非線形熱方程式の爆発問題入門

–Marek Fila 氏講義録–

下條昌彦　記

於：東京大学大学院数理科学研究科

監修者のことば

本講義録は，コメニウス大学（スロバキア）の Marek Fila 氏が 2003 年 11 月 29 日から 2004 年 1 月 28 日にかけて東京大学大学院数理科学研究科で行った全 8 回の集中講義の内容を整理したものです．藤田型方程式，つまりベキ型非線形項をもつ半線形熱方程式の爆発問題を体系的に論じており，この種のテーマに関する日本語で書かれた数少ない入門書です．

ノートの執筆と整理は下條昌彦氏にお願いしました．講義では時間の都合で部分的にしか触れられなかったテーマや省略した証明もすべて丁寧に補っており，実際の講義よりずっと充実した内容になっています．また初めて非線形熱方程式を学ぶ読者にもなるべく読みやすいように，多くの補注を加えました．

Fila 氏の講義が行われてから 7 年半という長い時間が過ぎました．その間に，講義録の原稿の内容も膨らみ，ページ数が増えていきました．原稿整理の作業が長引いたのは，内容が多岐にわたることに加えて，執筆者，監修者，および講師の Fila 氏が一堂に会する機会が少なかったことも一因ですが，この分野の研究は日進月歩で発展しており，ちょうどまとまりの良いところで線引きをするのが難しかったことも事実です．本講義録には，Fila 氏の講義の後で現れた新しいの結果についても何ヶ所かで触れています．例えば第 6 章後半の Liouville 型定理 (2006) や 第 3.3 節後半のタイプ II 爆発の評価 (2004,2009) などは詳しく付け加わった内容です．新しい内容を書き加えましたが，日々進展している分野なのですべてを網羅することができるわけではありませんし，紙数の都合で省いた事柄も数多くあります．内容についてお気づきの点がありましたら，ご指摘いただければ幸いです．

このたび，Fila 氏の数度目の来日を機に最後の編集作業を終え，本講義録刊行の運びとなりました．これまでに皆様からいただいたご助言や励ましに深く感謝いたします．本書を足がかりに，藤田型方程式の爆発問題に興味をもつ人々の輪が少しでも広がれば幸いです．

2011 年 4 月

俣野 博

目 次

概　要

半線形熱方程式

$$(P) \qquad u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, \qquad x \in \Omega,\ t > 0$$

を全空間 $\mathbb{R}^N$ または有界領域上で考える．この方程式の性質は空間の次元や p の値によって大きく異なりうる．その結果，解が爆発することもあれば時間大域的に存在することもある．また，解が爆発する様子も N や p の値によって異なりうる．この講義録では，有限時間で爆発する解に焦点をあて，特異点がいつ，どこで生じるのか，爆発後に解はどのように振る舞うかについて論じる．また，時間大域解の挙動についても考察する．

本講義録の内容は以下の通りである．1 章では楕円型方程式

$$\Delta u + |u|^{p-1}u = 0, \qquad x \in \Omega$$

について考察する．そして，解の構造が p がソボレフの臨界指数 p_s より大きいか小さいかによって大きく変化することを示す．ここで $p_s := (N+2)/(N-2)$ (ただし，$N = 1, 2$ のとき $p_s = \infty$) である．本章の内容は後の章で上の半線形熱方程式の有界な時間大域解の挙動を調べるのに役立つ．

2 章では上の熱方程式 (P) の初期境界値問題の時間局所解の存在を証明する．

3 章では "どのような場合に解が爆発するのか" "解はどこで爆発するのか" "爆発するとき解はどのように振舞うのか" などに関する結果を紹介する．

4 章では爆発現象に関する藤田の臨界指数について述べる．

ところで，容易にわかるように常微分方程式 $du/dt = |u|^{p-1}u$ の解の挙動はつぎの 2 通りしかない．

(1) $u \equiv 0$ である．

(2) 有限時間内に爆発する．

しかし，上の半線形熱方程式 (P) では，これら 2 つの振る舞い以外に次のようなケースも生じる．

(3) $u \not\equiv 0$ かつ $0 < t < \infty$ で一様有界.

(4) 時間大域的に存在するが，$0 < t < \infty$ で一様有界ではない．

5 章では p がソボレフの臨界指数 p_s より小さいとき，時間大域的な解は必ず有界になることを証明する．したがって，(4) は起こりえない．一方で， p がソボレフの臨界指数より大きい場合は (3)，(4) いずれのケースも起こりうることが最近の研究で分かっている．この結果についても簡単に紹介する．

そして 6 章では，5 章の評価式をさらに精密化し，p がある指数より小さければ上の熱方程式の任意の大域解は，単に $0 < t < \infty$ で有界であるのみならず，初期値によらないある普遍評価を満たすことを示す．

7 章では p がソボレフの臨界指数より小さいとき，すなわち $1 < p < p_s$ のとき，どのような爆発解も，爆発時刻以降に弱解の意味でも延長できないことを証明する．このような爆発現象を「完全爆発」という．これに対し，爆発後も L^1 の解として延長できる爆発現象を「不完全爆発」という．8 章では，まず L^1 の意味での弱解の概念を導入して，$p > p_s$ のとき任意の大域的古典解の列の極限は L^1-大域解になることを示す．次に，$p_s < p < p_L$ のとき，この L^1-大域解は有限時間で爆発することを証明する．ここで，$p_L = 1 + 6/(N-10)$ (ただし，$1 < N < 10$ のときは $p_L = \infty$) である．この結果により，爆発後も L^1 の意味で解が時間大域的に延長できる場合があり得ることがわかる．証明には 1 次元放物型方程式の零点数非増大原理を用いる．なおこの結果は，任意の $p > p_s$ に対して成り立つことが最近の研究で示されており，それについても簡単に触れる．

最後の 9 章では，8 章で構成した L^1-延長解の爆発直後の挙動を解析し，解が直ちに滑らかさを回復することを示す．すなわち爆発時に生じた特異性は一瞬にして消え去り，ふたたび古典解になる．この解は，その後ふたたび爆発する場合もある．そこで爆発する回数の上からの評価を与える．これらの結果は，もとの方程式 (P) をスケール変換した方程式に零点数非増大の議論を用いて導かれる．

1　定常解の存在および非存在

Ω は $\mathbb{R}^N$ 内の有界領域または非有界領域とし，p は 1 より大きい定数とする．

次の偏微分方程式を考える．

$$u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, \qquad x \in \Omega,\ t > 0.$$

これは熱方程式に非線形項 $|u|^{p-1}u$ を付加したものであり，半線形放物型方程式のクラスに属する．対応する定常問題は，次の楕円型方程式になる．

$$\Delta u + |u|^{p-1}u = 0, \qquad x \in \Omega.$$

この方程式は統計力学における恒星の平衡状態を記述する問題や微分幾何学の山辺問題などで現れることが知られている．

1.1　有界領域の場合

1.1.1　1 次元の境界値問題

まず，1 次元の Dirichlet 境界値問題

$$\begin{cases} v'' + |v|^{p-1}v = 0, & -L < x < L, \\ v(\pm L) = 0 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

が解を持つことを証明する．ここで $''$ は v の x についての 2 階微分を表し，L は正の数，p は 1 より大きい定数とする．

はじめに，境界値問題 (1.1.1) の正値解 $v(x)$ について考える．$v(x)$ が正の最大値 μ を $\xi \in (-L, L)$ で取るとする．このとき，定数 ξ は

$$v(\xi) = \mu,\ v'(\xi) = 0$$

を満たす．ゆえに式 (1.1.1) の第 1 式に v' をかけて ξ から x まで積分すると

$$\frac{1}{2}(v')^2 + F(v) = F(\mu) \tag{1.1.2}$$

を得る．ここで，

$$F(v)=\frac{1}{p+1}v^{p+1}$$

とおいた．1 階常微分方程式 (1.1.2) を正規系に書き直すと

$$\frac{dv}{dx}=\pm\sqrt{2(F(\mu)-F(v))} \tag{1.1.3}$$

になる．この式を変数分離すれば，$\pm dx=dv/\sqrt{2(F(\mu)-F(v))}$ となる．関数 v の正値性と (1.1.1) の第 1 式から関数 v は上に凸．よって，$x\geq\xi$ の場合は v の値に対して x の値が一意に定まる．このことに注意して等式 (1.1.3) を x について積分すると

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\int_{v(x)}^{\mu}\frac{d\eta}{\sqrt{F(\mu)-F(\eta)}}=|x-\xi|. \tag{1.1.4}$$

式 (1.1.4) に $x=L$ と $x=-L$ を代入し，さらに境界条件を用いると

$$|\xi-L|=|\xi+L|$$

を得る．ゆえに $\xi=0$ である．以上の議論から，次の補題が成り立つ．

補題 1.1. $v(x)$ が境界値問題 (1.1.1) の正値解であるとする．$v(x)$ の $[0,L]$ での最大値を $\mu\in(0,\infty)$ とする．さらに，$\lambda(\mu)$ を

$$\lambda(\mu):=\sqrt{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\mu}\frac{d\eta}{\sqrt{F(\mu)-F(\eta)}}. \tag{1.1.5}$$

で定義する．このとき，

(i) $\displaystyle\sqrt{\frac{1}{2}}\int_{v(x)}^{\mu}\frac{d\eta}{\sqrt{F(\mu)-F(\eta)}}=|x|,\qquad -L\leq x\leq L,$

(ii) $\lambda(\mu)=L$

が成り立つ．逆に，(ii) を満たす正数 μ に対して，(i) で定義した関数 $v(x)$ は，境界値問題 (1.1.1) の正値解であり，その最大値は正数 μ に等しい．

補題 1.2. $\lambda(\mu)$ は式 (1.1.5) で定義した関数とする．このとき，次が成立する．

(i) $\mu > 0$ の範囲で，$d\lambda/d\mu < 0$,

(ii) $\lim_{\mu\to\infty} \lambda(\mu) = 0$,

(iii) $\lim_{\mu\to 0} \lambda(\mu) = \infty$.

補題 1.2 の証明. まず $\eta = \mu\sigma$ とおくと，

$$\begin{aligned}\lambda(\mu) &= \sqrt{\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{\mu d\sigma}{\sqrt{F(\mu)-F(\mu\sigma)}} \\ &= \sqrt{\frac{p+1}{2}}\mu^{-\frac{p-1}{2}}\int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^{p+1}}}\end{aligned}$$

を得る．右辺の積分は収束するのでこの表示より結論は明らか. □

定理 1.3. 任意の $L > 0$ と $p > 1$ に対して，境界値問題 (1.1.1) は，区間 $(-L, L)$ においてただ 1 つの正値解をもつ．また，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，境界値問題 (1.1.1) は，区間 $(-L,\ L)$ において n 回符号変化する 2 つの解を持つ.

定理 1.3 の証明. 補題1.1 と補題 1.2 より任意の $L > 0$ に対して，$\lambda(\mu) = L$ はただ 1 つの解 μ を持つ．ゆえに，常微分方程式の解の一意性より境界値問題 (1.1.1) はただ 1 つの解 v を持つ.

任意の $n = 2, 3, \ldots$ に対して，$v_n(x)$ を

$$v_n(x) = \begin{cases} n^{\frac{2}{p-1}} v(nx-(2j+1)L), & \frac{(2j-n)L}{n} \le x \le \frac{(2(j+1)-n)L}{n}, \\ -n^{\frac{2}{p-1}} v(nx-(2j+2)L), & \frac{(2(j+1)-n)L}{n} \le x \le \frac{(2(j+2)-n)L}{n} \end{cases}$$

で定める．このとき，関数 $v_n(x)$ と $-v_n(x)$ が n 回符号変化する境界値問題 (1.1.1) の解である. □

1.1.2　N 次元の境界値問題

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は，C^2 級の境界をもつ有界領域とする．半線形楕円型方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\begin{cases} \Delta u + |u|^{p-1}u = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

について考えてみよう．以後，この講義録では

$$p_s := \begin{cases} \infty, & N = 1,\ 2, \\ \dfrac{N+2}{N-2}, & N > 2 \end{cases}$$

とする．この指数を**ソボレフの臨界指数** (Critical Sobolev exponent) という．まず $p < p_s$ のとき，任意の有界領域で上の境界値問題に正値解が存在することを証明する．次に，指数の条件が無くても円環上では必ず正値解が存在することを示し，最後に $p > p_s$ のときには，正値解が存在しないことがあることを紹介する．

定理 1.4. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は C^2 級の境界をもつ有界領域とする．$1 < p < p_s$ ならば，境界値問題

$$\begin{cases} \Delta u + |u|^{p-1}u = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1.6}$$

は正値解 $u^* \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ を持つ．

定理 1.4 の証明. 関数空間 $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ 上で汎関数

$$J(u) = F(u) - G(u)$$

を考える．ただし

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx,$$

$$G(u) = \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx$$

とする．$J(u)$ の u のおける線形化作用素は，任意の $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ に対して

$$J'(u)\phi = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx - \int_\Omega |u|^{p-1} u \phi \, dx$$

である．楕円型方程式の正則性の議論より，$J(u)$ の臨界点 u は境界値問題 (1.1.6) の古典解である．この講義録では，部分集合 $M = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega);\ G(u) = 1\}$ において F を最小化し，その後，所望の臨界点 u^* を構成しよう．

まず，関数空間 M は $W_0^{1,2}(\Omega)$ の弱位相で閉であることを示す．ソボレフの埋め込み定理を用いると，

$$W_0^{1,2}(\Omega) \subset\subset L^{p+1}(\Omega) \tag{1.1.7}$$

である．すなわち，関数空間 $W_0^{1,2}(\Omega)$ の弱収束列は $L^{p+1}(\Omega)$ では強収束列になる．このことから M が弱位相で閉であることがしたがう．

次に，汎関数 F の弱下半連続性であることを示す．言いかえれば，$u_n \rightharpoonup u$ ならば

$$F(u) \le \liminf_{n\to\infty} F(u_n) \tag{1.1.8}$$

が成り立つ．これは，関数空間 $W_0^{1,2}(\Omega)$ のノルムが弱下半連続な写像であることからしたがう．

さて，$n \to \infty$ のとき

$$F(u_n) \to \alpha := \inf_{u\in M} F(u) \tag{1.1.9}$$

を満たす任意の点列 $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset M$ をとる (この点列を**最小化列** (minimizing sequence) という)．最小化列 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ は関数空間 $W_0^{1,2}(\Omega)$ で有界なので関数空間 $W_0^{1,2}(\Omega)$ で，ある $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$ に弱収束する部分列 $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ が取れる．またコンパクト埋め込み (1.1.7) より $L^{p+1}(\Omega)$ 内で $u_{n_k} \to w$ であるから $w \in M$．汎関数 F の弱下半連続性 (1.1.8)，および最小化列の定義 (1.1.9) より

$$F(w) \le \liminf_{k\to\infty} F(u_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} F(u_{n_k}) = \alpha \tag{1.1.10}$$

がしたがう．$\alpha = \inf_{u\in M} F(u)$, $w \in M$ であったから式 (1.1.10) より $F(w) = \alpha$ であることがわかる．すなわち部分集合 M において汎関数 F

の下限は達成される．また $0 \leq \inf_{u\in M} F(u)$，および汎関数 F は下に有界であるから $-\infty < \alpha$.

ところで，$w \in M$ ならば $|w| \in M$ であり $F(|w|) = F(w)$ であるから，はじめから $w \geq 0, w \not\equiv 0$ としてよい．このような w に対して

$$G'(w)w = (p+1)G(w) = p+1$$

が成り立つ. $w \not\equiv 0$ より，

$$G'(w) \neq 0$$

である．よって，ラグランジュの乗数定理より，

$$F'(w) = \mu G'(w)$$

を満たす $\mu \in \mathbb{R}$ が存在する.

ここで

$$\begin{aligned}
J'(\mu^{1/(p-1)}w) &= F'(\mu^{1/(p-1)}w) - G'(\mu^{1/(p-1)}w) \\
&= \mu^{1/(p-1)}F'(w) - \mu^{p/(p-1)}G'(w) \\
&= \mu^{1/(p-1)}(F'(w) - \mu G'(w)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

だから $u^* = \mu^{1/(p-1)}w \geq 0$ は $J(u)$ の臨界点である．証明のはじめに述べたように，この関数 u^* は古典解である．ゆえに強最大値原理より関数 u^* は，Ω 上恒等的に 0 か正値である.

あとは，$J(u)$ の臨界点 u^* が Ω 上恒等的に 0 ではないことを示せば証明が完了する.

$$2F(w) = F'(w)w = \mu G'(w)w = \mu(p+1)$$

であることに注意する．もし $F(w) = 0$ ならば関数 $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$ は恒等的に 0 になってしまので，$0 < F(w)$ でなくてはならない．これより，$\mu > 0$ である．よって，$u^* \not\equiv 0$. 以上の議論より，正値古典解 $u^* = \mu^{1/p-1}w$ が構成された. □

注意 1.5. ラグランジュの乗数定理

X は実 Banach 空間で，$F, G : X \to \mathbb{R}$ は $w \in X$ の近傍において C^1 級の関数とする．w が制約条件 $M = \{u \in X; G(w) = 1\}$ と $G'(w) \neq 0$ のもとで F の極小値であるとする．このとき， ある $\mu \in \mathbb{R}$ があって $F'(w) = \mu G'(w)$ である.

注意 1.6. 境界値問題 (1.1.6) の正値解の一意性については領域 Ω の形状が効いてくる．たとえば $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \le 1\}$ のときは Gidas-Ni-Nirenberg [29, 30] の動平面法により正値解は必ず球対称になり常微分方程式の解析に帰着される．一方補題 1.16 より球対称正値解はただひとつである．よって境界値問題 (1.1.6) の正値解は一意である．動平面法についての詳細は鈴木・上岡先生の本 [91] を参照せよ．

以下のように，領域が特別な場合は指数の条件が無くても解の正値解が存在することが示される．

定理 1.7. $p \in (1, \infty)$ であり，$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N\ 1 < |x| < 2\}$ とする．このとき，境界値問題 (1.1.6) は正値解をもつ．

注意 1.8. $N \ge 2$ において $\Omega = \Omega_R := \{x \in \mathbb{R}^N;\ R \le |x| \le R+1\}$ の場合，境界値問題 (1.1.6) の解は本質的には一意ではない．実際，$R \to \infty$ のとき回転させても決して一致しない正値解が無限に増大することが知られている．$N = 2$ のときは Coffman [17]，$N \ge 4$ のときは Y.Y.Li [59]，$N = 3$ のときは Byeon [10] によって示されている．

定理 1.7 の証明. X と Y を

$$\begin{aligned} X &= \{\phi \in W_0^{1,2}(\Omega);\ \phi \text{ は球対称 }\} \simeq W_0^{1,2}((1,2)), \\ Y &= \{\phi \in L^{p+1}(\Omega);\ \phi \text{ は球対称 }\} \simeq L^{p+1}((1,2)) \end{aligned}$$

で定義する. ソボレフの埋め込み定理より，$X \subset\subset Y$ である．よって，定理 1.4 の議論を使うことにより求める結果を得る． □

定理 1.9. (Pohožaev 1965 [78]) 境界値問題

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{N-1}{r} u_r + |u|^{p-1}u = 0, & 0 < r < 1, \\ u_r(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1.1.11}$$

の正値解 u に対して，

$$\left(N - 2 - \frac{2N}{p+1}\right) \int_0^1 r^{N-1} |u|^{p+1}\, dr = -u_r(1)^2 \tag{1.1.12}$$

が成立する．

定理 1.9 の証明. まず方程式 (1.1.11) の第 1 式を

$$(r^{N-1}u_r)_r + r^{N-1}|u|^{p-1}u = 0 \tag{1.1.13}$$

と書き換える．等式 (1.1.13) の両辺に u をかけて 0 から 1 まで積分することにより，

$$\int_0^1 \left((r^{N-1}u_r)_r u + r^{N-1}|u|^{p+1}\right) dr = \int_0^1 r^{N-1}\left(-{u_r}^2 + |u|^{p+1}\right) dr = 0. \tag{1.1.14}$$

今度は式 (1.1.13) の両辺に ru_r をかけて積分すると等式 (1.1.14) より

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 \left((r^{N-1}u_r)_r r u_r + r^N|u|^{p-1}uu_r\right) dr \\
&= -\int_0^1 r^{N-1}{u_r}^2\, dr - \frac{1}{2}\int_0^1 r^N({u_r}^2)_r\, dr + \int_0^1 \frac{r^N}{p+1}\left(|u|^{p+1}\right)_r dr + r^N{u_r}^2\Big|_0^1 \\
&= -\int_0^1 r^{N-1}{u_r}^2\, dr + u_r(1)^2 + \frac{N}{2}\int_0^1 r^{N-1}{u_r}^2\, dr - \frac{(r^N{u_r}^2)\,\big|_0^1}{2} \\
&\qquad\qquad - \frac{N}{p+1}\int_0^1 r^{N-1}|u|^{p+1}\, dr \\
&= \left(\frac{N}{2} - 1 - \frac{N}{p+1}\right)\int_0^1 r^{N-1}|u|^{p+1}\, dr + \frac{1}{2}u_r(1)^2.
\end{aligned}$$

これは求める結果である． □

系 1.10. $p \geq p_s$ $(N > 2)$ とし $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| < 1\}$ とする．このとき境界値問題 (1.1.11) は，正値解を持たない．

系 1.10 の証明. もし正値解を持つとする．このとき Hopf の補題より式 (1.1.12) の右辺は負である．一方仮定より左辺は非負である．よって矛盾． □

定理 1.11. (Pohožaev 1965 [78]) 領域 Ω は滑らかな境界をもつ有界星型領域とする．関数 f は滑らかで $f(0) = 0$ を満たすものとする．境界値問題

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1.15}$$

の正値解 u に対して，

$$(1.1.16) \qquad N\int_\Omega F(u)\,dx + \frac{2-N}{2}\int_\Omega f(u)u\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 x\cdot n\,dS_x$$

が成立する．ただし，$F(u) := \displaystyle\int_0^u f(s)\,ds$ とする．

定理 1.11 の証明. ベクトル値関数 $P(x) = (P_1(x), P_2(x), \cdots, P_N(x))$ に対してガウスの公式を用いると

$$(1.1.17) \qquad \sum_{j=1}^N \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}P_j\,dx = \int_{\partial\Omega} P\cdot n\,dS_x.$$

$$P_j(x) = \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, \cdots, N)$$

を代入すると

$$(1.1.18) \qquad \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}P_j = |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^2) + \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta u$$

が成り立つ．なぜならば

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}P_j &= |\nabla u|^2 + \sum_{i,j=1}^N x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^N x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_j} \\ &= |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right) + \sum_{i,j=1}^N x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_j}\end{aligned}$$

と式変形できるからである．境界値問題 (1.1.15) の第 1 式の両辺に u をかけて部分積分すると境界条件により

$$(1.1.19) \qquad \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = -\int_\Omega \Delta u\,u\,dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\,u\,dS_x = \int_\Omega u\,f(u)\,dx$$

を得る．これを等式 (1.1.18) に代入すると

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} P_j\,dx &= \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^2) + \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta u \right) dx \\ &= \int_\Omega u f(u)\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \int_\Omega x_i \frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^2)\,dx \\ &\qquad - \sum_{i=1}^N \int_\Omega x_i \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i} f(u) \Big)\,dx\end{aligned}$$

ふたたび，部分積分をすれば式 (1.1.19) より右辺の第 2 項は

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \int_\Omega x_i \frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^2)\,dx = -\frac{N}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = -\frac{N}{2} u f(u)\,dx.$$

また，右辺の第 3 項は $F(0)=0$ より

$$\begin{aligned}-\sum_{i=1}^N \int_\Omega x_i \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i} f(u) \Big)\,dx &= -\sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} x_i F(u)\,dS_x + \sum_{i=1}^N \int_\Omega F(u)\,dx \\ &= N \int_\Omega F(u)\,dx\end{aligned}$$

となる．以上から

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} P_j\,dx = N\int_\Omega F(u)\,dx + \frac{2-N}{2}\int_\Omega f(u)u\,dx.$$

等式 (1.1.17) の右辺が式 (1.1.16) の右辺を与えることは容易に確かめられる．よって題意が成立する． □

系 1.12. $p \geq p_s$ $(N>2)$ とし，Ω は滑らかな境界をもつ有界星型領域とする．このとき，境界値問題

$$\begin{cases} \Delta u + |u|^{p-1}u = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

は正値解を持たない．

系 1.12 の証明. 定理 1.11 を用いれば，$p \geq p_s$ $(N>2)$ より等式 (1.1.16) の左辺は負．一方 Hopf の補題より等式 (1.1.16) の右辺は正になってしまい矛盾． □

1.2 全空間における定常解の存在

全空間において楕円型偏微分方程式 $\Delta u = |u|^{p-1}u \ (p > 1)$ を考える．本節の目的は $p < p_s$ のときは正値解が存在しないことを証明することである．このようなタイプの定理を **Liouville 型の定理**という．

1.2.1 球対称な解について

まず符号変化を許せば原点に対して球対称な解が存在することを証明しよう．球対称性を仮定しているので，上の偏微分方程式は次の 2 階常微分方程式になる．

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^{N-1}}(r^{N-1}U')' + |U|^{p-1}U = 0, \quad r > 0, \\ U(0) = a, \\ U'(0) = 0. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

境界値問題 (1.2.1) は次の積分方程式と同値である．

$$U(r) = a - \int_0^r \int_0^s \left(\frac{t}{s}\right)^{N-1} U^p(s)\, dtds.$$

そこで，任意の $r_0 > 0$ に対して写像 $F : C^0[0, r_0] \to C^0[0, r_0]$ を次の式で定義する．

$$F(u) := a - \int_0^r \int_0^s \left(\frac{t}{s}\right)^{N-1} u^p(s)\, dtds.$$

この写像に Banach の縮小写像定理を用いることにより，局所解が存在することがわかる．実際，帰納法により

$$|F^m(u)(r) - F^m(v)(r)| \le \frac{(pa^{p-1})^m r^{2m}}{(2m)!!\, N^m} \|u - v\|_{C^0[0,r_0]}$$

が示される．この式よりどんなに大きな $r_0 > 0$ に対しても，自然数 $m \in \mathbb{N}$ を十分大きく選べば F^m が縮小写像であることがわかる．よって，Banach の縮小写像定理より写像 F^m が不動点 u^* をもつことがわかる．いいかえれば，$F^m(u^*) = u^*$ が成り立つ．この式の両辺に F^m をかけることにより

$$F^m(F(u^*)) = F(F^m(u^*)) = F(u^*)$$

を得る．写像 F^m は縮小写像であるから，不動点の一意性が成り立つ．よって，$F(u^*) = u^*$．これより，u^* はもとの写像 F の不動点であることがわかる．写像 F の不動点 u^* は，上記積分方程式の解であり，常微分方程式 (1.2.1) の解である．

注意 1.13. 境界値問題 (1.2.1) において $U'(0) = 0$ は不要である．$s = r^{-(N-2)}$ とおき変数変換 $W(s) = U(r)$ をする．関数 W は

$$\begin{cases} W'' + \dfrac{|W|^{p-1}W}{(N-2)^2 s^{\frac{2(N-1)}{N-2}}} = 0, \\ W(\infty) = a. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

を満たす．ここで次が成り立つことに注意せよ．

$$W'(s) = -\frac{r^{N-1}}{N-2} U_r(r) \tag{1.2.3}$$

一方

$$\lim_{s\to\infty} W'(s) = 0 \tag{1.2.4}$$

が成立していなくてはならないことが分かる．まず問題 (1.2.2) の第 1 式より $W''(s) \le 0$ なので $\beta := \lim_{s\to\infty} W'(s)$ が存在する．もし $\beta \ne 0$ だと仮定するとこれは $\lim_{s\to\infty} W(s) = a$ に反するからである．式 (1.2.3), (1.2.4) より

$$\lim_{r\to 0} r^{N-1} U'(r) = 0. \tag{1.2.5}$$

方程式 (1.2.1) 第 1 式の両辺に r^{N-1} をかけて積分すると

$$\begin{aligned} r^{N-1} U_r(r)|_{r=0} - r^{N-1} U_r(r) &= \int_0^r r^{N-1} |U|^{p-1} U \, dr \\ &= \int_0^r r^{N-1} (|U|^{p-1} U - a^p) \, dr + a^p \frac{r^N}{N} \end{aligned}$$

極限式 (1.2.5), および $|U|^{p-1}U - a^p = o(1)$ より

$$-U_r(r) = \Big(\frac{a^p}{N} + o(1) \Big) r \to 0 \qquad \text{as} \qquad r \to 0.$$

注意 1.14. Babach の縮小写像定理とは，次のようなものであった．X を Banach 空間，$A \subset X$ は閉部分集合とする．写像 $F: A \to X$ は $F(A) \subset A$ を満たすとする．また，ある $\theta \in (0,1)$ があって任意の $u, v \in A$ に対して

$$\|F(u) - F(v)\|_X \leq \theta \|u - v\|_X$$

が成り立つとする．このとき F は 集合 A 内に不動点をもつ.

つぎに，球対称な正値解の存在について考察しよう．この場合前節と同様，ソボレフの臨界指数 p_s を境に状況が一変する．以下 境界値問題 (1.2.1) の解を $\Phi_a(r)$ と表記することにする.

補題 1.15. (1) $1 < p < p_s$ のとき，全空間の半線形楕円型方程式

$$\Delta u + |u|^{p-1}u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

は球対称な正値解をもたない.

(2) $p \geq p_s$ のとき，任意の a に対して問題 (1.2.1) にはただ一つの正値球対称解 Φ_a が存在して Φ_a は r について単調減少である．また自己相似性 $\Phi_a(r) = a\Phi_1(a^{(p-1)/2}r)$ が成り立つ.

(3) $p = p_s$ のとき

$$\Phi_1(r) = \left(\frac{N(N-2)}{N(N-2) + r^2}\right)^{(N-2)/2}$$

と書ける.

補題 1.15 の証明. 本講義録での証明は [88] の本を参考にした.

$1 < p < p_s$ のとき，$a > 0$ に対して全空間の半線形楕円型方程式 (1.2.1) が球対称な正値解 Φ_a をもつと仮定して矛盾を導く．式 (1.2.1) の第 1 式の両辺に r^{N-1} をかけると

$$(r^{N-1}\Phi_a')' + r^{N-1}\Phi_a^p = 0$$

となる．この両辺を r について 0 から r まで積分して

$$r^{N-1}\Phi_a'(r) + \int_0^r \eta^{N-1}\Phi_a^p \, d\eta = 0.$$

したがって

$$r^{N-1}\Phi_a'(r) = -\int_0^r \eta^{N-1}\Phi_a^p\,d\eta < 0 \tag{1.2.6}$$

である．このことから，関数 Φ_a は r について単調減少であることがわかる．

まず $N = 1, 2$ のときを考えよう． 式 (1.2.6) より任意の $r > 0$ に対して

$$\Phi_a'(r) = -\Big(\int_0^r \eta^{N-1}\Phi_a^p\,d\eta\Big)r^{1-N} \le -\Big(\int_0^1 \eta^{N-1}\Phi_a^p\,d\eta\Big)r^{1-N}$$

が成り立つ．両辺を r について 1 から r まで積分すると

$$\Phi_a(r) \le \begin{cases} \Phi_a(1) - C(r-1), & r > 1, \\ \Phi_a(1) - C\log r, & r > 1 \end{cases}$$

を得る．よって，関数 Φ_a は零点をもつ．

次に，$1 < p < p_s$ かつ $N \ge 3$ のときを考えよう．式 (1.2.6) と関数 Φ_a の r について単調性より

$$r^{N-1}\Phi_a'(r) \le -\Phi_a^p(r)\int_0^r \eta^{N-1}\,d\eta = -\Phi_a^p(r)\,\frac{r^N}{N}$$

を得る．すなわち

$$-\frac{\Phi_a'(r)}{\Phi_a^p(r)} \ge \frac{r}{N}\ .$$

この両辺を r について 0 から r まで積分すると

$$-\frac{1}{1-p}\Phi_a^{1-p}(r) + \frac{1}{1-p}a^{1-p} \ge \frac{r^2}{2N}\ .$$

これを整理すると，次の評価式を得る．

$$\Phi_a(r) \le \left[a^{1-p} + \frac{r^2}{2N}(p-1)\right]^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{1.2.7}$$

方程式 (1.2.1) の第 1 式の両辺に $r^{N-1}\Phi_a$ をかけると

$$\Phi_a(r^{N-1}\Phi_a')' + r^{N-1}\Phi_a^{p+1} = 0.$$

この式の両辺を r について 0 から r まで積分すると $\Phi_a'(0)=0$ より

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^r \Phi_a(\eta^{N-1}\Phi_a')'\,d\eta + \int_0^r \eta^{N-1}\Phi_a^{p+1}\,d\eta \\ &= r^{N-1}\Phi_a'(r)\Phi_a(r) - \int_0^r \eta^{N-1}(\Phi_a')^2\,d\eta + \int_0^r \eta^{N-1}\Phi_a^{p+1}\,d\eta\end{aligned}$$

を得る．すなわち，

$$0 = r^{N-1}\Phi_a'(r)\Phi_a(r) - \int_0^r \eta^{N-1}(\Phi_a')^2\,d\eta + \int_0^r \eta^{N-1}\Phi_a^{p+1}\,d\eta. \tag{1.2.8}$$

Φ_a は正値単調減少関数であるから，特に

$$\int_0^r \eta^{N-1}(\Phi_a')^2\,d\eta \le \int_0^r \eta^{N-1}\Phi_a^{p+1}\,d\eta$$

を得る．不等式 (1.2.7) と $p<p_s$ より $r\to\infty$ のときこの式の右辺は収束する．よって

$$\int_0^\infty \eta^{N-1}(\Phi_a')^2\,d\eta \le \int_0^\infty \eta^{N-1}\Phi_a^{p+1}\,d\eta < \infty. \tag{1.2.9}$$

一方，方程式 (1.2.1) の第 1 式の両辺に $r^N\Phi_a'$ をかけると

$$r^{-N+2}r^{N-1}\Phi_a'(r^{N-1}\Phi_a')' + r^N\Phi_a^p\Phi_a' = r\Phi_a'(r^{N-1}\Phi_a')' + r^N\Phi_a^p\Phi_a' = 0$$

を得る．これは

$$r^{-N+2}\Big(\frac{1}{2}(r^{N-1}\Phi_a')^2\Big)' + r^N\Phi_a^p\Phi_a' = 0$$

とかける．よって両辺を r について 0 から r まで積分すると

$$\begin{aligned}0 = \Big[\frac{\eta^N}{2}(\Phi_a')^2\Big]_0^r &+ \frac{N-2}{2}\int_0^r \eta^{N-1}(\Phi_a')^2\,d\eta \\ &+ \Big[\eta^N\frac{\Phi_a^{p+1}}{p+1}\Big]_0^r - \frac{N}{p+1}\int_0^r \eta^{N-1}\Phi_a^{p+1}\,d\eta\end{aligned}$$

を得る．$\Phi_a(0)=a$, $\Phi_a'(0)=0$ より

$$\begin{aligned}&\frac{r^N}{2}(\Phi_a'(r))^2 + \frac{r^N}{p+1}\Phi_a^{p+1}(r) \\ &\qquad = \frac{N}{p+1}\int_0^r \eta^{N-1}\Phi_a^{p+1}\,d\eta - \frac{N-2}{2}\int_0^r \eta^{N-1}(\Phi_a')^2\,d\eta\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

不等式 (1.2.7) と $p < p_s$ より $r \to \infty$ のとき，等式 (1.2.10) の左辺は 0 に収束する．また，右辺の積分の各項は$r \to \infty$ のとき存在するのであった．よって，

$$\frac{N}{p+1}\int_0^\infty \eta^{N-1}\Phi_a^{p+1}\,d\eta = \frac{N-2}{2}\int_0^\infty \eta^{N-1}(\Phi_a')^2\,d\eta.$$

不等式 (1.2.9) より $N/(p+1) \le (N-2)/2$ を得るが，これを整理すると $p \ge p_s$ になってしまうので矛盾．

今度は $p \ge p_s$ のときを考える．ある $a > 0$ があって関数 Φ_a が零点 $r_a > 0$ を持つとして矛盾を導く．区間 $(0, r_a)$ 内で $\Phi_a > 0$ とする．式 (1.2.8) より

$$\int_0^{r_a} \eta^{N-1}(\Phi_a')^2\,d\eta = \int_0^{r_a} \eta^{N-1}\Phi_a^{p+1}\,d\eta.$$

これと不等式 (1.2.10) より

$$\frac{r_a^N}{2}(\Phi_a'(r_a))^2 = \frac{N}{p+1}\int_0^{r_a} \eta^{N-1}\Phi_a^{p+1}\,d\eta - \frac{N-2}{2}\int_0^{r_a} \eta^{N-1}(\Phi_a')^2\,d\eta.$$

これと Hopf の補題より

$$0 < \frac{r_a^N}{2}(\Phi_a'(r_a))^2 = \Big(\frac{N}{p+1} - \frac{N-2}{2}\Big)\int_0^{r_a} \eta^{N-1}\Phi_a^{p+1}\,d\eta.$$

$p \ge p_s$ のとき右辺は非正になってしまい矛盾．よって関数 Φ_a は正値である．$p = p_s$ の場合は表示式を実際に代入すればよい． $\square$

上記の証明の議論をよく観察すればつぎのことに気がつく．

補題 1.16. $1 < p < p_s$ かつ $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \le R\}$ のとき Dirichlet 境界値問題(1.1.6) の球対称な正値解はただひとつしかない．

補題 1.16 の証明. $a = 1$ のとき全空間の問題 (1.2.1) の解はかならず有限の零点をひとつ以上もつ．その中で原点にもっとも近いものを r_1 とおく．すなわち $\Phi_1(r) > 0$ $(0 < r < r_1)$ が成り立つものとする．自己相似性 $\Phi_a(r) = a\Phi_1(a^{\frac{2}{p-1}}r)$ に気をつければ $\Phi_a(r)$ は $(0, r_a)$ の上で正値である．ただし $r_a = a^{-\frac{2}{p-1}}r_1$ とする．r_a が a について狭義単調減少であること，および常微分方程式の解の一意性から題意が従う． $\square$

1.2.2 Liouville 型の定理

前小節の議論から $p < p_s$ のときは全空間において $\Delta u + u^p = 0$ の正値球対称解が存在しないことがわかった．実は以下で述べるようなより強い結果が成り立つ．次にあげるような主張で述べられる定理を Liouville 型の定理と呼ぶ．これは調和関数の Liouville の定理の類似である．

定理 1.17. (Gidas-Spruck 1981 [31], Chen-Li 1991 [14]) $1 < p < p_s$ $(N \geq 3)$ のとき，全空間の半線形楕円型方程式

$$\Delta u + |u|^{p-1}u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

は正値解をもたない．

以下本講義録では $a \in \mathbb{R}^N$, $R > 0$ に対して

$$B_R(a) := \{x \in \mathbb{R}^N;\, |x - a| < R\}$$

と書くことにする．

定理 1.17 の証明方針． 証明には Kelvin 変換と動平面法を用いる．楕円型方程式

$$\Delta u + |u|^{p-1}u = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

の正値解 u に対して

$$v(x) := \frac{1}{|x|^{N-2}} u\Big(\frac{x}{|x|^2}\Big)$$

とおく．関数 v は方程式

$$\Delta v + \frac{v^p}{|x|^{N+2-p(N-2)}} = 0$$

を満たす．任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$v_\lambda := v(2\lambda - x_1, x_2, \cdots, x_N), \quad w_\lambda := v_\lambda - v, \quad \bar{w}_\lambda := w_\lambda / g$$

ただし $g := \log(-x_1 + 3)$ とおく．関数 w_λ, $\bar{w}_\lambda$ は点 $x_\lambda := (2\lambda, 0, \cdots, 0)$ を特異点にもつ．以下，$x^\lambda := (2\lambda - x_1, x_2, \cdots, x_N)$，$\Sigma_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^N;\, x_1 \leq \lambda\}$ とおき，$\tilde{\Sigma}_\lambda = \Sigma_\lambda \setminus \{x_\lambda\}$, $T_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^N;\, x_1 = \lambda\}$ とする．

$p < p_s$ のとき，補題 1.15 より正値球対称解は存在しない．よって題意を証明するためには次の条件を満たす λ_0 を見つければよい．

(i) $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$ 上において $w_{\lambda_0} \equiv 0$

(ii) 関数 v は $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$ 上 x_1 について狭義単調増大である．

$$\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R}\,;\, w_\lambda(x) \geq 0,\, x \in \tilde{\Sigma}_\lambda\}$$

とおく．ここで，関数 v が遠方において $O(|x|^{2-N})$ のオーダーで減衰していることを考えると集合 Λ は空でないことが予想される．また，$\lambda_0 = \sup \Lambda$ であると思われる． □

以下，これらのことを確かめよう．

補題 1.18. (i) $\inf_{\tilde{\Sigma}_\lambda} \bar{w}_\lambda < 0$ とする．λ が十分小さな実数のときは，その下限が集合 $\tilde{\Sigma}_\lambda$ の有限な点において達成される．

(ii) 次の条件を満たす $R_0 > 0$（λ によらない）が存在する．$\lambda < 0$ であってある $x^0 \in \tilde{\Sigma}_\lambda$ があって $\inf_{\tilde{\Sigma}_\lambda} \bar{w}_\lambda = \bar{w}_\lambda(x^0) < 0$ が成り立ならば $|x^0| < R_0$ である．

補題 1.18 の証明. まず，(i) の証明をする．関数 v は正値なので，ある $\varepsilon_0 > 0$ があって任意の $y \in B_1(0)$ に対して $v(y) \geq \varepsilon_0$ が成り立つ．さらに，遠方では関数 v は減衰しているので λ が十分小さな負の実数の場合

$$v(x_\lambda) \leq \varepsilon_0, \quad x \in B_1(x_\lambda)$$

が成り立つ．よって，$B_1(x_\lambda) \setminus \{x_\lambda\}$ 上において

$$\bar{w}_\lambda = v(x^\lambda) - v(x) \geq \varepsilon_0 - \varepsilon_0 \geq 0.$$

一方，仮定より $\inf_{\tilde{\Sigma}_\lambda} \bar{w}_\lambda < 0$ であり，$\bar{w}_\lambda \to 0$ $(|x| \to \infty)$ である．よって，関数 $\bar{w}_\lambda$ の下限は $\tilde{\Sigma}_\lambda \setminus B_1(x_\lambda)$ 内の有限の点において達成される．

次に，(ii) を証明しよう．$\lambda < 0$ であるから，$|x^\lambda| \geq |x|$ である．よって，任意の $x \in \Sigma_\lambda$ に対して

$$\Delta v_\lambda(x) + \frac{v_\lambda^p(x)}{|x|^{n+2-p(n-2)}} \leq \Delta v(x^\lambda) + \frac{v^p(x^\lambda)}{|x^\lambda|^{n+2-p(n-2)}} = 0$$

が成り立つ．ここで

$$\begin{aligned} c(x) &= \frac{1}{|x|^{N+2-p(N-2)}}(v_\lambda^p - v^p) \\ &= O\Big(\frac{1}{|x|^{N+2-p(N-2)+(p-1)(N-2)}}\Big) = O\Big(\frac{1}{|x|^4}\Big) \end{aligned}$$

であるから関数 w_λ は

$$\Delta w_\lambda + c(x) w_\lambda \leq 0$$

を満たす．これより，関数 $\bar{w}_\lambda$ については次の不等式が成立する．

$$\Delta \bar{w}^\lambda + \frac{2}{g}\nabla g \cdot \nabla \bar{w}_\lambda + \Big(c(x) + \frac{\Delta g}{g}\Big)\bar{w}_\lambda \leq 0. \tag{1.2.11}$$

関数 g の定義より，x_1 が十分小さな負の数の場合に次の不等式が成り立つ．

$$c + \frac{\Delta g}{g} < 0.$$

よって微分不等式 (1.2.11) より関数 $\tilde{w}_\lambda$ は遠方では負の下限に到達し得ない．よって λ によらないある $R_0 > 0$ があって $|x_0| < R_0$ である． □

$R_0 > 0$ を補題 1.18 において与えられた正定数とする．もし $\lambda < -R_0$ とすれば任意の $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda$ について $\bar{w}_\lambda(x) \geq 0$ であることがわかる．

このことを背理法で示そう．ある x に対して $\bar{w}_\lambda(x) < 0$ ならば，関数 $\bar{w}_\lambda$ は遠方で 0 に収束するので補題 1.18 よりある $|x_0| \leq R_0$ に対して

$$\bar{w}_\lambda(x_0) = \min_{\tilde{\Sigma}_\lambda} \bar{w}_\lambda(x) < 0.$$

これは，$\lambda < -R_0$ に反する．

以上から，集合

$$\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R}\,;\, \bar{w}_\lambda(x) \geq 0,\, x \in \tilde{\Sigma}_\lambda\}$$

は空でないことがわかる．以下，Λ の上限を λ_0 と書くことにする．

補題 1.19. $\lambda_0 = \sup \Lambda$ とおく．このとき次のことが成り立つ．

(i) 関数 v は $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$ 上 x_1 について狭義単調増大である．

(ii) $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$ 上において $w_{\lambda_0} \equiv 0$.

