 76
 Simpson リスト, 93

versal addition, 21, 23
 versal Jordan-Pochhammer, 23

Weyl 代数, 9
 Weyl 群, 8, 78

アクセサリー・パラメーター, 61, 71, 75

位数, 44
 一般化 Riemann 図式, 42
 一般化特性指数, 40, 42
 一般超幾何級数, 97

階数, 10
 確定特異点, 31
 簡約代表変換, 10

既約, 8, 20, 38, 57–59, 84
 既約 rigid, 62
 既約に実現可能, 48
 局所化された Weyl 代数, 9
 虚ルート, 78

ゲージ変換, 12

座標変換, 12
 3 項間関係式, 30

次数, 10
 実現可能, 48
 実ルート, 78

スペクトル型, 43

正規型, 60
 接続係数, 86
 全表象, 11

素, 44
 双対分割, 46

台, 78
 代数的線型常微分方程式, 3
 単純簡約可能, 76
 単純鏡映, 78

超幾何級数, 3
 超幾何族, 95
 直和分解, 90

特異点, 31
 特殊関数, 3
 特性指数, 32, 42

標準形, 49

不確定特異点, 31
 普遍型, 75
 普遍微分作用素, 75

分割の組, 44

放物型シリンダー関数, 25

見かけの特異点, 38

モノトーン, 44
 モノドロミー, 6, 38
 モノドロミー保存変形, 105

優級数, 32

隣接関係, 29