補題 1.19 の証明. まず，(i) の証明を行う．$\lambda < \lambda_0$ ならば $\tilde{\Sigma}_\lambda$ 上において $w_\lambda > 0$ が成り立つことを示そう．なぜなら，このことから $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$ 上において $v_{x_1} > 0$ が成り立つことがわかり，(i) の結論が証明されるからである．

ある $\delta > 0$ があって $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0-\delta}$ 上において $w_{\lambda_0-\delta} > 0$ でないとして矛盾を導く．λ_0 の定義から任意の $\lambda < \lambda_0$ に対して $w_\lambda \geq 0$ が成立する．よって強最大値の原理より $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0-\delta}$ 上において $w_{\lambda_0-\delta} \equiv 0$ が成り立つ．このことは

$$(1.2.12) \qquad v(\lambda_0 - 2\delta, x_2, \cdots, x_N) \equiv v(\lambda_0, x_2, \cdots, x_N)$$

であることを意味する．一方，任意の $\lambda < \lambda_0$ に対して $w_\lambda \geq 0$ であれば

$$(1.2.13) \qquad v_{x_1} \geq 0, \quad x \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_0-\delta}$$

が成り立つことの注意する．式 (1.2.12), (1.2.13) より

$$v_{x_1} \equiv 0, \quad x_1 \in [\lambda_0 - 2\delta, \lambda_0]$$

でなくてはならない．このことから，特に

$$-\frac{1}{2}(w_\lambda)_{x_1} = v_{x_1} \equiv 0, \qquad x \in T_{\lambda_0-2\delta}$$

が成り立つ．ここで $(w_\lambda)_{x_1}$ は関数 w_λ の x_1 に関する偏微分である．よって，Hopf の補題より $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0-2\delta}$ 上において $w_{\lambda_0-2\delta} \equiv 0$ である．したがって，上と同様の議論から

$$v_{x_1} \equiv 0, \quad x_1 \in [\lambda_0 - 3\delta, \lambda_0].$$

上記の議論を帰納的に繰り返すことにより

$$v_{x_1} \equiv 0, \quad x_1 \in (-\infty, \lambda_0].$$

すなわち，関数 v は $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0-\delta}$ 上において x_1 によらない．これは v が遠方において $O(|x|^{2-N})$ で減衰することに反する．

次に，(ii) の証明をしよう．$\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$ 上において $\bar{w}_{\lambda_0} \not\equiv 0$ として矛盾を導く．

$$\Delta w_{\lambda_0} + c(x) w_{\lambda_0} \leq 0$$

が成り立つ．これと $\bar{w}_{\lambda_0} \geq 0$，最大値原理，および Hopf の補題より

$$(1.2.14) \qquad \begin{aligned} w_{\lambda_0} &> 0, \quad x \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_0} \\ (w_{\lambda_0})_{x_1} &< 0, \quad x \in T_{\lambda_0} \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，ある $\varepsilon_0, \delta > 0$ があって $B_\delta(x_{\lambda_0}) \setminus \{x_{\lambda_0}\}$ 上において $\bar{w}_{\lambda_0} > \varepsilon_0$ が成り立つ．

一方，λ_0 の定義と補題 1.18 よりある数列 $\lambda_k \searrow \lambda_0$ と点列 $x^k \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_k}$ があって

$$\bar{w}_{\lambda_k}(x^k) = \inf_{\tilde{\Sigma}_{\lambda_k}} \bar{w}_{\lambda_k} < 0 \tag{1.2.15}$$

が成り立つ．このことから十分大きな k に対して x^k が x_{λ_0} から離れていることがわかる．なぜならば,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \inf_{B_\delta(x_\lambda)} \bar{w}_\lambda(x) \geq \inf_{B_\delta(x_\lambda)} \bar{w}_{\lambda_0}(x) > \varepsilon_0$$

が成り立つからである．一方，補題 1.18 よりある $R_0 > 0$ があって $x^k \in B_{R_0}(0)$．これと x^k が x_{λ_0} から離れていることをあわせれば，点列 $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ の適当な部分列 $\{x^{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ の極限 x^∞ は $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$ の内点であることがわかる．これと式 (1.2.15) より $w_{\lambda_0}(x^\infty) \leq 0$ が成り立つ．これは不等式 (1.2.14) に矛盾する． $\square$

定理 1.17 の証明. 補題 1.19 より関数 v は x_1 軸に垂直なある軸に対して軸対称でありその軸までは x_1 方向に単調増大である．他の方向についても全く同様な議論ができるので関数 u は球対称であることがわかる．補題 1.15 より $p < p_s$ のときの球対称な非負解は 0 しかない．よって，題意が成立する． $\square$

定理 1.17 の部分的な証明. p により強い仮定 $p \in (1, N/(N-2))$ をしたときは定理 1.17 は簡単に証明できる．$\lambda_1 > 0$ は $B_1 = B_1(0)$ 上の Dirichlet 条件付き $-\Delta$ の第 1 固有値とし，$\phi_1 \in C^2(B_1)$ を固有値 $\lambda_1 > 0$ に対応する正値固有関数とする．すなわち次の方程式が成り立つ．

$$\begin{cases} \Delta\phi_1 + \lambda_1\phi_1 = 0, & x \in B_1, \\ \phi_1 = 0, & x \in \partial B_1. \end{cases}$$

任意の $R > 0$ に対して $\phi_R := \phi_1(x/R)$ とおく．

$$\begin{cases} \Delta\phi_R + \dfrac{\lambda_1}{R^2}\phi_R = 0, & x \in B_R, \\ \phi_R = 0, & x \in \partial B_R. \end{cases} \tag{1.2.16}$$

両辺を部分積分して

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R} u^p \phi_R^p \, dx &= -\int_{B_R} \Delta u \phi_R^p \, dx \\
&= \int_{B_R} \nabla u \cdot \nabla \phi_R^p \, dx \\
&= -\int_{B_R} u \Delta \phi_R^p \, dx + p \int_{\partial B_R} u \frac{\partial \phi_R}{\partial n} \phi_R^{p-1} \, dS_x \\
&= -\int_{B_R} u \Delta \phi_R^p \, dx.
\end{aligned}
$$

ここで方程式 (1.2.16) に気をつけると次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R} u \Delta \phi_R^p \, dx &= \int_{B_R} p(p-1) u |\nabla \phi_R|^2 \phi_R^{p-2} \, dx + \int_{B_R} p u \phi_R^{p-1} \Delta \phi_R \, dx \\
&\geq -\frac{\lambda_1 p}{R^2} \int_{B_R} u \phi_R^p \, dx.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\int_{B_R} (u\phi_R)^p \, dx \leq \frac{\lambda_1 p}{R^2} \int_{B_R} u \phi_R^p \, dx \leq \frac{\lambda_1 p}{R^2} \Big(\int_{B_R} (u\phi_R)^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{B_R} \phi_R^p \, dx \Big)^{\frac{p-1}{p}}.
$$

これを変形すると

$$
\int_{B_R} (u\phi_R)^p \, dx \leq \Big(\frac{\lambda_1 p}{R^2} \Big)^{\frac{p}{p-1}} \int_{B_R} \phi_R^p \, dx = (\lambda_1 p)^{\frac{p}{p-1}} R^{N - \frac{2p}{p-1}} \int_{B_1} \phi_1^p \, dx.
$$

$R \to \infty$ の極限を考えると $u \equiv 0$ が得られる. □

最後に特異定常解と通常の定常解との関係について述べてこの節を終えることにしよう. 以下, 本節では

$$
p_{JL} := \begin{cases} \infty, & N \leq 10, \\ 1 + 4/(N - 4 - 2\sqrt{N-1}), & N > 10 \end{cases}
$$

とする. この指数を**ジョセフ-ルンドグレンの臨界指数** (Critical Joseph-Lundgren exponent) という.

補題 1.20. 任意の $a > 0$ に対して, 境界値問題

$$
\begin{cases} U_{rr} + \dfrac{N-1}{r} U_r + \varphi^p = 0, \quad r > 0, \\ U_r(0) = 0, \\ U(0) = a \end{cases} \tag{1.2.17}
$$

の非定数解 $\Phi_a(r)$ を考える．$p_s < p < p_{JL}$ ならば，$r > 0$ 内の広義一様に

$$\lim_{a\to\infty} \Phi_a(r) = \Phi^*(r) \tag{1.2.18}$$

が成り立ち，任意の $a > 0$ に対し

$$Z_{(0,\infty)}(\Phi_a - \Phi^*) = \infty \tag{1.2.19}$$

が成立する．ただし $\Phi^*(r)$ は特異定常解であり以下のように書ける．

$$\Phi^*(r) = c^* r^{-2/(p-1)} \qquad (c^*)^{p-1} = \frac{2}{p-1}\left(N - 2 - \frac{2}{p-1}\right).$$

また連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の $\mathbb{R}$ 上の零点の数を

$$\begin{aligned} Z(f) = Z_{(0,\infty)}(f) = \sup\{j;\ -\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_{j+1} < \infty\ \ s.t. \\ f(x_i)f(x_{i+1}) < 0,\ i = 1, 2, \cdots, j\} \end{aligned}$$

と書いた．

注意 1.21. $p > 1$ の値によって特異定常解との交点の数と $a \to \infty$ の極限は異なる．一般には次の表のようになる．詳細は [46, 86] を参照．

	Φ^* と Φ_a との交点の数	$a \to \infty$ のときの極限
$p = p_s$	2	0 ($r = 0$ では ∞)
$p_s < p < p_{JL}$	∞	Φ^*
$p_{JL} < p < \infty$	0	Φ^*

ここでは [63] に沿って簡単に説明する．また [91] にも類似した話題が方程式 $u_t = \Delta u + \lambda e^u$ について議論されている．

補題 1.20 の証明. 変数変換 $\theta = K^{(p-1)/2}\log r$ と関数

$$h(\theta) = \Psi(r) = \frac{r^{\frac{2}{p-1}}}{c^*}\Phi_a(r) = \frac{\Phi_a(r)}{\Phi^*(r)}$$

を考える．

$$\Phi_a = c^*\Psi(r)r^{-\frac{2}{p-1}}, \quad \Phi_a' = c^*\Psi_r(r)r^{-\frac{2}{p-1}} + c^*\Psi(r)\Big(-\frac{2}{p-1}\Big)\, r^{-\frac{2}{p-1}-1}$$

$$\begin{aligned} \Phi_a'' = c^*\Psi_{rr}(r)r^{-\frac{2}{p-1}} + 2c^*\Psi_r(r)\left(-\frac{2}{p-1}\right) r^{-\frac{2}{p-1}-1} \\ + c^*\Big(-\frac{2}{p-1}\Big)\Big(-\frac{2}{p-1} - 1\Big)\,\Psi(r)\, r^{-\frac{2}{p-1}-2} \end{aligned}$$

方程式 (1.2.17) にこれらを代入すると

$$
\begin{aligned}
0 &= \Phi_a'' + \frac{N-1}{r}\Phi_a' + \Phi_a^p \\
&= c^* r^{-\frac{2}{p-1}} \Big\{ \Psi_{rr}(r) - \frac{4}{p-1}\frac{1}{r}\Psi_r(r) + \Psi(r)\Big(-\frac{2}{p-1}\Big)\Big(-\frac{2}{p-1}-1\Big)\frac{1}{r^2} \\
&\qquad + \frac{N-1}{r}\Psi_r(r) + \Psi(r)\Big(-\frac{2}{p-1}\Big)\frac{N-1}{r^2} + (c^*)^{p-1}\Psi^p(r)\frac{1}{r^2}\Big\}.
\end{aligned}
$$

$(c^*)^{p-1} = \dfrac{2}{p-1}\left(N-2-\dfrac{2}{p-1}\right)$ であったから $\{\quad\}$ 内は

$$
0 = \Psi_{rr} + (N-1-\frac{4}{p-1})\frac{\Psi_r}{r} + \frac{(c^*)^{p-1}}{r^2}(|\Psi|^{p-1}-1)\Psi \tag{1.2.20}
$$

と書ける．次に

$$
h_\theta = \frac{r}{(c^*)^{\frac{p-1}{2}}}\Psi_r, \quad h_{\theta\theta} = \frac{r}{(c^*)^{\frac{p-1}{2}}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{(c^*)^{\frac{p-1}{2}}}\Psi_r\right)
$$

を用いて常微分方程式 (1.2.20) を h の常微分方程式に書きかえると

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{r^2}{(c^*)^{p-1}}\Psi_{rr} + \Big(N-1-\frac{4}{p-1}\Big)\frac{r}{(c^*)^{p-1}}\Psi_r + (|\Psi|^{p-1}-1)\Psi \\
&= h_{\theta\theta} - \frac{h_\theta}{(c^*)^{\frac{p-1}{2}}} + \Big(N-1-\frac{4}{p-1}\Big)\frac{h_\theta}{(c^*)^{\frac{p-1}{2}}} + (|h|^{p-1}-1)h.
\end{aligned}
$$

よって微分方程式 (1.2.17) が次の連立常微分方程式に変換される．

$$
\begin{cases} h_\theta = k, \\ k_\theta = -\alpha k + h - |h|^{p-1}h. \end{cases} \tag{1.2.21}
$$

ただし $\alpha = \big(N-2-4/(p-1)\big)(c^*)^{-(p-1)/2}$ とおいた．ここで $p > p_s$ のときに限り $\alpha > 0$ になることに注意せよ．

汎関数

$$
J(h,k) = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{p+1}|h|^{p+1}
$$

は

$$
\frac{d}{d\theta}J(h,k) = -\alpha k(\theta) \le 0
$$

を満たすので問題 (1.2.21) のリャプノフ関数である．簡単な解析から $(h(\theta),k(\theta))$ は $\theta\to-\infty$ のとき $(0,0)$ に収束することがわかる．また，このリャプノフ関数は $\|(h,k)\|\to\infty$ のとき $J(h,k)\to\infty$ なので問題 (1.2.21) の任意の解の相空間上での軌道は有界である．また，各平衡点における J の値は

$$J(0,0)=0,\quad J(1,0)=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}<0.$$

これと，リャプノフ関数の単調減少性より $(h(\theta),k(\theta))$ は $\theta\to\infty$ のとき，$(h,k)=(1,0)$ に収束する．$\theta\to\infty$ ならば $r\to\infty$ であるから，

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\Phi_a(r)}{\Phi^*(r)}=1$$

したがって $a\to\infty$ ならば

$$\frac{\Phi_a(r)}{\Phi^*(r)}=\frac{a\Phi_1(a^{\frac{p-1}{2}}r)}{a\Phi^*(a^{\frac{p-1}{2}}r)}=\frac{\Phi_1(a^{\frac{p-1}{2}}r)}{\Phi^*(a^{\frac{p-1}{2}}r)}\to 1$$

が成立する．これより式 (1.2.18) が示された．以上の議論では $\alpha>0$，すなわち $p>p_s$ しか用いていない．以下指数 p_{JL} の意味について説明する．

$p_s<p<p_{JL}$ のとき，式 (1.2.19) が成立することを示すためには，平衡点 $(1,0)$ が渦心点であることを示せば十分である．そのために方程式 (1.2.21) を平衡点 $(1,0)$ において線形化した方程式

$$\begin{cases} h_\theta=k, \\ k_\theta=-\alpha k-(p-1)h. \end{cases} \tag{1.2.22}$$

を考える．固有方程式は

$$\lambda^2+\alpha\lambda+(p-1)=0.$$

簡単な計算から確かめられるように

$$(c^*)^{p-1}\big(\alpha^2-4(p-1)\big)=\left(N-2-\frac{4}{p-1}\right)^2-8\left(N-2-\frac{2}{p-1}\right)$$

である．指数 $p_s<p<p_*$ の条件より右辺は負である．これより，上記線形化方程式が複素固有値を持つことになるから平衡点 $(h,k)=(1,0)$ は渦心点である．したがって $1=h(\theta)=\Phi_a(r)/\Phi^*(r)$ を満たす $r>0$ は無限に存在する．

一方，$p>p_{JL}$ のとき平衡点 $(1,0)$ は沈点であり，任意の θ に対して $h(\theta)<1$, $k(\theta)>0$ である．したがって Φ^* と Φ_a は交点を持たない．

□

2　放物型方程式の解の存在と爆発の定義

一様な混合気体の燃焼の理論による方程式の簡単な導出を紹介しよう．一般に，温度が上昇するにつれて反応定数が増加する．そのため，酸化反応速度 $w(x,t)$ は非常に大きくなる．その変化は Arrhenius の法則により

$$w = A^m \exp\Big(-\frac{E}{R\theta}\Big)$$

と表現される．ここで，θ, R, E, A, m はそれぞれ温度，燃焼定数，活性化エネルギー，頻度因子，反応次数と呼ばれるものである．これより

$$\rho c\theta_t = \nabla\cdot(\kappa\nabla\theta) + q\rho w$$

を得る．ここで，ρ, c, κ, q は，密度，比熱，熱伝導率，反応係数である．理論的には，頻度因子は温度の項を含んでいて必ずしも定数ではない．たとえば，遷移状態理論と呼ばれるものによると

$$A \propto \frac{k_B\theta}{h}$$

となる．ここで k_B はボルツマン定数，h はプランク定数である．そのため，反応によっては酸化反応速度 $w(x,t)$ が

$$w = A\theta^m \exp\Big(-\frac{E}{R\theta}\Big)$$

の形で与えられることがある．この場合，$\theta(x,t)$ が満たす熱方程式は次のようになる．

$$\rho c\theta_t = \nabla\cdot(\kappa\nabla\theta) + A_0\, q\rho\, \theta^m \exp\Big(-\frac{E}{R\theta}\Big).$$

もし，非線形項において指数関数の項よりも巾の項の影響が大きい場合，温度 θ が満たす方程式は $u_t = \Delta u + u^p$ の形になる．

2.1　半線形熱方程式の古典解の存在について

関数 $f(s)$ は局所リプシッツ連続であり，$s \in \mathbb{R}$ に関して単調増加，かつ $f(0) = 0$ とする．初期境界値問題

$$\text{(2.1.1)}\qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \Omega,\ t > 0,\\ u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0,\\ u(\cdot,0) = u_0, & x \in \Omega \end{cases}$$

を考える．ただし本節では Ω は有界領域または全空間とする．全空間の場合は境界条件は考えない．

定理 2.1. （局所解の存在）$u_0 \in C(\bar{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$ とする．このとき，ある $\tau_0 \in (0, \infty)$ に対して，初期境界値問題 (2.1.1) の $[0, \tau_0]$ 上の解 $u = u(\cdot, t)$ で次の条件を満たすものがある．

(i) $\lim_{t \to 0} \|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$,

(ii) $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0, \tau_0]) \cap C(\bar{\Omega} \times (0, \tau_0])$ であり，$\Omega \times (0, \tau_0)$ において関数 u は初期境界値問題 (2.1.1) の古典解である．

(iii) $u \in L^\infty(\Omega \times (0, \tau_0))$.

またこのような解は関数空間 $C([0, \tau_0]; C(\bar{\Omega}))$ において一意的に存在し，初期値 u_0 に連続的に依存する．もし $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ が任意の $t > 0$ で有界にとどまっているとする．このとき解は任意の $t \in [0, \infty)$ で存在する．

定理 2.1 の証明. この方程式の解の存在を積分方程式

$$u(\cdot, t) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(u(\cdot, s))\, ds \tag{2.1.2}$$

を解くことにより証明する．写像 $\Phi : C([0, \tau]; C(\bar{\Omega})) \mapsto C([0, \tau]; C(\bar{\Omega}))$ を

$$\Phi(u)(\cdot, t) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(u(\cdot, s))\, ds$$

で定義する．以下の証明では $u(t) = u(\cdot, t)$ と簡略化して書くことにする．$M_R = \sup_{|v|<R} f(v)$ とおき，$2\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} < R$ とする．写像 Φ は $\tau > 0$ を十分小さく取れば，

$$B_R := \{v \in C([0, \tau]; C(\bar{\Omega})) \mid \|v\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \times ([0,\tau]))} < R\}$$

からそれ自身の中への縮小写像になることを示そう．

まず $\tau = \tau_1 > 0$ を十分小さく選べば写像 Φ が B_R からそれ自身の中への写像になることを示す．最大値原理より $\|e^{t\Delta} u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ と $\|e^{(t-s)\Delta} f(u(s))\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|f(u(s))\|_{L^\infty(\Omega)}$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)\|_{L^\infty(\Omega \times (0,\tau_1))} &\le \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^{\tau_1} \|f(u(s))\|_{L^\infty(\Omega \times (0,\tau_1))}\, ds \\ &\le \frac{R}{2} + M_R \tau_1.\end{aligned}$$

よって $\tau_1>0$ を十分小さく取れば，写像 Φ は B_R からそれ自身の中への写像であることが分かる．

次に $\tau=\tau_2>0$ を十分小さく選べば Φ が縮小写像になることを示す．定数 $L=L_{f,R}$ は関数 f の区間 $[0,R]$ における局所リプシッツ定数とする．$L\tau_2<1/2$ であるように $\tau_2>0$ を十分小さく取る．最大値原理より $\|e^{t\Delta}u\|_{L^\infty(\Omega)}\leq\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ が成立．ゆえに任意の $t\in(0,\tau_2)$ に対し

$$\begin{aligned}|\Phi(u)(\cdot,t)-\Phi(v)(\cdot,t)| &\leq \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}\{f(u(s))-f(v(s))\}\|_{L^\infty(\Omega)}\,ds\\ &\leq \int_0^{\tau_2}\|f(u(s))-f(v(s))\|_{L^\infty(\Omega)}\,ds\\ &\leq L\,\tau_2\|u-v\|_{L^\infty(\Omega\times(0,\tau_2))}\leq\frac{1}{2}\|u-v\|_{L^\infty(\Omega\times(0,\tau_2))}.\end{aligned}$$

これより $\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_{L^\infty(\Omega\times(0,\tau_2))}\leq\frac{1}{2}\|u-v\|_{L^\infty(\Omega\times(0,\tau_2))}$．よって写像 $\Phi:B_R\to B_R$ は B_R 上の縮小写像である．

以上の議論より $\tau=\tau_0\leq\min\{\tau_1,\tau_2\}$ とすれば写像 Φ は B_R からそれ自身の中への縮小写像になる．したがって Banach の縮小写像定理より積分方程式 (2.1.2) は関数空間 $C([0,\tau_0];C(\bar{\Omega}))$ においてただひとつの解 $\bar{u}$ を持つ．また初期値に対して連続的に依存することを示そう．2 つの初期値 u_0^1,u_0^2 に対応する解を $u^1(t),u^2(t)$ とする．上記の議論から次の積分不等式を得る．

$$\|u^1(t)-u^2(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq\|u_0^1-u_0^2\|_{L^\infty(\Omega)}+L\int_0^t\|u^1(s)-u^2(s)\|_{L^\infty(\Omega)}\,ds.$$

これと Gronwall の不等式より $\|u^1(t)-u^2(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq e^{Lt}\|u_0^1-u_0^2\|_{L^\infty(\Omega)}$．よって解の初期値に対する連続依存性が示せた．この不動点 $\bar{u}$ が古典解になることを示そう．そのために次の 2 つの補題を用いる．

補題 2.2. 平滑化作用 (smoothing effect) (Masuda [61] 8 章)

$1\leq\alpha<\infty$ とする．このとき定数 $C=C(\Omega)>0$ があって任意の $\phi\in C(\Omega)$ に対して，

$$\|e^{t\Delta}\phi\|_{C^\alpha(\Omega)}\leq Ct^{-\frac{\alpha}{2}}\|\phi\|_{C(\Omega)},\quad t>0$$

が成立.

補題 2.3. シャウダー評価式 (Schauder estimate) $\alpha\in(0,1)$ とする．関数 u は連続であり，関数 $g\in C^\alpha(\bar{\Omega}\times[t_1,t_2])$ に対して

$$u_t=\Delta u+g,\quad x\in\bar{\Omega},\,t\in[t_1,t_2]$$

を満たす．このとき $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega} \times (t_1, t_2])$ である．さらに，任意のコンパクト部分集合 $K \subset \Omega$ と $s \in (t_1, t_2]$ に対して定数 C があって

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}(K\times[s,t_2])} \le C(\|u\|_{L^\infty(\Omega\times(t_1,t_2))} + \|g\|_{C^\alpha(\bar{\Omega}\times[t_1,t_2])})$$

が上の方程式を満たす任意の連続関数 u に対して成立する．

まず $g(x,t) = f(\bar{u}(x,t))$ とおく．十分小さな定数 $\delta_0 \in (0, \tau_0)$ を任意に選んで固定する．定数 M は $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ よりも大きな任意の実数とする．補題 2.2 より任意の $t \ge \delta_0$, $\|u_0\| \le M$ に対して

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{C^\alpha(\Omega)} &= \|e^{t\Delta}u_0\|_{C^\alpha(\Omega)} + \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}g(\cdot,s)\|_{C^\alpha(\Omega)}\,ds \\
&\le Ct^{-\alpha/2}\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + C\int_0^t (t-s)^{-\alpha/2}\|g(\cdot,s)\|_{L^\infty(\Omega)}\,ds \\
&= Ct^{-\alpha/2}\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{C\|g\|_{L^\infty(\Omega\times(0,t))}}{1-\alpha/2}t^{1-\alpha/2} \\
&\le CM{\delta_0}^{-\alpha/2} + \frac{C\|g\|_{L^\infty(\Omega\times(0,t))}}{1-\alpha/2}t^{1-\alpha/2}
\end{aligned}$$

同様の議論により $u(t) \in C^\alpha((0,\delta_0] \times \bar{\Omega})$ が示せる．次に補題 2.3 を用いると任意の $\delta \in (\delta_0, \tau_0)$ に対して $\bar{u} \in C^{2+\alpha}(\Omega \times (\delta, \tau_0])$．よって，関数 $\bar{u}$ は古典解である．

ある $t_0 > 0$ に対して $\|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\Omega)}$ が有界であるときそれを初期値と見なして上記の証明をたどる．すると古典解 u が $t = t_0$ を超えて延長できる．したがって，任意の $t > 0$ で $\|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\Omega)}$ が有界ならば，解は $0 < t < \infty$ まで解ける． □

2.2 解の爆発の定義

Ω は $\mathbb{R}^N$ または $\mathbb{R}^N$ 内の有界領域とする．$u_0 \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ とする．定理 2.1 より次の正数 $T > 0$ が定義できる．

$$T = T(u_0) := \sup\{\tau_0 > 0;\ \text{古典解}\ u(x,t;u_0)\ \text{が区間}\ [0,\tau_0]\ \text{で存在する}\ \}$$

とおく．ただし $u(x,t;u_0)$ は初期境界値問題 (2.1.1) の解とする．定理 2.1 より $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ が任意の $t > 0$ に対して有界ならば $T = \infty$ になる．一方 $T < \infty$ ならば定理 2.1 より

$$\lim_{t \nearrow T} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty.$$

定義 2.4. Ω は $\mathbb{R}^N$ または $\mathbb{R}^N$ 内の有界領域とする．

(i) $T = \infty$ のとき解は**大域的に存在する** (exists globally) という．

(ii) $T < \infty$ とする．このとき問題 (2.3.1) の解 u は**有限時間で爆発する** (blows up in finite time) といい，T を**爆発時刻** (blow-up time) と呼ぶ.

(iii) ある点列 $\{(x_m, t_m)\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega \times [0, T)$ があって，

$$t_m \nearrow T, x_m \to x \text{ のとき } \lim_{m\to\infty} u(x_m, t_m) = \infty$$

が成り立つとき $x \in \bar{\Omega}$ は**爆発点** (blow-up point) であるという．爆発点全体の集合を**爆発集合** (blow-up set) といい $B(u_0)$ と表す.

上記の爆発時刻という用語は固体燃料の燃焼モデルにおいて燃料が発火した時刻に対応する．また固体燃料が発火した場所を記述するするため爆発集合を導入した．なお境界条件が Neumann 条件の場合なども同様に定義する．

方程式 $u_t = \Delta u + f(u)$ の最も簡単な解は空間的に一様な解である．常微分方程式

$$\frac{dU}{dt} = f(U), \quad U(0) = M > 0$$

の解が有限時間で爆発するとしよう．変数分離よりこの方程式は

$$\int_M^{U(t)} \frac{ds}{f(s)} = t.$$

したがって $s > 0$ に対して $f(s) > 0$ である関数は次の条件を満たす必要がある．

$$\int_M^{\infty} \frac{ds}{f(s)} < \infty.$$

たとえば $f(s) = s^p$ $(p > 1)$ の場合は

$$U(t) = \kappa(T(M) - t)^{-\frac{1}{p-1}}, \qquad \kappa = (p-1)^{-1/p-1}$$

と書ける．ただし $T(M)$ は $M > 0$ に依存する定数である．

次にある定数 $a > 0$ があって

$$h(u) > 0 \quad \text{for} \quad u > a, \qquad \int_{a+1}^{\infty} \frac{ds}{h(s)} < \infty \tag{2.2.1}$$

を満たす関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して常微分不等式

$$\frac{du}{dt} \geq h(u), \qquad u(0) > a \tag{2.2.2}$$

を考えよう．この常微分不等式の解が有限時間で爆発することを示そう．

もし解が時間大域的に存在したとする．不等式 (2.2.2) より任意の $t \geq 0$ に対して $u(t) > a$. これと式 (2.2.1) および (2.2.2) より $u(t)$ は $t > 0$ について単調増大である．よって変数分離によって解くことができて

$$\infty > \int_a^{\infty} \frac{ds}{h(s)} \geq \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{ds}{h(s)} \geq t.$$

これは矛盾である．よって微分不等式(2.2.2) の解 $u(t)$ は有限時間内に爆発する．

2.3 L^q 空間における初期境界値問題の適切性

本講義録では主に初期境界値問題

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, & x \in \bar{\Omega} \end{cases} \tag{2.3.1}$$

を考えることにする．ここで Ω を $\mathbb{R}^n$ 内の滑らかな有界領域，または全空間 $\mathbb{R}^n$ とする．この方程式の爆発現象は，Kaplan [48] や Fujita [26] の先駆的な仕事がなされて以来 40 年にわたり，多くの数学者により研究され続けている．

本節では，初期値が一般に $L^\infty(\Omega)$ の元でないときの場合に知られていることを紹介する．この場合，はじめから古典解の範疇で解を考察することは賢明な手段とはいえない．そこで，われわれは L^q 空間に値を取る解というものを考える．以下，$D(\Delta) := W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$ とする．

定義 2.5. 関数 u が初期境界値問題 (2.3.1) の**強解**（$L^q(\Omega)$ 値解）であるとは，初期値 $u_0 \in L^q(\Omega)$ に対してある $\tau_0 \in (0, \infty]$ があって以下の 3 つの条件が成り立つことである．

(i) $u \in C([0,\tau_0]\,;\,L^q(\Omega))$ かつ $u(0) = u_0$.

(ii) 任意の $t \in (0,\tau_0]$ に対して $u(t) \in D(\Delta) \cap L^{pq}(\Omega)$.

(iii) $u \in C^1((0,\tau_0]\,;\,L^q(\Omega))$ であって，任意の $t \in (0,\tau_0]$ に対して $u'(t) = \Delta u(t) + |u(t)|^{p-1}u(t)$ が成り立つ.

定義 2.6. X を Banach 空間とする．初期境界値問題 (2.3.1) が**適切である** (well posed) とは，任意の $u_0 \in X$ に対して，ある $T_0 \in (0,\infty)$ があって，$[0,\tau_0]$ 上で問題 (2.3.1) が一意的な解 $u \in C([0,\tau_0];X)$ を持ち，かつその解が初期値 u_0 に連続的に依存することである.

本節の主定理は，次のものである.

定理 2.7. (Weissler 1980 [97]) Ω を $\mathbb{R}^N$ 内の滑らかな有界領域，または全空間 $\mathbb{R}^N$ とする．初期境界値問題 (2.3.1) で $u_0 \in L^q(\Omega)$，$q > N(p-1)/2$, $q \geq 1$ とする．このとき，ある $\tau_0 = \tau_0(\|u_0\|_q) > 0$ があって，初期境界値問題 (2.3.1) の $L^q(\Omega)$ 値解 $u \in C([0,\tau_0];L^q(\Omega))$ が存在する．また初期値のノルムに依存する定数 $K = K(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)})$ があって

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^r(\Omega)} \leq Kt^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}, \qquad t \in (0,\tau_0], \quad r \in [q,\infty]. \tag{2.3.2}$$

とくに $r = \infty$ のときは

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Kt^{-\frac{N}{2q}}, \qquad t \in (0,\tau_0].$$

さらに，$\lambda = N(p-1)/2pq$ に対して $\lim_{t\to 0} t^\lambda \|u(\cdot,t)\|_{L^{pq}(\Omega)} = 0$ を満たす解はただ1 つしか存在しない．また Ω 上 $u_0 \geq 0$ ならば $\Omega \times [0,\tau_0]$ 上 $u \geq 0$ である.

注意 2.8. (i) $1 \leq q < N(p-1)/2$ のとき，初期境界値問題 (2.3.1) の解は必ずしも存在しない．また，存在しても一意ではない [97].

(ii) $q = N(p-1)/2 > 1$ のとき，初期境界値問題 (2.3.1) の解は局所的に存在して，この初期境界値問題は関数空間 $L^q(\Omega)$ において適切である．しかし，その存在時間が $\|u_0\|_q$ のみに依存するかは未解決である.

(iii) $q = N(p-1)/2 = 1$ とする. このとき，$u_0 \geq 0$ を適当に取ると，任意の $\tau_0 > 0$ に対して $L^1(\Omega)$ 値の非負解は存在しない [8].

本節では，解析半群の性質を多く用いるので，その主結果を証明なしで列挙しておく．

定義 2.9. X を Banach 空間とする．C^0 半群 $\{e^{tA}\}_{t>0}$ が解析半群であるとは以下の 2 つの条件を満たすことである．

(i) ある $\gamma \in (0, \pi/2)$ があって，$\{e^{tA}\}_{t>0}$ が $L(X)$ に値を取る関数として

$$\Omega_\gamma := \{z \in \mathbb{C}; z \neq 0\ |\mathrm{arg\,z}| < \gamma\}$$

まで解析接続可能である．

(ii) 十分小さな任意の $\delta > 0$ に対して

$$\lim_{z \to 0, z \in \Omega_\gamma^\delta} e^{tA}a = a, \qquad a \in X$$

が成り立つ．ここで

$$\Omega_\gamma^\delta := \{z \in \mathbb{C};\ z \neq 0\ |\mathrm{arg\,z}| \leq \gamma - \delta\}.$$

注意 2.10. 上の 2 つの条件は，次に述べる条件と同値である．C^0 半群 $\{e^{tA}\}_{t>0}$ が $L(X)$ に値を取る関数として $t > 0$ に関して微分できて

$$\left\| \frac{d}{dt} e^{tA} \right\|_{X \to X} = \|Ae^{tA}\|_{X \to X} = O\Big(\frac{1}{t}\Big) \quad \text{as} \quad t \searrow 0. \tag{2.3.3}$$

注意 2.11. また，ある $\beta \in \mathbb{R}$ に対して作用素 $A - \beta$ が下記の条件 G を満たすとき，作用素 A は解析半群を生成する．また，逆に解析半群の生成作用素 A は条件 G を満たす．

(条件 G) 作用素 A は Banach 空間 X における稠密な定義域をもつ閉線形作用素とする．$\gamma \in (0, \pi/2]$ があって

$$G_\gamma := \{z \in \mathbb{C};\ z \neq 0, |\mathrm{arg\,z}| < \frac{\pi}{2} + \gamma\}$$

が A のレゾルベント集合に含まれている．しかも，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $M_\varepsilon > 0$ があって任意の

$$z \in G_{\gamma,\varepsilon} := \{z \in \mathbb{C};\ z \neq 0, |\mathrm{arg\,z}| \leq \frac{\pi}{2} + \gamma - \varepsilon\}$$

に対してつぎの不等式が成り立つ．

$$\|(z - A)^{-1}\|_{X \to X} \leq \frac{M_\varepsilon}{|z|}.$$

$q \in (1,\infty)$ とする．ラプラス作用素 Δ は $D(\Delta) := W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$ を定義域にもつ作用素であるとする．この作用素は，関数空間 $L^q(\Omega)$ において解析的 C^0-半群 $\{e^{t\Delta}\}_{t>0}$ を生成することが知られている．

この作用素の族 $\{e^{t\Delta}\}_{t>0}$ は初期境界値問題

$$
\begin{cases}
u_t = & \Delta u, \qquad x \in \Omega,\ t > 0, \\
u = & 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\
u(\cdot, 0) = & u_0, \qquad x \in \Omega
\end{cases}
\tag{2.3.4}
$$

の解を初期値 $u_0 \in L^q(\Omega)$ $(1 \le q < \infty)$ に対して，$e^{t\Delta}u_0 \in L^q(\Omega)$ によって定める．

補題 2.12. $1 < \alpha < \beta \le \infty$，$1/\gamma = 1/\alpha - 1/\beta$ とする．このとき定数 $C = C(\Omega) > 0$ があって任意の $\phi \in L^q(\Omega)$ に対して，

$$
\|e^{t\Delta}\phi\|_{L^\beta(\Omega)} \le Ct^{-\frac{N}{2\gamma}}\|\phi\|_{L^\alpha(\Omega)}, \quad t > 0
\tag{2.3.5}
$$

が成立する．

補題 2.12 の証明. まず，解析半群の性質を用いた証明法する．この方法は，Weissler [96] によるものでありより一般の放物型方程式に対しても適用が可能である．

解析半群の特徴付け(2.3.3) とソボレフの埋め込み定理より

$$
\|e^{t\Delta}\phi\|_{L^{\frac{\alpha N}{N-2\alpha}}(\Omega)} \le C\|e^{t\Delta}\phi\|_{W^{2,\alpha}(\Omega)} \le Ct^{-1}\|\phi\|_{L^\alpha(\Omega)}, \qquad t > 0.
$$

一方 C^0-半群の準有界性より

$$
\|e^{t\Delta}\phi\|_{L^\alpha(\Omega)} \le C\|\phi\|_{L^\alpha(\Omega)}, \qquad t > 0.
$$

補題 6.3 (p154) の Riesz-Thorin の補間不等式によれば上記 2 つの不等式より次式を得る．

$$
\|e^{t\Delta}\phi\|_{L^\beta(\Omega)} \le Ct^{-\theta}\|\phi\|_{L^\alpha(\Omega)}, \qquad t > 0.
$$

ただし

$$
\frac{1}{\beta} = \frac{\theta}{\alpha N/(N-2\alpha)} + \frac{1-\theta}{\alpha} \iff \theta = \frac{N}{2}\Big(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\Big).
$$

次に，基本解を用いた証明法を紹介しよう．この方法は，Weissler [97] によるものである．ヤングの不等式とは，以下のようなものであった．$1 \le p, q, r \le \infty$ が

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q} - 1$$

を満たしているとする．このとき，任意の $h \in L^r(\mathbb{R}^N)$, $f \in L^q(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\|h * f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le \|h\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}$$

が成り立つ．特に，$h * f \in L^p(\mathbb{R}^N)$．$\Omega$ が全空間 $\mathbb{R}^N$ の場合は

$$\begin{cases} e^{t\Delta}\phi(x) &= \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} G(x-y,t)\phi(y)\,dy, \\ G(x,t) &= (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \end{cases} \tag{2.3.6}$$

と具体的にかけてしまう．これに上のヤングの不等式を用いると

$$\|e^{t\Delta}\phi\|_{L^\beta(\mathbb{R}^N)} \le (4\pi t)^{-\frac{N}{2\gamma}} \|\phi\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^N)}, \quad t > 0 \tag{2.3.7}$$

を得る．

次に，Ω が有界領域の場合を考えよう．ϕ を Ω の補集合で 0 として拡張した関数を $E(\phi)$ とおく．評価式(2.3.7) より

$$\begin{aligned} \|G(\cdot,t) * E(\phi)\|_{L^\beta(\mathbb{R}^N)} &\le (4\pi t)^{-\frac{N}{2\gamma}} \|E(\phi)\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^N)} \\ &= (4\pi t)^{-\frac{N}{2\gamma}} \|\phi\|_{L^\alpha(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

一方，比較原理より領域 Ω 上において $e^{t\Delta}|\phi| \le G(\cdot,t) * |E(\phi)|$ が成り立つ．さらに，比較原理より $|e^{t\Delta}\phi| \le e^{t\Delta}|\phi|$ であることもわかる．よって式 (2.3.8) の ϕ を $|\phi|$ に置き換えたものを用いて次を得る．

$$\begin{aligned} \|e^{t\Delta}\phi\|_{L^\beta(\Omega)} \le \|e^{t\Delta}|\phi|\|_{L^\beta(\Omega)} &\le \|G(\cdot,t) * |E(\phi)|\|_{L^\beta(\Omega)} \\ &\le (4\pi t)^{-\frac{N}{2\gamma}} \|\phi\|_{L^\alpha(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

注意 2.13. 解析半群の性質 (2.3.3) を用いて不等式 (2.3.5) を証明したが，これら 2 つの不等式は実質的にはほぼ同じことを述べている．なぜならば $1 < q < \infty$ と $W^{2,q}(\Omega) \approx L^{qN/(N-2q)}(\Omega)$ および式 (2.3.3) より

$$\|e^{t\Delta}\phi\|_{W^{2,q}(\Omega)} \sim \|\phi\|_{L^{\frac{qN}{N-2q}}(\Omega)} \le Ct^\theta \|\phi\|_{L^q(\Omega)},$$

ただし

$$\theta := \frac{N}{2}\Big(\frac{1}{q} - \frac{N-2q}{qN}\Big) = -1$$

となるからである．すなわち式 (2.3.3) と (2.3.5) はいずれも線形放物型方程式の平滑化作用を表現した不等式であるといえる．

定理 2.7 の証明を始める前に，臨界指数 $q > N(p-1)/2$ について積分方程式の観点から考える．関数 u が問題 (2.3.1) の関数空間 $L^q(\Omega)$ での解ならば

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\big(|u(s)|^{p-1}u(s)\big)\,ds \tag{2.3.9}$$

を満たすことが期待される．しかしながらこの積分方程式の右辺は意味を持つであろうか？そもそも被積分関数を見ると $|u(s)|^{p-1}u(s) \in L^q(\Omega)$ でなければ $|u(s)|^{p-1}u(s)$ が局所半群 $\{e^{t\Delta}\}_{t>0}$ の定義域に入っていない．また，これが成り立つとして $e^{(t-s)\Delta}(|u(s)|^{p-1}u(s)) \in L^q(\Omega)$ の s に関する積分の収束について考えると，

$$\begin{aligned}\|e^{(t-s)\Delta}\big(|u(s)|^{p-1}u(s)\big)\|_{L^q(\Omega)} &\le C(t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p}{q}-\frac{1}{q})}\|\,|u(s)|^{p-1}u(s)\|_{L^{\frac{q}{p}}(\Omega)} \\ &\le C(t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p-1}{q})}\|u(s)\|^p_{L^q(\Omega)}\end{aligned}$$

である．よって問題 (2.3.1) に $L^q(\Omega)$ 値解が存在するためには $q > N(p-1)/2$ が必要である．

また，正則性の観点から不等式 $q > N(p-1)/2$ の意味について考えよう．そのためには次の評価式が便利である．証明は放物型方程式の適当な本を参考にせよ．

補題 2.14. L^q **評価式** (L^q estimate) $q > 1$ とし，$Q = \Omega \times (0,\tau)$ とする．関数 $g \in L^q(Q)$ に対して，関数 $u \in W^{2,1;q}_{loc}(Q) \cap L^q(Q)$ に対して

$$u_t = \Delta u + g \quad \text{a.e.} \quad \text{in} \quad Q$$

が成り立つとする．このとき，$\mathrm{dist}(Q', \partial\Omega \times (0,\tau) \cup (\bar{\Omega} \times \{0\})) > 0$ を満たす任意の $Q' \subset Q$ に対して，定数 $C = C(N,q,Q,Q')$ があって

$$\|u\|_{W^{2,1;q}(Q')} \le C(\|u\|_{L^q(Q)} + \|g\|_{L^q(Q)}).$$

さらに $u|_{\partial\Omega} = 0$ のときは $\mathrm{dist}(Q', \bar{\Omega} \times \{0\}) > 0$ なる任意の $Q' \subset Q$ に対して，上記の不等式が成立する．

まず $u(t)$ が $L^q(\Omega)$ 値解 なので $|u|^{p-1}u(t) \in L^{q/p}(\Omega)$ である．したがって，補題 2.14 とソボレフの埋め込み定理より

$$u(t+\varepsilon) \in W^{2,q/p}(\Omega) \cap W_0^{1,q/p}(\Omega) \subset L^{\frac{Nq}{Np-2q}}(\Omega), \qquad t>0, \quad \varepsilon>0.$$

ここで

$$\frac{Nq}{Np-2q} > 1 \iff q > \frac{N(p-1)}{2} \tag{2.3.10}$$

に気をつければ次が成り立つことがわかる．

$$u(t+l\varepsilon) \in L^{(\frac{Nq}{Np-2q})^l q}(\Omega), \quad t>0, \varepsilon>0, l=0,1,2\cdots. \tag{2.3.11}$$

実際

$$q_{l+1} := \frac{Nq_l}{Np-2q_l}, \qquad q_0 = q$$

とおく．このとき条件 (2.3.10) より $q_{l+1} > q_l$ および次が成り立つ．

$$\frac{N}{Np-2q_{l+1}} > \frac{N}{Np-2q_l} > \cdots \frac{N}{Np-2q} > 1.$$

したがって

$$q_l > \frac{N}{Np-2q} q_{l-1} > \cdots > \Big(\frac{N}{Np-2q}\Big)^l q.$$

これより $u(t+l\varepsilon) \in L^{q_l}(\Omega) \subset L^{(\frac{Nq}{Np-2q})^l q}(\Omega)$．すなわち式 (2.3.11) を得る．$\varepsilon > 0$ は任意なので任意の $r \geq 1, t > 0$ に対して $u(t) \in L^r(\Omega)$．ゆえに

$$u(t) \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega) \subset C^\alpha(\Omega \times (0,\tau)), \quad t>0, \quad \alpha \in (0,1).$$

さらに，シャウダー評価式を用いれば時間が少しでも経過すると古典的な意味で正則になることがわかる．このように繰り返し正則性を持ち上げていく論法は **bootstrap の議論**と呼ばれている．

定理 2.7 の証明． 関数空間 $Y_\tau := L^\infty((0,\tau); L^q(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}((0,\tau); L^{pq}(\Omega))$ に次のノルムを入れた Banach 空間を考える．

(2.3.12)

$$\|u\|_{Y_\tau} := \max\Big\{ \sup_{0<t<\tau} \|u(t)\|_q, \sup_{0<t<\tau} t^\lambda \|u(t)\|_{pq} \Big\}, \quad \lambda = \frac{N(p-1)}{2pq}.$$

そして Y_τ の部分集合

$$B_{M+1} = \{u \in Y_\tau; \|u\|_{Y_\tau} \le M+1\}$$

を考える．ただし M は $M \ge \|u_0\|_{Y_\tau}$ を満たす定数．写像 $\Phi\colon B_{M+1} \to Y_\tau$ を

$$\Phi(u)(t) := e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\bigl(|u(s)|^{p-1}u(s)\bigr)\,ds$$

で定義する．

まず，適当な $\tau = \tau_1 > 0$ を選べばこの写像が B_{M+1} の中への写像になっていることを示す．補題 2.12 と $q > N(p-1)/2$ より，$m \ge q$ のとき，任意の $u \in B_{M+1}$ に対して

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\bigl(|u(s)|^{p-1}u(s)\bigr)\,ds\right\|_m &\le C\int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}\||u(s)|^p\|_q\,ds \\
&= C\int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}\|u(s)\|_{pq}^p\,ds \\
&= C(M+1)^p\int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}s^{-p\lambda}\,ds \\
&= C(M+1)^p t^{1-p\lambda-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})} \\
&\qquad\times\int_0^1 (1-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}s^{-p\lambda}\,ds
\end{aligned}$$

が成立する．ここで，2 行目から 3 行目の変形には，Y_τ のノルムの定義と $\|u\|_{Y_\tau} \le M+1$ を用いた．3 行目から 4 行目の変形は，変数変換 $s \mapsto st$ による．最後の積分は有界なので，

$$t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\bigl(|u(s)|^{p-1}u(s)\bigr)\,ds\right\|_m \le C(M+1)^p\tau^{1-p\lambda}. \tag{2.3.13}$$

特に，$m = q$ と $m = pq$ を代入すると

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\bigl(|u(s)|^{p-1}u(s)\bigr)\,ds\right\|_q &\le C(M+1)^p\tau^{1-p\lambda}, \\
t^\lambda\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\bigl(|u(s)|^{p-1}u(s)\bigr)\,ds\right\|_{pq} &\le C'(M+1)^p\tau^{1-p\lambda}
\end{aligned}$$

を得る．ここで，左辺で $t \in (0,\tau)$ について上限をとれば

$$\|\Phi(u)\|_{Y_\tau} \le M + \max(C, C')\,(M+1)^p\tau^{1-p\lambda} \tag{2.3.14}$$

である．$q > N(p-1)/2$ より $1 - p\lambda > 0$ なので不等式 (2.3.14) より十分小さな $\tau = \tau_1 > 0$ を取れば上の積分作用素は定義可能で B_{M+1} の中への写像になる．

次に，$\Phi\colon B_{M+1} \to Y_\tau$ が縮小写像であることを証明する．以下この定理の証明では記号を簡単にするため $|u|^{p-1}u$ を u^p と書くことにする．

$$\|u^p - v^p\|_q \le p(\|u\|_{pq}^{p-1} + \|v\|_{pq}^{p-1})\|u-v\|_{pq}$$

とノルムの定義式 (2.3.12) に注意すれば，先程と同様の変形から，$m \ge q$ のとき

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u_1)(t) - \Phi(u_2)(t)\|_m &\le C\int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}\|u_1^p(s) - u_2^p(s)\|_q\,ds \\
&\le C\int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})} p(\|u_1(s)\|_{pq}^{p-1} + \|u_2(s)\|_{pq}^{p-1}) \\
&\qquad\qquad \times \|u_1(s) - u_2(s)\|_{pq}\,ds \\
&\le C'\int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})} s^{-(p-1)\lambda} s^{-\lambda}\|u_1 - u_2\|_{Y_\tau}\,ds \\
&\le C' t^{1-p\lambda-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}\int_0^1 (1-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})} s^{-(p-1)\lambda} s^{-\lambda} \\
&\qquad\qquad \times \|u_1 - u_2\|_{Y_\tau}\,ds \\
&\le C'' t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}\tau^{1-p\lambda}\|u_1 - u_2\|_{Y_\tau}
\end{aligned}$$

である．特に，$m = q$ と $m = pq$ を代入すると

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u_1)(t) - \Phi(u_2)(t)\|_q &\le C''\tau^{1-p\lambda}\|u_1 - u_2\|_{Y_\tau}, \\
t^\lambda\|\Phi(u_1)(t) - \Phi(u_2)(t)\|_{pq} &\le C''\tau^{1-p\lambda}\|u_1 - u_2\|_{Y_\tau}
\end{aligned}$$

がしたがう．ここで，左辺で $t \in (0,\tau)$ について上限をとれば

$$\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\|_{Y_\tau} \le C''\tau^{1-p\lambda}\|u_1 - u_2\|_{Y_\tau} \tag{2.3.15}$$

である．$q > N(p-1)/2$ より $1 - p\lambda > 0$ なので不等式 (2.3.15) より十分小さな $\tau = \tau_2 > 0$ を取れば，$0 < t < \tau$ において写像 $\Phi\colon B_{M+1} \to Y_\tau$ は縮小写像である．

$\tau_0 = \min\{\tau_1, \tau_2\}$ とおく．したがって，Banach の縮小写像定理を用いることができて $B_{M+1} \subset Y_{\tau_0}$ に唯一つの不動点を持つことがわかる．

補題 2.12 と不等式 (2.3.13) から $\|u_0\|_{L^q(\Omega)} \le M$ ならば $K = K(M)$ があって

$$\|u(t)\|_{L^r(\Omega)} \le K_1(M) t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}, \qquad t \in (0, \tau_0), \quad r \in [q, pq].$$

特に $\|u(t)\|_{L^{pq}(\Omega)} \le K(M) t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{pq})}$. これまでの q を pq に置き換えてこれまでの議論を繰り返すと

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L^r(\Omega)} &\le K_2(M)\|u(t)\|_{L^{pq}(\Omega)} t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{pq}-\frac{1}{r})}\\ &\le K_1(M)K_2(M) t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{pq})} t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{pq}-\frac{1}{r})}\\ &\le K_1(M)K_2(M) t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}, \qquad t \in (0,\tau_0), \, r \in [pq, p^2 q].\end{aligned}$$

同様に $r = p^{l-1} q \, (l = 1, 2, \cdots)$ を代入してこれまでの議論を繰り返すと

$$\|u(t)\|_{L^r(\Omega)} \le K(M) t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}, \qquad t \in (0, \tau_0), \quad r \in [p^{l-1} q, p^l q].$$

また十分大きな r について示せば $r = \infty$ の場合の結果もしたがう．したがって有限回のステップで求める評価式 (2.3.2) が示される．

また，これまでの議論から

$$\left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (|u(s)|^{p-1} u(s)) \, ds \right\|_q \le C(M+1)^p t^{1-p\lambda}$$

がわかる．よって $\displaystyle\int_0^t e^{(t-s)\Delta}(|u(s)|^{p-1}u(s))\,ds$ は $L^q(\Omega)$ 値関数として連続性は $t = 0$ まで伸びるので

$$u(t) - e^{t\Delta} u_0 = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(|u(s)|^{p-1} u(s)) \, ds, \qquad u \in C([0, \tau_0]; L^q(\Omega)).$$

次に，上記で構成した積分方程式の解が強解であることについて述べる．方程式 $u'(t) = \Delta u(t) + u^p(t)$ より任意の $\varepsilon > 0$ に対して $u(\varepsilon) \in L^{pq}(\Omega)$ を得る．[96] の命題 1.2 からある $\gamma \in (0.1)$ があって，$u \in C^\gamma([0, \tau_0]\,; L^{pq}(\Omega))$ がしたがう．したがって，$|u|^p \in C^\gamma([0, \tau_0]\,; L^q(\Omega))$ であることがわかる．[47] の 定理 1.27 (p491) を用いることで t についての微分可能性が得られる． □

Weissler の論文での一意性の証明は，$\limsup_{t \searrow 0} t^\lambda \|u(t)\|_{L^{pq}(\Omega)} < \infty$ が成り立つことを仮定している．関数空間 $C([0, \tau_0]\,; L^q(\Omega))$ における強解一意性の証明は Brezis-Cazenave により証明された．

定理 2.15. (Brezis-Cazenave 1996 [8]) $u_0 \in L^q(\Omega)$, $q > N(p-1)/2$ とする．定理 2.7 において構成された解 $u \in C([0,\tau_0]; L^q(\Omega))$ は $C^{2,1}(\Omega \times (0,\tau_0]) \cap C(\bar{\Omega} \times (0,\tau_0])$ の元であり，$t \in (0,\tau_0]$ においては初期境界値問題 (2.3.1) の古典解でもある．また，初期境界値問題 (2.3.1) の強解の一意性は $C([0,\tau_0]\,;\,L^q(\Omega))$ においても成り立つ．

定理 2.15 の証明. $\kappa_1 := pq$ とおく．定理 2.7 における解 u の構成法より $u \in L^\infty([\varepsilon,\tau_0]; L^{\kappa_1}(\Omega))$ であり

$$u(t+\varepsilon) = e^{t\Delta}u(\varepsilon) + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}|u(s+\varepsilon)|^{p-1}u(s+\varepsilon)\,ds. \tag{2.3.16}$$

次に $\kappa_2 > \kappa_1$ を $\alpha_1 := \dfrac{N}{2}\Big(\dfrac{p}{\kappa_1} - \dfrac{1}{\kappa_2}\Big) < 1$ が成り立つように選び，$\beta_1 := \dfrac{N}{2}\Big(\dfrac{1}{\kappa_1} - \dfrac{1}{\kappa_2}\Big)$ とおく．補題 2.12 より任意の $t \in [\varepsilon, \tau_0 - \varepsilon]$ に対して

$$\|u(t+\varepsilon)\|_{L^{\kappa_2}(\Omega)} \le t^{-\beta}\|u(\varepsilon)\|_{L^{\kappa_1}(\Omega)} + \int_0^t (t-s)^{\alpha_1}\|u(s+\varepsilon)\|^p_{L^{\kappa_1}(\Omega)}\,ds.$$

したがって，$u \in L^\infty([2\varepsilon,\tau_0]; L^{\kappa_2}(\Omega))$．以上の議論を繰り返して $\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3 < \cdots < \infty$ なる点列であって $u \in L^\infty([n\varepsilon,\tau_0]; L^{\kappa_n}(\Omega))$ $(i = 1,2,3,\cdots)$ を満たすものがとれる．よって，$u \in L^\infty_{loc}((\varepsilon,\tau_0); L^\infty(\Omega))$ 補題 2.3 より u は $t > 0$ のとき古典解になる．

以下，関数空間 $C([0,\tau_0]\,;\,L^q(\Omega))$ における一意性を示す．平滑化作用により瞬時に古典解になることが上記の議論からわかっているので，初期時刻 $t = 0$ の近くの解の一意性が問題になる．定理 2.7 において構成された解を $S(t)u_0$ と書き表すことにする．v は初期境界値問題 (2.3.1) の任意の強解とする．前半の議論によりこの関数 v も $C([0,T_1]\,;\,L^q(\Omega))$ の元であって $v(0) = u_0$ かつ時刻 $t \in (0,T_1]$ において古典解であることがしたがう．$M_1 > \sup_{0\le t\le T_1}\|v(t)\|_{L^q(\Omega)}$ なる定数を選ぶ．初期境界値問題 (2.3.1) の古典解は対応する積分方程式の解でもある．ゆえに前節の議論より

$$v(t+s) = S(t)v(s), \quad s \in (0,T_1),\ t \in [0, \min\{T_1 - s, \tau_0(M_1)\}].$$

定理 2.7 の証明の議論から $\|v(t+s)\|_{L^q(\Omega)} < M_1$, $t^\lambda\|v(t+s)\|_{L^{pq}(\Omega)} < M_1 + 1$. ここで $s \to 0$ の極限を考えると任意の $t \in [0, \min\{T_1, \tau_0(M_1)\}]$ に対して $v(t) \in B_{M_1+1}$ であることがわかる．したがって，前定理の写

像 Φ の固定点の一意性から，任意の $t \in [0, \min\{T_1, \tau_0(M_1)\}]$ に対して $v(t) = S(t)u_0$. よって，$t = \min\{T_1, \tau_0(M_1)\}$ までの強解の一意性が示された．この時刻以後の一意性は，古典解の解の一意性からしたがう． $\square$

3　有界領域での解の爆発

3.1　爆発の判定条件

初期境界値問題

$$
(3.1.1) \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, & x \in \Omega \end{cases}
$$

を考える．ここで Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな有界領域で，$u_0 \in L^\infty(\Omega)$ とする．本節では，初期境界値問題 (3.1.1) の解 u が有限時間内に爆発するためのいくつかの十分条件を挙げる．

3.1.1　Kaplan の判定条件

以下 $\lambda_1 > 0$ は Dirichlet 条件付き $-\Delta$ の第 1 固有値とし，$\phi_1 \in C^2(\bar{\Omega})$ は，固有値 $\lambda_1 > 0$ に対応する正値固有関数とする．すなわち，正数 $\lambda_1 > 0$ と関数 $\phi_1 > 0$ は，

$$
(3.1.2) \qquad \begin{cases} \Delta\phi_1 + \lambda_1\phi_1 = 0, & x \in \Omega, \\ \phi_1 = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}
$$

を満たす．以下の議論を簡単にするため，さらに次の正規化条件も課すことにする．

$$
\int_\Omega \phi_1(x)\, dx = 1.
$$

初期境界値問題 (3.1.1) の時間大域解は以下のような方法で容易に構成できる．第 1 固有関数 $\phi_1(x)$ に対して $\phi_1/\|\phi_1\|_{L^\infty(\Omega)} = \psi$ とおいて $V(x,t) := \varepsilon\psi(x)$ を考える．すると，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して

$$
\begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(\cdot, 0) = \varepsilon\psi & x \in \Omega \end{cases}
$$

の解 $u(x,t;\varepsilon\psi(x))$ は時間大域的に存在する．実際，$\psi(x)\le 1$ であるから $\varepsilon>0$ を十分小さく選べば

$$V_t-\Delta V-V^p\ge(\lambda_1-\varepsilon^p)\psi>0$$

が成り立つ．よって比較原理より

$$u(x,t;\varepsilon\psi(x))\le V(x).$$

また，十分小さな $\varepsilon\in(0,\infty)$ に対して適当な $\delta\in(0,\lambda_1)$ を選べば $\bar{V}(x,t):=\varepsilon e^{-\delta t}\psi(x)$ が同じ方程式の優解であることも容易に示される．よって，$u\equiv 0$ は安定な平衡点である．

以下の議論で必要になる Jensen の不等式を証明する．

補題 3.1. $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ は連続な凸関数．$\Omega\subset\mathbb{R}^N$ は有界領域で $u(x)$ は Ω 上の可測関数とする．このとき，次の不等式が成り立つ．

$$f\left(\frac{\int_\Omega u\,d\mu}{\int_\Omega d\mu}\right)\le\frac{\int_\Omega f(u)\,d\mu}{\int_\Omega d\mu}. \tag{3.1.3}$$

ただし，ここで μ は Lebesgue 測度とする．

補題 3.1 の証明. ここで紹介する証明は [19] の Appendix を参考にした．f が凸関数であるから任意の $p\in\mathbb{R}$ を与えると，ある $r\in\mathbb{R}$ があって

$$f(q)\ge f(p)+r(q-p),\quad q\in\mathbb{R}$$

が成り立つ．$p=\displaystyle\int_\Omega u\,d\mu\Big/\int_\Omega d\mu,\ q=u(x)$ を代入すると

$$f(u(x))\ge f\left(\frac{\int_\Omega u\,d\mu}{\int_\Omega d\mu}\right)+r\left(u(x)-\frac{\int_\Omega u\,d\mu}{\int_\Omega d\mu}\right).$$

領域 Ω での積分平均を考えると第 2 項は 0 になり題意が成立する． □

注意 3.2. 補題 3.1 は Lebesgue 測度より一般の非負測度で置き換えてもそのまま成立する．証明は全く同じである．その際 3.1.3 は以下の形で書かれる．

$$f\left(\frac{\int_\Omega u\,d\mu}{\mu(\Omega)}\right)\le\frac{\int_\Omega f(u)\,d\mu}{\mu(\Omega)}.$$

定理 3.3. (Kaplan 1963 [48]) Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな有界領域とする．また初期境界値問題 (3.1.1) の初期値 $u_0 \in L^\infty(\Omega)$

$$u_0 \geq 0, \quad \int_\Omega u_0 \phi_1 \, dx > \lambda_1^{\frac{1}{p-1}}$$

を満たすとする．このとき初期境界値問題 (3.1.1) の解 u は有限時間内に爆発する．

定理 3.3 の証明. 解 u が時間大域的に存在するとして矛盾を導く．まず，最大値原理より $u_0 \geq 0$ ならば，任意の $t > 0$ で $u \geq 0$ である．次に初期境界値問題 (3.1.1) の第 1 式の両辺に ϕ_1 をかけて Ω 上積分すると，

$$\int_\Omega u_t(\cdot,t)\phi_1 \, dx = \int_\Omega \Delta u(\cdot,t)\phi_1 \, dx + \int_\Omega u^p(\cdot,t)\phi_1 \, dx \tag{3.1.4}$$

である．ところで，$u|_{\partial\Omega} = 0 = \phi_1|_{\partial\Omega}$ と式 (3.1.2) より

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta u(\cdot,t)\phi_1 \, dx &= \int_\Omega u(\cdot,t)\Delta\phi_1 \, dx + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u(\cdot,t)}{\partial n}\phi_1 - \frac{\partial \phi_1}{\partial n} u(\cdot,t) \right) dS_x \\ &= -\lambda_1 \int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1 \, dx\end{aligned}$$

を得る．これと等式 (3.1.4) より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1 \, dx &= -\lambda_1 \int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1 dx + \int_\Omega u^p(\cdot,t)\phi_1 \, dx \\ &\geq -\lambda_1 \int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1 \, dx + \left(\int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1 \, dx \right)^p .\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

ここで ϕ_1 の正規化条件より，$\phi_1 dx$ を測度と考えて Jensen の不等式を適用した．背理法の仮定と領域 Ω の有界性より関数 $y(t) := \int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1 \, dx$ は時間大域的に存在する．また上記の議論から不等式

$$\frac{dy}{dt} \geq y^p - \lambda_1 y$$

が成り立つ．ところが定理の仮定より $y^p(0) - \lambda_1 y(0) > 0$．よって関数 $y(t)$ は有限時間で発散する．これは解 u が時間大域的に存在するという背理法の仮定に反する． □

3.1.2 エネルギー負の条件 (有界領域の場合)

次によく知られたエネルギーによる判定条件について述べる.

補題 3.4. 関数 $v \in H^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$ に対して汎関数

$$J(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |v|^{p+1}\,dx$$

を考える. 初期境界値問題 (3.1.1) の任意の解 $u(x,t)$ に対して関数 $J(u(\cdot,t))$ は t について単調非増大である. すなわち汎関数 $J : H^1(\Omega)\cap L^{p+1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ は問題 (3.1.1) のリャプノフ関数である.

補題 3.4 の証明. $J(u(\cdot,t))$ を時間微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(u(\cdot,t)) &= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u_t\,dx - \int_\Omega |u|^{p-1}uu_t\,dx \\ &= -\int_\Omega \Delta u u_t\,dx - \int_\Omega |u|^{p-1}uu_t\,dx = -\int_\Omega u_t^2\,dx.\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

よって結論が成り立つ. □

まず Ω が有界領域の場合についてよく知られた次の結果を紹介する.
この定理から容易に負のエネルギーから出発した解が爆発することがわかる.

定理 3.5. (Tsutsumi 1972 [92], Ball 1977 [5]) Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな有界領域とする. また初期境界値問題 (3.1.1) の初期値 $u_0 \in H^1(\Omega)\cap L^{p+1}(\Omega)$ が, $J(u_0) < 0$ を満たすとする. このとき問題 (3.1.1) の解 u は有限時間内に爆発する.

上の定理は次の補題から直ちに導かれる.

補題 3.6. Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな有界領域とする. また初期境界値問題 (3.1.1) の初期値は $u_0 \in H_0^1(\Omega)\cap L^{p+1}(\Omega)$ とする. もし解 u が時間大域的に存在するならば

$$J(u(\cdot,t)) \geq \Big(\frac{p-1}{2(p+1)}|\Omega|^{-\frac{p-1}{2}}\Big)\Big(\int_\Omega u^2(\cdot,t)\,dx\Big)^{\frac{p+1}{2}}, \quad t \geq 0. \tag{3.1.7}$$

補題 3.6 の証明. 不等式 (3.1.7) が成り立たないとする．すなわちある $t_0 > 0$ があって

$$J(u(\cdot,t_0)) < \Big(\frac{p-1}{2(p+1)}|\Omega|^{-\frac{p-1}{2}}\Big)\Big(\int_\Omega u^2(\cdot,t_0)\,dx\Big)^{\frac{p+1}{2}} \tag{3.1.8}$$

が成り立つとする．一方，問題 (3.1.1) の第 1 式の両辺に u をかけて Ω 上積分すると

$$\int_\Omega u(\cdot,t)u_t(\cdot,t)\,dx = \int_\Omega u(\cdot,t)\Delta u(\cdot,t)\,dx + \int_\Omega |u(\cdot,t)|^{p+1}\,dx$$

を得る．補題 3.4 のエネルギーの単調非増大性および Jensen の不等式から任意の $t \geq t_0$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2(\cdot,t)\,dx &= -\int_\Omega |\nabla u(\cdot,t)|^2\,dx + \int_\Omega |u(\cdot,t)|^{p+1}\,dx\\ &= -2J(u(\cdot,t)) + \frac{p-1}{p+1}\int_\Omega |u(\cdot,t)|^{p+1}\,dx\\ &\geq -2J(u(\cdot,t)) + \frac{p-1}{p+1}|\Omega|^{-\frac{p-1}{2}}\left(\int_\Omega u^2(\cdot,t)\,dx\right)^{\frac{p+1}{2}}\\ &\geq -2J(u(\cdot,t_0)) + \frac{p-1}{p+1}|\Omega|^{-\frac{p-1}{2}}\left(\int_\Omega u^2(\cdot,t)\,dx\right)^{\frac{p+1}{2}}.\end{aligned}$$

ここで $y(t) := \displaystyle\int_\Omega u^2\,dx$ とおくと

$$\frac{1}{2}y'(t) \geq -2J(u(\cdot,t)) + \Big(\frac{p-1}{p+1}|\Omega|^{-\frac{p-1}{2}}\Big)y^{\frac{p+1}{2}}(t) =: h(y(t)), \quad \forall t \geq t_0.$$

不等式 (3.1.8) より $h(y(t_0)) > 0$．一方 $y^* > 0$ を $h(y)$ の零点とする．関数 $h(y)$ の単調性と $h(y(t_0)) > 0$ より $y(t_0) > y^*$ である．これと $p > 1$ より $\displaystyle\int_{y(t_0)}^\infty \frac{dy}{h(y)} < \infty$ が容易に導かれる．これより $y(t)$ が有限時間内に発散することが従う．ところが補題の仮定より u は時間大域的な解なので $y(t)$ は任意の $t > 0$ に対して有限値の関数として定義される．よって矛盾．∎

注意 3.7. 上の証明では背理法の仮定の下で L^2 爆発を示して矛盾を導いたが，実際には解が爆発したからといって $\displaystyle\int_\Omega u^2(\cdot,t)\,dx$ が同時に爆発す

るとは限らない．実際 $p > p_{JL}$ のとき，原点のみでタイプ II 爆発する解 (3.3 節参照) の場合は後述の注意 3.46 から $|u(x,t)| \le C|x|^{-\frac{2}{p-1}}$ が $t = T$ の近くで成り立つので $\displaystyle\int_\Omega u^2(\cdot,t)\,dx$ が $t \nearrow T$ で有界にとどまることがわかる．また $p > p_s$ で不完全爆発する解の場合にも [64] の系 5.11 より同様の評価式が成り立つので，やはり $\displaystyle\int_\Omega u^2(\cdot,t)\,dx$ は有界にとどまる．

注意 3.8. 定理 3.5 に関しては，4 節の初期値問題 (4.1.1) に対しても同様の判定法がある．しかしながら定理 3.5 の証明は Ω が非有界の場合は適用できない．なぜなら Jensen の不等式が利用できないし，L^2 での爆発が L^∞ での爆発をただちには意味しないからである．このため定理 3.5 を非有界領域に拡張するには異なるアプローチが必要となる．詳細は小節 4.1.2 を参照せよ．

このエネルギー汎関数による判定法を用いると，次のような時間大域解についてのアプリオリ評価を簡単に得ることができる．より一般のアプリオリ評価については 5 章を参照にせよ．

命題 3.9. $1 < p < 1 + 4/N$ とする．$u_0 \in L^\infty(\Omega)$ を初期値とする問題 (3.1.1) の時間大域解 u に対して定数 $C = C(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)})$ があって

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}), \quad t > 0.$$

命題 3.9 証明. 古典解の局所存在定理より十分小さな $\tau > 0$ に対して

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le 2(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}), \quad t \in (0,\tau]. \tag{3.1.9}$$

一方定理 2.7 の不等式とソボレフの埋め込みより定数 $C > 0$ があって

$$\|u(\cdot,\tau)\|_{H^1(\Omega)} \le C\tau^{-\frac{1}{2}}\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \le C\tau^{-\frac{1}{2}}|\Omega|^{\frac{1}{2}}\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{3.1.10}$$

よって

$$J(u(\cdot,\tau)) \le \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(\cdot,x)|^2\,dx \le C^2\tau^{-1}|\Omega|\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

これとエネルギー汎関数の時間に対する単調非増大性より

$$J(u(\cdot,t)) \le J(u(\cdot,\tau)) \le C^2\tau^{-1}|\Omega|\|u_0\|^2_{L^\infty(\Omega)}, \quad t \ge \tau.$$

u は時間大域的に存在するので，補題 3.6 より定数 $C(\Omega, p) > 0$ があって

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \le C(\Omega,p)\ [J(u(\cdot,t))]^{\frac{1}{p+1}}, \quad t \ge \tau.$$

これと前出の不等式から

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \le C(\Omega,p,\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}), \quad t \ge \tau.$$

ただし右辺は $\Omega, p, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ に依存する定数である．したがって 定理 2.7 より $2 > N(p-1)/2$ ならば定数 $c > 0$ があって

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} &\le c(t-\tau)^{-\frac{N}{4}}\ \|u(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le c\,C(\Omega,p,\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)})\ (t-\tau)^{-\frac{N}{4}}, \quad t > \tau.\end{aligned}$$

これと不等式 (3.1.9) より任意の $t \ge 0$ に対して結論の不等式が成立． □

3.1.3 定常解との比較

本小節では定常解による比較を用いた爆発の判定法について紹介する．次の補題は，初期境界値問題 (3.1.1) の時間大域解について，その ω 極限集合の構造を規定するものであり，定常解との比較を行う際に，本質的な役割を果たす.

補題 3.10. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は有界かつなめらかな境界をもつ領域とする．初期境界値問題 (3.1.1) の解 u が $t \ge t_0 > 0$ において一様有界とする．このとき，$\omega(u_0)$ は $C_0(\Omega) := \{u \in C(\Omega)\,;\, u|_{\partial\Omega} = 0\}$ の空でない，連結コンパクト集合であり，定常解全体の集合に含まれる．

補題 3.10 証明. 初期境界値問題 (3.1.1) の解を $u(x,t)$ と表すことにする．補題2.2 より $\{u(\cdot,t)\}_{t\ge1}$ は関数空間 $C_0^\alpha(\Omega)$ において一様有界である．Ascoli-Arzela の定理より $\omega(u_0) \ne \emptyset$．また，力学系の一般論から $\omega(u_0)$ は関数空間 $C_0(\Omega)$ において連結かつ相対コンパクトな不変集合である．

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \end{cases}$$

が $C_0(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ で生成する力学系 $\{U_t\}_{t=t_0}^\infty$ を考える．補題 2.3 を用いると $\{u(\cdot,t)\}_{t\ge1}$ は古典解でもあった．上記と同様の理由から $\omega(u_0) \ne \emptyset$

は関数空間 $C_0(\Omega)\cap C^1(\Omega)$ において連結かつ相対コンパクトな不変集合である．また汎関数 $J: C_0(\Omega)\cap C^1(\Omega)\to\mathbb{R}$: が上の問題の解軌道に沿って減少するリャプノフ関数であることがわかる．よって力学系の一般論から $\omega(u_0)$ は定常解からなる集合に含まれる． □

補題 3.11. $f;(0,\infty)\to(0,\infty)$ は局所リプシッツ関数とする．関数 u は初期境界値問題

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x\in\Omega,\ t\in(0,\infty),\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\ t\in(0,\infty),\\ u(\cdot,0)=u_0, & x\in\Omega \end{cases}$$

の正値時間大域解とし

$$u_t \ge 0,\quad x\in\Omega,\, t\in(0,\infty) \tag{3.1.11}$$

を満たす．さらに Ω のある部分領域 ω 上で $u(x,t)$ は有界であると仮定する．このとき関数 $\bar{u}(x) := \lim_{t\to\infty} u(x,t)$ は ω 上で $\Delta\bar{u}+f(\bar{u})=0$ を満たす.

補題 3.11 の証明. x が ω 内の任意の点であるならば単調性 (3.1.11) より $\bar{u}(x,t)$ の存在は明らか．ω 上関数 $\bar{u}$ は有界なので L^p 評価とシャウダー評価式から $\{u(x,t+k)\}$ が $C^{2,1}(K)$ でコンパクトであることがしたがう．ただし K は $\omega\times(0,\infty)$ のコンパクト部分集合．特にある部分列 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\{k\}_{k=1}^{\infty}$ と $w(x,t)\in C^{2,1}(K)$ があって任意の $x\in\omega,\, t>0$ に対して $\lim_{k\to\infty} u(x,t+t_k)=w(x,t)$ かつ

$$\lim_{k\to\infty}\Delta u(x,t+t_k)=\Delta w(x,t),\quad \lim_{j\to\infty} u_t(x,t+t_k)=w_t(x,t).$$

単調性 (3.1.11) より任意の $x\in\omega, t>0$ に対し $w(x,t)=\bar{u}(x)$．ゆえに

$$\begin{aligned} 0=\lim_{k\to\infty} u_t(x,t+t_k) &= \lim_{k\to\infty}\{\Delta u(x,t+t_k)+f(u(x,t+t_k))\}\\ &= \Delta\bar{u}(x)+f(\bar{u}(x)), \qquad x\in\omega. \end{aligned}$$

□

空間 1 次元の場合を考える．この場合定常解は次の 1 次元 Dirichlet 境界値問題の解である．

$$\begin{cases} v''+|v|^{p-1}v=0, & -L<x<L,\\ v(\pm L)=0. \end{cases} \tag{3.1.12}$$

ここで $''$ は v の x に関する 2 階微分を表し，L は正の数，p は 1 より大きい定数とする．定理 1.3 によると任意の $L>0$ と $p>1$ に対して，境界値問題 (3.1.12) は，ただ 1 つの正値解をもつのであった．この事実を用いて次の定理が証明できる．

定理 3.12. 関数 v は境界値問題 (3.1.12) の正値解とする．u_0 は次の条件を満たす連続関数とする．

$$u_0(x) \geq v(x), \quad -L \leq x \leq L, \qquad u_0 \not\equiv v.$$

このとき，次の初期境界値問題の解は有限時間で爆発する[1]．

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + |u|^{p-1}u, & -L < x < L, t > 0, \\ u = 0, & x = \pm L, \quad t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, & -L < x < L. \end{cases} \tag{3.1.13}$$

定理 3.12 の証明. 強最大値の原理と Hopf の補題より，任意の $\tau > 0$ に対して

$$\begin{gathered} u(x,\tau) > v(x), \quad -L \leq x \leq L, \\ |u_x(\pm L, \tau)| > |v_x(\pm L)|. \end{gathered}$$

よってある $k>1$ があって $u_0(x,\tau) \geq kv(x)$ が成り立つ．もし $u_0 = kv$ の場合のみ解の爆発が示されれば比較原理より一般の場合にも同じ結論が成り立つ．そこで以下 $u_0 = kv$ $(k>1)$ と仮定して一般性を失わない．

背理法で証明する．まず u が時間大域的に存在して，

$$\lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(-L,L)} < \infty$$

と仮定して矛盾を導く．このとき，補題 3.10 より，初期境界値問題 (3.1.13) の解 $u(\cdot,t)$ は境界値問題 (1.1.1) の解 w に収束する．関数 w も v も境界値問題 (3.1.12) の解であるから定理 1.3 より $w \equiv v$.

一方

$$u_t(x,t) \geq 0, \qquad |x| < L, \quad t \in [0, T(u_0)) \tag{3.1.14}$$

---

[1] この定理は，平成 18 年 5 月 9 日 (火) に東北大学で行われた Fila 氏の集中講義において紹介されたものである．

が成り立つことがわかる．このことは関数 u_t が次の不等式を満たすことと比較原理からしたがう．

$$\begin{cases} (u_t)_t = (u_t)_{xx} + pu^{p-1}u_t, & |x| < L \quad t > 0, \\ u_t = 0, & |x| = L, \\ u_t(x,0) = kv_{xx} + k^p v^p > k(v_{xx} + v^p) = 0, & |x| < L. \end{cases}$$

式 (3.1.14) より $|x| < L$ ならば $w(x) > v(x)$ が成り立つ．よって，矛盾．

次に，u が時間大域的に存在して，

$$\lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(-L,L)} = \infty$$

と仮定して矛盾を導く．まず，$u_0 = kv$ なので $u(x,t)$ が偶関数であることが比較原理からしたがう．なぜならば，$z(x,t) := u(x,t) - u(-x,t)$ は $z_t = z_{xx} + u^p - (u-z)^p$ を満たし，その初期値と境界値が 0 となるからである．また関数 u_x は，

$$\begin{cases} (u_x)_t = (u_x)_{xx} + pu^{p-1}u_x\,, & |x| < L,\ 0 < t < T, \\ u_x(L,t) \le 0, & t > 0, \\ u_x(\cdot,0) = (u_0)_x \le 0, & |x| \le L \end{cases}$$

を満たす．よって，強最大値原理より $u_x < 0$, $(x,t) \in [0,L] \times [0,T)$ である．このことから，$t \to \infty$ のときの関数の形状として次のような 2 つの可能性を考えることができる．第 1 はある $a \in [0,L)$ があって任意の $x \in (a,L]$ に対してのみ $\lim_{t\to\infty} u(x,t) < \infty$ となり $x \in (0,a)$ に対しては $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \infty$ となる場合．第 2 は任意の $x \in (-L,L)$ に対して $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \infty$ となる場合である．

前者の場合ある関数 $w \in C((a,L]) \cap L^\infty_{loc}((a,L])$ があって

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = w(x), \quad x \in (a,L].$$

補題 3.11 より，関数 w は $C^2((a,L))$ の元でもあり

$$\begin{cases} w_{xx} + w^p = 0, & x \in (0,L], \\ w(a) = \infty, \quad w(L) = 0. \end{cases}$$

を満たす．しかしながら，定理 1.3 の証明からわかるように，このような関数 w は存在しない．よって矛盾する．

後者の場合ある $t_0 > 0$ があって

$$\int_{-L}^{L} u(\cdot, t_0)\varphi_1\, dx > \lambda_1^{\frac{1}{p-1}}.$$

ゆえに，定理 3.3 より解 u は有限時間で爆発する．これは背理法の仮定に矛盾．以上から，解 u は有限時間で爆発することがわかった． □

定理 3.12 の手法は $1 < p < p_s$ かつ Ω が球であり解が球対称であれば一般の次元であっても適用することができる．なぜなら，本質的には定常解全体の構造と境界の近傍で減少関数であるとことのみを用いているからである．実はこの定理は一般の次元，一般の領域に対しても定理 3.12 は正しい．すなわち次の定理が成り立つ．

定理 3.13. Ω は有界領域とする．関数 v は問題 (3.1.1) の正値定常解とする．u_0 は次の条件を満たす連続関数とする．

$$u_0(x) \geq v(x), \quad x \in \Omega, \qquad u_0 \not\equiv v.$$

このとき，次の初期境界値問題 (3.1.1) の解は有限時間で爆発する

定理 3.13 の証明． 背理法で証明する． u が時間大域的に存在すると仮定する．定理 3.12 の証明の最初の議論から，ある定数 $k > 1$ に対して $u_0 \geq kv$ が成り立つと仮定しても一般性を失わない．また定理 3.12 の議論より一般次元，一般の有界領域でも

$$u_t(x,t) > 0, \quad x \in \Omega,\, t \in [0, T(u_0))$$

が成り立つ．したがって

$$\frac{u(x,t)}{v(x)} > k, \quad x \in \Omega,\, t \in [0, T(u_0)). \tag{3.1.15}$$

背理法の仮定と領域 Ω の有界性より

$$y(t) := \int_\Omega u(\cdot, t) v\, dx$$

は時間大域的に存在する．一方，不等式 (3.1.15) と Jensen の不等式より，ある定数 $C>0$ があって

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= \int_\Omega u_t(\cdot,t) v\,dx = \int_\Omega \bigl(\Delta u(\cdot,t) + u^p(\cdot,t)\bigr) v\,dx \\
&= \int_\Omega u(\cdot,t)\Delta v + u^p(\cdot,t) v\,dx = \int_\Omega u^p(\cdot,t) v \left(1 - \frac{v^{p-1}}{u^{p-1}(\cdot,t)}\right) dx \\
&\geq (1-k^{1-p}) \int_\Omega u^p(\cdot,t) v\,dx \\
&\geq (1-k^{1-p}) \Bigl(\int_\Omega u(\cdot,t) v\,dx\Bigr)^p \Big/ \Bigl(\int_\Omega v\,dx\Bigr)^{p-1} = C y^p(t)
\end{aligned}
$$

この微分不等式は関数 $y(t)$ が有限時間で発散することを意味する．よって矛盾． □

定理 (3.13) は [86] において定理 17.8，定理 17.10 と 2 通りの方法で証明されている．ここで紹介した方法は定理 17.8 の証明法である．定理 17.10 はより一般の非線形項にも適用可能であり定常解の近傍で線形化して Kaplan の議論を使う方法である．この結果から定常解が爆発解と時間大域解のの境目であることがわかる．一般にどのような関数が爆発解と時間大域解を分離しているのかはたとえば古くは [60] で議論されており，[86] の定理 19.9 には簡潔な形でまとめられている．

3.2 爆発集合について

前節では爆発が起こるか，起こらないかのみを考察した．本節では，領域上のどの場所で爆発が起こるかを考察する．小節 3.2.1 では球対称な単調減少解が原点のみで爆発することを証明する．小節 3.2.2 においては爆発集合が相対コンパクトであることを示した後，小節 3.2.3 では 1 次元の問題の爆発集合が離散的な有限の点集合であることを示そう．

3.2.1 球対称な単調減少解

次の定理によると，球対称な領域の場合，初期境界値問題 (3.1.1) において適当な条件を満たす初期値を与えると，爆発点は高々1 点のみである．

定理 3.14. (Friedman-McLeod 1985 [25]) $\Omega = B_R = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| < R\}$ とする．初期境界値問題 (3.1.1) の初期値 $u_0(x) = U_0(r)$ は Ω 上の球対称な正値関数であり，次の 3 つの条件を満たす.

(i) $U_0 \in C^2([0,R])$,

(ii) $(U_0)_r < 0,\ \ r \in (0,R], \quad u_0(R) = 0$,

(iii) $(U_0)_{rr}(0) < 0$.

初期境界値問題 (3.1.1) の解 $u(x,t) = U(r,t)$ が存在する時刻の上限を $T > 0$ と表すことにする．このとき，任意の $q \in (1,p)$ に対して，ある $C = C(u_0,p,q,R) > 0$ が存在して，次の不等式が成り立つ.

$$U(r,t) \le C r^{-\frac{2}{q-1}}, \qquad r \in (0,R],\, t \in [0,T).$$

定理 3.14 の証明. 初期境界値問題 (3.1.1) の解は球対称なので次の初期境界値問題の解である.

$$\begin{cases} U_t = U_{rr} + \dfrac{N-1}{r}U_r + U^p, & r \in (0,R)\,, t \in (0,T), \\ U(R,t) = 0, & t \in [0,T), \\ U(r,0) = U_0(r), & r \in [0,R], \\ U_r(0,t) = 0, & t \in [0,T). \end{cases}$$

関数

$$K(r,t) := r^{N-1}U_r(r,t) + c(r)F(U(r,t))$$

を考える．ただし，$c(r) = \varepsilon r^{N+\delta}$，$F(U) = U^\gamma$ $(1 < \gamma < p)$ とし，正数 $\gamma, \delta, \varepsilon$ は後で決めるものとする．このとき，十分小さな ε を取るとある有界な関数 b があって次の 4 つの性質

$$\begin{cases} K_t + \dfrac{N-1}{r}K_r - K_{rr} - b\,K \le 0, & r \in (0,R)\,, t \in (0,T), \\ K(0,t) = 0, & t \in [0,T), \\ K(R,t) \le 0, & t \in [0,T), \\ K(r,0) \le 0, & r \in [0,R] \end{cases} \tag{3.2.1}$$

が成り立つ．まず，この式を認めて結論を示す．T を問題 (3.1.1) の解 $u(x,t) = U(r,t)$ の最大存在時間とする．式 (3.2.1) より，最大値原理から

$$K \le 0, \quad r \in [0,R], t \in [0,T]$$

を得る．すなわち，$r^{N-1}U_r + \varepsilon r^{N+\delta}U^\gamma \le 0$ である．この両辺を $r^{N-1}U^\gamma$ で割って，r について 0 から r まで積分すると

$$\frac{1}{1-\gamma}\left(U^{1-\gamma}(r,t) - U^{1-\gamma}(0,t)\right) \le -\frac{\varepsilon}{2+\delta}r^{2+\delta}$$

を得る．したがって，

$$U^{1-\gamma}(r,t) \ge U^{1-\gamma}(r,t) - U^{1-\gamma}(0,t) \ge \varepsilon\frac{\gamma-1}{2+\delta}r^{2+\delta}$$

であるから

$$U(r,t) \le \left(\varepsilon\frac{\gamma-1}{2+\delta}r^{2+\delta}\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} = Cr^{-\frac{2+\delta}{\gamma-1}}$$

が成立する．以上の議論から，δ と γ を $\dfrac{2+\delta}{\gamma-1} = \dfrac{2}{q-1}$ を満たすように選べば求める結果を得る．

さて式 (3.2.1) の証明をする．まず $w = r^{N-1}U_r$ とおく．w は $U_t - r^{-(N-1)}w_r = U^p$ を満たす．次にこの両辺を r で微分し r^{N-1} をかけて $w_t + (N-1)r^{-1}w_r - w_{rr} = pU^{p-1}w$．また $w_r = r^{N-1}U_{rr} + (N-1)r^{N-2}U_r$ より，

$$\begin{aligned}
K_t &= w_t + cF'U_t \\
&= -\frac{N-1}{r}w_r + w_{rr} + pU^{p-1}w + cF'\left\{U^p + \frac{1}{r^{N-1}}w_r\right\} \\
&= -\frac{N-1}{r}w_r + w_{rr} + pU^{p-1}w + cF'U^p \\
&\qquad + cF'\left\{r^{N-1}U_{rr} + (N-1)\,r^{N-2}U_r\right\}\frac{1}{r^{N-1}}, \\
\frac{N-1}{r}K_r &= \frac{N-1}{r}\left\{w_r + c'F + cF'U_r\right\}, \\
K_{rr} &= w_{rr} + c''F + 2c'F'U_r + cF''U_r^2 + cF'U_{rr}.
\end{aligned}$$

これらを式 (3.2.1) のはじめの式の左辺に代入する．$c(r), F''(U) \ge 0$ と

$U_r^2 \geq 0$ より

$$
\begin{aligned}
& K_t + \frac{N-1}{r} K_r - K_{rr} \\
= \;& pU^{p-1}w + cF'U^p + \frac{2(N-1)}{r} cF'U_r \mathrm{F}'' + \frac{(N-1)}{r} c'F \\
& -cF''U_r^2 - c''F - 2c'F'U_r \\
\leq \;& \left\{ pU^{p-1} + \frac{2(N-1)}{r^N} cF' - \frac{2c'F'}{r^{N-1}} \right\} K \\
& - \left\{ pU^{p-1}F - U^pF' - \frac{2c'}{r^{N-1}} F'F + \frac{2(N-1)}{r^N} cF'F \right. \\
& \left. + \left(c'' - \frac{N-1}{r} c' \right) \frac{F}{c} \right\} c
\end{aligned} \tag{3.2.2}
$$

を得る．ここで K の係数 b を計算すると

$$
\begin{aligned}
b &= pU^{p-1} + \frac{2(N-1)}{r^N} cF' - \frac{2c'F'}{r^{N-1}} \\
&= pU^{p-1} + \frac{2(N-1)}{r^N} \varepsilon r^{N+\delta} F' - \frac{2\varepsilon(N+\delta) r^{N+\delta-1} F'}{r^{N-1}} \\
&= pU^{p-1} + 2\varepsilon(N-1) r^\delta F' - 2\varepsilon(N+\delta) r^\delta F'.
\end{aligned}
$$

したがって，関数 b は解 $u(x,t) = U(r,t)$ が存在する限り有界である．一方，等式 (3.2.2) より

$$
\begin{aligned}
K_t \; & + \frac{N-1}{r} K_r - K_{rr} - bK \\
= \;& - \left\{ pU^{p-1}F - U^pF' - \frac{2c'}{r^{N-1}} F'F + \frac{2(N-1)}{r^N} cF'F \right. \\
& \left. + \left(c'' - \frac{N-1}{r} c' \right) \frac{F}{c} \right\} c \\
\equiv \;& -Ac
\end{aligned} \tag{3.2.3}
$$

である．そこで式 (3.2.3) の右辺を計算すると

$$
\begin{aligned}
A &= pU^{p+\gamma-1} - \gamma U^{p+\gamma-1} - 2(N+\delta)\varepsilon\gamma U^{2\gamma-1} r^\delta \\
&\qquad + 2(N-1) r^\delta \varepsilon\gamma U^{2\gamma-1} + \{(N+\delta)(N+\delta-1) - (N+\delta)(N-1)\} r^{-2} U^\gamma \\
&\geq U^\gamma \left\{ (p-\delta) U^{p-1} - 2(\delta+1)\varepsilon\gamma R^\delta U^{\gamma-1} + (N+\delta)\delta R^{-2} \right\}
\end{aligned}
$$

である．最後に，$c_1 = p-\delta$, $c_2 = 2(\delta+1)\gamma R^\delta$, $c_3 = (N+\delta)\delta R^{-2}$ とおくと (c_1, c_2, c_3 は正)，$\phi(U) = c_1 U^{p-1} - c_2 \varepsilon U^{\gamma-1} + c_3$ は，十分小さな正数 ε に対して正値関数．ゆえに，$A \geq 0$．これより，微分不等式が示せた．

(ii)(iii) を用いれば，十分小さな正数 ε に対して式 (3.2.1) の境界条件が成り立つことも容易に示せる． □

注意 3.15. 方程式が $u_t = \Delta u + e^u$ の場合は

$$u(x,t) \le \frac{2}{\alpha} \log \frac{1}{|x|} + C$$

という形の不等式が成り立つ．ただし，$\alpha < 1$ である．

注意 3.16. さらに，Herrero-Velázquez ([41, 42]) は初期値問題

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u^p, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

に対して，$B(u_0) = \{0\}$ ならば解の爆発時刻での挙動が次のいずれかしかないことを示した．

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Big(\frac{|x|^2}{\log|x|}\Big)^{\frac{1}{p-1}} u(x,T) = \Big(\frac{8p}{(p-1)^2}\Big)^{\frac{1}{p-1}}.$

(b) 偶数 m に対して定数 $C > 0$ があって

$$\lim_{x\to 0} |x|^{\frac{m}{p-1}} u(x,T) = C.$$

その後，Bricmont-Kupiainen [9] は上記のすべての可能性が実際に起こることを証明している (Velázquez [94, 95] も参照).

3.2.2 爆発集合のコンパクト性

球対称性がない問題の解の爆発集合が具体的にどのような図形になるのかは一般にはよく分からないが，Ω が有界凸領域の場合は，爆発集合が境界からは離れていることが分かる．すなわち以下の定理が成り立つ．

定理 3.17. Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな有界凸領域とする．初期境界値問題 (3.1.1) の初期値 $u_0 \in C^2(\Omega)$ は Ω 上 $u_0 \ge 0$ であり，$\partial\Omega$ 上 $u_0 = 0$ であるとする．爆発集合は領域 Ω のコンパクトな部分集合である．

注意 3.18. この事実は $\mathbb{R}^N$ 上の初期値問題の場合でも，初期値にある程度の減衰条件を仮定すれば正しく，爆発集合は十分大きな球に含まれる．例えば [64, Appendix B] にはコンパクトな初期値の場合の説明がある．

定理 3.17 の証明. Hopf の補題より解 u の境界上での法微分は瞬時に負になる．そこで，u_0 の境界上での法微分が負であるとして議論する．

<u>ステップ 1</u>

任意の $y_0 \in \partial\Omega$ を取って固定する．$y_0 = 0$ かつ，半空間 $\{x_1 > 0\}$ が y_0 において領域 Ω と接するように座標を取り替える．十分絶対値が小さい $\alpha < 0$ を選んで $\Omega_\alpha^+ = \Omega \cap \{x_1 > \alpha\}$ とする．また，$\{x_1 = \alpha\}$ を軸にして領域 Ω_α^+ を折り返した領域を $\Omega_\alpha^- = \{(x_1, x') : (2\alpha - x_1, x') \in \Omega_\alpha^+\}$ とおく．関数

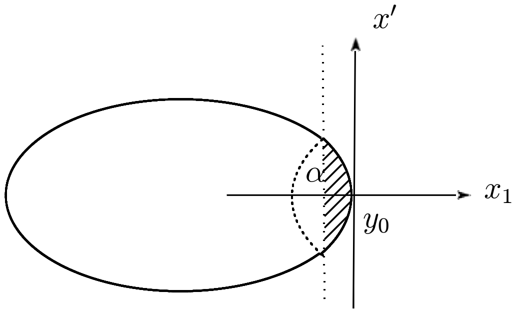


図 1: 領域 Ω_α^+ は斜線部分．領域 Ω_α^- は点線で囲まれた部分.

$$w(x,t) := u(x_1, x', t) - u(2\alpha - x_1, x', t), \quad x \in \Omega_\alpha^-$$

を考える．関数 w は Ω_α^- 上

$$w_t - \Delta w = f(u(x_1, x', t)) - f(u(2\alpha - x_1, x', t)) = cw$$

を満たす．ここで c は適当な有界関数である．また，Ω_α^- の境界において

$$\begin{aligned} w &= 0, && x \in \partial\Omega_\alpha^- \cap \{x_1 = \alpha\},\ t \in (0,T), \\ w &= u(x_1, x', t) > 0, && x \in \partial\Omega_\alpha^- \cap \{x_1 < \alpha\},\ t \in (0,T). \end{aligned}$$

強比較原理と Hopf の補題より

$$\begin{aligned} w &> 0, && x \in \Omega_\alpha^-,\ t > 0 \\ 2u_{x_1} = w_{x_1} &< 0, && x \in \{x_1 = \alpha\},\ t > 0. \end{aligned}$$

$\alpha < 0$ を任意に取り換えることにより $\alpha_0 < 0$ の絶対値が十分さければ

(3.2.4) $$u_{x_1} < 0, \qquad x \in \Omega_{\alpha_0}^+, t \in (0,T)$$

が成り立つ．

ステップ 2

ここで，$F(u) = u^\gamma$ $(1 < \gamma < p)$ に対して $\Omega^+_{\alpha_0} \times (0, T)$ 上の関数

$$K^b(x,t) := u_{x_1}(x,t) + \varepsilon(x_1 - \alpha) F(u(x,t)) \tag{3.2.5}$$

を定義する．$\varepsilon > 0$ は十分小さな正数とし，以下この証明では $f(u) = u^p$ とおくことにする．

(3.2.6)
$$\begin{aligned} K^b_t &= (\Delta u)_{x_1} + f'(u)\, u_{x_1} + \varepsilon(x_1 - \alpha)\, F'(u)\, \{\Delta u + f(u)\} \\ &= (\Delta u)_{x_1} + f'(u) K^b - \varepsilon(x_1 - \alpha)\{f'F - F'f\} + \varepsilon(x_1 - \alpha) F'(u)\, \Delta u \end{aligned}$$

次にラプラシアンを計算する．

$$\nabla K^b = \nabla u_{x_1} + \varepsilon F(u) \mathbf{e}_1 + \varepsilon(x_1 - \alpha) F'(u)\, \nabla u$$

であるから

(3.2.7)
$$\begin{aligned} \Delta K^b &= (\Delta u)_{x_1} + 2\varepsilon F'(u)\, u_{x_1} + \varepsilon(x_1 - \alpha) F''(u) |\nabla u|^2 + \varepsilon(x_1 - \alpha) F'(u) \Delta u \\ &= (\Delta u)_{x_1} + 2\varepsilon F'(u)(K^b - \varepsilon(x_1 - \alpha) F(u)) \\ &\qquad + \varepsilon(x_1 - \alpha) F''(u) |\nabla u|^2 + \varepsilon(x_1 - \alpha) F'(u) \Delta u \end{aligned}$$

式 (3.2.6) から式 (3.2.7) を引くとある有界関数 b があって

$$\begin{aligned} K^b_t - \Delta K^b + b K^b = &-\varepsilon(x_1 - \alpha)\{f'F - F'f - 2\varepsilon F'F\} \\ &- \varepsilon(x_1 - \alpha) F''(u) |\nabla u|^2 \le 0 \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

ここで，十分大きな任意の実数 $u > 0$ に対して不等式

$$f'F - F'f \ge 2\varepsilon F F'$$

が成り立つことを使った．式 (3.2.8) から関数 K^b は $\Omega \times (0, T)$ 上で正値最大値を取らない．さらに，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して

$$K^b < 0, \qquad \Omega^+_{\alpha_0} \times \{t = 0\}, \tag{3.2.9}$$

$$K^b < 0, \qquad \partial\Omega^+_{\alpha_0} \times (0, T) \tag{3.2.10}$$

冒頭で述べたように u_0 の境界上での法微分が負であるとしてよいことから，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して不等式 (3.2.9) を得る．

次に不等式 (3.2.10) を考察する．ステップ 1 より $x_1 = \alpha_0$ 上，すなわち $\Omega \cap \partial\Omega^+_{\alpha_0}$ の上では式 (3.2.10) は成立する．$\partial\Omega^+_{\alpha_0} \cap \partial\Omega$ 上における K^b の値が問題になる．解 u と同じ初期境界条件を課した線形の斉次熱方程式 $v_t = \Delta v$ の解 v とを比較する．$f(u) \geq 0$ より，$u \geq v$．よって定数 c_0 があって，$\partial\Omega \times (0,T)$ において

$$\frac{\partial u}{\partial n} < \frac{\partial v}{\partial n} < -c_0 < 0.$$

が成り立つ．ゆえに十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して，$\partial\Omega^+_{\alpha_0} \cap \partial\Omega$ 上

$$K^b \leq -c_0 \frac{\partial n}{\partial x_1} + \varepsilon(x_1 - \alpha)F(0) < 0.$$

式 (3.2.8), (3.2.9), (3.2.10) と比較原理から

$$K^b < 0, \qquad \Omega^+_{\alpha_0} \times (0,T)$$

を得ることができる．これを u を用いて書き換えると

$$-u_{x_1} = |u_{x_1}| \geq \varepsilon(x_1 - \alpha)F(u).$$

この両辺を x_1 で積分すると任意の $y_1 \in (x_1, 0)$ に対して

$$\frac{1}{\gamma+1}\left\{\frac{1}{u^{\gamma+1}(y_1,0,t)} - \frac{1}{u^{\gamma+1}(x_1,0,t)}\right\} \geq \int_{x_1}^{y_1} \varepsilon(x_1 - \alpha)\,dx > 0$$

よって，$\lim_{t \nearrow T} u(y_1,0,t) < \infty$ が成り立つ．ν は y_0 における外法線に近い方向を持つ単位ベクトルとする．$\Omega^+_{\alpha_0} \times (0,T)$ 上

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$$

が成り立つことがわかる．このことから，同様の議論を繰り返したら

$$\limsup_{t \nearrow T, x \to (y_1,0)} u(x,0,t) < \infty, \qquad \alpha_0 < y_1 < 0$$

が導かれる．この式は $\{x' = 0,\, \alpha_0 < x_1 < 0\}$ が爆発点を含まないことを意味する．α_0 を $y_0 \in \partial\Omega$ に依存しないように小さく取り換えることにより $\partial\Omega$ 近傍であって，爆発点を含まないものが取れる．よって，爆発集合は領域 Ω のあるコンパクト部分集合に含まれる． □

注意 3.19. 強最大値の原理と Hopf の補題

関数 $w \in C^{2,1}(\Omega\times(0,T))\cap C(\bar{\Omega}\times[0,T])$ は非負値関数であり，$c(x,t) \geq 0$ とする．また，関数 w は

$$w_t = \Delta w + c(x,t)w, \quad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{3.2.11}$$

を満たすとする．

$(x_0,t_0) \in \Omega \times (0,T)$ 上で下限値 0 を達成するとしよう．このとき，$\bar{\Omega} \times [0,t_0]$ において $w \equiv 0$ である．これを**強最大値の原理**という．

ある $x_0 \in \partial\Omega$ と $t_0 \in (0,T)$ があって $w(x_0,t_0) = 0$ が成り立つとする．このとき点 (x_0,t_0) で w の法線方向の微分係数が存在するならば

$$\frac{\partial w}{\partial n}(x_0,t_0) < 0.$$

これを **Hopf の補題**とよぶ．

3.2.3 1 次元の場合

高次元の場合は，球対称性でない解の爆発集合が具体的にどのような図形になるのかはよく分からない．ところが，以下で述べるように空間 1 次元の場合は爆発集合は有限個の点集合にしかならない．

定理 3.20. (Chen-Matano 1985 [13]) $N = 1$ とする．$[0,L]$ 上の初期境界値問題

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u^p, & x \in [0,L],\ t > 0, \\ u = 0, & x = 0, L,\ t > 0, \\ u(\cdot,0) = u_0 \geq 0 \end{cases} \tag{3.2.12}$$

を考える．このとき，時刻 $T \in (0,\infty)$ において爆発する初期境界値問題 (3.1.1) の解 u に対し，その爆発集合は有限集合である．

以下の議論では $f(u) := u^p$ と表記することにする．

$w \in C^1(S^1)$ に対して，零点数 $Z_{S^1}(w)$ を

$$Z_{S^1}(w) = \text{関数}\, w\, \text{の}\ S^1\ \text{上の零点の数}$$

で定義する．零点数 $Z_{S^1}(w)$ について次のことが成り立つことが知られている．

補題 3.21. (Angenent 1988 [4])　$q(x,t), q_x(x,t), q_t(x,t), r(x,t)$ は，$(x,t) \in S^1 \times (t_0, t_1)$ 上で局所有界な関数とする．関数 w は

$$w_t = w_{xx} + q(x,t)w_x + r(x,t)w, \qquad (x,t) \in S^1 \times (t_0, t_1)$$

を満たす恒等的には 0 でない関数とする．このとき，

(i) 任意の $t \in [t_0, t_1)$ で $Z_{S^1}(w)$ は t について単調非増大である．

(ii) 任意の $t^* \in (t_0, t_1)$ に対し，高々 k 個の点 $s_1, s_2, \cdots s_k \in (t^*, t_1)$ があって，任意の $t \in (t^*, t_1) \setminus \{s_1, s_2, \cdots s_k\}$ に対して関数 $w(\cdot, t)$ のすべての零点は単純である．

(iii) ある $t^* \in (t_0, t_1)$ に対し，関数 $w(\cdot, t^*)$ が退化した零点をもつとする．このとき，任意の $t \in (t_0, t^*)$, $s \in (t^*, t_1)$ に対して

$$Z_{S^1}(w(\cdot, t)) > Z_{S^1}(w(\cdot, s)).$$

この補題が成り立つことは認める．すると，$u_x(\cdot, t)$ の零点の分布について次のことがわかる．

補題 3.22. 初期境界値問題 (3.2.12) の初期値 $u_0 \in C([0, L])$ は区間 $[0, L]$ 上 $u_0 \geq 0$ であるとする．定数 T を解 u の爆発時刻とする．このときある C^1 曲線 $\{\eta_i\}_{i=1}^n$ と $t^* \in [0, T)$ で次の 3 条件を満たすものが存在する．

(i) 任意の $t \in [t^*, T)$ に対して，$\eta_1(t) < \eta_2(t) < \cdots < \eta_n(t)$.

(ii) 任意の $t \in [t^*, T)$ に対して，

$$\{x \in [0, L];\, u_x(x,t) = 0\} = \{\eta_1(t), \eta_2(t), \cdots, \eta_n(t)\}.$$

(iii) $\beta_i = \lim_{t \nearrow T} \eta_i(t)$ が存在する．

特に，任意の閉区間 $I \subset [0, L] \setminus \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ に対してある $t_0 \in [t^*, T)$ があって，$u_x(x,t)$ は $I \times [t_0, T)$ において符号変化しない．

注意 3.23. u 自身に符号変化を許した場合は $u(x,t)$ の零点の位置の時間発展に対しても上記補題における u_x の零点の挙動と同様の結果が成り立つ．詳細は [13] を参照せよ．

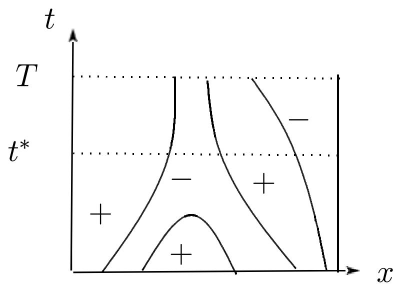


図 2: u_x の零点 η_i のグラフ．実線は u_x の等高線を表す.

補題 3.22 の証明. まず初期境界値問題 (3.2.12) の解 u を拡張した $\mathbb{R}$ 上における周期 $2L$ の関数 $\tilde{u}$ を

$$\tilde{u} = \begin{cases} u(x,t), & x \in [0,L], \\ -u(-x,t), & x \in [-L,0] \end{cases}$$

で定義する．また，$f(u) = u^p$ より $f(0) = 0$ であるから関数 $f(u)$ を

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(u), & u \geq 0, \\ -f(-u), & u \leq 0 \end{cases}$$

と拡張する．関数 $\tilde{u}$ は周期的境界条件つきの初期境界値問題 $u_t = u_{xx} + f(u)$ の解である．したがって，任意の $x \in S^1$ に対して $\lim_{t\to T} \operatorname{sgn} \tilde{u}_x(x,t)$ が存在することを証明すれば任意の $x \in [0,L]$ に対して $\lim_{t\to T} \operatorname{sgn} u_x(x,t)$ が存在することになる.

任意の $a \in S^1$ に対して次の折り返し関数

$$w(x,t) := \tilde{u}(2a - x, t) - \tilde{u}(x,t)$$

を考える．$w \equiv 0$ のときには $u_x(a,t) = 0$ であるから，$\lim_{t\to T} \operatorname{sgn} u_x(a,t)$ が存在することは自明．恒等的に 0 でないときは，零点数の議論を用いる．ある局所有界な関数 $g = g(x,t)$ があって，関数 w は $w_t = w_{xx} + gw$ の周期的な解である．補題 3.21 より，$t_0 \in [0,T)$ を十分 T に近く取ると，$t \in [t_0,T)$ において関数 $w(\cdot,t)$ は非退化な零点のみをもつ．すなわち，$w_x(a,t) < 0$ ないしは $w_x(a,t) > 0$ である．これらは各々 $u_x(a,t) > 0$ と $u_x(a,t) < 0$ に対応する．よって，$t \in [t_0,T)$ に対して $\lim_{t\to T} \operatorname{sgn} u_x(a,t)$ が存在する.

一方，ある局所有界な関数 $g = g(x,t)$ があって，関数 $\tilde{u}_x$ は熱方程式

$$w_t = w_{xx} + gw$$

の周期的な解である．したがって，補題 3.21 よりある $t_0 \in (0,T)$ があって，$t \in [t_0, T)$ において，$u_x(\cdot,t)$ の零点がすべて単純である．よって，陰関数定理を用いることができて条件 (ii) を満たす C^1 曲線の列 $\{\eta_i\}_{i=1}^n$ が存在することがわかる．また，$\lim_{t\to T} \operatorname{sgn} u_x(\cdot,t)$ の存在から β_i の存在が保障される．ゆえに補題 3.22 を得る． □

補題 3.24. 次の 2 つの条件 (a), (b) を仮定する．

(a) 閉区間 $[a,b] \subset [0,L] \setminus \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ に対してある $t_0 \in [t^*, T)$ があって $[a,b] \times [t_0, T)$ 上で $u_x(x,t) \geq 0$.

(b) $B(u_0) \cap [a,b] \neq \emptyset$.

ここで $c \in B(u_0) \cap [a,b]$ を任意に選ぶと，$x \in (c,b]$ に対して

$$\lim_{t\to T} u(x,t) = \infty.$$

補題 3.24 の証明. 任意の $d \in (c,b)$ を選ぶ．条件 (b) より，ある点列 $\{x_k\}_{k=1}^\infty, \{t_k\}_{k=1}^\infty \subset (t_0, T)$ であって，$x_k \nearrow c$, $t_k \nearrow T$ かつ

$$\lim_{k\to\infty} u(x_k, t_k) = \infty \tag{3.2.13}$$

なるものが取れる．さらに，条件 (a) より任意の $x \in [d,b]$ に対し

$$u(x, t_k) \geq u(x_k, t_k) \tag{3.2.14}$$

としてよい．関数 u は微分不等式 $u_t \geq u_{xx}$ を満たす．一方，

$$v(x,t) := u(x_k, t_k) e^{-A(t-t_k)} \left(\sin \frac{\pi(x-d)}{b-d} \right) \tag{3.2.15}$$

で定義される関数は，定数 $A > 0$ を十分大きく取ると微分不等式

$$v_t \leq v_{xx} \tag{3.2.16}$$

を満たす．また式 (3.2.15) より十分大きく $A>0$ を選べば任意の $x\in(d,b]$ に対して

$$v(x,t_k)\le u(x_k,t_k)\le u(x,t_k). \tag{3.2.17}$$

また，関数 u は正値関数であるから任意の $t\in[t_k,T)$ に対して

$$0=v(b,t)\le u(b,t),\qquad 0=v(d,t)\le u(d,t). \tag{3.2.18}$$

よって式 (3.2.15), (3.2.16), (3.2.17), (3.2.18) と比較原理から任意の $x\in(d,b),t\in[t_k,T)$ に対して次が成立する．

$$u(x_k,t_k)e^{-A(t-t_k)}\left(\sin\frac{\pi(x-d)}{b-d}\right)\le u(x,t).$$

特に，任意の $x\in(d,b)$ に対して

$$u(x_k,t_k)\left(\sin\frac{\pi(x-d)}{b-d}\right)\le u(x,t_k)$$

となる．式 (3.2.13) より，$k\to\infty$ のとき左辺は ∞ に発散する．ゆえに，条件 (a) より任意の $x\in(d,b)$ に対して

$$\lim_{t\to T}u(x,t)=\infty$$

である．最後に $d\in(c,b)$ を任意に動かしてやれば，補題 3.24 を得る． □

補題 3.25. 閉区間 $[a,b]\in[0,L]\setminus\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ に対して $[a,b]\times[t_0,T)$ 上で $u_x(x,t)>0$ とする．このとき，$[a,b]\cap B(u_0)=\emptyset$ である．

補題 3.25 の証明. $[a,b]\cap B(u_0)\neq\emptyset$ とする．$\gamma\in(1,p)$，$F(u):=u^\gamma$ として関数 K^i を

$$K^i(x,t):=u_x(x,t)-\varepsilon\zeta(x)F(u(x,t)),\ \zeta(x):=\sin\left(\frac{\pi(x-c)}{b-c}\right) \tag{3.2.19}$$

によって定義する．このとき，$f(u)=u^p$ であるから十分大きな任意の $M>0$ に対して

$$f'(u)F(u)-f(u)F'(u)\ge\delta F(u)F'(u),\quad u\ge M \tag{3.2.20}$$

が成り立つことに注意する．また，補題 3.24 より $c \in [a,b] \cap B(u_0)$ がとれて

$$\lim_{t \to T} u(x,t) = \infty, \qquad x \in [c,b].$$

よって，ある $t_0 \in (0,T)$ に対して $t \in [t_0,T)$ 上 $u(c,t) \geq M$ が成り立つ．さらに，$u_x > 0$ から

$$u(x,t) \geq M, \qquad x \in [c,b],\ t \in [t_0,T) \tag{3.2.21}$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}
K_t^i &= u_{xt} - \varepsilon\zeta(x)F'(u)u_t \\
K_x^i &= u_{xx} - \varepsilon\zeta'(x)F(u) - \varepsilon\zeta(x)F'(u)u_x \\
&= u_t - f(u) - \varepsilon\zeta'(x)F(u) - \varepsilon\zeta(x)F'(u)u_x \\
K_{xx}^i &= u_{xt} - f'(u)u_x - \varepsilon\zeta''(x)F(u) - 2\varepsilon\zeta'(x)F'(u)u_x \\
&\qquad - \varepsilon\zeta(x)F''(u)u_x^2 - \varepsilon\zeta(x)F'(u)u_{xx}.
\end{aligned}$$

また，関数 F が凸であることと $\zeta(x) \geq 0$ に注意して微分の階数を下げると

$$\begin{aligned}
K_{xx}^i &\leq u_{xt} - f'(u)u_x - \varepsilon\zeta''(x)F(u) - 2\varepsilon\zeta'(x)F'(u)u_x \\
&\qquad - \varepsilon\zeta(x)F'(u)u_t + \varepsilon\zeta(x)F'(u)f(u).
\end{aligned}$$

次に u_x を消去する．式 (3.2.21), (3.2.20) と $\zeta'' \leq 0$ より任意の $x \in [c,b]$, $t \in [t_0,T)$ に対して

$$\begin{aligned}
K_t^i - K_{xx}^i &\geq \{f'(u) + 2\varepsilon\zeta'(x)F'(u)\}u_x + \varepsilon\zeta''(x)F(u) - \varepsilon\zeta(x)F'(u)f(u) \\
&\geq \{f'(u) + 2\varepsilon\zeta'(x)F'(u)\}K^i + \varepsilon\zeta''(x)F(u) \\
&\qquad + \varepsilon\zeta(x)\{f'(u)F(u) - F'(u)f(u) + 2\varepsilon\zeta'(x)F'(u)F(u)\} \\
&\geq \{f'(u) + 2\varepsilon\zeta'(x)F'(u)\}K^i \\
&\qquad + \varepsilon\zeta(x)\left(\delta + 2\varepsilon\zeta'(x) + \frac{\zeta''(x)}{\zeta(x)F(u)}\right)F'(u)F(u).
\end{aligned}$$

すなわち十分小さな任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$K_t^i - K_{xx}^i - \{f'(u) + 2\varepsilon\zeta'(x)F'(u)\}K^i \geq 0, \qquad x \in [c,b],\ t \in [t_0,T).$$

また， $[a,b]\times[t_0,T)$ 上で $u_x(x,t)>0$ であった．ゆえに，$\varepsilon>0$ を十分小さく選べば，任意の $x\in(c,b)$ に対して $K^i(x,t_0)>0$ であり，任意の $t\in(t_0,T)$ に対しては $K^i(c,t)>0$, $K^i(b,t)>0$ である．その結果，比較原理から $(c,b)\times(t_0,T)$ において $K^i>0$ である．

x について c から b まで式 (3.2.19) を積分すると任意の $t\in[t_0,T)$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma-1}\frac{1}{u(c,t)^{\gamma-1}} &\geq \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{1}{u(c,t)^{\gamma-1}}-\frac{1}{u(b,t)^{\gamma-1}}\right)\\ &=\int_{u(c,t)}^{u(b,t)}\frac{u_x}{F(u)}\,dx>\varepsilon\int_c^b\zeta(x)\,dx\end{aligned}$$

を得る．よって，$u(c,t)$ は $t\to T$ で有界である．これは，$c\in[a,b]\cap B(u_0)$ に反する． □

定理 3.20 の証明. 補題 3.25 より $B(u_0)$ は $u_x(\cdot,T)$ の零点である．また，補題 3.22 より $u_x(\cdot,T)$ の零点は有限離散集合である．よって，定理 3.20 が示された． □

注意 3.26. さらに， Chen-Matano [13] は $N=1$ のとき，任意の爆発解の爆発集合は有限集合であることをより一般の場合についても証明している．具体的には，Dirichlet，Neumann または，周期的境界条件において，より一般の非線形項に対して，初期値の正値性を仮定しなくても成り立つことを示している．たとえば，非線形項が e^u, $u(\log(1+|u|))^\gamma$ $(\gamma>2)$ のようなものでも爆発集合は有限集合である．しかし，非線形項が $u(\log(1+|u|))^\gamma$ $(1<\gamma<2)$ の場合には区間全体で爆発が起こることが知られている ([52])．すなわち，緩やかな増大度をもつ非線形項では爆発集合が離散的と限らない．

注意 3.27. 一般には，高次元の場合の爆発集合は離散的とは限らない．実際，Giga-Kohn [35] は p がソボレフの臨界指数 p_s より小さいときに，$N-1$ 次元球面を爆発集合にもつような初期値を構成した．その後，Velázquez [93] は初期値問題のおいて p がソボレフの臨界指数 p_s より小さいとき，非一様な解に対して，その爆発集合の $N-1$ 次元ハウスドルフ測度が任意のコンパクト集合上において常に有界になることを示した．すなわち，爆発集合はそれほど大きな集合ではない．また，Zaag [100] は爆発集合が C^1 級多様体になることを示している．

最後に与えられた点が爆発点でないための条件を考察する．$f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ に対して半線形熱方程式

$$
(3.2.22)\qquad \begin{cases} u_t=\Delta u+f(u), & x\in\Omega,\ t>0,\\ u(\cdot,0)=u_0, & x\in\Omega \end{cases}
$$

を考える．この非線形熱方程式に対応する

関数 $\varphi:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を次の常微分方程式の解とする．

$$
\varphi'=-f(\varphi),\quad \lim_{s\searrow 0}\varphi\big(s\big)=\infty.
$$

すなわち φ は次のような関係式を満たす．

$$
s=\int_0^\infty\frac{d\sigma}{f(\sigma)}.
$$

常微分方程式 $U'=f(U)$ の解 U が時刻 $t=T$ で爆発するならば $U(t)$ は次のように書ける．

$$
U(t)=\varphi(T-t)
$$

いま関数 f は次の仮定を満たすものとする．

$$
(3.2.23)\qquad \limsup_{u\to\infty}\frac{f(\theta\varphi)}{\theta f(\varphi)}:=\mu,\quad 0<\mu<1,
$$

$$
(3.2.24)\qquad f'(\varphi(s))=O(1/s^\delta),\quad 1\le\delta<2.
$$

補題 3.28. (Matano-Merle [64]) 関数 $u(x,t)$ は初期境界値問題 (3.2.22) の柱状領域 $D\times[0,T_1)$ における解とする．ただし非線形項 f は条件 (3.2.23), (3.2.24) を満たすものとする．ある $0\le t_0\le T_1$, $a\in D$ と,$\{|x-a|<r_0\}\subset D$ を満たす $r_0>0$ とある $0<\theta<1$ があって $|x-a|<r_0$, $t_0\le t<T_1$ において

$$
|u(x,t)|\le\theta\varphi(T_1-t)
$$

が成り立つとする．このとき，関数 u は $t\nearrow T_1$ のとき点 a の近傍で爆発しない．

注意 3.29. 同様な結果は最初 Giga-Kohn [35] の定理 2.1 において，$0<\theta$ が十分小さなときに証明された．証明の主要部分にはエネルギー評価式

を用いる．また同論文の系 4.3 を用いれば，p がソボレフの臨界指数 p_s より小さいという仮定の下，任意の $0<\theta<1$ に対して上記の補題が成立することが導かれる．Matano-Merle [64] では任意の $p>1$ についてこれが成り立つことを示している．証明は比較原理のみによるものであり [35] のエネルギー評価式を用いる方法より容易である．

補題 3.28 の証明. 比較関数 $w(x,t)=\theta\varphi(T_1-t+g(r))$ を考える．

$$
\begin{aligned}
w_t-\Delta w-f(w) &= -\theta\varphi'-\theta\varphi'\Delta g-\theta\varphi''|\nabla g|^2-f(\theta\varphi)\\
&= -\theta(-f(\varphi))-\theta(-f(\varphi))\Delta g-\theta\varphi''|\nabla g|^2-f(\theta\varphi)\\
&= \theta f(\varphi)\,(1+\Delta g)+\theta f'(\varphi)\varphi'|\nabla g|^2-f(\theta\varphi)\\
&= \theta f(\varphi)\biggl\{1+\Delta g-f'(\varphi)|\nabla g|^2-\frac{f(\theta\varphi)}{\theta f(\varphi)}\biggr\}.
\end{aligned}
$$

ここで条件 (3.2.23), (3.2.24) を用いると十分 T_1 に近い t に対して

$$\{\ \}\geq(1-\mu)+g_{rr}+\frac{N-1}{r}g_r-C\frac{|\nabla g|^2}{g^\delta} \tag{3.2.25}$$

であることがわかる．

$$g(r)=\varepsilon\left(\frac{1+\cos\frac{\pi r}{r_0}}{2}\right)^{\frac{1}{2-\delta}}=\varepsilon\left\{\cos\left(\frac{\pi r}{2r_0}\right)\right\}^{\frac{2}{2-\delta}}$$

という関数を考える．以下，記号を簡単にするため $m=2/(2-\delta)$ とおく．$2m-2=4/(2-\delta)-2=2\delta/(2-\delta)=m\delta$ であるから

$$
\begin{aligned}
g_r &= \varepsilon m\left\{\cos\left(\frac{\pi r}{2r_0}\right)\right\}^{m-1}\left(\frac{\pi}{2r_0}\right)\left\{-\sin\left(\frac{\pi r}{2r_0}\right)\right\},\\
g^\delta &= \varepsilon^\delta\left\{\cos\left(\frac{\pi r}{2r_0}\right)\right\}^{2m-2}
\end{aligned}
$$

を得る．よって，

$$\frac{N-1}{r}g_r=-\varepsilon m(N-1)\left\{\cos\left(\frac{\pi r}{2r_0}\right)\right\}^{m-1}\left(\frac{\pi}{2r_0}\right)\frac{\sin(\pi r/2r_0)}{r}, \tag{3.2.26}$$

$$\frac{|g_r|^2}{g^\delta}=\varepsilon^{2-\delta}m^2\left(\frac{\pi}{2r_0}\right)^2\left\{\sin^2\left(\frac{\pi r}{2r_0}\right)\right\} \tag{3.2.27}$$

になる．さらに

$$
\begin{aligned}
g_{rr} = \varepsilon \Bigg[& m(m-1)\left(\frac{\pi}{2r_0}\right)^2 \left\{ \cos\left(\frac{\pi r}{2r_0}\right)\right\}^{m-2} \left\{ \sin^2\left(\frac{\pi r}{2r_0}\right)\right\} \\
& - m\left(\frac{\pi}{2r_0}\right)^2 \left\{ \cos\left(\frac{\pi r}{2r_0}\right)\right\}^{m} \Bigg]
\end{aligned} \tag{3.2.28}
$$

であることもわかる．不等式 (3.2.25) に式 (3.2.26), (3.2.27), (3.2.28) を代入すると，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して

$$
1 + \Delta g - f'(\varphi)|\nabla g|^2 - \frac{f(\theta\varphi)}{\theta f(\varphi)} \geq (1-\mu) - O(\varepsilon) - O(\varepsilon^{2-\delta}) > 0
$$

が成立する．また，関数 g は境界 $r = r_0$ 上での値は 0 である．以上から

$$
\begin{cases}
w_t \geq \Delta w + f(w), & |x-a| < r_0,\ t_0 \leq t < T_1, \\
w(x,t_0) \geq u(x,t_0), & |x-a| < r_0, \\
w(x,t) \geq u(x,t), & |x-a| = r_0,\ t_0 \leq t < T_1,
\end{cases} \tag{3.2.29}
$$

が成り立つ．

比較原理より $|x-a| < r_0, t_0 \leq t < T_1$ で $u \leq w$ である．関数 φ が単調減少であることを考慮すれば，$|x-a| < r_0/2, t_0 \leq t < T_1$ において

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &\leq \theta\varphi\left(T_1 - t + g\left(\frac{r_0}{2}\right)\right) \\
&= \theta\varphi\left(T_1 - t + \frac{\varepsilon}{2^{m/2}}\right)
\end{aligned}
$$

が示される．下からの評価式も $-u$ に対して上から同じ比較関数で抑えられるので

$$
|u(x,t)| \leq \theta\varphi\left(T_1 - t + \frac{\varepsilon}{2^{m/2}}\right), \qquad |x-a| < r_0/2,\ t_0 \leq t < T_1
$$

を得る．ゆえに題意が示された． □

注意 3.30. この補題の非線形の仮定は「ある正定数 $\delta > 0$ があって，関数 $f^{1/(1+\delta)}$ が凸である.」という条件を緩めたものになっている．まずはこの凸性の条件の意味について説明する．記号を簡略化するため $\gamma = 1/(1+\delta) < 1$ とおく．

$$
(f^\gamma)'' = \gamma f^{\gamma-2}\{(\gamma-1)(f')^2 + ff''\} \geq 0
$$

なので，微分不等式

$$ff'' \geq \varepsilon (f')^2 \tag{3.2.30}$$

を得る．ただし，$\varepsilon = 1 - \gamma \in (0,1)$ とする．$\varepsilon \geq 1$ の場合に微分不等式 (3.2.30) が成り立てば当然 $\varepsilon < 1$ の場合もこの不等式は成立するので，定数 ε は任意の正数でもよい．したがって,「ある正定数 $\delta > 0$ があって，関数 $f^{1/(1+\delta)}$ が凸である.」という条件は「任意の正数 ε に対して微分不等式 (3.2.30) が成り立つ」という条件と同値である．さらに，$\varepsilon \in (0,1)$ として微分不等式 (3.2.30) の意味するところを説明する．この微分不等式を $f''/f' \geq \varepsilon f'/f$ と変形して両辺を積分すれば

$$\log f' \geq \varepsilon \log f + \tilde{C} \quad (\tilde{C}\text{は任意定数}).$$

よって，$f' \geq Cf^{\varepsilon}$．これを積分すると $\{(1-\varepsilon)^{-1} f^{1-\varepsilon}\}' \geq C$ なので

$$f \geq \{(1-\varepsilon)Cu\}^{1/(1-\varepsilon)} := F(u).$$

すなわち，$f^{1/(1+\delta)}$ が凸であるとは f は u について優線形な増大度を持つことを意味する．例えば，$f(u) = u^p\,(p > 1)$ や $f(u) = e^u$ などがあてはまる．

次に，$f^{1/(1+\delta)}$ が凸ならば条件 (3.2.23), (3.2.24) を満たすことを証明する．まず．条件 (3.2.23) を確認する．$\varepsilon < 1$ のときを考えることにする．なぜなら，$\varepsilon \geq 1$ の場合に微分不等式 (3.2.30) が成り立てば $\varepsilon < 1$ の場合もこの不等式は成立するからである．$G(u) := \log\left(f(u)/F(u)\right)$ とおくとよい．$f' \geq Cf^{\varepsilon}$, $F' = CF^{\varepsilon}$ より，

$$G' = \frac{f'}{f} - \frac{F'}{F} = \frac{f'F - F'f}{fF} = \frac{Cf^{\varepsilon}F - CF^{\varepsilon}f}{fF} = C(f^{1-\varepsilon} - F^{1-\varepsilon}) \geq 0.$$

であるから，f/F は u に関して単調増大．このことから

$$\frac{\theta f(u)}{\theta F(u)} = \frac{f(u)}{F(u)} \geq \frac{f(\theta u)}{F(\theta u)}, \quad \theta \in (0,1) \tag{3.2.31}$$

がわかる．式 (3.2.31) より

$$\frac{f(\theta u)}{\theta f(u)} \leq \frac{F(\theta u)}{\theta F(u)} \to \theta^{\varepsilon/(1-\varepsilon)} < 1$$

が成り立つ．次に条件 (3.2.24) を確認する．$\varphi' = -f(\varphi)$ を積分して

$$s = -\int_{\infty}^{\varphi} \frac{d\varphi}{f(\varphi)} \tag{3.2.32}$$

を得る．一方，$f''/f' \geq \varepsilon f'/f$ を変形すれば，$1/f \leq (1/\varepsilon)\{f''/(f')^2\}$ になる．これと式 (3.2.32) を用いて

$$\begin{aligned} s &\leq \int_{\varphi(s)}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \frac{f''(v)}{(f'(v))^2}\, d\varphi = -\int_{\varphi(s)}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \Big(\frac{1}{f'(v)} \Big)' dv \\ &= -\left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{f'(v)} \right]_{\varphi(s)}^{\infty} = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{f'(\varphi(s))} - \frac{1}{f'(\varphi(\infty))} \right\} \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる．この式を変形すれば

$$f'(\varphi(s)) \leq \frac{1}{\varepsilon s + (f'(\varphi(\infty)))^{-1}} \leq \frac{1}{\varepsilon s}$$

であるから $\delta = 1$ のときの条件 (3.2.24) が成り立つ．

3.3 爆発のタイプ

初期境界値問題 (3.1.1) から拡散項を取り除いた常微分方程式 $du/dt = u^p$ を考える．爆発時刻 T でのこの方程式の解の増大度は $(T-t)^{-1/(p-1)}$ である．

定義 3.31. $T > 0$ を初期境界値問題 (3.1.1) の解 u が爆発する時刻とする．**タイプ I 爆発** (type I blow-up) とは

$$\limsup_{t \nearrow T} (T-t)^{1/(p-1)} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$$

となる爆発のことである．一方，

$$\limsup_{t \nearrow T} (T-t)^{1/(p-1)} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty$$

が成り立つような爆発を **タイプ II 爆発** (type II blow-up) と呼ぶ．

3.3.1 タイプ I 爆発

次の定理は，Ω が有界な凸領域で初期値が適当な条件を満たすならば爆発がタイプ I であることを主張する．この定理は Friedman-McLeod [25] において初めて証明された．その証明には爆発集合のコンパクト性を用

いているので凸領域でしか適用できない．ここでは [86] に紹介されているより一般の有界領域でも使える形を説明する．実は証明そのものもこちらの方が [25] よりも大変簡単であるだけでなく初期値の条件も少し緩められている．ただし [25] の方法は境界条件がより一般の場合も適用できるが以下の議論は $u_{\partial\Omega}=0$ のときしか使えない．

定理 3.32. (Friedman-McLeod 1985 [25]) Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな有界領域とする．初期境界値問題 (3.1.1) の初期値 $u_0 \in C^2(\Omega)$ は Ω 上 $u_0 \geq 0$ であり，$\partial\Omega$ 上では $u_0 = 0$ を満たす．不等式

$$\Delta u_0 + u_0^p \geq 0, \qquad x \in \Omega.$$

が成り立つとき，初期境界値問題 (3.1.1) の解 u はある時刻 $t = T < \infty$ に爆発する．さらにある $\varepsilon > 0$ があって

$$u(x,t) \leq \{\varepsilon(p-1)(T-t)\}^{-\frac{1}{p-1}}, \quad \Omega \times (0,T).$$

定理 3.32 の証明. 関数 $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ は次の常微分方程式の解とする．

$$\varphi' = -f(\varphi), \quad \lim_{s \searrow 0} \varphi(s) = \infty.$$

すなわち φ は次のような関係式を満たす．

$$s = \int_{\varphi(s)}^{\infty} \frac{d\sigma}{f(\sigma)}.$$

容易にわかるように常微分方程式 $U' = f(U), U(0) = M > 0$ の解は適当な $T = T(M) > 0$ があって $U(t) = \varphi(T-t)$ と書ける．また関数 φ の逆関数を ψ で表すことにする．関数 $\psi : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ は次を満たす．

$$\psi(v) = \int_v^{\infty} \frac{dw}{f(w)}, \quad \psi(\infty) = 0, \quad \psi'(v) = -f(v) \leq 0. \tag{3.3.1}$$

$f(u) = u^p$ のときは

$$\varphi(s) = \kappa s^{-\frac{1}{p-1}}, \quad \kappa := (p-1)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

さて証明を始めよう．関数 $H(x,t) := u_t(x,t) - \varepsilon f(u(x,t))$ に対し

$$\begin{aligned}
H_t &= u_{tt} - \varepsilon f'(u)u_t = (\Delta u + f(u))_t - \varepsilon f'(u)u_t \\
&= \Delta u_t + f'(u)u_t - \varepsilon f'(u)u_t, \\
\nabla H &= \nabla u_t - \varepsilon f'(u)\nabla u, \\
\Delta H &= \Delta u_t - \varepsilon f''(u)|\nabla u|^2 - \varepsilon f'(u)\Delta u, \\
f'(u)H &= f'(u)u_t - \varepsilon f'(u)f(u).
\end{aligned}$$

よって $H_t - \Delta H - f'(u)H = \varepsilon f''(u)|\nabla u|^2$．$v := u_t$ は以下の方程式の非自明な解である．

$$\begin{cases} v_t = \Delta v + f'(u)v, & x \in \Omega,\, t > 0, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega,\, t > 0, \\ v(\cdot, 0) = u_t(\cdot, 0), & x \in \Omega. \end{cases}$$

強最大値原理と Hopf の補題より $u_t > 0$ が $\Omega \times [t_0, T)$ で成り立ち $\frac{\partial}{\partial n} u_t < 0$ が $\partial\Omega \times [t_0, T)$ の上で成り立つ．ただし n は境界上での外向き単位法ベクトルで $t_0 := T/2$ とする．このときある十分小さな $\varepsilon > 0$ を選べば任意の $x \in \Omega$ に対して $u_t(x, t_0) \geq \varepsilon u^p(x, t_0)$．一方 H は $\partial\Omega \times [0, T)$ 上で 0 なので $\varepsilon > 0$ を十分小さく選べば $\Omega \times (t_0, T)$ の放物型境界上で $H \geq 0$. よって最大値原理より $H \geq 0$ が $\Omega \times (t_0, T)$ においても成立. すなわち

$$u_t - \varepsilon u^p \geq 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times (t_0, T).$$

これを t に関して積分すれば

$$u^{1-p}(x, t) \geq (p-1)\varepsilon(T - t), \quad t \in (t_0, T).$$

これは $T < \infty$ を意味して題意の不等式がしたがう． $\square$

注意 3.33. この証明からわかるように，一般の非線形項 $f(u)$ の場合，タイプ I 爆発の定義は $t \to T$ のとき常微分方程式の解 $\varphi(T - t)$ の定数倍で抑えられることではない．すなわち定数 $C > 0$ があって

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\varphi(T - t) \quad \text{as} \quad t \to T$$

であることがタイプ I を意味するのではない．正しくはある定数 $C > 0$ に対して

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varphi(C(T - t)) \quad \text{as} \quad t \to T$$

なることである．たとえば $f(u) = e^u$ の場合は $\varphi(s) = -\log s$ なので

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \log\left(\frac{1}{T - t}\right) + C \quad \text{as} \quad t \to T$$

という式になる．

例 3.34. 上の定理の仮定を満たす例を挙げる．関数 v は正値定常解とする．任意の $k>1$ を取れば $u_0=kv$ は定理 3.5，定理 3.32 の仮定を満足する．なぜならば $0<\delta\le 1-k^{-(p-1)}$ のとき

$$\begin{aligned}\Delta u_0+(1-\delta)u_0^p=k\left\{\Delta v+(1-\delta)k^{p-1}v^p\right\}\ge k(\Delta v+v^p)=0,\\ J(u_0)=\frac{1}{2}k^2\int_\Omega|\nabla v|^2\,dx-\frac{1}{p+1}k^{p+1}\int_\Omega v^{p+1}\,dx\\ =-\frac{1}{p+1}(k^{p+1}-k^2)\int_\Omega v^{p+1}\,dx<0.\end{aligned}$$

であるからである．ゆえに， $k>1$ ならば

$$\begin{cases}u_t=\Delta u+|u|^{p-1}u, & x\in\Omega,\ t>0,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ u(\cdot,0)=kv, & x\in\Omega\end{cases}$$

の解 u は有限時間内にタイプ I の爆発をする．さらに定理 3.14 より領域が円盤で解が球対称かつ $r=|x|$ について単調減少のときは原点のみで爆発する．

Giga-Kohn [34] は p がソボレフの臨界指数 p_s より小さいとき任意の非負値解の爆発がタイプ I であることを証明した．また，これら論文においては $p<(3N+8)/(3N-4)$ の場合は符号変化を許す場合についても同様の結果が成り立つことを示してる．最近では Giga-Matsui-Sasayama [37] により初期値に符号変化を許す場合についても同様の結果が成り立つことが示された．ここでは以下の結果のみ証明する．

定理 3.35. (Giga-Kohn 1987 [34]) Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな星形領域とし，$p<(3N+8)/(3N-4)$ とする．このとき，時刻 $t=T$ に爆発する初期境界値問題 (3.1.1) の解 u は爆発がタイプ I である．初期値問題の場合も同様の結果が成り立つ．

定理 3.36. (Giga-Kohn 1989 [35]) 前定理の仮定の下に $x=a$ が爆発点のとき

$$\lim_{t\to T}(T-t)^{1/(p-1)}u(a+(T-t)^{1/2}y,t)=\pm(p-1)^{-1/(p-1)} \tag{3.3.2}$$

が任意のコンパクト部分集合 $\{|y|\le C\}$ の上で成立する．ここで $C>0$ は任意の正定数.

簡単のため初期値問題で u が正値解の場合のみ証明する．以下の議論は u が符号変化する場合も全く同様である．$a \in \mathbb{R}^N$ を任意に選んで固定して次の後ろ向き自己相似座標と関数 $w_a(y,s)$ を導入する．

$$\begin{gathered} y := \frac{x-a}{\sqrt{T-t}}, \qquad s := -\log(T-t), \\ w(y,s) = w_{a,T}(y,s) := (T-t)^{1/(p-1)} u(x,t). \end{gathered}$$

以下，$s_0 = -\log T$ とおく．関数 $w_{a,T}$ は次の偏微分方程式を満たす．

$$w_s = \Delta w - \frac{1}{2} y \cdot \nabla w - \frac{1}{p-1} w + w^p, \qquad y \in \mathbb{R}^N, \quad s \in (s_0, \infty).$$

エネルギー汎関数 $E : H^1_\rho \cap L^{p+1}_\rho \to \mathbb{R}$ を以下で定義する．

$$E(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{2(p-1)} |\varphi|^2 - \frac{1}{p+1} |\varphi|^{p+1} \Big) \rho \, dy.$$

ただし任意の $q > 1$ に対して重み付き関数空間を以下で定義する:

$$\begin{aligned} L^q_\rho(\mathbb{R}^N) &:= \Big\{ \varphi \in L^q(\mathbb{R}^N);\ \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q \rho \, dy < \infty \Big\}, \\ H^1_\rho(\mathbb{R}^N) &:= \Big\{ \varphi \in L^2_\rho(\mathbb{R}^N);\ \nabla \varphi \in L^2_\rho(\mathbb{R}^N) \Big\}. \end{aligned}$$

ここで $\rho(y) = (4\pi)^{-N/2} e^{-|y|^2/4}$ とする．汎関数 $E : H^1_\rho \cap L^{p+1}_\rho \to \mathbb{R}$ は上の偏微分方程式のリャプノフ関数である (有界領域の場合はこの事実を示すのに領域の凸性が必要になる．重き付きのルベーグ空間の定義も全空間の場合とほぼ同様である)．実際

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E(w(\cdot,s)) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla w \cdot \nabla w_s + \frac{1}{p-1} w w_s - w^p w_s \right) \rho \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ -\nabla \cdot (\rho \nabla w) - \frac{\rho}{p-1} w - \rho w^p \right\} w_s \, dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} w_s^2 \rho \, dy \le 0, \quad s > s_0 \end{aligned}$$

であるからである．とくに $E(w(\cdot,s)) \le E(w(\cdot,s_0))$ であることがわかる．

次の補題は時間大域的な関数が有界であることを示すときにとても便利である．

補題 3.37. ([55] Ⅲ. 定理 8.1)　Ω を有界領域とし $Q_T := \Omega \times (0,T)$ と書くことにする．関数空間 $V_2^{1,0}(Q_T)$ は次のノルムにより定義される Banach 空間とする．

$$|u|_{Q_T} := \max_{t\in[0,T]} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(Q_T)}.$$

放物型方程式

$$u_t = \sum_{i,j}(a_{ij}(x,t)u_{x_j} + a_i(x,t)u)_{x_i} - b_i(x,t)u_{x_i} - a(x,t)u + (f_i(x,t))_{x_i} \\ - f(x,t)$$

を考える．ただし係数に関しては以下の条件を仮定する．

(a) 楕円性の条件を満たすものとする．

$$\nu\sum_{i=1}^N \xi_i^2 \le \sum_{i,j} a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \le \nu^{-1}\sum_{i=1}^N \xi_i^2, \quad x\in\Omega,\, t>0.$$

(b) $\|u\|_{q,r,Q_T} := \Big(\int_0^T \Big(\int_\Omega |u(x,t)|^q\,dx\Big)^{r/q} dt\Big)^{1/r}$ と書き表すとき

$$\Big\|\sum_i a_i^2,\, \sum_i b_i^2,\, \sum_i f_i^2,\, a,\, f\Big\|_{q,r,Q_T} \le \mu$$

が成り立つ．ここで $q,r>0$ は $\dfrac{1}{r}+\dfrac{N}{2q}<1$ を満たす定数とする．

このとき $V_2^{1,0}$ 空間における任意の解 u に対して

$$\|u\|_{L^\infty(Q')} < C(N, \|u\|_{L^2(Q_T)}, \nu, \mu, r, q, \Omega).$$

ただし $Q' \subset\subset Q_T$ とする．

定理 3.35, 3.36 の証明のアイディア． 以下の議論の式変形は [62] より引用したものである．この式変形は [34] のオリジナルの式変形よりも簡単である．さて $E_0(a) := E(w_{a,T}(\cdot,s_0))$ とおく．次のことに気をつける．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_{\mathbb{R}^N} w^2\rho\,dy &= \int_{\mathbb{R}^N}\Big(-|\nabla w|^2 - \frac{1}{p-1}w^2 + |w|^{p+1}\Big)\rho\,dy \\
&= -2E(w_{a,T}(\cdot,s)) + \frac{p-1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|w|^{p+1}\rho\,dy \\
&\ge -2E(w_{a,T}(\cdot,s_0)) + \frac{p-1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|w|^{p+1}\rho\,dy \\
&\ge -2E_0(a) + \frac{p-1}{p+1}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} w^2\rho\,dy\Big)^{\frac{p+1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

である．最後の 2 つの不等式は，エネルギー汎関数の単調減少性と Jensen の不等式による．$\int_{\mathbb{R}^N} w^2\rho\,dy$ が爆発しないためには上の式の最右辺が非正でなければならない．したがって

$$\int_{\mathbb{R}^N} w_{a,T}^2\rho\,dy \le \left(\frac{2(p+1)}{p-1}E(w_{a,T}(\cdot,s_0))\right)^{\frac{2}{p+1}} =: C\left(E_0(a)\right)^{\frac{2}{p+1}} \tag{3.3.4}$$

とくに $E(w_{a,T}(\cdot,s))\ge 0$ であることもわかる．また式 (3.3.3), (3.3.4) とエネルギー $E(w)$ の単調性およびシュワルツの不等式から次の不等式がしたがう．

$$\begin{aligned}\frac{p-1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|w_{a,T}|^{p+1}\rho\,dy &= \int_{\mathbb{R}^N} w_{a,T}(\partial_s w_{a,T})\rho\,dy + 2E(w(\cdot,s))\\ &\le \Big(\int_{\mathbb{R}^N} w_{a,T}^2\rho\,dy\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}(\partial_s w_{a,T})^2\rho\,dy\Big)^{\frac{1}{2}} + 2E_0(a)\\ &\le \Big(CE_0(a)^{\frac{2}{p+1}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(-\frac{d}{ds}E(w(\cdot,s))\Big)^{\frac{1}{2}} + 2E_0(a)\end{aligned}$$

この両辺を s について積分するとエネルギーが非負であることより任意の $s_1\ge s_0$ に対して

$$\int_{s_1}^{s_1+1}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|w_{a,T}|^{p+1}\rho\,dy\Big)^2 ds \le C'\Big(E_0^{\frac{2}{p+1}+1}(a) + \delta E_0^2(a)\Big). \tag{3.3.5}$$

$g := |w|^{p-1}$ とおく．このとき $w_{a,T}$ はつぎの方程式の解である．

$$w_s = \Delta w - \frac{1}{2}y\cdot\nabla w - \frac{1}{p-1}w + g(y,s)w, \quad y\in\mathbb{R}^N, \quad s\in(s_0,\infty).$$

を満たす．式 (3.3.5) から次の不等式を得る．

$$\int_{s_1}^{s_1+1}\Big(\int_{|y|\le 1}|g(y,s)|^{\frac{p+1}{p-1}}\rho\,dy\Big)^{\gamma} ds \le C''(E_0(a)), \quad s_1\ge s_0. \tag{3.3.6}$$

ただし $\gamma=2$．ここで補題 3.37 を

$$\begin{aligned} a_{ij}=\delta_{ij},\ a(x,t) &= |w(y,s)|^{p-1} - 1/(p-1),\\ b_i = y/2,\ a_i = f = f_i &= 0, \quad q = \frac{p+1}{p-1}\end{aligned}$$

として適用すると不等式 (3.3.6) より

$$\frac{1}{q\gamma} + \frac{N}{2q} < 1 \iff p < \frac{N+2-2\gamma^{-1}}{N-2+2\gamma^{-1}}$$

であれば，ある定数 $C_1 > 0$ に対して

$$|w_{a,T}(y,s)| \le C_1 E_0(a)^{1/(p+1)}, \qquad |y| \le \frac{1}{2},\ s \in \Big[s_1 + \frac{\delta}{2}, s_1 + \delta\Big]. \tag{3.3.7}$$

ここで $w_{a,T}(y,s) = w_{0,T}(y + e^{\frac{s}{2}}a, s)$ に注目すれば

$$|w_{0,T}(y,s)| \le C E_0^{1/(p+1)}, \qquad y \in \mathbb{R}^N,\ s \ge s_0 + \delta.$$

ただし $E_0 := \sup_{a \in \mathbb{R}^N} E_0(a)$ ここで何らかの方法により γ を ∞ まで持ち上げれば $p < p_s$ のとき爆発がタイプ I であることがわかる．

放物型方程式の平滑化作用より $E_0 < \infty$ であると仮定してよい (初期時刻を適当に取りかえてやればよい)．後述の補題 5.17 を用いると埋め込み

$$W^{1,2}([0,1], L^2(\Omega)) \cap L^{(\alpha+1)\gamma}([0,1], L^{\alpha+1}(\Omega)) \subset L^\infty([0,1], L^\beta(\Omega))$$
$$\text{for} \quad 2 \le \beta < \alpha + 1 - \frac{\alpha - 1}{\gamma + 1}$$

が成り立つ．これを $\alpha = p, \gamma = 2$ として適用する．式 (3.3.4), (3.3.5) より

$$\sup_{s > s_0} \int_{|y| \le 1} w_a^\beta(y,s)\rho(y)\,dy < C, \qquad \beta < \frac{2p+4}{3}. \tag{3.3.8}$$

不等式 (3.3.4) とソボレフの埋め込み $H_0^1 \subset L^{p+1}$ より $w_a(y,s)$ は関数空間 $V_2^{1,0}(Q_T)$ に含まれる．ここで補題 3.37 を

$$\begin{aligned} &a_{ij} = \delta_{ij},\ a(x,t) = |w(y,s)|^{p-1} - 1/(p-1), \\ &b_i = y/2,\ a_i = f = f_i = 0, \quad 2 \le q < \frac{2p+4}{3(p-1)}, \quad r = \infty \end{aligned}$$

として適用すると不等式 (3.3.6) より定数 $C_1 > 0$ があって

$$w_{a,T}(y,s) \le C_1 E_0(a)^{1/(p+1)}, \qquad |y| \le 1,\ s \ge s_0 + 1.$$

ここで式 (3.3.8) より $p < (3N+8)/(3N-4)$ ならば $1/r + N/2q < 1$ となることに注意せよ．これは爆発がタイプ I になることを意味する．よって題意が証明された．

$$\frac{dE(w(\cdot,s))}{ds} = -\int_{\mathbb{R}^N} (\partial_s w_{a,T})^2 \rho\,dy, \quad s > s_0$$

を積分してやれば $E(w(\cdot,s))$ の有界性から十分大きな $s_* > 1$ に対して

$$\int_{s_*}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(\partial_s w_{a,T})^2\rho\, d\xi ds \le M_0 \tag{3.3.9}$$

を得る．爆発が Type I であることと基本解の評価式から

$$\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le M_1(T-t)^{-\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}}, \quad T/2 \le t < T$$

がある定数 $M_1 > 0$ に対して成立することがわかる (たとえば [86] の命題 23.15 など)．この勾配評価と $\nabla w(y,s) = (T-t)^{\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}}\nabla u(x,t)$ から一階微分 ∇w の評価を得る．w と ∇w の評価が $w(\cdot, s+s_i)$ の $C^{2,1}$ でのプレコンパクト性を与える．よって (3.3.9) から $w_{a,T}(\cdot, -\log T)$ の ω 極限集合は連結なコンパクト集合で以下の楕円型方程式の有界な解全体の集合に含まれる:

$$\Delta w - \frac{y}{2}\cdot\nabla w - \frac{w}{p-1} + |w|^{p-1}w = 0, \quad y \in \mathbb{R}^N.$$

ところが [33] の 定理 1 の Pohožaev 型不等式からこの方程式の有界な解は $p \le p_s$ のときは定数関数しかない．すなわち $\pm\kappa$ か 0 である．よって $w_{a,T}(\cdot, -\log T)$ の ω 極限集合は $\{\kappa, -\kappa, 0\}$ に含まれる．さらに補題 3.28 から $x = a$ が爆発点ならば ω 極限集合から 0 は除かれる．このような議論から題意が示される． □

注意 3.38. この定理の証明で用いられた，後ろ向き自己相似解の議論や後の章で扱われる前向き自己相似解の議論は平均曲率流方程式，調和写像流，非線形シュレディンガー方程式，KdV 方程式などの様々な問題で幅広く用いられる．儀我美一先生と儀我美保先生の本 [36] には熱方程式や渦度方程式から始まり「自己相似性」全般についての大変わかりやすくて丁寧な説明がある．

注意 3.39. Giga-Matsui-Sasayama [37] は Maximal Regularity 不等式を用いた bootstrap の議論により不等式 (3.3.5) が $\gamma = \infty$ まで成り立つことを示した．そして補題 3.37 を $2 \le q < (p+1)/(p-1)$, $r = \infty$ として適用して $p < p_s$ の場合に爆発がタイプ I になることを示した．Maximal Regularity に関しては 5 章の定理 5.16 の証明を参照せよ．

Matano-Merle [63, 64] は $p_s < p < p_{JL}$ のとき球対称な解の爆発がタイプ I であることを Ω が全空間または球のときに示した．また $p = p_s$ の場合も解 u と特異定常解とが有限回交わっているときを考察した．

定理 3.40. (Matano-Merle 2004, 2009 [63, 64]) $p_s < p < p_{JL}$ とする．$\Omega = B_R(0) := \{x \in \mathbb{R}^N ; |x| < R\}$ のとき初期境界値問題 (3.1.1) の球対称な解 u はタイプ I 爆発する．

ここではこの後に紹介する定理 3.43 (p91) を認めて領域が球の場合のみを証明する．以下の証明では関数 $f(r)$ の区間 $(0, R)$ の零点を $Z_{(0,R)}(f)$ と表示する．境界値問題

$$U_{rr} + \frac{N-1}{r} U_r + |U|^{p-1}U = 0, \quad U(0) = a, \quad U'(0) = 0 \quad (r = |x|)$$

の解を $\varphi_a(x) = \Phi_a(r)$ と書き表すことにする．また Φ^* を対応する特異定常解とする．すなわち

$$\Phi^*(r) = c^* r^{-2/(p-1)}, \qquad (c^*)^{p-1} = \frac{2}{p-1}\left(N - 2 - \frac{2}{p-1}\right).$$

定理 3.40 の証明. 補題 1.20 (p 27) によると $p_s < p < p_{JL}$ のとき $\varphi_1(x) = \Phi_1(r)$ は特異定常解 $\Phi^*(r)$ と無限回交わる．すなわち

$$Z_{(0,\infty)}(\Phi_1 - \Phi^*) = \infty. \tag{3.3.10}$$

さて爆発がタイプ II であると仮定しよう．後述の定理 3.43 (p91) より $s \to \infty$ のとき $w_{0,T}(y, s) \to \varphi^*(y)$ が成り立つ．以下 $W_{0,T}(r, s) = w_{0,T}(y, s)$ $(r = |y|)$ とおくと $r \in (0, \infty)$ で局所一様に

$$W_{0,T}(r, s) \to \Phi^*(r) \quad \text{as} \quad s \to \infty.$$

これと式 (3.3.10) より $W_{0,T}(\cdot, s)$ は $r \in [0, Re^{s/2}]$ で定義されているので

$$\lim_{s\to\infty} Z_{(0,Re^{s/2})}(W_{0,T}(\cdot, s) - \Phi_1) = \infty. \tag{3.3.11}$$

$0 < t_1 < t_2 < \cdots \to T$ なる任意の時間列に対して $\lambda_n = T - t_n$ とおく．

$$W_{0,T}(r, s_n) = \lambda_n^{\frac{1}{p-1}} U(\sqrt{\lambda_n} r, t_n),$$

ここで $s_n = -\log(T - t_n)$．したがって式 (3.3.11) をもとの変数 (x, t) で書き直すと

$$\lim_{n\to\infty} Z_{(0,R_n)}(\lambda_n^{\frac{1}{p-1}} U(\sqrt{\lambda_n} r, t_n) - \Phi_1) = \infty, \qquad R_n := \frac{R}{\sqrt{\lambda_n}}. \tag{3.3.12}$$

自己相似性 $\Phi_a(r) = a\Phi_1(a^{\frac{p-1}{2}}r)$ より

$$\Phi_1(r) - \lambda_n^{\frac{1}{p-1}} U(\sqrt{\lambda_n} r, t_n) = \lambda_n^{\frac{1}{p-1}} \Big(\Phi_{a_n}(\sqrt{\lambda_n} r) - U(\sqrt{\lambda_n} r, t_n) \Big)$$

ただし $a_n := \lambda_n^{-\frac{1}{p-1}}$．したがって

$$Z_{(0,R_n)}(\lambda_n^{\frac{1}{p-1}} U(\sqrt{\lambda_n} r, t_n) - \Phi_1) = Z_{(0,R)} \Big(\Phi_{a_n} - U(\cdot, t_n) \Big).$$

これと式 (3.3.12) より

$$\lim_{n\to\infty} Z_{(0,R)} \Big(\Phi_{a_n} - U(\cdot, t_n) \Big) = \infty.$$

補題 8.7(p216) より零点数は非増大であり Φ は定常解なので任意の固定された $t_0 \in (0,T)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} Z_{(0,R)} \Big(\Phi_{a_n} - U(\cdot, t_0) \Big) = \infty. \tag{3.3.13}$$

が成り立つ．しかも t_0 を十分 T に近く選べば $(0,R]$ 上において $\Phi^*(r) - U(r,t_0)$ は単純な零点しか持たない．そこでその数を

$$m_0 := Z_{(0,R)} \Big(\Phi^* - U(\cdot, t_0) \Big) < \infty$$

と書き表す．補題 1.20 より $r \in (0,\infty)$ 上広義一様に $\Phi_a \to \Phi^*$ $(a \to \infty)$．一方 $\Phi^*(r) - U(r,t_0)$ は単純な零点しか持たないから，これから十分大きな任意の $a > 0$ に対して

$$Z_{(0,R)} \Big(\Phi_a - U(\cdot, t_0) \Big) = m_0 < \infty.$$

これは (3.3.13) に反する．よって爆発はタイプ I でなければならない． □

注意 3.41. 全空間の場合も $Z_{(0,\infty)}(\Phi^* - |U_0|) < \infty$ を仮定すれば定理 3.40 は正しい．実際

$$m_0 := Z_{(0,\infty)}(\Phi^* - U_0) < \infty$$

であるから補題 8.7 (p216) よりある $t_0 > 0$ があって $\Phi^* - U(\cdot, t_0)$ の $r \in (0,\infty)$ における零点はすべて単純であって

$$Z_{(0,\infty)}(\Phi^* - U(\cdot, t_0)) \le m_0.$$

$a \to \infty$ のとき $\Phi_a \to \Phi^*$ であるから十分大きなすべての $a > 0$ に対して

$$Z_{(0,\infty)}(\Phi_a - U(\cdot, t_0)) \le m_0.$$

一方，上の定理の証明で式 (3.3.13) を導いたときの議論を使うことで

$$\lim_{n\to\infty} Z_{(0,\infty)}\Big(\Phi_{a_n} - U(\cdot, t_0)\Big) = \infty.$$

3.3.2　タイプII爆発

定義 3.31 とリスケーリング解 $w_{a,T}$ の定義から爆発がタイプIIであることは $s \to \infty$ のとき $w_{a,T}$ が非有界であることは同値である．Herrero-Velázquez [43] は $p > p_{JL}$ のときに全空間における初期値問題に対して，タイプII爆発を起こす解を構成した．ただし

$$p_{JL} := \begin{cases} \infty, & N \le 10, \\ 1 + 4/(N - 4 - 2\sqrt{N-1}), & N > 10. \end{cases}$$

彼らの方法は接合漸近展開の手法を用いて，形式的な解を構成し，その後不動点定理を用いて存在を証明している．リスケーリング解 $w_{0,T}$ をまず原点から離れた部分の形状は特異定常解の近傍で線形化した方程式の解で記述しており，一方原点の近くの解 $w_{0,T}$ の挙動は定常解の族を用いて記述している．有界領域の場合に対してのより単純な方法やその洗練化については [68, 72] などを参照せよ．

本小節ではその構成の仕方の概略を説明する．まず，方程式

$$\Delta\psi - \frac{1}{2}y\cdot\nabla\psi - \frac{1}{p-1}\psi + |\psi|^{p-1}\psi = 0, \qquad y \in \mathbb{R}^N \tag{3.3.14}$$

は特異定常解 $\varphi^*(y) = \Phi^*(|y|)$ をもつ．ただし

$$\Phi^*(r) := c^* r^{-\frac{2}{p-1}}, \quad (c^*)^{p-1} = \frac{2}{p-1}\Big(N - 2 - \frac{2}{p-1}\Big).$$

方程式 (3.3.14) を解 φ^* のまわりで線形化して関数空間 H^1_ρ において次の固有値問題を考える．

$$\Delta\psi - \frac{1}{2}y\cdot\nabla\psi - \frac{1}{p-1}\psi + \frac{p(c^*)^{p-1}}{|y|^2}\psi = -\lambda\psi, \qquad y \in \mathbb{R}^N. \tag{3.3.15}$$

ただし $\rho(y) = (4\pi)^{-N/2} e^{-|y|^2/4}$ であって

$$H_\rho^1 := \Big\{ v \ ; \ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + v^2)\rho \, dy < \infty, \, v \text{ は球対称} \Big\}.$$

すなわち次の固有値問題を考えることに相当する．

$$\Psi'' + \frac{N-1}{r}\Psi' - \frac{r}{2}\Psi' - \frac{1}{p-1}\Psi + \frac{p(c^*)^{p-1}}{|r|^2}\Psi = -\lambda\Psi, \qquad r > 0.$$

[43] によるとこの問題の固有値は次のように具体的に書ける．

$$\lambda_j = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{p-1} + j \quad (j = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3.3.16}$$

ただし

$$\alpha = \frac{-(N-2) + \sqrt{(N-2)^2 - 4pB}}{2}, \qquad B = \frac{2}{p-1}\Big(N - 2 - \frac{2}{p-1}\Big).$$

$p > p_s$ である場合 $\alpha < -2/(p-1)$ になることの気をつける．負の固有値の数を $m^* = m^*(p, N)$ とおくことにする．すなわち

$$m^*(p, N) := \max\{j \,|\, \lambda_j < 0\} + 1. \tag{3.3.17}$$

以下 λ_j に対応する固有関数を $\Psi_j(r)$ とおく．このとき $Z_{(0,\infty)}(\Psi_j(\cdot)) = j$ かつ定数 c_j があって次の展開式が成り立つ．

$$\Psi_j(r) = c_j r^{-|\alpha|} + o(r^{-|\alpha|}) \quad \text{as} \quad r \to 0.$$

次に $\Phi_a(r)$ を

$$U_{rr} + \frac{N-1}{r}U_r + |U|^{p-1}U = 0, \qquad U(0) = a, \quad U'(0) = 0.$$

の解とする．$p > p_{JL}$ のときこの関数は a に対して単調増大であって定数 $k(a) > 0$ に対して展開式

$$\Phi_a(r) = \Phi^*(r) - k(a) r^{-|\alpha|} + o(r^{-|\alpha|}) \quad \text{as} \quad r \to \infty$$

が成り立つ．Herrero-Velázquez らは $m \geq m^*$ のときパラメーター a を matching condition $k(a) = c_m$ が成り立つように選ぶことで

$$w_s = \Delta w - \frac{1}{2} y \cdot \nabla w - \frac{1}{p-1} w + |w|^{p-1} w$$

の解 W_m であって次の漸近挙動を有するものが存在することを証明した．

$$W_m(r,s) \sim \begin{cases} e^{\gamma_m s}\Phi_a(e^{\eta_m s}r), & r \in [0, Ke^{-\eta_m s}], \\ \Phi^*(r) - e^{-\lambda_m s}\Psi_m(r), & r \in [Ke^{-\eta_m s}, e^{\sigma s}]. \end{cases}$$

ここで K と $\sigma < 1/2$ は適当な正定数とする．また関数 W_m は特異定常解 Φ^* とちょうど m 回交わる．上の漸近挙動をもとの座標で見れば

$$\|u(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = O((T-t)^{-2m/((p-1)|\alpha|-2)}).$$

これより爆発がタイプ II であることがわかる．ただし

$$\eta_m = \lambda_m\Big(|\alpha| - \frac{2}{p-1}\Big)^{-1}, \qquad \gamma_m = \frac{2\eta_m}{p-1}.$$

一方 Fillippas-Herrero-Velázquez [24] は $p = p_s$ のとき符号変化するようなタイプ II 爆発の解を漸近展開によって構成した．また最近 Naito-Suzuki[75] らも関連する問題が扱っている．

定理 3.42. (Filippas-Herrero-Velázquez 2000 [24]) $N = 3,4,5,6$ とする． $p = p_s$, $\Omega = \mathbb{R}^N$ ならば符号変化し爆発がタイプ II であるような初期値問題の解が存在する．

最近 Matano-Merle [64] は球対称解に関して p がソボレフの臨界指数 p_s より大きいときでのタイプ II の爆発を特徴付けた．より具体的に述べると次の定理が成り立つことを示した．

定理 3.43. (Matano-Merle 2009 [64]) $p > p_s$ とする．$\Omega = B_R(0) := \{x \in \mathbb{R}^N;\, |x| < 1\}$ のとき初期境界値問題 (3.1.1) の球対称な解 u が時刻 T で爆発するとする．このとき次の極限

$$w^*(y) := \lim_{s\to\infty} w(s,y)\ \big(= \lim_{t\to T}(T-t)^{\frac{1}{p-1}}u(\sqrt{T-t}\,y, t)\big)$$

は $y \in \mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ に対して局所一様に存在する．w^* は楕円型方程式 (3.3.14) の有界な解ないしは特異定常解 φ^* または $-\varphi^*$ に一致する．さらに次の 4 つの条件は同値である．

(a) 爆発がタイプ II である;　　(b) $\lim_{t\to T}(T-t)^{\frac{1}{p-1}}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} = \infty$;

(c) $w^*(y) = \varphi^*(y)$ または $-\varphi^*(y)$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{u(x,T)}{\varphi^*(x)} = 1$ または -1.

なお初期値問題の球対称解についても同様の結果が成り立つ．

3.3.3　球対称な爆発解に対する基本評価式

上記の論文 [63, 64] においては球対称爆発解に対するいくつかの重要な評価式がいくつか示されている．定理 3.43 もこれらの評価式から導かれる．そのうちで主要なものを以下に掲げる．

命題 3.44. (Matano-Merle 2004, 2009 [63, 64])　$\Omega = B_R(0)$ または $\Omega = \mathbb{R}^N$ とし，$p_s < p < \infty$ とする．u は初期境界値問題 (3.1.1) の球対称な解で少なくとも $0 \le t < T$ までは解が存在すると仮定する．$w_{0,T}$ は $x = 0, t = T$ でリスケーリングした球対称な関数とする．すなわち次の式で定義される関数である．

$$w_{0,T}(y,s) = (T-t)^{\frac{1}{p-1}} u(x,t) = e^{-\frac{s}{p-1}} u(e^{-\frac{s}{2}} y, T - e^{-s}),$$
$$y = \frac{x}{\sqrt{T-t}}, \quad s = -\log(T-t).$$

このとき，任意の $\delta > 0$ に対して定数 $C_T = C_T(N, p, \delta, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, T)$ があって次の評価式が成り立つ.

$$|w_{0,T}(y,s)| \le C_T(1 + |y|^{-\frac{2}{p-1}}), \quad |y| > 0, \quad s \ge -\log T + \delta, \tag{3.3.18}$$

$$|u(x,t)| \le C_T((T-t)^{-\frac{1}{p-1}} + |x|^{-\frac{2}{p-1}}),\ x \in \Omega \setminus \{0\},\ \delta_1 T \le t \le T. \tag{3.3.19}$$

ただし $\delta_1 = 1 - e^{-\delta}$．さらに $u_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ならば C_T は以下の関係式を満たす.

$$C_T = O\Big(T^{-\frac{1}{p-1}(\frac{N-2}{2} - \frac{2}{p-1})} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{p+1}}\Big) \tag{3.3.20}$$

命題 3.44 の証明. 簡単のため $\Omega = \mathbb{R}^N$ かつ $u_0 \in H^1(\Omega)$ とする．球対称な領域上で原点に対して球対称な解を考えている場合は定理 3.35 の証明における不等式 (3.3.7) (p 85) は原点から離れた任意の点 $a \in \mathbb{R}^N$ でリスケーリングしても成り立つ．なぜなら原点から離れた部分では問題が本質的に 1 次元の場合に帰着され，そのときのソボレフの臨界指数は $p = \infty$ になるからである．したがって $w_{a,T}(y,s) = w_{0,T}(y + e^{\frac{s}{2}} a, s)$ に注目すれば 次の不等式が成り立つことがわかる.

$$|w_{0,T}(y,s)| \le C E_0^{1/(p+1)}, \qquad |y| \ge 1,\ s \ge s_0 + \delta. \tag{3.3.21}$$

今度はリスケーリングの時間を $t = T_1 \in [\delta T, T]$ の任意の時刻に取る．ここで $\delta \in (0,1)$ とする．すなわち

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (T-t)^{-\frac{1}{p-1}} w_{0,T}\Big(\frac{x}{\sqrt{T-t}}, \log\frac{1}{T-t}\Big) \\ &= (T_1-t)^{-\frac{1}{p-1}} w_{0,T_1}\Big(\frac{x}{\sqrt{T_1-t}}, \log\frac{1}{T_1-t}\Big). \end{aligned}$$

ここで

$$y = \frac{x}{\sqrt{T-t}}, \quad s = \log\frac{1}{T-t}, \quad s_1 = \log\frac{1}{T_1-t}$$

とおくと

$$w_{0,T}(y,s) = \Big(\frac{T-t}{T_1-t}\Big)^{\frac{1}{p-1}} w_{0,T_1}\left(\sqrt{\frac{T-t}{T_1-t}}\, y, s_1\right).$$

すなわち

$$w_{0,T}(y,s) = \lambda^{\frac{1}{p-1}} w_{0,T_1}(\sqrt{\lambda} y, s + \log\lambda), \quad \lambda := \frac{T-t}{T_1-t} \tag{3.3.22}$$

$$|w_{0,T_1}(y,s)| \le C\tilde{E}_0^{\frac{1}{p+1}}, \qquad |y| \ge 1,\ s \ge -\log T_1 + \delta \tag{3.3.23}$$

を得る．ただし

$$\tilde{E}_0 := \sup_{T_1 \in [\delta T, T]} \sup_{a \in \mathbb{R}^N} E(w_{a,T_1}(\cdot, -\log T_1)).$$

t, T_1 を $t \in [\delta T, T]$, $T_1 \in (t, T]$ の範囲で自由に動かす．すると式 (3.3.22) が $s = -\log(T-t) \ge -\log((1-\delta)T)$, $\lambda \in [1,\infty)$ の範囲で成り立つことがわかる．今度は $|y| \le 1$ とする．ここで式 (3.3.22) に $\lambda = 1/|y|^2$ を代入することにより次の不等式を得る．

$$|w_{0,T}(y,s)| \le C_T |y|^{-\frac{2}{p-1}}, \qquad 0 \le |y| \le 1, \quad s \ge -\log((1-\delta)T) + \delta.$$

これと不等式 (3.3.21) とを組み合わせて

$$|w_{0,T}(y,s)| \le C_T(1 + |y|^{-\frac{2}{p-1}}), \qquad |y| \ge 0, \quad s \ge -\log((1-\delta)T) + \delta.$$

ここで $C_T = O(\tilde{E}_0^{\frac{1}{p+1}})$．さて議論を簡単にするため $u_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ を仮定しよう．このとき $w_{a,T_1}(y, -\log T_1) = T_1^{\frac{1}{p-1}} u(a + \sqrt{T_1} y)$ なので

$$
\begin{aligned}
&E(w_{a,T_1}(\cdot, -\log T_1)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{1}{2} |\nabla w_{0,T_1}|^2 + \frac{1}{2(p-1)} |w_{0,T_1}|^2 - \frac{1}{p+1} |w_{0,T_1}|^{p+1} \Big) \rho \, dy \\
&= T_1^{\frac{2}{p-1} - \frac{N-2}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{|\nabla u_0|^2}{2} + \frac{|u_0|^2}{2(p-1)T_1} - \frac{|u_0|^{p+1}}{p+1} \Big) \rho \Big(\frac{x-a}{\sqrt{T_1}} \Big) \, dx \\
&\le O(T_1^{\frac{2}{p-1} - \frac{N-2}{2}} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{2}{p+1}})
\end{aligned}
$$

∇u_0 のみ L^2 ノルムが有界の場合の証明には Hardy の不等式を用いる．詳細は Matano-Merle [64] を参照せよ． □

注意 3.45. 解 u が正値で $\partial u / \partial r < 0$ を満たすならばこの評価式 (3.3.18) (3.3.19) は Kaplan の方法で導くこともできる．詳細は 9 章の補題 9.4 を参照せよ．

注意 3.46. $0 \in B(u_0)$ かつ $w^* \neq \pm\kappa$ であれば式 (3.3.19) よりも精密な評価が $x = 0$ の近傍で成り立つ．すなわち

$$
u(x,t) \le C|x|^{-\frac{2}{p-1}}, \qquad |x| \le r_0.
$$

詳細は [64, Proposition 2.7] を参照せよ．

さて定理 3.43 の証明には次の補題 (No-needle Lemma) が本質的である．この補題の証明については Matano-Merle [64, Lemma 2.14] を参照せよ．

補題 3.47. $p_s < p < \infty$ とする．関数列 w_n は

$$
\frac{\partial w}{\partial s} = \Delta w - \frac{1}{2} y \cdot \nabla w - \frac{1}{p-1} w + |w|^{p-1} w, \quad y \in \mathbb{R}^N
$$

の球対称な古典解であって $\sup E(w_n(\cdot, s_0)) < \infty$ が成り立つとする．ある $s^* > s_0$ と $\psi \in C^1(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$
w_n(\cdot, s^*) \to \psi \quad \text{as} \quad n \to \infty, \qquad y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.
$$

が成り立つと仮定する．このとき，任意の小さな $\delta > 0$ に対して定数 $M_1 > 0$ があって

$$
\sup_n \|\nabla^j w_n(\cdot, s^* + \delta)\|_{L^\infty(\Omega)} \le M_1, \quad j = 0, 1, 2, 3. \tag{3.3.24}
$$

上の補題から $x=0$ の外で w_n が収束すれば $x=0$ の近傍で (C^2 の意味で) 一様収束することがわかる．証明の方針は適当なリスケーリングにより w_n のエネルギーが非常に小さくなることをまず示し，これより $x=0$ の近傍での w_n の一様有界性を導く．

命題 3.43 の証明のアイディア． (a) $\Rightarrow$ (c) の証明についてのみ述べる．まずリャプノフ関数の性質を用いて w の ω 極限集合は空ではない連結コンパクト集合で $C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ に含まれることが示される．したがって，ω 極限集合が有界な定常解を含まないことを証明すればよいが，それを保障するのが補題 3.47 に他ならない．ω 極限集合が有界な定常解を含むと仮定する．すなわち補題 3.47 によるとある時間列 $s_0 < s_1 < \cdots \to \infty$ があって

$$w(\cdot, s_n) \to \psi \quad \text{as} \quad n \to \infty \qquad \text{in} \quad C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$$

が成り立つとしよう．このとき補題 3.47 より $\|w(\cdot, s_n+\delta)\|_{L^\infty}$ は有界である．一方，タイプ II の定義より $\limsup_{s\to\infty} \|w(\cdot, s)\|_{L^\infty} = \infty$．このことから $w(\cdot, s)$ が何度も最大値が振動する解になるが零点数の議論からそれはありえないことが証明される．詳細は [64] を参照せよ．(c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a) は明らか．(a) と (d) の同値性についても，やはり証明はとても長いので [64] を見よ． □

4　$\mathbb{R}^N$ 上の解の爆発

4.1　爆発の判定条件

4.1.1　Kaplan の判定法 (再説)

本章では初期値問題

$$\text{(4.1.1)} \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in \mathbb{R}^N,\ t>0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

について考察する．

まず $p>1$ を任意に選んだとき，初期値 u_0 が十分大きな正値関数であれば初期値問題 (4.1.1) の解 u が爆発することを背理法で示そう．

仮に，もし問題 (4.1.1) のすべての解が時間大域的に存在したとする．$\Omega = \Omega(a, r) := B_r(a)$ は $\mathbb{R}^N$ 内の半径 $r>0$，中心 $a \in \mathbb{R}^N$ の円板とす

る．$\lambda_1 > 0$ は Dirichlet 条件付き $-\Delta$ の第 1 固有値とし，$\phi_1 \in C^2(\bar{\Omega})$ は，固有値 $\lambda_1 > 0$ に対応する正値固有関数とする．すなわち λ_1 と関数 ϕ_1 は式 (3.1.2) を満たす．さらに次の正規化条件 $\|\phi_1\|_{L^1(\Omega)} = 1$ も課す．u_0 が十分に大きな関数であれば，適当な $r > 0$, $a \in R^N$ を選べば，以下の条件を満たす関数 w_0 が存在する．

$$u_0 \geq w_0 > 0, \quad x \in \Omega, \qquad \int_\Omega w_0 \phi_1 \, dx > \lambda_1^{\frac{1}{p-1}}.$$

定理 3.3 より，初期値 w_0 に対する初期境界値問題 (3.1.1) の解 w は有限時間で爆発する．一方，比較原理より $u(x,t) \geq w(x,t)$ が $x \in \mathbb{R}^N$, $t \in (0,\infty)$ に対して古典解として成立する．よって矛盾．

以上の議論のように爆発解は簡単に構成できる．しかしながら時間大域解の存在は，有界領域の場合のように固有関数との比較では証明されない．なぜなら，比較原理を使ったところで u を ϕ_1 の定数倍で抑えることはできないからである．実際，本講義録の 4.2 節でも $p > 1$ の値によっては，正値時間大域解が存在しないことを議論する．

4.1.2 エネルギー負の爆発条件 (非有界領域の場合)

本小節では全空間でのエネルギー負の爆発条件に関する定理を証明する．先に述べたように定理 3.5 に関しては，4 章の初期値問題 (4.1.1) に対しても同様の判定法がある．初期値問題の場合に対してもエネルギー汎関数 $J : H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ を次で定義する．

$$J(v) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \, dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p+1} \, dx, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^N).$$

この関数も初期値問題 (4.1.1) の解 u に対して

$$\frac{d}{dt} J(u(\cdot,t)) = -\int_{\mathbb{R}^N} u_t^2(\cdot,t) \, dx \tag{4.1.2}$$

を満たすので $J(u(\cdot,t))$ は $t > 0$ に関して単調減少関数である．

定理 4.1. (Merle-Zaag 2000 [66]) $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ とする．u は初期値 u_0 に対する初期値問題 (4.1.1) の解とする．$J(u_0) < 0$ が成り立つならば，解 u は爆発する．

注意 3.8 で述べたようにこの定理に対して定理 3.5 は証明を適用することはできないので，本質的に異なるアプローチが必要となり，その証明

はLevine [58] によりはじめて得られた．本小節では Merle-Zaag [66] によるより簡単な議論を紹介する．なおこの手法については Matano-Merle [64] の 4.3 節にも解説がなされている．

以下のスケール変換の議論を用いる．$a \in \mathbb{R}^N$, $T_1 > 0$ を任意にあたえて，問題 (4.1.1) の解 u に対して，スケール変換

$$w_{a,T_1}(y,s) = (T_1 - t)^{\frac{1}{p-1}} u(x,t), \tag{4.1.3}$$
$$y = \frac{x-a}{\sqrt{T_1 - t}}, \quad s = -\log(T_1 - t)$$

を考える．ここで T_1 は必ずしも爆発時刻には一致していないでもよい点に注意せよ．

このとき関数 $w = w_{a,T_1}$ は，方程式

(4.1.4)
$$w_s = \Delta w - \frac{1}{2} y \cdot \nabla w - \frac{1}{p-1} w + |w|^{p-1} w, \quad y \in \mathbb{R}^N, s > -\log T_1$$

を満たす．もし $T_1 \le T(u_0)$ なら w_{a,T_1} が s に対して時間大域的に存在することに注意せよ．次にエネルギー汎関数

$$E(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{2(p-1)} |\varphi|^2 - \frac{1}{p+1} |\varphi|^{p+1} \right) \rho \, dy, \ \varphi \in H^1_\rho \cap L^{p+1}_\rho$$

を導入する．ただし，$\rho(y) = (4\pi)^{-N/2} e^{-|y|^2/4}$．関数 $E(w(\cdot,s))$ は単調減少である．なぜなら

$$\begin{aligned}
\frac{dE(w(\cdot,s))}{ds} &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla w \cdot \nabla w_s - |w|^{p-1} w \, w_s + \frac{1}{p-1} w w_s \right) \rho \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ -\nabla \cdot (\rho \nabla w) - \rho |w|^{p-1} w - \frac{\rho}{p-1} w \right\} w_s \, dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} w_s^2 \rho \, dy, \quad s > -\log T_1.
\end{aligned}$$

次の Fermanian Kammerer-Merle-Zaag [20] による補題は，問題 (4.1.1) の解の爆発時間の解析に極めて有用であった．この補題は Matano-Merle [63, 64] の論文でも重要な役割を演じている．

補題 4.2. u は初期値 $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ に対する初期値問題 (4.1.1) の解とし $T = T(u_0)$ を 解 u の爆発時刻とする．w は $x = a$, $t = T_1$ で

u を関係 (4.1.3) によってリスケーリングした解とする．このとき $T_1 \in (0, T(u_0)]$ であれば任意の $s \geq -\log T_1$ に対して

$$2E(w_{a,T_1}(\cdot, s)) \geq \frac{p-1}{p+1}\left(\int_{\mathbb{R}^N} w_{a,T_1}(\cdot, s)^2 \rho\, dy\right)^{\frac{p+1}{2}}. \tag{4.1.5}$$

とくに任意の $s \geq -\log T_1$ に対して $E(w_{a,T_1}(\cdot, s)) \geq 0$.

補題 4.2 の証明. 背理法で証明するため，不等式 (4.1.5) が $s = s^*$ で成り立たないと仮定して $T(u_0) < T_1$ を示す.

$$2E(w_{a,T_1}(\cdot, s^*)) < \frac{p-1}{p+1}\left(\int_{\mathbb{R}^N} w_{a,T_1}(\cdot, s^*)^2 \rho\, dy\right)^{\frac{p+1}{2}} \tag{4.1.6}$$

方程式 (4.1.4) の両辺に関数 $w\rho$ をかけて $\mathbb{R}^N$ で積分すると $s \geq s^*$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_{\mathbb{R}^N} w^2 \rho\, dy &= \int_{\mathbb{R}^N}\Big(-|\nabla w|^2 - \frac{1}{p-1}w^2 + |w|^{p+1}\Big)\rho\, dy \\
&= -2E(w(\cdot, s)) + \frac{p-1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|w|^{p+1}\rho\, dy \\
&\geq -2E(w(\cdot, s^*)) + \frac{p-1}{p+1}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} w^2 \rho\, dy\Big)^{\frac{p+1}{2}}.
\end{aligned}$$

最後の不等式はエネルギー汎関数の単調減少性と Jensen の不等式による．不等式 (4.1.6) と上の微分不等式から $\int_{\mathbb{R}^N} w^2 \rho\, dy$ が有限時間で爆発することがわかる．これは$T(u_0) < T_1$ を意味するので矛盾．よって題意が成立. □

定理 4.1 の証明. もし解が爆発しないとすると任意の $T_1 > 0$ に対して u が $0 \leq t \leq T_1$ の範囲で存在する.

$$w_{0,T_1}(y, -\log T_1) = T_1^{\frac{1}{p-1}} u_0(\sqrt{T_1}y)$$

$T_1 > 0$ を十分に大きく選ぶと $E(w_{0,T_1}(\cdot, -\log T_1)) < 0$ が成り立つことを示そう．簡単な式変形により

$$\begin{aligned}
&E(w_{0,T_1}(\cdot, -\log T_1)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}|\nabla w_{0,T_1}|^2 + \frac{1}{2(p-1)}|w_{0,T_1}|^2 - \frac{1}{p+1}|w_{0,T_1}|^{p+1}\right)\rho\, dy \\
&= T_1^{\frac{2}{p-1} - \frac{N-2}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}|\nabla u_0|^2 + \frac{1}{2(p-1)T_1}|u_0|^2 - \frac{1}{p+1}|u_0|^{p+1}\right)\rho\Big(\frac{x}{\sqrt{T_1}}\Big)\, dx \\
&\approx T_1^{\frac{2}{p-1} - \frac{N-2}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}|\nabla u_0|^2 - \frac{1}{p+1}|u_0|^{p+1}\right) dx = T_1^{\frac{2}{p-1} - \frac{N-2}{2}} J(u_0) < 0.
\end{aligned}$$

ただし $T_1 \gg 1$．よって補題 4.2 より $T(u_0) < T_1$．よって矛盾. □

4.2 藤田の臨界指数

本節では初期値問題 (4.1.1) に対する **藤田の臨界指数** (Critical Fujita exponent) について述べる.

定理 4.3. (Fujita 1966 [26])

(i) $p < 1 + 2/N$ のとき，初期値問題 (4.1.1) の任意の正値解は有限時間で爆発する.

(ii) $p > 1 + 2/N$ のとき，初期値問題 (4.1.1) には正値時間大域解が存在する.

注意 4.4. $p = 1 + 2/N$ のとき，初期値問題 (4.1.1) の任意の解は，有限時間で爆発する ([39, 49, 51]). 詳しくは 4.2.2 節を参照せよ.

注意 4.5. 解の符号が変化すると正の部分と負の部分の相互作用によって，解の爆発が抑制されうるので正値解の場合とは異なる状況が現れる. $N = 1$ の場合には定理 4.3 を解が符号変化する場合に拡張することができる ([73, 74]). そのとき臨界指数 p は解の符号変化回数に依存する値になる. 詳細は 4.3 節で解説する.

4.2.1 比較原理による証明

計算の見通しをよくするため，以下この定理の証明では非線形項を $f(u) := |u|^{p-1}u$ と書くことにする.

$$
\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{4.2.1}
$$

関数 $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を次の常微分方程式の解とする.

$$
\varphi' = -f(\varphi), \quad \lim_{s \searrow 0} \varphi\bigl(s\bigr) = \infty.
$$

すなわち φ は次のような関係式を満たす.

$$
s = \int_0^\infty \frac{d\sigma}{f(\sigma)}.
$$

また関数 φ の逆関数を ψ で表すことにする．関数 ψ は次を満たす.

$$\psi'(\varphi(s))\varphi'(s) = 1,$$
$$\psi'(v) = -\frac{1}{f(v)}, \quad \lim_{v\to 0}\psi(v) = 0.$$

$f(u) = u^p$ のときは

$$\varphi(s) = \kappa s^{-\frac{1}{p-1}}, \quad \kappa := (p-1)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

$p < 1 + 2/N$ のときに初期値問題 (4.1.1) の正値解が爆発すること証明する.

補題 4.6. 非線形項 f をなめらかな凸関数とする．関数 u は初期値問題 (4.2.1) の解とし，その爆発時刻を $T(u_0)$ とおく．関数 v は熱方程式

$$\begin{cases} v_t = \Delta v, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ v(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{4.2.2}$$

の解とし，$t^* \in (0,\infty]$ を以下で定義する.

$$t^* := \sup\big\{t > 0\,;\, v(x,t) < \varphi(t) \quad \text{for} \quad x \in \mathbb{R}^N\big\}.$$

このとき，$t^* \geq T(u_0)$ であり

$$u(x,t) \geq \varphi\big(\psi(\,v(x,t)\,) - t\big), \quad x \in \mathbb{R}^N,\, t \in (0, T(u_0))$$

が成り立つ.

補題 4.6 の証明. 記号を簡単にするため，以下この補題の証明では

$$\tilde{w}(x,t) := \varphi\big(\psi(\,v(x,t)\,) - t\big), \quad x \in \mathbb{R}^N,\, t \in [0, t^*)$$

とおくことにする．t^* の定義より

$$v(x,t) < \varphi(t), \quad x \in \mathbb{R}^N,\, t \in [0, t^*)$$

が成り立つ．これは

$$\psi(v) > \varphi(t), \quad x \in \mathbb{R}^N,\, t \in [0, t^*)$$

と同値である．よって，$\tilde{w}$ は定義可能である.

関数 ψ の定義より

$$\psi''(v) = -\frac{\varphi''(\,\psi(v)\,)|\,\psi'(v)\,|^2}{\varphi'(\,\psi(v)\,)}$$

が容易にわかる．一方，

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_t =& -\varphi'(\,\psi(v) - t\,) + \varphi'(\,\psi(v) - t\,)\psi'(v)\,v_t, \\
\nabla \tilde{w} =& \varphi'(\,\psi(v) - t\,)\,\nabla v, \\
\Delta \tilde{w} =& \varphi''(\,\psi(v) - t\,)|\,\psi'(v)|^2|\nabla v\,|^2 + \varphi'(\,\psi(v) - t\,)\psi''(v)|\,\nabla v\,|^2 \\
& \qquad + \varphi'(\,\psi(v) - t\,)\psi'(v)\,\Delta v
\end{aligned}$$

が確かめられる．また

$$\varphi'' = -f'(\varphi(s))\,\varphi'(s), \quad s > 0$$

が成り立つ．これらより

$$\begin{aligned}
&\tilde{w}_t - \Delta\tilde{w} - f(\tilde{w}) \\
=& -\varphi''(\,\psi(v) - t\,)|\,\psi'(v)|^2|\nabla v\,|^2 - \varphi'(\,\psi(v) - t\,)\psi''(v)|\,\nabla v\,|^2 \\
=& -\varphi''(\,\psi(v) - t\,)|\,\psi'(v)|^2|\nabla v\,|^2 - \varphi'(\,\psi(v) - t\,)\frac{\varphi'(\,\psi(v)\,)|\,\psi'(v)\,|^2}{\varphi'(\,\psi(v)\,)}|\,\nabla v\,|^2 \\
=& -\varphi'(\,\psi(v) - t\,)\Big\{\frac{\varphi''(\,\psi(v) - t\,)}{\varphi'(\,\psi(v) - t\,)} - \frac{\varphi''(\,\psi(v)\,)}{\varphi'(\,\psi(v)\,)}\Big\}|\,\psi'(v)\,|^2\,|\,\nabla v\,|^2 \\
=& -\varphi'(\,\psi(v) - t)\,\Big\{f'\big(\varphi(\,\psi(v)\,)\big) - f'\big(\varphi(\,\psi(v) - t\,)\big)\Big\}|\,\psi'(v)\,|^2\,|\,\nabla v\,|^2 \le 0
\end{aligned}$$

を得る．ここで最後の不等式には，関数 f の凸性と $\varphi' < 0$ を用いた．したがって，関数 $\tilde{w}$ は劣解である．

もし，$t^* < T(u_0)$ とする．このとき，$\tilde{w}(x,0) = u_0$ であるから上記の議論と比較原理より

$$u(x,t) \ge \varphi\big(\psi(\,v(x,t) - t\,)\big), \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t \in (0, t^*). \tag{4.2.3}$$

一方，t^* の定義よりある x_0 があって $\psi(\,v(x_0, t^*) - t^*\,) = t^*$ が成り立つ．よって不等式 (4.2.3) より $\lim_{t\to t^*} u(x_0, t) = \infty$ を得る．これは $t^* < T(u_0)$ に反する．

以上から，$\tilde{w}(x,0) = u_0$ であることと比較原理を用いて題意の不等式を得る． □

この補題を用いて $p < 1 + 2/N$ のときに任意の正値解が爆発することを証明しよう．

定理 4.3 (ｉ) の証明. 初期値問題 (4.1.1) の時間大域解 u が存在するとして矛盾を導く．$v = G(\cdot, t) * u_0$ とおく．補題 4.6 より任意の $x \in \mathbb{R}^N, t \in (0, \infty)$ に対して

$$\psi(\, v(x,t)\,) \geq \psi(\, v(x,t)\,) - \psi(\, u(x,t)\,) \geq t \tag{4.2.4}$$

が成り立つ．しかるに，

$$\psi(\, v(x,t)\,) \leq \psi\Big(\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\, dy\Big) = O(t^{N(p-1)/2}).$$

であるから式 (4.2.4) の両辺を t で割ると $t \to \infty$ のとき

$$O(t^{N(p-1)/2-1}) \geq 1$$

となることがわかる．これより

$$\frac{N(p-1)}{2} - 1 \geq 0.$$

すなわち $p \geq 1 + 2/N$ である．これは指数 p に対する仮定に反する．ゆえに時間大域的な正値解は存在しない． □

$p > 1 + 2/N$ のとき時間大域解が存在することを示す．

定理 4.3 (ii) の証明. ここでは 2 通りの解法を紹介する．いずれの証明も適当な優解を構成する方法による．正数 $T > 0$ をひとつ任意に固定する．$v \in L^1(\mathbb{R}^N)$ を任意に選ぶ．初期値が $u_0(x) \leq e^{T\Delta}v(x)$ を満たすとする．このとき時間大域的な優解を $w(x,t) = g(t)e^{(T+t)\Delta}v(x)$ の形でさがす．ただし $g(0) = 1$ とする．$f(u) = u^p$ より $f(ab) = f(a)f(b)$ が成り立つ．w が優解であるためには次の不等式が任意の $x \in \mathbb{R}^N$ と $t > 0$ に対して成り立てばよい．

$$\begin{aligned}
0 &\leq w_t - \Delta w - f(w) \\
&= g'(t)\, e^{(T+t)\Delta}v + g(t)\,(e^{(T+t)\Delta}v)_t - g(t)\,\Delta e^{(T+t)\Delta}v - f(g(t)\, e^{(T+t)\Delta}v) \\
&= g'(t)e^{(T+t)\Delta}v + g(t)\Delta e^{(T+t)\Delta}v - g(t)\Delta e^{(T+t)\Delta}v - f(g(t)\, e^{(T+t)\Delta}v) \\
&= g'(t)\, e^{(T+t)\Delta}v - f(g(t))f(e^{(T+t)\Delta}v) \\
&= f(g(t))e^{(T+t)\Delta}v\Big\{\frac{g'(t)}{f(g(t))} - \frac{f(e^{(T+t)\Delta}v)}{e^{(T+t)\Delta}v}\Big\}.
\end{aligned}$$

そのためには任意の $x \in \mathbb{R}^N$ と $t > 0$ に対してに対して次が成り立てばよい．

$$\frac{g'(t)}{f(g(t))} \geq \frac{f(e^{(T+t)\Delta} v)}{e^{(T+t)\Delta} v}.$$

右辺に対して x について上からの評価を考えると任意の $t > 0$ に対して

$$\frac{g'(t)}{f(g(t))} = \frac{\|v\|_{L^1(\Omega)}^{p-1}}{(4\pi(T+t))^{N(p-1)/2}}.$$

が成り立てば上の不等式が成り立つことがわかる．この微分方程式を解くと

$$\psi(g(0)) - \psi(g(t)) = \|v\|_{L^1(\Omega)}^{p-1} \int_0^t \frac{dt}{(4\pi(T+t))^{N(p-1)/2}}$$

すなわち

$$\begin{aligned} g(t) &= \varphi\big(\psi(g(0)) + C(T^{1-\frac{N(p-1)}{2}} - (T+t)^{1-\frac{N(p-1)}{2}})\big) \\ &\leq c\,\varphi\big(T^{1-\frac{N(p-1)}{2}} - (T+t)^{1-\frac{N(p-1)}{2}}\big) \end{aligned}$$

$N(p-1)/2 > 1$ より $g(t)$ は時間大域的に存在する．比較原理より $u(x,t) \leq g(t)e^{(T+t)\Delta}v(x)$ が任意の $x \in \mathbb{R}^N$ $t > 0$ について成り立つので題意が成立する．

<u>別解</u> 次のように解く方法もある．

あある $T > 0$ があって十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して初期値が以下の不等式を満たすとする．

$$u_0(x) \leq \varepsilon\varphi(T)\exp\Big(-\frac{|x|^2}{4T}\Big).$$

この解法では優解を

$$w(x,t) := \varphi(T+t)\mu(r,t), \qquad r = |x|$$

の形で求める．ただし，$\mu(r,t) = \varepsilon\exp\Big(-\dfrac{r^2}{4(T+t)}\Big)$ とし $\varepsilon \in (0,1)$ は十分小さな正数とする．

熱方程式の基本解の定義より関数 μ は次の微分方程式を満たす．

$$\Big\{\frac{\mu(x,t)}{(4\pi(T+t))^{N/2}}\Big\}_t = \Delta\Big\{\frac{\mu(x,t)}{(4\pi(T+t))^{N/2}}\Big\}$$

である．これより

$$\mu_t - \mu_{rr} - \frac{N-1}{r}\mu_r = \frac{N}{2(T+t)}\,\mu.$$

したがって，

$$\begin{aligned}
w_t - \Delta w - f(w) &= \varphi'(T+t)\,\mu(r,t) + \varphi(T+t)\bigl(\mu_t - \Delta\mu\bigr) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - f\bigl(\varphi(T+t)\mu(r,t)\bigr) \\
&= -f\bigl(\varphi(T+t)\bigr)\mu(r,t) + \frac{N}{2(T+t)}\,\varphi(T+t)\,\mu(r,t) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - f\bigl(\varphi(T+t)\mu(r,t)\bigr) \\
&= f\bigl(\varphi(T+t)\bigr)\mu(r,t)\Bigl\{-1 + \bigl(\varphi(T+t)\bigr)^{-(p-1)}\frac{N}{2(T+t)}\Bigr\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - f\bigl(\varphi(T+t)\mu(r,t)\bigr) \\
&= f\bigl(\varphi(T+t)\bigr)\mu(r,t)\Bigl\{-1 + \frac{N(p-1)}{2}\Bigr\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - f\bigl(\varphi(T+t)\mu(r,t)\bigr).
\end{aligned}$$

よって $p > 1 + N/2$ のとき，$\varepsilon \in (0,1)$ を十分小さくとれば

$$w_t - \Delta w - f(w) \geq f\bigl(\varphi(T+t)\bigr)\mu(r,t)\Bigl\{-1 + \frac{N(p-1)}{2} - \varepsilon^{p-1}\Bigr\} \geq 0$$

であることがわかる．上で構成した優解は時間大域的に存在する．よって，題意が成立する． □

第 1 の証明と比較原理から次のことがわかる．$p > 1 + 2/N$ かつある $T > 0$ に対して $0 \leq u_0 \leq G(\cdot, T)$ ならば，ある正数 $M > 0$ があって $G * u_0 \leq u(x,t) \leq MG(x, t+T)$ が成り立つことがわかる ([26])．一方，第 2 証明の優解にあるようなオーダーで減衰する解も存在する．以下の定理 4.10 (p106) に実際そのような解を構成している．なお時間大域解の漸近挙動に関しては Kawanago [50] において詳細に調べられている．

時間大域解の漸近挙動と漸近的な自己相似性との関係について説明する．

$$u_f(r,t) = (T+t)^{-\frac{1}{p-1}} f_s\left(\frac{x}{\sqrt{T+t}}\right)$$

と書ける初期値問題 (4.1.1) の解 u_f を **前向き自己相似解** (forward self-similar solution) という．明らかに，前向き自己相似解は時間大域解である．

関数 $f_s(y)$ は

$$(4.2.5)\qquad \Delta f + \frac{y}{2}\cdot\nabla f + \frac{f}{p-1} + |f|^{p-1}f = 0, \quad y\in\mathbb{R}^N$$

を満たす．問題 (4.2.5) の球対称な解は 2 階常微分方程式

$$(4.2.6)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}f')' + \dfrac{\xi}{2}f' + \dfrac{f}{p-1} + |f|^{p-1}f = 0,\ \xi := |y|, \\ f(0) = \mu, \quad f'(0) = 0 \end{cases}$$

を満たす．この 2 階常微分方程式の解の存在は，積分方程式に変換して Banach の縮小写像を用いることにより証明できる．さらに，次のことがわかる．

補題 4.7. $p > 1 + N/2$ とする．正数 μ はつぎの不等式を満たす任意の数とする．

$$(4.2.7)\qquad 0 < \mu < \left\{\frac{N}{2(p-1)}\Big[p - \Big(1 + \frac{2}{N}\Big)\Big]\right\}^{\frac{1}{p-1}}.$$

このとき問題 (4.2.6) の解は正値である．すなわち，初期値問題 (4.1.1) には時間大域的な自己相似解が存在する．

系 4.8. $p > 1 + N/2$ とする．f_s は補題 4.7 により得られた解とする．

$$(4.2.8)\qquad 0 \le u_0(x) \le T^{-1/(p-1)} f_s\Big(\frac{|x|}{\sqrt{T}}\Big)$$

ならば初期値問題 (4.1.1) の解が 0 に収束する．

補題 4.7 の証明. 微分方程式 (4.2.6) の解 f は，$f > 0$ であるかぎり ξ に対して単調減少である．なぜならもし，$\xi = \xi_{min}$ において極小値をとるとする．このとき $f'(\xi_{min}) = 0$, $f''(\xi_{min}) \ge 0$ であるから方程式に矛盾するからである．

式 (4.2.6) の第 1 式の両辺に ξ^{N-1} をかけて積分すると

$$(4.2.9)\quad \xi^{N-1}f' + \frac{\xi^N}{2}f = \int_0^\xi \eta^{N-1}f(\eta)\Big\{\frac{N\big[p - \big(1 + \frac{2}{N}\big)\big]}{2(p-1)} - f^{p-1}(\eta)\Big\}\,d\eta.$$

$\xi = \xi_*$ を f の零点で最小のものとする．このとき，ξ^* の定義と f の単調性より

$$f(\xi_*) = 0, \quad f'(\xi_*) \le 0.$$

すなわち等式 (4.2.9) の右辺は 0 以下である．一方，$f > 0$ ならば f の狭義単調減少関数であること，式 (4.2.7) と $f(0) = \mu$ より

$$\frac{N}{2(p-1)}\Big[p - \Big(1 + \frac{2}{N}\Big)\Big] > \mu^{p-1} = f^{p-1}(0) \geq f^{p-1}(\eta), \quad \eta \in (0, \xi_*).$$

これより等式 (4.2.9) の右辺は正であることがわかる．よって矛盾． □

注意 4.9. $p < 1 + N/2$ のとき，等式(4.2.9) の $\xi \to \infty$ の極限を考えることにより問題 (4.2.6) が正値解をもたないことが予想される．実際，定理 4.3 より $p < 1 + N/2$ のときは初期値問題 (4.1.1) の任意の正値解が爆発する．したがって境界値問題(4.2.6) に対して正値解は存在し得ない．

前向き自己相似解 u_f は特殊な形の時間大域解であるが，その十分近傍から出発した時間大域解は $t \to \infty$ で前向き自己相似解のように振舞う．

定理 4.10. $p > 1 + 2/N$ とする．初期値問題 (4.1.1) の解 u に対して

$$g(y,t) := (T+t)^{1/(p-1)} u(\sqrt{T+t}\, y, t)$$

とおく．問題 (4.2.6) の解 f_s は次の意味で漸近安定である．もし，次の 3 条件が成り立つとする．

(i) $N/2 - 1/(p-1) - p(f_s(0))^{p-1} =: \delta > 0$,

(ii) $u_0 \leq u_f(\cdot, 0), \quad x \in \mathbb{R}^N$,

(iii) $u_f(\cdot, 0) - u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

このとき

$$\|g(t) - f_s\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = O(t^{-\delta}) \quad \text{as} \quad t \to \infty.$$

定理 4.10 の証明. 条件 (i) より

$$f_s(0) \leq \Big\{\frac{1}{p}\Big(\frac{N}{2} - \frac{1}{p-1}\Big)\Big\}^{\frac{1}{p-1}} < \Big(\frac{N}{2} - \frac{1}{p-1}\Big)^{\frac{1}{p-1}}$$

であることがわかる．よって，補題 4.7 が適用できて関数 f_s は $\mathbb{R}^N$ において正値である．条件 (ii) と比較原理より

$$u_f(x,t) \geq u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0. \tag{4.2.10}$$

$z := u_f - u$ とおくと

$$z_t = \Delta z + u_f^p - u^p$$

が成り立つ．この式の両辺を x について $\mathbb{R}^N$ 上で積分する．$f_s(\xi)$ の単調性と不等式 (4.2.10) より

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} z(x,t)\,dx &\le \int_{\mathbb{R}^N} (u_f^p - u^p)\,dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ p \int_0^1 \Big(\theta u_f + (1-\theta)u\Big)^{p-1}\,d\theta \Big\} z\,dx \\
&\le p(f_s(0))^{p-1}(T+t)^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} z\,dx.
\end{aligned}$$

これを t について積分すれば

$$\log\Big[\int_{\mathbb{R}^N} z\,dx\Big] \le O\Big(p(f_s(0))^{p-1}\log(T+t)\Big)$$

対数の中身を比較して

$$\int_{\mathbb{R}^N} z\,dx \le O\Big(t^{p(f_s(0))^{p-1}}\Big) \tag{4.2.11}$$

を得る．一方

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} z\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (T+t)^{-\frac{1}{p-1}}(g(t) - f_s)(T+t)^{\frac{N}{2}}\,dy \\
&= (T+t)^{\frac{N}{2}-\frac{1}{p-1}}\|g(t) - f_s\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

これと式 (4.2.11) より $t \to \infty$ のとき

$$\|g(t) - f_s\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \le O\Big(t^{p(f_s(0))^{p-1} - \frac{N}{2} + \frac{1}{p-1}}\Big) = O(t^{-\delta}).$$

よって題意が示された． □

4.2.2 Kavian の方法

本小節では前節の藤田の結果について，Kavian [49] による証明を紹介する．この証明の特色は解の爆発条件をある作用素の固有値の符号を調べる問題に帰着している点にある．これにより藤田の臨界指数の意味がスペク

トル論の観点から明らかにされる．また本節の執筆には Quittner-Souplet の本 [86] も参考にした．

本節では次の記号を用いることにする．

$$
\begin{aligned}
L_g^2 &:= \Big\{ w \in L^2(\mathbb{R}^N);\ \int_{\mathbb{R}^N} w^2(y) g(y)\, dy < \infty \Big\}, \\
(f,h)_g &:= \int_{\mathbb{R}^N} f(y)h(y)g(y)\, dy, \quad g(y) := \exp\left(\frac{|y|^2}{4}\right).
\end{aligned}
$$

また，重みつきのソボレフ空間を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
H_g^1 &:= \Big\{ w \in L_g^2;\ \nabla w \in L_g^2 \Big\}, \\
(f,h)_{H_g^1} &:= (f,h)_g + (\nabla f, \nabla h)_g, \\
H_g^2 &:= \Big\{ w \in L_g^2;\ \nabla w \in H_g^1 \Big\}.
\end{aligned}
$$

次の作用素を導入する．

$$
\begin{aligned}
&L_0 w := \Delta w + y/2 \cdot \nabla w = g^{-1} \nabla \cdot (g \nabla w), \quad D(L_0) = H_g^2, \\
&L w := \Big(L_0 + \frac{1}{p-1} \Big) w.
\end{aligned}
$$

容易に分かるように，この作用素 L は対称である．このことは，任意の $v \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$
\begin{aligned}
(L_0 w, v)_g = \int_{\mathbb{R}^N} (L_0 w) v\, g\, dy &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \cdot (g\, \nabla w)\, v\, dy \\
&= - \int_{\mathbb{R}^N} g\, \nabla v \cdot \nabla w\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} g^{-1}\, \nabla \cdot (g\, \nabla v)\, w\, g\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} w\, (L_0 v)\, g\, dy = (w, L_0 v)_g
\end{aligned}
$$

が成り立つことと関数空間 $C_0^1(\mathbb{R}^N)$ の関数空間 $L^2(\mathbb{R}^N)$ における稠密性からわかる．

実はこの作用素について次のことが成り立つ．

補題 4.11. (a) 任意の $f \in L_g^2$ に対して $L_0 u = f$ を満たす $u \in H^2(g)$ がただ 1 つ存在する．

(b) 作用素 L_0 の第1固有値は $-N/2$ であり，第1固有関数は $g^{-1}(y)$ である．

(c) 作用素 L_0 は H_g^2 上における自己共役作用素で，コンパクトな逆作用素をもつ．

注意 4.12. 性質 (b) から容易にわかるように作用素 L の第 1 固有値は $1/(p-1)-N/2$ なので，$p=1+2/N$ で原点の安定性が入れ替わる．より詳しく述べると，$p>1+2/N$ のときは原点が線形安定だが，そうでないとき不安定になる．また，性質 (c) が成り立つおかげで，上記の重み付きの空間で考えると，全空間の問題を有界領域に対する問題のように扱うことが出来る．

補題 4.11 の証明. まず $H_g^2 \subset\subset L_g^2$ を示す．$u \in H_g^2$ とする．$v=u\sqrt{g}$ とおく．計算すれば容易に分かるように

$$\nabla v - \frac{y}{4}v = \sqrt{g}\nabla u. \tag{4.2.12}$$

したがって

(4.2.13)
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 g\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2 g\,dx + \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N}|y|^2v^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} y\cdot(v\,\nabla v)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2 g\,dx + \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N}|y|^2v^2\,dx + \frac{N}{4}\int_{\mathbb{R}^N}|v|^2\,dx\\ &\geq \frac{1}{16}|y|^2v^2\,dx = \frac{1}{16}|y|^2u^2g\,dx.\end{aligned}$$

$\{u_k\}_{k=1}^\infty$ を u に関数空間 H_g^2 で弱収束する点列とする．Rellich の定理より関数空間 $L_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$ において $u_k \to u$ となる．これより任意の $R>0$ に対して

$$\lim_{k\to\infty}\int_{|y|<R}|u_k-u|^2 g\,dy = 0. \tag{4.2.14}$$

式 (4.2.13) より，任意の $\varepsilon>0$ に対して $R_0>0$ があって $R>R_0$ ならば

$$\begin{aligned}\int_{|y|>R}|u_k-u|^2g\,dy &= \int_{|y|>R}|y|^{-2}|u_k-u|^2\,|y|^2g\,dy\\ &\leq \frac{1}{R^2}\int_{|y|>R}|u_k-u|^2\,|y|^2 g\,dy\\ &\leq \frac{C}{R^2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(u_k-u)|^2g\,dy < \varepsilon.\end{aligned}$$

この不等式と式 (4.2.14) より $R > R_0$ ならば

$$\limsup_{k\to\infty} \|u_k - u\|_{L_g^2}^2 = \limsup_{k\to\infty} \Big(\int_{|y|<R} + \int_{|y|>R} \Big) |u_k - u|^2 g\, dy < \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意の正数なので，関数空間 L_g^2 において $k \to \infty$ のとき $u_k \to u$.

次に (a) を示す．そのために，まず v が満たす偏微分方程式を求める．次に $\Delta v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ を示し，最後に，$\Delta u \in L_g^2$ であることを証明する．式 (4.2.12) より，偏微分方程式

$$L_0 u = \frac{1}{g}\nabla\cdot(g\nabla u) = \Delta u + \frac{y}{2}\cdot\nabla u = f \tag{4.2.15}$$

を解くことは，汎関数

$$F(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 g\, dy + \int_{\mathbb{R}^N} fug\, dy$$

の停留点を探すことに帰着する．この汎関数を関数 $v = u\sqrt{g}$ を用いて書きかえると

$$\tilde{F}(v) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \Big|\nabla v - \frac{y}{4}v\Big|^2 dy + \int_{\mathbb{R}^N} fv\sqrt{g}\, dy.$$

よって，関数 v は次の偏微分方程式の解である．

$$\Delta v - \Big(\frac{N}{4} + \frac{|y|^2}{16}\Big)v = f\sqrt{g}. \tag{4.2.16}$$

次に $\Delta v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ を示す．$\phi_0 : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ は

$$\phi_0(s) = \begin{cases} 1, & s \le 1, \\ 0, & s \ge 2 \end{cases}$$

を満たす滑らかな関数とし，$\phi_k := \phi_0(|y|/k)$ とおく．式 (4.2.16) の両辺に $\Delta v\phi_k$ をかけて積分すると

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\Delta v)^2 \phi_k\, dy - \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{N}{4} + \frac{|y|^2}{16}\Big) v\Delta v\, \phi_k\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} f\sqrt{g}\Delta v\, \phi_k\, dy.$$

部分積分するとこの式は次のようになる．

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} (\Delta v)^2 \phi_k\, dy &+ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \Big(\frac{N}{4} + \frac{|y|^2}{16}\Big)\phi_k\, dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\frac{y}{8}\cdot\nabla v\Big) v\phi_k\, dy + \int_{\mathbb{R}^N} v\Big(\frac{N}{4} + \frac{|y|^2}{16}\Big)\nabla v\cdot\nabla\phi_k\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f\sqrt{g}\,\Delta v\,\phi_k\, dy.\end{aligned}$$

仮定より $\sqrt{g}f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ であり，式 (4.2.13) より $|y|v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ である．さらに $|\nabla\phi_k| < C/k$ となるからコーシーの不等式より

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} (\Delta v)^2 \phi_k \, dy + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \Big(\frac{N}{4} + \frac{|y|^2}{16}\Big) \phi_k \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f\sqrt{g}\, \Delta v \, \phi_k \, dy - \frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}^N} (y\cdot\nabla v) v \, \phi_k \, dy - \int_{\mathbb{R}^N} v\Big(\frac{N}{4} + \frac{|y|^2}{16}\Big) \nabla v \cdot \nabla\phi_k \, dy \\
&\le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 g \, dy + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (\Delta v)^2 \, \phi_k^2 \, dy + \frac{1}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} |y|^2 v^2 \, dy + \frac{N}{8}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \phi_k^2 \, dy \\
&\qquad + \frac{C}{k}\int_{\mathbb{R}^N} |v|\,|\nabla v| \, dy + C\int_{\mathbb{R}^N} |yv|\,|\nabla v|\,|y|\,|\nabla\phi_k| \, dy.
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
(4.2.17)\quad &\int_{\mathbb{R}^N} \Big\{\frac{1}{2}(\Delta v)^2 + \Big(\frac{N}{8} + \frac{|y|^2}{16}\Big)|\nabla v|^2\Big\} \phi_k \, dy \\
&\qquad \le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 g \, dy + \frac{1}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} |y|^2 v^2 \, dy + \frac{C}{k}\int_{\mathbb{R}^N} |v|\,|\nabla v| \, dy \\
&\qquad\quad + C\int_{\mathbb{R}^N} |yv|\,|\nabla v|\,|y|\,|\nabla\phi_k| \, dy, \\
&|y|\,|\nabla\phi_k| \le \frac{|y|}{k}\Big|\nabla\phi_0\Big(\frac{|y|}{k}\Big)\Big| \le C \quad (k \text{ によらない}).
\end{aligned}$$

一方， $|yv|\,|\nabla v|\,|y|\,|\nabla\phi_k| < C|yv|\,|\nabla v|$ かつ $|yv|\,|\nabla v| \in L^1(\mathbb{R}^N)$. したがって $y\cdot\nabla\phi_k$ がほとんど至るところ 0 に収束するならばヘルダーの不等式より

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |yv|\,|\nabla v|\,|y|\,|\nabla\phi_k| \, dy = 0.$$

また，$v, \nabla v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ より

$$\lim_{k\to\infty}\frac{C}{k}\int_{\mathbb{R}^N} |v|\,|\nabla v| \, dy = 0.$$

ここで式 (4.2.17) において $k\to\infty$ の極限を考える．各点収束の意味で $\phi_k \to 1$ $(k\to\infty)$ だから

$$\begin{aligned}
(4.2.18)\qquad &\int_{\mathbb{R}^N} \Big\{\frac{1}{2}(\Delta v)^2 + \Big(\frac{N}{8} + \frac{|y|^2}{16}\Big)|\nabla v|^2\Big\} dy \\
&\qquad \le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 g \, dy + \frac{1}{2N}\int_{\mathbb{R}^N} |y|^2 v^2 \, dy
\end{aligned}$$

とくに，$\Delta v \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

最後に $\Delta u \in L^2_g$ を示す．式 (4.2.15), (4.2.16) より

$$\Delta v = \frac{N}{4}v + \frac{|y|^2}{16}v + \frac{y}{2}\sqrt{g}\,\nabla u + \sqrt{g}\Delta u. \tag{4.2.19}$$

また $v, \Delta v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $f \in L^2_g$ と式 (4.2.16) より $|y|^2 v \in L^2(\mathbb{R}^N)$．不等式 (4.2.18) より $y \cdot \nabla v \in L^2(\mathbb{R}^N)$．よって式 (4.2.12) に y をかけることにより $\frac{y}{2}\sqrt{g}\,\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)$．したがって式 (4.2.19) より $\Delta u \in L^2_g$．これより $u \in H^2_g$．以上の議論より，(a), (c) が示された．

(b) は (a), (c) の結果と符号変化しない固有関数が第 1 固有関数のみであることから容易にしたがう． □

特に (a), (c) により，作用素 L_0 は関数空間 L^2_g において解析半群 $U(s)$ を生成することがわかる．より詳しく述べれば

$$\begin{cases} e^{t\Delta}u_0(x) &= \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} G(x-y,t)u_0(y)\,dy, \\ G(x,t) &= (4\pi t)^{-\frac{N}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \end{cases} \tag{4.2.20}$$

とおくと，任意の $u_0 \in D(L_0)$ に対してある $T > 0$ があって

$$\frac{dv}{ds} = L_0 v, \qquad v(s,y) = e^{t\Delta}u_0(e^{s/2}y,\, e^s - 1) = U(s)v_0$$

を満たす $v \in C^1([0,T), L^2_g) \cap C([0,T), D(L_0))$ が存在する．また，このことから適当な $T > 0$ に対して

$$v_s = L_0 v + \frac{1}{p-1}\,v + |v|^{p-1}v, \quad v(\cdot,0) = v_0 \in D(L_0)$$

が関数空間 $v \in C^1([0,T), L^2_g) \cap C([0,T), D(L_0))$ で解を有することもしたがう．

初期値問題 (4.1.1) の解 u に対して，変数変換

$$w(y,s) = e^{\frac{s}{p-1}}u(e^{\frac{s}{2}}y, e^s - 1) \qquad s = \log(t+1), \quad y = \frac{x}{\sqrt{t+1}}$$

を考える．このとき，初期値問題 (4.1.1) は,

$$\begin{cases} w_s = \Delta w + \dfrac{y}{2}\cdot\nabla w + \dfrac{w}{p-1} + |w|^{p-1}w, & y \in \mathbb{R}^N,\ s > 0, \\ w(\cdot,0) = u_0, & y \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{4.2.21}$$

になる．ただし，この式の Δ と ∇ は，y に関する微分演算子とする．

注意 4.13. 作用素

$$Lw := \Delta w + \frac{y}{2}\cdot\nabla w + \frac{1}{p-1}w.$$

により方程式 (4.2.21) を書き下すと $w_s = Lw + w^p$ となる．L の第 1 固有値は $1/(p-1) - N/2$ である．したがって，$p = 1 + 2/N$ を境に原点での安定性が入れ変わる．特に $p > 1 + 2/N$ のとき原点は線形安定であり，$p < 1 + 2/N$ のとき原点は線形不安定である．

命題 4.14. 初期値問題 (4.1.1) が正の時間大域的をもつことと，ある $C_0 > 0$ に対して初期値問題

$$\begin{cases} v_s = \Delta v + \dfrac{y}{2}\cdot\nabla v + \dfrac{v}{p-1} + |v|^{p-1}v, & y \in \mathbb{R}^N,\ s > 0, \\ v(\cdot, 0) = C_0\phi_1, & y \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{4.2.22}$$

が正の時間大域的をもつことは同値である．

注意 4.15. この定理の対偶をとれば，初期値問題 (4.1.1) が任意の正値解が爆発することと任意の $C_0 > 0$ に対して問題(4.2.22) の解が爆発することは同値であることがしたがう．

補題 4.16. 初期値問題 (4.1.1) の解を u する．このとき $u(t) \geq e^{t\Delta}u_0$ である．

補題 4.16 の証明. 方程式 $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$ は 0 を定常解にもつ．また $u_0 \geq 0$ であるから比較原理より $u(x,t) \geq 0$ が成り立つ．よって，$|u|^{p-1}u \geq 0$．これより u は $u_t = \Delta u$ の優解であることがわかる．

あるいは，次のように考えてもよい．$u \geq 0$ と作用素 $e^{(t-s)\Delta}$ の正値保存性，および積分表示式

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}|u(s)|^{p-1}u(s)\,ds$$

を組み合わせると，$u(x,t) \geq e^{t\Delta}u_0$ となることがわかる． □

命題 4.14 の証明. 初期値問題 (4.2.22) が正の時間大域的をもつならば，初期値問題 (4.1.1) が正の時間大域的をもつのは明らかである．

逆を示す．初期値問題 (4.1.1) が正の時間大域的 u をもつとする．積分方程式表示と補題 4.16 および $\dfrac{|x-z|^2}{4t} \leq \dfrac{|x|^2 + |z|^2}{2t}$ より

$$u(x,t) \geq e^{t\Delta}u_0 \geq \frac{e^{-\frac{|x|^2}{2t}}}{(4\pi t)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|z|^2}{2t}}u_0(z)\,dz. \tag{4.2.23}$$

特に不等式 (4.2.23) に $t=2$ を代入すると，

$$u(x,2) \geq (8\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|z|^2}{4}} u_0(z)\,dz = C_0\phi_1(x) \tag{4.2.24}$$

を得る．ここで

$$C_0 := (8\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|z|^2}{4}} u_0(z)\,dz \tag{4.2.25}$$

と書いた．不等式(4.2.24) と比較原理を用いることにより

(4.2.26)

$$u(x,t;u(\cdot,2)) \geq u(x,t;C_0\phi_1) = (1+t)^{-\frac{1}{p-1}}\, v\left(\frac{x}{\sqrt{1+t}}, \log(1+t)\right)$$

がしたがう．ただし，ここで $u(x,t;u_0)$ は初期値 u_0 に対する初期値問題 (4.1.1) の解であり，v は初期値問題 (4.2.22) の解とする．仮定より任意の $t>0$ に対して不等式 (4.2.26) の左辺は有限である．よって，$v(y,s)$ も任意の $s>0$, $y \in \mathbb{R}^N$ に対して有限となる．したがって，式(4.2.25) で与えた $C_0>0$ に対して初期値問題 (4.2.22) は時間大域解をもつ． □

以下，命題 4.14 を用いて定理 4.3 の証明を行う．

定理 4.3（ｉ）の証明． 定数 $C_0>0$ を十分小さく選んで，初期値問題 (4.2.22) の正の時間大域的を構成すればよい．十分小さな $\epsilon>0$ を選べば (s によらない) 関数 $\epsilon\phi_1(y)$ が

$$\begin{cases} w_s = \Delta w + \dfrac{y}{2}\cdot\nabla w + \dfrac{w}{p-1} + |w|^{p-1}w, & y \in \mathbb{R}^N,\ s>0 \\ w(\cdot,0) = \epsilon\phi_1, & y \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

の優解である．なぜならば，作用素 L_0 の性質 (b) より十分小さな $\epsilon>0$ に対して次の不等式が成り立つからである．

$$L(\varepsilon\phi_1) + (\varepsilon\phi_1)^p = \varepsilon\Big\{\Big(-\frac{N}{2}+\frac{1}{p-1}\Big) + \varepsilon^{p-1}\phi_1^{p-1}\Big\}\phi_1 < 0 = (\varepsilon\phi_1)_s.$$

したがって，$C_0=\varepsilon>0$ と選べばその初期値に対する初期値問題 (4.2.22) の解が正の時間大域的になる．このことと命題 4.14 より初期値問題 (4.1.1) が時間大域解をもつことがしたがう． □

次に定理 4.3（ii）の証明をする．ここで紹介する証明は Kaplan の方法を用いるものである．

補題 4.17. $\lambda(R)$, φ_R は半径 R の円板 B_R 上の Dirichlet 境界条件下の作用素 L に対する第 1 固有値，固有関数とする．ただし，関数 φ_R は

$$\int_{B_R} \varphi_R g\, dy = 1$$

を満たすものとする．このとき

$$\lambda(R) = \lambda_1 - \varepsilon(R)$$

である．ただし $\varepsilon(R) > 0$ であり，$R \to \infty$ のとき $\varepsilon(R) \to 0$ が成り立つ．

補題 4.17 の証明. 固有値の変分法的特徴付けから

$$\lambda(R) = \inf\{\|\nabla w\|^2_{L^2_g(B_R)}\,;\|w\|_{L^2_g(B_R)} = 1,\, w|_{\partial B_R} = 0\}$$

が成り立つ．この下限を達成する関数を ϕ_R とおくと

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi_R|^2 g\, dy}{\int_{\mathbb{R}^N} |\phi_R|^2 g\, dy} = \frac{\int_{B(R)} |\nabla\phi_R|^2 g\, dy}{\int_{B(R)} |\phi_R|^2 g\, dy} = \lambda(R).$$

これより $\lambda_1 \leq \lambda(R)$ を得ることができる．

次に，固有値 $\lambda(R)$ の収束性を証明する．関数 η_R は

$$\eta_R(y) = \begin{cases} 1, & y \in B_{R-1}, \\ 0, & y \in \mathbb{R}^N \setminus B_R \end{cases}$$

かつ $0 \leq \eta_R(y) \leq 1$ を満たすなめらかな関数とする．さらに，任意の関数 $w \in L^2_g(\mathbb{R}^N)$ に対してこれをカットオフした関数

$$w_R = \eta_R w \in L^2_g(B_R)$$

を導入する．この関数の勾配は次の式で与えられる．

$$\nabla w_R = \nabla\eta_R w + \eta_R \nabla w.$$

この両辺を自乗すれば次式を得る．

$$|\nabla w_R|^2 = |\nabla\eta_R|^2 w^2 + 2w\eta_R \nabla w \cdot \nabla\eta_R + \eta_R^2 |\nabla w|^2.$$

w として L の全空間における第 1 固有値 ϕ_1 を選ぶ．このとき

$$\lambda(R) \le \frac{\int_{B_R}(|\nabla\eta_R|^2\phi_1^2 + 2\phi_1\eta_R\nabla\phi_1\cdot\nabla\eta_R + \eta_R^2|\nabla\phi_1|^2)g\,dy}{\int_{B_R}|\eta_R\phi_1|^2\,dy} \tag{4.2.27}$$

一方，

$$\lambda_1 = \frac{\int_{B_R}|\nabla\phi_1|^2 g\,dy}{\int_{B_R}|\phi_1|^2 g\,dy}$$

であった．不等式(4.2.27) に対して，分子の第 1 項は

$$\begin{aligned}\int_{B_R}|\nabla\eta_R\phi_1|^2 g\,dy &= \int_{B_R\setminus B_{R-1}}|\nabla\eta_R\phi_1|^2 g\,dy\\ &\le \max_{B_R\setminus B_{R-1}}|\nabla\eta_R|\int_{B_R\setminus B_{R-1}}|\phi_1|^2 g\,dy \to 0 \quad \text{as} \quad R\to\infty.\end{aligned}$$

関数 η_R, $|\nabla\eta_R|$ の有限性より，ある $C>0$ に対して $\eta_R|\nabla\eta_R|\le C$．よって，不等式 (4.2.27) の分子の第 2 項に対して次の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\Big|\int_{B_R}2\phi_1\eta_R\nabla\phi_1\cdot\nabla\eta_R g\,dy\Big| &= \int_{B_R\setminus B_{R-1}}2\phi_1\eta_R|\nabla\phi_1||\nabla\eta_R|g\,dy\\ &\le 2C\int_{B_R\setminus B_{R-1}}\phi_1\,|\nabla\phi_1|g\,dy \to 0 \quad \text{as} \quad R\to\infty.\end{aligned}$$

さらに，単調収束定理より $R\to\infty$ のとき

$$\int_{B_R}|\nabla\phi_1|^2\eta_R^2\,g dy \to \int_{B_R}|\nabla\phi_1|^2 g\,dy, \quad \int_{B_R}|\eta_R\phi_1|^2\,g\,dy \to \int_{B_R}|\phi_1|^2 g\,dy$$

が成り立つ．よって，$\limsup_{R\to\infty}\lambda(R)\le\lambda_1$．以上から $\lambda(R)\to\lambda_1$ であることがわかった． □

定理 4.3（ⅱ）の証明.

$$h_R(s) = \int_{B_R}\varphi_R w(\cdot,s)g\,dy$$

とおく．作用素 L の自己共役性と Jensen の不等式から

$$
\begin{aligned}
\dot{h}_R(s) &= \int_{B_R} \varphi_R w_s(\cdot, s) g\, dy \\
&= \int_{B_R} \varphi_R L w(\cdot, s) g\, dy + \int_{B_R} \varphi_R w^p(\cdot, s) g\, dy \\
&= \int_{B_R} (L\varphi_R) w(\cdot, s) g\, dy + \int_{B_R} \varphi_R w^p(\cdot, s) g\, dy \\
&\geq (\lambda_1 - \varepsilon(R)) h_R(s) + h_R^p(s)
\end{aligned}
$$

を得る．よって，

$$
h_R^{p-1}(0) \geq \varepsilon(R) - \lambda_1 \tag{4.2.28}
$$

なら解 w は爆発する．

$h(s) = \lim_{R\to\infty} h_R(s)$ とおく．

$$
h^{p-1}(0) \geq \lim_{R\to\infty} (\varepsilon(R) - \lambda_1)
$$

が成り立つことが容易にわかる．なぜならば，$\lambda_1 = 1/(p-1) - N/2$, $p < 1 + N/2$ を用いるとこの不等式の左辺は正で右辺は負になるからである．よって十分大きな $R > 0$ に対して不等式 (4.2.28) が成り立つ．

以上の議論から，特に任意の $C_0 > 0$ に対して問題 (4.2.22) の解 v は爆発することがしたがう．ゆえに，命題 4.14 から初期値問題 (4.1.1) の任意の正値解は有限時間で爆発することがわかる． □

最後に定理 4.3 を $p = 1 + 2/N$ のときに証明する．そのためには，任意の定数 $C_0 > 0$ に対して，初期値問題 (4.2.22) の解 v が爆発することを示せばよい．

補題 4.18. 初期値問題(4.2.21) はリャプノフ関数

$$
\begin{aligned}
E_+(v(\cdot, s)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(\cdot, s)|^2\, g\, dy \\
- \frac{1}{2(p-1)} \int_{\mathbb{R}^N} |v(\cdot, s)|^2\, g\, dy \\
- \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |v(\cdot, s)|^{p+1} g\, dy
\end{aligned} \tag{4.2.29}
$$

をもつ．

補題 4.18 の証明. 上記の汎関数を $s>0$ について微分すると次の不等式を得る.

$$\begin{aligned}\frac{dE_+(v(\cdot,s))}{ds} &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v\cdot\nabla v_s g\,dy - \frac{1}{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} v\,v_s K\,dy - v^p v_s g\,dy\\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} v_s\,\nabla\cdot(g\cdot\nabla v)\,dy - \frac{1}{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} v\,v_s g\,dy - v^p v_s g\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} v_s\Big\{-g^{-1}\nabla\cdot\big(g\nabla v\big) - \frac{1}{p-1}v - v^p\Big\}g\,dy\\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} |v_s(\cdot,s)|^2\,g\,dy \le 0\end{aligned}$$

□

補題 4.19. $p\ge 1+2/N$ とする. $E_+(v_0)<0$ ならば初期値問題(4.2.21)の解は爆発する.

このエネルギーに関する主張を示す前に次の補題を準備する.

補題 4.20. $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ は C^2 級関数であって次の仮定を満たすとする.

(H1) $f'(t)\to\infty \quad \text{as} \quad t\to\infty.$

(H2) ある $\alpha_0>0$ があって

$$f(t)f''(t)\ge(\alpha_0+1)(f'(t)-f'(0))^2 \qquad t>0.$$

このとき, ある $t_0>0$, $\alpha>0$ があって $f^{-\alpha}$ は $[t_0,\infty)$ で狭義凹関数である.

補題 4.20 の証明. (H1) より, ある $t_0>0,\alpha>0$ があって

$$(\alpha_0+1)(f'(t)-f'(0))^2>(\alpha+1)f'(t)^2, \qquad t>t_0. \tag{4.2.30}$$

一方, 容易に分かるように

$$(f^{-\alpha})'=-\alpha f^{-\alpha-1}f', \qquad (f^{-\alpha})''=\alpha f^{-\alpha-2}\{(\alpha+1)(f')^2-ff''\}.$$

この不等式と f の正値性, 不等式 (4.2.30), および条件 (H2) より任意の $t>t_0$ に対して

$$(f^{-\alpha}(t))''<\alpha f^{-\alpha-2}(t)\{(\alpha_0+1)(f'(t)-f'(0))^2-f(t)f''(t)\}\le 0.$$

よって, $f^{-\alpha}$ は $[t_0,\infty)$ において狭義凹関数である. □

補題 4.19 の証明. 上記の補題を証明するために，関数

$$f(s) := \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} |v(y,\sigma)|^2 g(y)\,dyd\sigma$$

が有限時間で爆発することを示す.

$f(s)$ が有限時間で発散することを背理法で示すため関数 $f(s)$ が時間大域的に有限と仮定する．補題 4.20 を用いてある $\alpha > 0$ に対して関数 $f^{-\alpha}(s)$ が任意の $s \in (t_0, \infty)$ に対して上に凸な関数であることを示す．このことがわかれば，$f(s)$ が有限時間しか存在し得ないので時間大域的に存在することに矛盾するからである.

関数 f の 2 階微分を計算する．式 (4.2.22) の両辺に $v\,g$ をかけて積分すると次式を得る.

$$\begin{aligned}
f''(s) &= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_{\mathbb{R}^N} v^2\,g\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\cdot(g\nabla v)v\,dy + \frac{1}{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} v^2 g\,dy + \int_{R^N} |v|^{p+1} g\,dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 g\,dy + \frac{1}{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} v^2 g\,dy + \int_{R^N} |v|^{p+1} g\,dy \\
&= -(p+1)E_+(v(\cdot,s)) + \frac{p-1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2\,g\,dy - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} v^2 g\,dy.
\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

ところで,

$$\frac{dE_+(v(\cdot,s))}{ds} = -\int_{\mathbb{R}^N} |v_s(\cdot,s)|^2\,g\,dy \tag{4.2.32}$$

であるからこの汎関数は $s > 0$ に関して単調減少である．さらに，式 (4.2.32) を s に関して積分すると

$$E_+(v(\cdot,s)) - E_+(v_0) = -\int_0^s \int_{\mathbb{R}^N} |v_s(y,\sigma)|^2\,g(y)\,dyd\sigma.$$

この式と $E_+(v(\cdot,s))$ の単調性と補題の仮定より

$$E_+(v(\cdot,s)) \le -\int_0^s \int_{\mathbb{R}^N} |v_s(y,\sigma)|^2\,g(y)\,dyd\sigma. \tag{4.2.33}$$

また，性質 (b),(c) より重みつき空間についても Poincaré の不等式

$$\frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |v(\cdot,s)|^2 g\,dy \le \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(\cdot,s)|^2 g\,dy \tag{4.2.34}$$

が成り立つ．補題 4.20 の条件 (H1) を示す．式 (4.2.34) を $f''(t)$ に関する等式 (4.2.31) に代入すると $p \geq 1 + 2/N$ のとき

$$\begin{aligned} f''(s) &\geq -(p+1)E_+(v(\cdot,s)) + \left(\frac{p-1}{2} - \frac{1}{N}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(\cdot,s)|^2\,dy \\ &\geq -(p+1)E_+(v(\cdot,s)) > 0. \end{aligned}$$

したがって $\lim_{s\to\infty} f'(s) = +\infty$.

次に補題 4.20 の条件 (H2) を示す．不等式 (4.2.33) と (4.2.34) を $f''(s)$ に関する等式 (4.2.31) に代入するとここで $p \geq 1 + 2/N$ に注意すると

$$\begin{aligned} f''(s) \geq &(p+1)\int_0^s \int_{\mathbb{R}^N} |v_s(y,\sigma)|^2 g(y)\,dyd\sigma \\ &\qquad + \left(\frac{N(p-1)}{4} - \frac{1}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N} v^2(\cdot,s)g\,dy \\ \geq &(p+1)\int_0^s \int_{\mathbb{R}^N} |v_s(y,\sigma)|^2 g(y)\,dyd\sigma \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} f(s)f''(s) \geq \frac{p+1}{2}&\left(\int_0^s \int_{\mathbb{R}^N} |v_s(y,\sigma)|^2 g(y)\,dy\,d\sigma\right) \\ &\qquad \left(\int_0^s \int_{\mathbb{R}^N} |v(y,\sigma)|^2 g(y)\,dy\,d\sigma\right) \end{aligned}$$

一方,

$$f''(s) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_{\mathbb{R}^N} v^2(\cdot,s)g\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} v(\cdot,s)\,v_s(\cdot,s)\,g\,dy$$

を s について積分して

$$\begin{aligned} (f'(s) - f'(0))^2 &= \left(\int_0^s \int_{\mathbb{R}^N} v(y,\sigma)v_s(y,\sigma)g(y)\,dyd\sigma\right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^s \int_{\mathbb{R}^N} |v(y,\sigma)|^2 g(y)\,dyd\sigma\right) \\ &\qquad \left(\int_0^s \int_{\mathbb{R}^N} |v_s(y,\sigma)|^2 g(y)\,dyd\sigma\right) \end{aligned}$$

であることがわかる．以上 2 式とコーシー・シュワルツの不等式から

$$f(s)f''(s) \geq \frac{p+1}{2}(f'(s) - f'(0))^2.$$

よって，ある $\alpha > 0, s_0 > 0$ があって任意の $s \in (s_0, \infty)$ に対して

$$f(s)f''(s) \geq (1+\alpha)(f'(s))^2.$$

補題 4.20 より関数 $f^{-\alpha}(t)$ は任意の $s \in (s_0, \infty)$ に対して上に凸な関数であるがそのような時間大域的な関数は存在しないので矛盾．以上から，初期値問題 (4.2.22) の解 v が爆発することがわかる． □

藤田臨界指数の場合の証明． 固有関数 ϕ_1 の性質と $p = 1 + 2/N$ を用いると次式を得る．

$$\begin{aligned}
2E_+(v_0) =& \int_{\mathbb{R}^N} g^{-1}\nabla \cdot (g\nabla v_0)v_0\, g\, dy - \frac{1}{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} v_0^2 g\, dy \\
&- \frac{2}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^{p+1} g\, dy \\
=& \int_{\mathbb{R}^N} (L_0 v_0)\, v_0\, g\, dy - \frac{1}{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} v_0^2 g\, dy \\
&- \frac{2}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^{p+1} g\, dy \\
=& \Big(\frac{1}{p-1} - \frac{N}{2}\Big)\int_{\mathbb{R}^N} v_0^2 g\, dy - \frac{2}{p+1}\int_{R^N} |v_0|^{p+1} g\, dy \\
=& -\frac{2}{p+1}\int_{R^N} |v_0|^{p+1} g\, dy < 0.
\end{aligned}$$

補題 4.19 より特に，任意の定数 $C_0 > 0$ に対して初期値問題 (4.2.22) の解 v が爆発することがわかる．ゆえに，命題 4.14 から初期値問題 (4.1.1) の任意の正値解は有限時間で爆発する． □

最後に Kavian の方法で導入した関数空間に関連して 2.3 節の L^q 値解の非適切問題について少し述べる．前向き自己相似解の存在について次のことが知られている．

定理 4.21． (Escobedo-Kavian 1987 [18]) $1 + 2/N < p < (N+2)/(N-2)$ とする．このとき

$$\Delta v + \frac{y}{2}\cdot\nabla v + \frac{v}{p+1} + v^p = 0, \quad y \in \mathbb{R}^N$$

は $H_g^1(\mathbb{R}^N)$ に属する正値解をもつ．

この定理を用いれば2.3節の L^q 値解の非適切に関する部分的な結果が得られる．$1+2/N < p < (N+2)/(N-2)$ かつ $1 \geq q < N(p-1)/2$ とする．このとき定理 4.21 より $t > 0$ で正値の自己相似解 $u_f(x,t) = t^{-\frac{1}{p-1}}v(x/\sqrt{t})$ であってそのプロファイルが遠方で指数関数的に減少するものが存在する．u_f の L^q ノルムを計算すると

$$\begin{aligned}\|u_f(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} &= t^{-\frac{1}{p-1}}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\Big|v\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big)\Big|^q\,dx\Big)^{1/q}\\ &= t^{\frac{N}{2q}-\frac{1}{p-1}}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|v(y)|^q\,dy\Big)^{1/q} \to 0 \qquad \text{as} \qquad t \to 0.\end{aligned}$$

よって $1 < q < N(p-1)/2$ のとき初期値問題 (4.1.1) は非適切になり得る．この問題の詳細については内藤雄基先生の解説記事 [76] およびその中の文献を参照せよ (たとえば [40]).

4.3 符号変化する場合の藤田臨界指数

1 次元での問題

$$\text{(4.3.1)} \qquad \begin{cases} u_t = u_{xx} + |u|^{p-1}u, & x \in \mathbb{R},\ t > 0,\\ u(\cdot,0) = u_0, & x \in \mathbb{R}\end{cases}$$

を考える．ただし $u_0 \in C(\mathbb{R})$ とする．また以下本節では $g(x) := \exp(x^2/4)$ とし，連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の $\mathbb{R}$ 上の零点の数を

$$\begin{aligned}Z(f) = Z_{(0,\infty)}(f) = \sup\{j;\ -\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_{j+1} < \infty\ \ s.t.\\ f(x_i)f(x_{i+1}) < 0,\ i = 1,2,\cdots,j\}\end{aligned}$$

と書き表すことにする．4.2.2 節と同様

$$H_g^1(\mathbb{R}) = \big\{w \in L_g^2(\mathbb{R});\ \int_{\mathbb{R}}(w^2 + w_x^2)g\,dx < \infty\big\}.$$

また

$$\Sigma_k := \{u_0 \in H_g^1;\ Z(u_0) = k\}$$

解の符号が変化すると正の部分と負の部分の相互作用によって，解の爆発が抑制される．

定理 4.22. (Mizoguchi-Yanagida 1998 [74])$p_k := 1 + 2/(k+1)$ とする．

(i) $1 < p < p_k$ のとき，初期値問題 (4.3.1) の任意の解は有限時間で爆発する．

(ii) $p > p_k$ のとき，初期値問題 (4.3.1) には時間大域解が存在する．

注意 4.23. $p_0 = 3$ なので定理 4.22 は定理 4.3 の $N = 1$ の場合の一般化として位置づけられる．定理 4.22 (ii) について解 u が時間大域的ならばその初期値は $u_0 \in \Sigma_k$ かつ $x \to \infty$ のとき $|u_0(x)| = O(|x|^{-\frac{2}{p-1}})$ が成り立たなければならないことが知られている．$Z(u_0) < \infty$ かつ $x \to \infty$ のとき $|u_0(x)| \cdot |x|^{\frac{2}{p-1}} \to \infty$ ならば解は爆発する．したがって u_0 の減衰のオーダーについて適当な制限を課さないと臨界指数が現れない．

Mizoguchi-Yanagida [73] では $u_0 \in H_g^1(\mathbb{R}) \cap \Sigma_k$ かつ $1 < p \leq p_k$ ではすべての解が有限時間で爆発し，$p_k < p$ では $u_0 \in H_g^1(\mathbb{R}) \cap \Sigma_k$ の下で時間大域解が存在することを証明していた．その後，上の定理のように [74] の論文において $u_0 \in H_g^1$ というソボレフ空間の条件を除かれた．ここでは [73] の論文の証明のアイディアを紹介する．

4.2.2 節と同様，前向き自己相似変換

$$v(y,s) := (t+1)^{\frac{1}{p-1}} u(x,t), \quad x = (t+1)^{1/2} y, \quad t = e^s - 1$$

を施す．このとき初期値問題 (4.3.1) は次の問題になる．

$$\begin{cases} v_s = v_{yy} + \dfrac{y}{2} v_y + \dfrac{1}{p-1} v + |v|^{p-1} v, & y \in \mathbb{R},\, t > 0, \\ v(\cdot, 0) = u_0, & y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.3.2}$$

ここで右辺の原点 $v = 0$ での線形化作用素を 4.2.2 節と同じように

$$Lv = v_{yy} + \frac{y}{2} v_y + \frac{1}{p-1} v$$

とおく．固有値問題

$$Lv = \lambda v \quad \text{in} \quad H_g^1$$

の固有値 λ_j，固有関数 φ_j は

$$\lambda_j = \frac{1}{p-1} - \frac{j+1}{2}, \ \varphi_j := \frac{d^j}{dy^j} \exp\Big(-\frac{y^2}{4}\Big) = \psi_j \exp\Big(-\frac{y^2}{4}\Big). \tag{4.3.3}$$

ただし ψ_j は j 次のエルミート多項式であり $Z(\psi_j)=j$ が成り立つ．これより

$$
\begin{aligned}
&(4.3.4) \qquad 1<p<p_k \Rightarrow \lambda_k>0,\\
&(4.3.5) \qquad p=p_k \Rightarrow \lambda_k=0,\\
&(4.3.6) \qquad p>p_k \Rightarrow \lambda_k<0
\end{aligned}
$$

定理 4.22 (i) の証明のアウトライン． 背理法で示す．$u_0\in H^1_g\cap\Sigma_k$ であるような初期値問題 (4.3.2) の時間大域解が存在したとしよう．ω 極限集合

$$\omega(u_0):=\{w\in H^1_g;\, v(\cdot,s_n;u_0)\to w \text{ in } H^1_g(\mathbb{R}) \quad \exists s_n\to\infty\}$$

を考える． [73] のアプリオリ評価により $\omega(u_0)\neq\emptyset$．またリャプノフ関数の存在から極限 w は問題 (4.3.2) の定常解であることが示せる．すなわち w は次の方程式を満たす

$$w_{yy}+\frac{y}{2}w_y+\frac{1}{p-1}w+|w|^{p-1}w=0, \qquad y\in\mathbb{R}. \tag{4.3.7}$$

さらに交点数の非増大定理から $w\equiv 0$，または $w\in\Sigma_j\cap H^1_g\,(j\le k)$ のいずれかしかない．ここで後者が起こりえないことを示す．$j<k$ なのである $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ があって w,φ_k いずれも区間 (a,b) 上に零点を持たず $\varphi_k(a)=\varphi_k(b)=0$ が成り立つ．また区間 (a,b) 上 $\varphi_k>0, w>0$ と仮定しても一般性を失わない．等式 (4.3.7) の両辺に $\varphi_k g$ をかけて (a,b) 上積分すると次を得る．

$$\int_a^b(\lambda_k+|w|^{p-1})w\varphi_k g\,dy\le 0.$$

これは $\lambda_k\ge 0$ に反する．したがって $w\in\Sigma_j\cap H^1_g\,(j\le k)$ ではなく，$v(y,s)$ は $s\to\infty$ のとき 0 に収束する．これから初期値問題 (4.3.1) の時間大域解 $v(\cdot,s)$ が 0 の安定多様体上に乗っていることがわかる．

さて $1<p<p_k$ のとき $v(\cdot,s)$ は 0 の安定多様体 $W^s(0)$ 上に乗っていると仮定したら矛盾が起こることを示す.

補題 4.24. (Angenent 1988 [4]) 初期値問題 (4.3.2) の時間大域解 $v(\cdot,s)$ が $s\to\infty$ のとき関数空間 H^1_g において 0 に収束するとする．このときある $j\ge 0$ があって

$$\frac{v(\cdot,s)}{\|v(\cdot,s)\|_{H^1_g(\mathbb{R})}}\to\pm\varphi_j \quad \text{as} \quad s\to\infty \quad \text{in} \quad H^1_g(\mathbb{R}).$$

条件 (4.3.6) よりこの補題における φ_j のインデックス $j = m$ は $1 < p < p_k$ のときは $m \geq k+1$ でなくてはならない．したがって 0 の不安定多様体 $W^u(0)$ の次元は k 以上であり

$$
\begin{aligned}
&T_0W^u(0) = \mathrm{span}\{\varphi_1, \cdots, \varphi_m\}, \\
&T_0W^s(0) = \mathrm{span}\{\varphi_{m+1}, \cdots\}, \qquad m \geq k+1
\end{aligned}
$$

が成り立つことに注意する．よって十分大きな s に関して $Z(v(\cdot, s)) \geq m+1 \geq k+1$ が成り立つ．一方 $Z(v(0)) = k$ であった．しかしながらこれは補題 8.7(p216) の交点数の非増大性に矛盾する．

次に $p = p_k$ のときを考える．初期値問題 (4.3.2) の第 1 式の両辺に $\varphi_k g$ をかけて $\mathbb{R}$ 上積分すると，条件 (4.3.5) より十分大きな $s > 0$ に対して

$$
\frac{d}{ds}\Big(\int_{\mathbb{R}} v(\cdot, s)\varphi_k g\, dy\Big) = 2\int_{\mathbb{R}} v(\cdot, s)\varphi_k g\, dy \cdot \int_{\mathbb{R}} |v(\cdot, s)|^{p-1} v(\cdot, s)\varphi_k g\, dy > 0
$$

が成り立たなくてはならない．これは $v(y, s)$ が 0 に収束することに矛盾する．したがって $v(y, s)$ は爆発する (詳細は [73] を参照せよ)． □

定理 4.22 (ii) の証明のアウトライン． $p > p_k$ のとき条件 (4.3.4) より $\lambda_k < 0$ になる．$W_k := W^s(0) \cap \big\{u_0 \in H^1_g;\ \|v(\cdot, s; u_0)\|_{H^1_g(\mathbb{R})} = O(e^{\lambda_k s}) \ \text{as}\ s \to \infty\big\}$ とおく．このとき

$$
T_0W_k = \mathrm{span}\{\varphi_k, \varphi_{k+1}, \ldots\} \tag{4.3.8}
$$

となる．適当に $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_{k-1} = o(\varepsilon)$ を選んで

$$
v_0^\varepsilon := \varepsilon\varphi_k + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \varphi_j \in W_k
$$

となるように初期値問題 (4.3.1) の初期値 $u_0 = v_0^\varepsilon$ を選ぶと対応する問題 (4.3.2) の解 v^ε は時間大域的に存在して式 (4.3.8) より $s \to \infty$ のとき 0 に収束する．

$\alpha_j = o(\varepsilon)$ と式(4.3.3) より $Z(\varphi_k) = k$ ならば十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $Z(v_0^\varepsilon) = k$ になる．すなわち $\varepsilon > 0$ を十分小さく選べば $u_0 = v_0^\varepsilon \in \Sigma_k$ になる．したがって題意の時間大域解が構成された． □

5　時間大域解の有界性について

5.1　大域解が有界になるための条件

Ω を $\mathbb{R}^N$ 内の有界領域とし，初期境界値問題

$$
\begin{cases}
u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\
u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\
u(\cdot, 0) = u_0, & x \in \Omega
\end{cases}
\tag{5.1.1}
$$

の解の挙動について考えてみよう．拡散項を取り除いた常微分方程式 $du/dt = u^p$ の場合，初期値をどのように選んでも次の 2 つの状況しか起こり得ない．

(1) 恒等的に 0 である．

(2) 有限時間内に爆発する．

初期境界値問題 (5.1.1) の場合，上の 2 つの現象が起こる初期値 u_0 の全体は関数空間 C_0^1 において稠密であることが知られている ([60])．しかしこれ以外にも，初期値の選び方によっては次のような状況が起こり得る．

(3) 解は $t \in (0, \infty)$ で一様に有界であり，しかも恒等的に 0 でない．

(4) 解は大域的に存在するが $t \in (0, \infty)$ で一様に有界ではない．

Ni-Sacks-Tavantzis は Ω が凸領域かつ $u_0 \geq 0$ のとき，$p < 1 + 2/N$ のときは (3) のみが起こることを示した ([77])．一方 $p = p_s$, $N \geq 3$ のときは (4) を満たす解が存在することは容易に確かめられる．これらの時間大域解の有界性に関する結果はその後様々な形で $1 < p < p_s$ の場合まで一般化された ([11], [21], [32], [83])．本章では特に Fila [21], Giga [32], Quittner [83] らによる議論を紹介する．Fila [21] は詳細な評価式を与えないが退化した拡散項をもつ問題にも適用できる．Giga [32] の方法は正値解にしか適用できないが，そのアイディアは他の色々な方程式でも特異性の解析に広く用いられている．Quittner [83] の方法はエネルギー評価と bootstrap の議論に基づいていて，解が符号変化していてもよい．また全空間の初期値問題にも拡張できることが知られている．

これに対し，$p > p_s$ の場合には $1 < p < p_s$ の場合に比べて知られている結果は多くはないが，解に球対称性を仮定すると，時間大域解の一様有

界性が，例えば Mizoguchi [67, 69], Suzuki [90] や Matano-Merle [63, 64] で議論されている．最近の Matano-Merle [64] の方法は解が符号変化する場合でも適用できる．その証明のアイディアについては本講義録の定理 8.11 で紹介する．

定理 5.1. (Fila 1992 [21]) Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな有界領域とし $0 < m < p$ とする．$1 < p < m(N+2)/(N-2)$ のとき初期境界値問題

$$\begin{cases} u_t = \Delta(|u|^{m-1}u) + |u|^{p-1}u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, & x \in \Omega \end{cases}$$

の任意の大域解は有界である．

証明は力学系的な議論によるものであり [11], [32], [83] の手法とは趣が異なる．ところで準線形方程式の場合，解の概念が半線形とは異なるのでその定義について紹介する．領域 Ω は十分なめらかな境界をもつとする．関数 ϕ は $\mathbb{R}$ 上で定義された非負値関数とする．関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は局所リプシッツ連続とする．関数 $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ に対する初期境界値問題

$$\begin{cases} u_t = \Delta\phi(u) + f(u), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, & x \in \Omega \end{cases}$$

の解とは $\bar{\Omega} \times [0, T_0)$ 上で次の条件を満たす関数 u のことである．

(i) $u \in C([0,T_0]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T_0; L^\infty(\Omega))$, $\phi(u) \in L^\infty(0,T_0; H_0^1(\Omega))$.

(ii) 任意の $\tau \in (0, T_0)$ と $\varphi \in H^1(0,T_0; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T_0; H_0^1(\Omega))$ に対して

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u(\cdot,\tau)\varphi(\cdot,\tau)dx - \int_\Omega u(\cdot,0)\varphi(\cdot,0)dx \\ &= \int_0^\tau \int_\Omega \{u\varphi_t - \nabla\phi(u)\nabla\varphi + f(u)\varphi\}\, dxdt - \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \phi(u)\partial_n\varphi\, dS_x dt. \end{aligned}$$

ここでは $m = 1$ の場合のみで議論することにする．$m \neq 1$ の場合も数式が少し変化するだけで全く同様である．詳細は [21] を参照せよ．

定理 5.1 の証明方針. Poincaré の不等式より，関数空間 $H_0^1(\Omega)$ においては $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ と $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ は同値なノルムである．そこで，以下本定理の証明では

$$\|u(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}$$

と表示することにする．

初期境界値問題 (5.1.1) の解 u が時間大域的に存在するが非有界であるとして矛盾を導く．実は，この仮定のもと

$$\limsup_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)} = \infty \tag{5.1.2}$$

が成立する．もし，

$$\limsup_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty$$

であるとする．これとソボレフの埋め込み定理から

$$\limsup_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^{p+1}(\Omega)} < \infty$$

を得る．一方，$p < p_s$ ならば $p+1 > N(p-1)/2$ が成り立つから，この式と定理 2.15 より

$$\limsup_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$$

が成立しなくてはならない．これは初期境界値問題 (5.1.1) の解 u が時間大域的に存在するが非有界であることに反する．

容易にわかるように，式 (5.1.2) には次の 2 つの可能性がある．

(a) $\liminf_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)} = \infty$

(b) $\liminf_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty$.

以下の議論では，まず補題 5.2 では (a) が起こらないことを証明する．その後，補題 5.4 と補題 5.6 では (b) も起こりえないことを示す． □

補題 5.2. $T > 0$ を初期値問題 (5.1.1) の解 u の最大存在時間とする．$\lim_{t\to T} \|u(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)} = \infty$ ならば $T < \infty$ である．

補題 5.2 の証明. $T=\infty$ と仮定する．すなわち $u(x,t)$ は時間大域的かつ $\lim_{t\to\infty}\|u(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)}=\infty$ として矛盾を導く．

$$M(t):=\int_0^t\int_\Omega u^2\,dxdt$$

とおく．このとき，

$$\begin{aligned}\Big(M^{-\frac{p-1}{2}}\Big)' &= -\frac{p-1}{2}M^{-\frac{p-1}{2}-1}M',\\ \Big(M^{-\frac{p-1}{2}}\Big)'' &= -\frac{p-1}{2}M^{-\frac{p-1}{2}-1}M''-\frac{p-1}{2}(-\frac{p+1}{2})M^{-\frac{p-1}{2}-2}(M')^2\\ &= \frac{p-1}{2}M^{-\frac{p-1}{2}-2}\Big(\frac{p+1}{2}(M')^2-MM''\Big)\end{aligned}$$

である．2 階微分の式が負になることを示して，concavity method から矛盾を導く．そのために M' と M'' を計算する．Fubini の定理より

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega 2uu_t\,dxdt &= \int_0^t\int_\Omega (u^2)_t\,dxdt=\int_\Omega\int_0^t (u^2)_t\,dtdx\\ &= \int_\Omega u^2(\cdot,t)\,dx-\int_\Omega u_0^2\,dx\end{aligned}$$

であるから

$$M'(t)=\int_\Omega u^2(\cdot,t)\,dx=\int_\Omega u_0^2\,dx+\int_0^t\int_\Omega 2uu_t\,dxdt. \tag{5.1.3}$$

よって，

(5.1.4)

$$\begin{aligned}(M'(t))^2 &= 4\Big(\int_0^t\int_\Omega uu_t\,dxdt\Big)^2+\int_\Omega u_0^2\,dx\Bigg\{\int_\Omega u_0^2\,dx+4\int_0^t\int_\Omega uu_t\,dxdt\Bigg\}\\ &\le 4\Big(\int_0^t\int_\Omega uu_t\,dxdt\Big)^2+2M'\int_\Omega u_0^2\,dx\end{aligned}$$

2 階微分を評価するため，エネルギー

$$J(u(\cdot,t))=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u(\cdot,t)|^2\,dx-\frac{1}{p+1}\int_\Omega|u(\cdot,t)|^{p+1}\,dx$$

を考える．$\dfrac{d}{dt}J(u(\cdot,t))=-\displaystyle\int_\Omega u_t^2(\cdot,t)\,dx$ より

$$J(u(\cdot,t))=J(u_0)-\int_0^t\int_\Omega u_t^2\,dxdt. \tag{5.1.5}$$

式 (5.1.3) を t について微分して式 (5.1.5) を用いることで次式を得る．

$$
\begin{aligned}
M''(t) &= 2\int_\Omega u(\cdot,t)\bigl(\Delta u(\cdot,t)+|u(\cdot,t)|^{p-1}u(\cdot,t)\bigr)\,dx \\
&= 2\int_\Omega \left(-|\nabla u(\cdot,t)|^2+|u(\cdot,t)|^{p+1}\right)\,dx \\
&= 2\left\{-(p+1)J(u(\cdot,t))+\frac{p-1}{2}\|u(\cdot,t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right\} \\
&= 2\left\{-(p+1)\left(J(u_0)-\int_0^t\int_\Omega u_t^2\,dxdt\right)+\frac{p-1}{2}\|u(\cdot,t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right\}.
\end{aligned}
$$

これと式 (5.1.4) より

$$
\begin{aligned}
&M(t)M''(t)-\frac{p+1}{2}\left(M'(t)\right)^2 \\
&=2(p+1)\int_0^t\int_\Omega u^2\,dxdt\int_0^t\int_\Omega u_t^2\,dxdt \\
&\qquad +2M(t)\left\{-(p+1)J(u_0)+\frac{p-1}{2}\|u(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)}\right\} \\
&\qquad\qquad -\frac{(p+1)}{2}\bigl(M'(t)\bigr)^2 \\
&\ge 2(p+1)\Bigl\{\int_0^t\int_\Omega u^2\,dxdt\int_0^t\int_\Omega u_t^2\,dxdt \\
&\qquad\qquad -\Bigl(\int_0^t\int_\Omega uu_t\,dxdt\Bigr)^2\Bigr\} \\
&\qquad +2M(t)\left\{-(p+1)J(u_0)+\frac{p-1}{2}\|u(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)}\right\} \\
&\qquad\qquad -(p+1)M'(t)\int_\Omega u_0^2\,dx
\end{aligned}
\tag{5.1.6}
$$

が成り立つことがわかる．次に，上式の右辺が十分大きな時刻 $t>0$ に

対して正であることを示す.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2(\cdot,t)\,dx &= \int_\Omega u(\cdot,t)u_t(\cdot,t)\,dx \\
&= \int_\Omega \left(u(\cdot,t)\Delta u(\cdot,t) + |u(\cdot,t)|^{p+1}\right) dx \\
&= -\int_\Omega |\nabla u(\cdot,t)|^2\,dx + \int_\Omega |u(\cdot,t)|^{p+1}\,dx \qquad (5.1.7)\\
&= -2J(u(\cdot,t)) + \frac{p-1}{p+1}\int_\Omega |u(\cdot,t)|^{p+1}\,dx \\
&\geq -2J(u_0) + C(\Omega)\left(\int_\Omega u^2(\cdot,t)\,dx\right)^{\frac{p+1}{2}}.
\end{aligned}
$$

である．ところで，背理法の仮定と Poincaré の不等式より，$\int_\Omega u^2\,dx$ が有限時間に爆発することはない．したがって式 (5.1.7) の右辺は任意の $t \in (0,\infty)$ に対して負でなくてはならない．特に，$M'(t) = \int_\Omega u^2\,dx$ は $(0,\infty)$ で有界である.

このことに注意して，不等式 (5.1.6) の右辺が十分大きな時刻 $t>0$ に対して正であることを証明する．第 1 項はシュワルツの不等式より正である．第 2 項は，補題の仮定と $-J(u_0)$ の上への有界性から時刻 $t>0$ を大きくすればいくらでも大きくなる．また，第 3 項は上の $M'(t)$ の結果から有界なので不等式 (5.1.6) の右辺は十分大きな時刻 $t>0$ に対して正になる．すなわち，十分大きな時刻 $t>0$ に対して

$$MM'' - \frac{p+1}{2}(M')^2 > 0$$

が成立する.

$$\left(M^{-\frac{p-1}{2}}\right)'' = \frac{p-1}{2}M^{-\frac{p-1}{2}-1}\left\{\frac{p+1}{2}(M')^2 - MM''\right\} < 0$$

であることに気をつけると $M^{-(p-1)/2}$ は十分大きな任意の時刻 $t>0$ に対して上に凸な関数．さらに，関数 $M^{-(p-1)/2}$ は狭義単調減少になる．これは M が時間大域的には存在しないことを意味するので矛盾. $\square$

補題 5.3. Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな有界領域とする．$p(N-2) < N+2$ であり，初期値 u_0 に対する初期境界値問題 (5.1.1) の解 $u(t;u_0)$ は時間大域解に存在するとする.

$$\|u_0\|_{L^{p+1}(\Omega)} \leq A$$

を満たす任意の $A > 0$ を任意に与える．このとき任意の $B > A$ に対してある $\tau = \tau(A, B) > 0$ があって

$$\|u(\cdot, t; u_0)\|_{L^{p+1}(\Omega)} \le B, \qquad t \in (0, \tau).$$

補題 5.3 の証明. $S(u_0) := \{t > 0\,;\, \|u(\cdot, t; u_0)\|_{L^{p+1}(\Omega)} = B\}$ は空でないとする．

$$\|u_0\|_{L^{p+1}(\Omega)} \le A$$

が成り立つ任意の関数 u_0 に対して $\tau \in (0, \inf S(u_0))$ があることを証明すればよい．これを示すためには $\|u(\cdot, t)\|_{L^{p+1}(\Omega)}$ の時間変化が上から有界であることをいえばよい．$\|u(\cdot, t)\|_{L^{p+1}(\Omega)}$ の時間微分を計算すると次式を得る．

(5.1.8)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(\cdot, t)|^{p+1}\,dx \\
&\le \int_\Omega |u(\cdot, t)|^p u_t(\cdot, t)\,dx = \int_\Omega |u(\cdot, t)|^p \Delta u(\cdot, t)\,dx + \int_\Omega |u(\cdot, t)|^{2p}\,dx \\
&= \int_\Omega p\,|u(\cdot, t)|^{p-1}\,|\nabla u(\cdot, t)|^2\,dx + \int_\Omega |u(\cdot, t)|^{2p}\,dx \\
&= -\frac{4p}{(p+1)^2}\int_\Omega \left|\nabla\bigl(u^{(p+1)/2}(\cdot, t)\bigr)\right|^2 dx + \int_\Omega |u(\cdot, t)|^{2p}\,dx.
\end{aligned}$$

エネルギーの単調性より

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(\cdot, t)|^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u(\cdot, t)|^{p+1}\,dx \le J(u_0)$$

が成り立つので $\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}$ が有界ならば $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ も有界である．これより式 (5.1.8) の右辺の第 1 項が有界であることが

$$\begin{aligned}
\frac{4p}{(p+1)^2}\int_\Omega \left|\nabla\bigl(u^{(p+1)/2}(\cdot, t)\bigr)\right|^2 dx &= \int_\Omega p\,|u(\cdot, t)|^{p-1}\,|\nabla u(\cdot, t)|^2\,dx \\
&\le p\left(\int_\Omega |u(\cdot, t)|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p+1}}\left(\int_\Omega |\nabla u(\cdot, t)|^{p+1}\,dx\right)^{\frac{2}{p+1}} \\
&\le C(p, \Omega)\|u(\cdot, t)\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p-1}\|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

からしたがう．ここで 2 番目の不等式には Jensen の不等式を用いた．よって，$\|u^{2p}(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)}$ を $\|\nabla(u^{(p+1)/2})(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}, \|u(\cdot, t)\|_{L^{p+1}(\Omega)}, \|u(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)}$

で評価できれば式 (5.1.8) の右辺が上から有界であるから証明が完了する．まず $\|u^{2p}(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)}$ を $N=1,2$ の場合に考察する．つぎに $\|u^{2p}(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)}$ を $N\geq 3$ の場合に考察する．以下の議論は偏微分方程式の解でなくても適用できるので添え字は省略する．

<u>$N=1,2$ の場合</u>

γ,δ は任意の正数，$1/p+1/q=1$ とするとヘルダーの不等式は

$$\|u^{(\gamma+\delta)}\|_{L^1}(\Omega)\leq\|u^{\gamma}\|_{L^p(\Omega)}\|u^{\delta}\|_{L^q(\Omega)}\leq\|u\|^{\gamma}_{L^{\gamma p}(\Omega)}\|u\|^{\delta}_{L^{\delta q}(\Omega)} \tag{5.1.9}$$

と書ける．$\gamma=2p-\alpha$, $\delta=\alpha$ として不等式(5.1.9) を用いる．そのために正数 $q\in[1,\infty)$ は任意の正数で α は

$$1=(2p-\alpha)/(p+1)+\alpha/q \tag{5.1.10}$$

をみたす正数とする．ソボレフの埋め込み定理

$$H^1_0(\Omega)\subset\subset L^q(\Omega),\quad q\in[1,\infty)$$

を組み合わせると

$$\|u^{2p}\|_{L^1(\Omega)}\leq\|u\|^{2p-\alpha}_{L^{p+1}(\Omega)}\|u\|^{\alpha}_{L^q(\Omega)}\leq\|u\|^{2p-\alpha}_{L^{p+1}(\Omega)}\|u\|^{\alpha}_{H^1_0(\Omega)}.$$

<u>$N\geq 3$ の場合</u>

不等式(5.1.9) より正数 q,α が条件 (5.1.10) をみたすとき

$$\|u^{2p}\|_{L^1(\Omega)}\leq\|u\|^{2p-\alpha}_{L^{p+1}(\Omega)}\,\|u\|^{\alpha}_{L^q(\Omega)}$$

が成立する．一方，$H^1_0(\Omega)\subset L^{2N/(N-2)}(\Omega)$ より

$$\|w\|_{L^{2N/(N-2)}(\Omega)}\leq C\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}.$$

この式に $w=u^{(p+1)/2}$ を代入すると

$$\|u^{(p+1)/2}\|_{L^{2N/(N-2)}(\Omega)}\leq C\|\nabla(u^{(p+1)/2})\|_{L^2(\Omega)}.$$

したがって，$q=(p+1)N/(N-2)$ と選んで条件 (5.1.10) から α を決めれば

$$\|u^{2p}\|_{L^1(\Omega)}\leq\|u\|^{2p-\alpha}_{L^{p+1}(\Omega)}\,\|u\|^{\alpha}_{L^{(p+1)N/(N-2)}(\Omega)}\leq C\|\nabla(u^{(p+1)/2})\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

補題 5.4. Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな有界領域とし，$p(N-2) < N+2$ とする．さらに初期境界値問題 (5.1.1) の大域解 u が次の条件を満たすとする．

(i) $\limsup_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^{p+1}(\Omega)} = \infty$,

(ii) $\liminf_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^{p+1}(\Omega)} = k < \infty$.

このとき任意の $M \in (k,\infty)$ に対してある $v \in \omega(u_0)$ があって

$$\|v\|_{L^{p+1}(\Omega)} = M.$$

さらに関数 v は定常解である．

ただし，初期値 u_0 に対する初期境界値問題 (5.1.1) の解を $u(t;u_0)$ と表し

$$\omega(u_0) = \Big\{ v \in H_0^1(\Omega);\ \text{ある } \{t_n\}_{n=1}^{\infty} \text{があり } \lim_{n\to\infty} \|u(\cdot,t_n;u_0) - v\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Big\}$$

とする．

補題 5.4 の証明. $\|u(\cdot,t_n;u_0)\|_{L^{p+1}(\Omega)} = M$ を満たす時間列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとる．エネルギー汎関数の単調性より

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(\cdot,t_n)|^2\,dx &\le J(u_0) + \int_\Omega \frac{1}{p+1}|u(\cdot,t_n)|^{p+1}\,dx \\ &\le J(u_0) + \frac{M^{p+1}}{p+1} < \infty\end{aligned}$$

すなわち点列 $\{u(\cdot,t_n;u_0)\}_{n=1}^{\infty}$ は関数空間 $H_0^1(\Omega)$ において有界である．またソボレフの埋め込みの定理より $L^{p+1}(\Omega)$ で収束する部分列が取れる．この極限を v とすると $\|v\|_{L^{p+1}(\Omega)} = M$ である．$v \in \omega(u_0)$ であることは点列 $\{u(\cdot,t_n;u_0)\}_{n=1}^{\infty}$ が関数空間 $H_0^1(\Omega)$ において有界であることと Rellich の定理からしたがう．

次に v が定常解であることを示す．補題 5.3 より n には依存しない正数 $\tau \in (0,\infty)$ があって，任意の $s \in (0,\tau)$ に対して $\|u(\cdot,t_n+s;u_0)\|_{L^{p+1}(\Omega)} \le M+1$ であることがしたがう．

$$U_n(\cdot,s) = u(\cdot,t_n+s), \quad s \in (0,\tau)$$

とおく．

シュワルツの不等式より，

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |U_n(\cdot,s)-u(\cdot,t_n)|^2\,dx &= \int_\Omega \Big| \int_{t_n}^{t_n+s} u_t(x,s)\,ds \Big|^2\,dx \\
&\le \int_\Omega \Big(\int_{t_n}^{t_n+s} |u_t(x,s)|^2\,ds \Big) \Big(\int_{t_n}^{t_n+s} 1^2\,ds \Big)\,dx \\
&\le \tau \int_\Omega \int_{t_n}^{t_n+\tau} |u_t(x,s)|^2\,dsdx \qquad (5.1.11)
\end{aligned}
$$

である．また(5.1.5) とエネルギー汎関数の定義より

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \int_0^{t_n} u_t^2\,dsdx &= J(u_0) - J(u(\cdot,t_n)) \\
&\le J(u_0) + \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u(\cdot,t_n)|^{p+1}\,dx \\
&= J(u_0) + \frac{M^{p+1}}{p+1}. \qquad (5.1.12)
\end{aligned}
$$

すなわち広義積分 $\displaystyle\int_\Omega \int_0^\infty u_t^2\,dsdx$ が存在する．まず不等式 (5.1.11) より

$$
\begin{aligned}
\|U_n(\cdot,\cdot)-u(\cdot,t_n)\|^2_{L^2(\Omega\times(0,\tau))} &= \int_0^\tau \int_\Omega |U_n(x,s)-u(x,t_n)|^2\,dxds \\
&\le \tau \int_0^\tau ds \Big(\int_\Omega \int_{t_n}^{t_n+\tau} |u_t(x,s)|^2\,dsdx \Big) \\
&\le \tau^2 \Big(\int_\Omega \int_{t_n}^{\infty} |u_t(x,s)|^2\,dsdx \Big)
\end{aligned}
$$

である．次に不等式 (5.1.12) を用いれば，$n\to\infty$ のとき極限式

$$
\|U_n(\cdot,\cdot)-u(\cdot,t_n)\|_{L^2(\Omega\times(0,\tau))} \le \tau \left(\int_\Omega \int_{t_n}^\infty u_t^2\,dsdx \right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \qquad (5.1.13)
$$

が成り立つ．特に

$$
\lim_{n\to\infty} \|U_n - v\|_{L^1(\Omega\times(0,\tau))} = 0 \qquad (5.1.14)
$$

を得る．ルベーグ積分論の一般的な結果から，適当な部分列を取り直して U_{n_j} を，$\Omega\times(0,\tau)$ 上ほとんどいたるところ v に収束させることがで

きる．さらに任意の $s\in(0,\tau)$ に対して $\|U_{n_j}^p(\cdot,s)\|_{L^{(p+1)/p}(\Omega)}\le(M+1)^p$ であったので Fatou の補題より

$$\begin{aligned}\int_\Omega v^{p+1}\,dx&=\int_\Omega\lim_{j\to\infty}U_{n_j}^{p+1}(\cdot,s)\,dx\\&\le\limsup_{j\to\infty}\int_\Omega U_{n_j}^{p+1}(\cdot,s)\,dx=(M+1)^p.\end{aligned}$$

すなわち $v^p\in L^{(p+1)/p}(\Omega)$ である．また，ヘルダーの不等式より任意の可測集合 $E\subset\Omega$ に対して

$$\|U_{n_j}^p(\cdot,s)-v^p\|_{L^1(\Omega)}\le|E|^{1/(p+1)}\|U_{n_j}^p(\cdot,s)-v^p\|_{L^{(p+1)/p}(\Omega)}\le C(M)\,|E|^{\frac{1}{p+1}}$$

が成立する．この式から関数列 $\{U_{n_j}^p-v^p\}_{j=1}^\infty$ の $\Omega\times(0,\tau)$ 上での一様可積分性がわかる．関数列 $\{U_{n_j}^p-v^p\}_{j=1}^\infty$ が $\Omega\times(0,\tau)$ 上ほとんどいたるところ 0 に収束することから Vitali の定理 (定理 5.8) を用いることができて

$$\lim_{j\to\infty}\|U_{n_j}^p-v^p\|_{L^1(\Omega\times(0,\tau))}=0 \tag{5.1.15}$$

が成り立つことがわかる．

任意の $\psi\in C_0^2(\Omega)$ と $\rho\in C_0^2(0,\tau)$, $\rho\ge0$, $\int_0^\tau\rho(s)\,ds=1$ を取る．そして試験関数 $\varphi(x,t)$ を

$$\varphi(x,t):=\begin{cases}\rho(t-t_n)\psi(x), & x\in\Omega,\ t>t_n\\ 0, & x\in\Omega,\ t_n\ge t\ge0\end{cases}$$

ととる．弱解の定義式より

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(\cdot,t_n+\tau)\varphi(\cdot,t_n+\tau)\,dx-\int_\Omega u(\cdot,t_n+\tau)\varphi(\cdot,t_n+\tau)\,dx\\-\int_{t_n}^{t_n+\tau}\int_\Omega u\varphi_t\,dxds=\int_{t_n}^{t_n+\tau}\int_\Omega(u\Delta\varphi+u^p\varphi)\,dxds\end{aligned}$$

である．これに上の試験関数を代入して，

$$\int_\Omega\int_{t_n}^{t_n+\tau}\{u\rho'(t-t_n)\psi+u\rho(t-t_n)\Delta\psi+u^p\rho(t-t_n)\psi\}\,dtdx=0$$

である．したがって，$t-t_n=s$ と変数変換すると

$$\int_\Omega\int_0^\tau\{U_n\rho'(s)\psi+U_n\rho(s)\Delta\psi+U_n^p\rho(s)\psi\}\,dsdx=0$$

である．ここで式 (5.1.14), (5.1.15) を用いて

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega v\Delta\psi + v^p\psi\,dx &= \int_\Omega \Big(v\psi(\rho(\tau)-\rho(0)) + v\Delta\psi + v^p\psi\Big)\,dx \\
&= \int_\Omega\int_0^\tau \Big(v\rho'(s)\psi + v\rho(s)\Delta\psi + v^p\rho(s)\psi\Big)\,dsdx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

を得る．関数 $\psi \in C_0^2(\Omega)$ は任意であった．よって $\Delta v + v^p = 0$ であり関数 v は定常解である． □

補題 5.5. Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな有界領域とし，$p(N-2) < N+2$ とする．さらに，初期境界値問題 (5.1.1) の大域解 u が，次の条件を満たすとする．

(i) $\limsup_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^{p+1}(\Omega)} = \infty$,

(ii) $\liminf_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^{p+1}(\Omega)} = k < \infty$.

このとき任意の $M \in (k,\infty)$ に対してある $v \in \omega(u_0)$ があって，

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = M$$

である．さらに v は定常解である．

補題 5.5 の証明. ソボレフの埋め込み定理より $\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)} \le C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ なので補題 5.4 より $\omega(u_0)$ が $H_0^1(\Omega)$-ノルムでもいくらでも大きな元を含むことがわかる． □

補題 5.6. Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな有界領域とする．u_0 を初期値とする初期境界値問題 (5.1.1) の解 u が大域的ならば，$\omega(u_0)$ に属する任意の定常解 v に対して

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 < \frac{2(p+1)}{p-1}J(u_0)$$

が成立する．

補題 5.6 の証明. ある定常解 $v \in \omega(u_0)$ で

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \ge \frac{2(p+1)}{p-1}J(u_0) \tag{5.1.16}$$

を満たすものが存在するとして矛盾を導く．関数 v は定常解であるから $-\Delta v = |v|^{p-1}v$ を満たす．この両辺に v をかけて Ω 上積分すると，部分積分により

$$\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx = \int_\Omega (-\Delta v)\,v\,dx = \int_\Omega |v|^{p+1}\,dx.$$

この式と，背理法の仮定 (5.1.16) より

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |v|^{p+1}\,dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \frac{p-1}{2(p+1)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \geq J(u_0) \end{aligned}$$

を得る．

これとは逆に，エネルギーの狭義単調性があるから $J(v) < J(u_0)$ が成立する．よって，矛盾． □

定理 5.1 の証明. $2(p+1)(p-1)^{-1}J(u_0) < B$ であるような正数 B に補題5.5 と補題 5.6 を用いることで (b) も起こりえないことがわかる．以上から本節の主定理の証明が完成した． □

注意 5.7. Vitali の定理について復習する．関数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が一様可積分性であるとは任意の $\varepsilon > 0$ に対して ある $\delta > 0$ があって任意の $n \in \mathbb{N}$ と $|E| \leq \delta$ を満たす任意の可測集合 E に対して $\displaystyle\int_E f_n\,dx < \varepsilon$ が成り立つことである．

定理 5.8. (Vitali の定理) X は全測度有限の測度空間とする．

(i) 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が一様可積分性である．

(ii) 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は関数 f にほとんど至るところ収束する．

(iii) ほとんど至るところ $f < \infty$.

このとき，$f \in L^1(X)$ かつ，

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^1(X)} = 0$$

が成り立つ．

定理 5.8 の証明.

$$\int_X |f|\,dx = \int_X \liminf_{n\to\infty} |f_n|\,dx = \int_{f>\lambda} \liminf_{n\to\infty} |f_n|\,dx + \int_{f\le\lambda} |f|\,dx$$
$$\le \liminf_{n\to\infty} \int_{f>\lambda} |f_n|\,dx + \lambda|X|$$

条件 (iii) より第 1 項の積分領域は $\lambda > 0$ を十分大きく選べばいくらでも小さくなる．さらに条件 (i) より第 1 項は $\lambda > 0$ を大きくとること n に依存せずにでいくらでも小さくなることがしたがう．よって $f \in L^1(X)$.

次に，後半の収束性を示す[2]．まず，定数 λ を任意に選んで固定する．

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|}\,dx &\ge \int_{\{x\in X\,;\,|f_n-f|>\lambda\}} \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|}\,dx \\ &\ge \frac{\lambda}{1+\lambda}\int_{\{x\in X\,;\,|f_n-f|>\lambda\}} dx \\ &= \frac{\lambda}{1+\lambda}\big|\{x\in X\,;\,|f_n - f|>\lambda\}\big|.\end{aligned}$$

よって，全空間 X の測度が有限であれば条件 (ii) とルベーグの収束定理から

$$\lim_{n\to\infty} \big|\{x\in X\,;\,|f_n - f|>\lambda\}\big| = 0$$

がしたがう．一方，

$$\begin{aligned}\int_X |f_n - f|\,dx &= \int_{|f_n-f|>\lambda} |f_n - f|\,dx + \int_{|f_n-f|\le\lambda} |f_n - f|\,dx \\ &\le \int_{|f_n-f|>\lambda} |f_n|\,dx + \int_{|f_n-f|>\lambda} |f|\,dx + \int_{|f_n-f|\le\lambda} |f_n - f|\,dx\end{aligned}$$

である．したがって，一様可積分性の条件 (i) から第 1 項と第 2 項は n を大きく選べばいくらでも小さくなる．そのような $\lambda > 0$ を一つ固定する．一方，第 3 項について

$$\int_{|f_n-f|\le\lambda} |f_n - f|\,dx \le \int_X \mathbf{1}_{|f_n-f|\le\lambda}|f_n - f|\,dx \tag{5.1.17}$$

が成り立つ．この式の右辺の被積分関数は定数 λ で押さえられる．よって，全空間の測度が有限であることからルベーグの収束定理を用いることができる．よって，不等式 (5.1.17) の右辺は 0 に収束する．題意が成立する． □

[2] Egoroff の定理を使っても容易に証明できる．

5.2 正値大域解のアプリオリ評価式

本節では初期境界値問題 (5.1.1) の正値時間大域解に関するア・プリオリ評価を紹介する．この場合は Liouville 型定理 (定理 1.17) が使えるので次節で扱う符号変化する場合に比べて議論が楽である．

定理 5.9. (Ni-Sacks-Tavantzis 1984 [77]) Ω は $\mathbb{R}^N$ 内の凸領域とする．$p < 1 + 2/N$ とする．$u_0 \in L^\infty(\Omega)$ かつ $u_0 \geq 0$ とする．$u_0 \geq 0$ を初期値とする初期境界値問題 (5.1.1) の解 u が大域的ならば，

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(u_0), \quad t \geq 0$$

が成立する．ただし，$C(u_0)$ は，u_0 の $\partial\Omega$ 近傍の振る舞いで決まる定数である．また，$p(N-2) \geq (N+2)$ かつ $N \geq 3$ のとき，大域的に存在するが一様有界でない解がある．

定理 5.10. (Giga 1986 [32]) Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな有界領域とする．$p < p_s$ とする．$u_0 \in L^\infty(\Omega)$ かつ，$u_0 \geq 0$ とする．u_0 を初期値とする初期境界値問題 (5.1.1) の解 u が大域的ならば，

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}), \quad t \geq 0$$

が成立する (u_0 には正値性を仮定しなくてはならない).

定理 5.10 の証明. $N \geq 3$ の場合のみ証明する．

ステップ 1

自己相似性の議論を用いて，次の補題が証明できる．

補題 5.11. $p < p_s$, $u_0 \geq 0$ とする．関数 u は初期境界値問題 (5.1.1) の時刻 $[0, T)$ における解であり次の不等式が成り立つとする．

$$\int_0^T \int_\Omega u_t^2 \, dxdt < N < \infty.$$

このとき，$t_0 > 0$ を任意に与えたとき，u, u_0, T に依存しない定数 $A = A(N, t_0)$ があって $Q = \Omega \times (t_0, T)$ において

$$u(x, t) \leq A$$

が成り立つ．

補題 5.11 の証明の概略. 補題の結論が成立しないとしよう．すなわち，

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(\cdot, 0) = (u_0)_k, & x \in \Omega \end{cases}$$

の

$$\int_0^T \int_\Omega u_t^2 \, dxdt < N < \infty$$

を満たす時刻 $(0, T)$ における解の列 $u_k(x,t)$ とある点列 (x_k, t_k) に対して，$k \to \infty$ のとき

$$M_k := \sup\{u_k(x,t);\, x \in \Omega,\, t \in [0, T_k)\} = u_k(x_k, t_k) \to \infty$$

を満たすものがあると仮定して矛盾を導く．$\bar{\Omega}$ のコンパクト性より適当な部分列 $\{x_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ を取れば $x_\infty \in \bar{\Omega}$ に収束する．以下，記号を単純にするためこの部分列を改めて $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ と表すことにする．

$\lambda_k > 0$ は，

$$\lambda_k^{2/(p-1)} M_k = 1$$

を満たすものとして定義する．次に，関数

$$v_k(y,s) = \lambda_k^{2/(p-1)} u_k(x_k + \lambda_k y, t_k + \lambda_k^2 s)$$

を導入する．ここで大事なのは，関数 v_k も u_k と同じ熱方程式を満たすことである．$Q(r) := \{(y,s) \in R^{N+1};\ |y| < r,\ -r^2 < s < 0\}$, $2d := \min\{2\sqrt{t_0},\, \mathrm{dist}(x_\infty, \partial\Omega)\}$ とおくと，v_k は $Q(d/\lambda_k)$ 上で定義可能である．

$x_k \in \Omega$ のときを考察する．$|v_k| \le 1$ より任意の $q \in (1, \infty)$ に対して $v_k \in L^q(Q(R))$．q を十分大きく選べば，ソボレフの埋め込み定理より $H^1(Q(R))$ での一様有界性を得る．ここで，$Q(R) \subset Q(d/\lambda_k)$ とする．これと弱列コンパクト性から $L^2(Q(R))$ における弱収束列が取れる．したがって，その極限 v は，全空間で $t \in (-\infty, 0)$ において $v_s = \Delta v + v^p$ を満たす．さらに，$v(0,0) = 1$ でもある．一方，

$$\begin{aligned} \iint_{Q(d/\lambda_k)} |(v_k)_s|^2 \, dyds &= {\lambda_k}^{-n+2+4/(p-1)} \int_{t_k - d^2}^{t_k} \int_{|x - x_k| < d} |(u_k)_t|^2 \, dxdt \\ &\le {\lambda_k}^{-n+2+4/(p-1)} N \to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty \end{aligned}$$

である．したがって，v は $Q(R)$ 上で時間変化しない．L^2 弱位相の下半連続性より v は全空間で $\Delta v + v^p = 0$ を満たす．定理 1.17 より，この方程式の解 $v(x,t)$ は定数である．したがって，方程式 $\Delta v + v^p = 0$ より，$v \equiv 0$ である．これは，$v(0,0) = 1$ に矛盾．

$x_\infty \in \partial\Omega$ のときは，座標変換により半空間上での問題に帰着させて，半空間上での Liouville 型の定理を用いることで同様の議論ができる．詳細は [32] を参照せよ． □

ステップ 2

平滑化作用より $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ のみに依存する正定数 B,t' があって次が成り立つ．

$$\int_\Omega |\nabla u|^2(\cdot,t')\,dx \le B, \tag{5.2.1}$$

$$\sup_{0\le\tau\le 2t',x\in\Omega} u(x,\tau) \le B. \tag{5.2.2}$$

定理 3.5 より大域解のエネルギーは非負の値をとる．このことと不等式 (5.2.1) を用いることにより任意の $T > 0$ に対して

$$\frac{B}{2} \ge J(u(\cdot,t')) \ge J(u(\cdot,t')) - J(u(\cdot,T)) = \int_{t'}^T \int_\Omega u_t^2\,dxdt$$

が成り立つことがわかる．したがって，補題 5.11 より

$$u(x,t) \le A(B,t'), \qquad (x,t) \in \Omega \times (2t',T).$$

これと不等式 (5.2.2) より

$$u(x,t) \le A(B,t'), \qquad (x,t) \in \Omega \times [0,T)$$

がしたがう． □

補題 5.11 から次のことが容易にわかる．

系 5.12. Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな有界領域とする．$(N-2)p < N+2$ とする．さらに，$u_0 \in L^\infty(\Omega)$ かつ $u_0 \ge 0$ とする．u_0 を初期値とする初期境界値問題 (5.1.1) の関数 u は初期境界値問題 (5.1.1) の時刻 T において爆発する．このとき，$t \to T$ ならば $J(u(\cdot,t)) \to -\infty$ が成り立つ．

系 5.12 の証明. もし，この結果が成り立たないとしよう．すると，$0 < t' < \tau < T$ に対してある τ に依存しない正数 C があって

$$\int_{t'}^{\tau} \int_{\Omega} u_t^2 \, dxdt \le C < \infty$$

が成り立つ．よって，補題 5.11 より $\lim_{t \to T} \sup_{\Omega} u(x,t) = \infty$ になることはない．すなわち，$\lim_{t \to T} J(u(\cdot,t)) = -\infty$ が成り立たなければならない． □

注意 5.13. 系 5.12 が成り立つ理由はリスケーリング座標を導入するとより明晰になる．爆発点 $x = a$，爆発時刻 $t = T$ における標準的なリスケーリングを行うと

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_t^2 \, dxdt = \int_{-\log T}^{\infty} \int_{\Omega(s)} \left\{ e^{\frac{ps}{p-1}} \left[w_s + \frac{w}{p-1} + \frac{y}{2} \cdot \nabla w \right] \right\}^2 e^{-\frac{N+2}{2}s} \, dyds.$$

ただし $\Omega(s)$ は Ω がリスケーリングで変換された領域とする．$p < p_s$ と $2p/(p-1) - (N+2)/2 > 0$ が同値であることに注意せよ．$p < p_s$ ならば $s \to \infty$ のとき $w \to \kappa$, $w_s \to 0$ と $y \cdot \nabla w \to 0$ が局所一様に成り立つ．また ρ は遠方でとても早く減衰している．以上から $p < p_s$ ならば $s \to \infty$ のとき右辺は発散することが容易にわかる．ゆえに $1 < p < p_s$ なら

$$J(u_0) - J(u(\cdot,T)) = \int_0^T \int_{\Omega} u_t^2 \, dxdt = \infty.$$

このことを用いればエネルギーが爆発時刻で発散することが容易に納得できる．またこのことと [6, Theorem 3.1] を用いると $1 < p < p_s$ のときは爆発が完全爆発になることが証明できる．詳細は文献 [6] を参照せよ．

補題 5.11 から次のことも容易にわかる．

系 5.14. Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな有界領域とする．$(N-2)p < N+2$ とする．さらに，$u_0 \in L^{\infty}(\Omega)$ かつ $u_0 \ge 0$ とする．初期境界値問題 (5.1.1) の解 u が時間大域的に存在するが非有界であるとする．このとき，

$$\limsup_{t \to \infty} \|u(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)} = \infty$$

が成立する．

系 5.14 の証明. 背理法で示す．もし，時間大域解 u に対して

$$\limsup_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty$$

が成り立つとする．この式とソボレフの埋め込み定理より

$$\limsup_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^{p+1}(\Omega)} < \infty$$

が成り立つ．以上 2 式より，エネルギー汎関数 $J(u(\cdot,t))$ は任意の $t>0$ に対して有界である．これより，任意の $0<t'<T$ に対して

$$-\infty < J(u(\cdot,T)) - J(u(\cdot,t')) = -\int_{t'}^{T}\int_\Omega u_t^2\,dxdt.$$

補題 5.11 より時間大域解 u は有界になる．よって，矛盾． □

5.3 符号変化する解のアプリオリ評価式

本節では，符号変化する時間大域解の評価式と爆発解に関するアプリオリ評価式を紹介する．

定理 5.15. (Cazenave-Lions 1984 [11]) Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな有界領域とする．$(3N-4)p<3N+8$ とする．$u_0\in L^\infty(\Omega)$ を初期値とする初期境界値問題 (5.1.1) の解 u が大域的ならば,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}),\quad t\ge 0 \tag{5.3.1}$$

が成立する (p の条件が定理 5.9 より緩められており，評価式の右辺は初期値のノルムのみによる．また初期値の正値性は仮定しなくてもよい).

定理 5.16. (Quittner 1999 [83]) Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな有界領域とする．$(N-2)p<N+2$ とする．$u_0\in L^\infty(\Omega)$ を初期値とする初期境界値問題 (5.1.1) の解 u が大域的ならば,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}),\quad t\ge 0 \tag{5.3.2}$$

が成立する (定理 5.10 における初期値の正値性さえも取り除かれた).

証明はエネルギー評価と以下の補題 5.17 で述べる補間不等式および bootstrap の議論による．以下本節では数式の表記を短くするため $u(t)=u(\cdot,t)$ と添え字を省略して書くことにする．

補題 5.17. $I=[0,T]$, $0<T_0\le T$ $\alpha>1,\gamma\ge 1$ とする．このときつぎの埋め込み関係が成り立つ．

$$W^{1,2}(I,L^2(\Omega))\cap L^{(\alpha+1)\gamma}(I,L^{\alpha+1}(\Omega))\subset L^\infty(I,L^\beta(\Omega))$$

ただし $2\le\beta<\alpha+1-(\alpha-1)/(\gamma+1):=\beta_c$．しかも埋め込みの定数は $\Omega,\alpha,\beta,\gamma,T_0$ に依存する．

さらに bootstrap の議論を行うには次の Maximal Regularity を使う．

補題 5.18. (Maximal Regularity) $q\in(1,\infty)$ とする．$f\in L^p([0,T],L^q(\Omega))$, $u_0\in W^{2-1/q,q}(\Omega)$ に対して作用素方程式

$$u'(t)=Au+f(t),\quad u(0)=u_0$$

を考える．ただし，作用素 A は有界な解析半群の生成作用素とする．このとき，(u_0,f) によらない定数 C があって

$$\int_0^T\|u(t)\|_{L^q(\Omega)}^p\,dt+\int_0^T\|u'(t)\|_{L^q(\Omega)}^p\,dt+\int_0^T\|Au(t)\|_{L^q(\Omega)}^p\,dt$$
$$\le C\Big(\int_0^T\|f(t)\|_{L^q(\Omega)}^p\,dt+\|u_0\|_{W^{2-1/q,q}(\Omega)}^p\Big).$$

上の形の評価式が成り立つとき作用素 A は Maximal Regularity を有するという．強楕円型の作用素は Maximal Regularity を有する．また，非自励系楕円型作用素 $A(t)$ については t によらない一様な定数 C がとれることが知られている．

定理 5.16 の証明. 平滑化作用より $u_0\in L^\infty(\Omega)$ ならば少しでも時間がたつと $u(t)\in W^{1,2}(\Omega)$ なので $u_0\in W^{1,2}(\Omega)$ と仮定する．

<u>ステップ 1</u>

まず，エネルギー汎関数に関する議論から，∇u に関する評価式を導く．

$$\begin{aligned}(5.3.3)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2(t)\,dx&=\int_\Omega u(t)\left(\Delta u(t)+|u|^{p-1}u\,(t)\right)dx\\&=-\int_\Omega|\nabla u(t)|^2\,dx+\int_\Omega|u(t)|^{p+1}\,dx\\&=-2J(u(t))+\frac{p-1}{p+1}\int_\Omega|u(t)|^{p+1}\,dx\\&\ge-2J(u(t))+C(\Omega,p)\Big(\int_\Omega u^2(t)\,dx\Big)^{\frac{p+1}{2}}\\&\ge-2J(u_0)+C(\Omega,p)\Big(\int_\Omega u^2(t)\,dx\Big)^{\frac{p+1}{2}}.\end{aligned}$$

ここでエネルギー汎関数 $J(u(t))$ の t に対する単調減少性，および Jensen の不等式を用いた．初期値問題 (5.1.1) の解 u が時間大域的であるということから式 (5.3.3) の右辺は任意の時刻で負でなくてはならない．よって任意の $t>0$ に対して

$$\int_\Omega u^2(t)\,dx \le C(J(u_0))^{\frac{2}{p+1}} \tag{5.3.4}$$

でなくてはならない．とくに汎関数 $J(u(t))$ の t に対する単調性により次の評価式を得る．

$$J(u(t)) \ge 0, \quad t\ge 0. \tag{5.3.5}$$

式 (5.3.3) と Schwarz の不等式と $J(u(t))$ の単調性および不等式 (5.3.4) より

$$\begin{aligned}\frac{p-1}{p+1}\int_\Omega |u(t)|^{p+1}\,dx &= \int_\Omega u(t)u_t(t)\,dx + 2J(u(t))\\ &\le \sqrt{\int_\Omega u^2(t)\,dx}\sqrt{\int_\Omega u_t^2(t)\,dx} + 2J(u_0)\\ &\le C(J(u_0))^{\frac{1}{p+1}}\sqrt{-\frac{d}{dt}J(u(t))} + 2J(u_0).\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

$T>0$ を任意に選んで固定する．不等式(5.3.5) とエネルギー汎関数 $J(u(t))$ の時間 t に対する単調減少性から $J(u(T))-J(u(T+1))\le J(u_0)$. したがって不等式 (5.3.6) の両辺を 2 乗し，t について T から $T+1$ まで積分すると

$$\int_T^{T+1}\Big(\int_\Omega |u(t)|^{p+1}\,dx\Big)^2 dt \le C'\big(J(u_0)^{\frac{2}{p+1}+1} + J(u_0)^2\big). \tag{5.3.7}$$

定理 5.16 の証明における議論の都合上，この式を以下のように書き表すことにする．

$$\sup_{t\ge\delta}\int_t^{t+1} \|u(s)\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{(p+1)\gamma}\,ds \le C, \qquad \gamma = 2. \tag{5.3.8}$$

一方，不等式(5.3.5) とエネルギーの単調性から任意の時刻 $t>0$ に対して

$$0 \le J(u(t)) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx - \frac{1}{p+1}|u(t)|^{p+1}\,dx \le J(u_0). \tag{5.3.9}$$

これと不等式 (5.3.8) より

$$\sup_{t\geq\delta}\int_t^{t+1}\|u(s)\|_{W^{1,2}(\Omega)}^{2\gamma}\,ds\leq C,\qquad \gamma=2. \tag{5.3.10}$$

また時間微分に関しては

$$\int_T^{T+1}\int_\Omega u_t^2\,dxds\leq J(u(T))-J(u(T+1))\leq J(u_0) \tag{5.3.11}$$

が成り立つことにも注意せよ．

<u>ステップ 2</u>

次に Cazenave-Lions('84) による補題 5.17 を用いて L^q ノルムの時間大域評価を導く．$\alpha=p,\gamma=2$ とおけば任意の $\beta<p+1-(p-1)/(\gamma+1):=\beta_c$ に対して

$$\sup_{t\geq\delta}\|u(t)\|_{L^\beta(\Omega)}\leq C\sup_{t\geq\delta}\int_t^{t+1}\left(\|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u(s)\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{(p+1)\gamma}\right)ds. \tag{5.3.12}$$

不等式 (5.3.4) と (5.3.10) より u は関数空間 $V_2^{1,0}(Q_T)$ に含まれる．ここで補題 3.37 を

$$\begin{aligned}a_{ij}=\delta_{ij},\ a(x,t)=|u(x,t)|^{p-1},a_i=b_i=f=f_i=0,\\ 2\leq q:=\frac{\beta}{p-1}<\frac{p+1}{p-1}-\frac{1}{\gamma+1},\quad r=\infty\end{aligned}$$

として適用する．ここで

$$p<\frac{N+2+2(\gamma+1)^{-1}}{N-2+2(\gamma+1)^{-1}}=\frac{3N+8}{3N-4}$$

ならば $1/r+N/2q<1$ となることに気をつけよ．したがって任意の $x\in\mathbb{R}^N$, $t\geq 0$ に対して $u(x,t)\leq C(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)})$.

<u>ステップ 3</u>

bootstrap の議論を使って任意の $\gamma\geq 2$ に対して不等式 (5.3.8) が成り立つことを示す．ところで式 (5.3.10) より次の不等式がわかる．

$$\sup_{t\in[\delta,\infty)}\int_t^{t+\delta}\|u(s)\|_{W^{1,2}(\Omega)}^{2\gamma}\,ds<\infty.$$

とくに，この評価式から次の不等式を得る．

$$\sup_{t\geq\delta}\inf_{s\in(t,t+\delta)}\|u(s)\|_{W^{1,2}(\Omega)}<C. \tag{5.3.13}$$

これと以下に述べる補題 5.19 より

$$\sup_{t\geq\delta}\inf_{s\in(t,t+\delta)}\|u(s)\|_{C^2(\Omega)}\leq C$$

を得る．したがって $t\geq 2\delta$ を固定するとある $\tau\in(t-\delta,t)$ があって

$$\|u(\tau)\|_{C^2(\Omega)}\leq C. \tag{5.3.14}$$

補題 5.19. (i) $C>0$ は任意の定数とする．初期境界値問題 (5.1.1) の解 u がある $t_0>0$ に対して $\|u(t_0)\|_{W^{1,2}(\Omega)}\leq C$ を満たすとする．このとき $C>0$ のみに依存する定数 $\delta>0$ があって任意の $t\in(t_0,t_0+\delta)$ に対して $\|u(t)\|_{W^{1,2}(\Omega)}\leq 2C$.

(ii) $C>0$, $\delta>0$ は任意の定数とする．初期境界値問題 (5.1.1) の解 u は任意の $t\in(t_0,t_0+\delta)$ に対して $\|u(t)\|_{W^{1,2}(\Omega)}\leq C$ を満たすとする．このとき $C>0$, $\delta>0$ にのみに依存する定数 $\tilde{C}$ があって u は任意の $t\in(t_0+\delta/2,t_0+\delta)$ に対して $\|u(t)\|_{C^2(\Omega)}\leq\tilde{C}$.

ある $\gamma\geq 2$ に対して不等式 (5.3.8) が成り立つとする．

$$\theta:=\frac{p+1}{p-1}\frac{\beta-2}{\beta},\quad \beta':=\frac{\beta}{\beta-1},\quad p_1:=\frac{p+1}{p}$$

とおくと，これらは

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta'}=1,\qquad \frac{\theta}{p_1}+\frac{1-\theta}{2}=\frac{1}{\beta'} \tag{5.3.15}$$

を満たす．エネルギー汎関数の有界性と式 (5.3.6) およびヘルダー不等式から

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1}&\leq C\Big(1+\|u(t)u_t(t)\|_{L^1(\Omega)}\Big)\\&\leq C\Big(1+\|u(t)\|_{L^\beta(\Omega)}\|u_t(t)\|_{L^{\beta'}(\Omega)}\Big)\\&\leq C\Big(1+\|u_t(t)\|_{L^{\beta'}(\Omega)}\Big)\\&\leq C\Big(1+\|u_t(t)\|_{L^{p_1}(\Omega)}^{\theta}\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^{1-\theta}\Big).\end{aligned} \tag{5.3.16}$$

3 番目の不等式では式 (5.3.12) を用いた．β を $\beta_c(\gamma)$ に十分近くとると

$$\begin{aligned}1-\theta &= \frac{2}{p-1}\Big(\frac{p+1}{\beta}-1\Big)\\ &\sim \frac{2}{p-1}\Big(\frac{p+1}{p+1-(p-1)/(\gamma+1)}-1\Big)=\frac{2}{p\gamma+\gamma+2}<\frac{2}{\gamma}\end{aligned}$$

である．したがって，指数 $\tilde{\gamma}>\gamma$ であって

$$\lambda := \frac{2}{(1-\theta)\tilde{\gamma}}>1$$

を満たすものを選ぶことができる．λ' を $1/\lambda+1/\lambda'=1$ と定義する．

そこで不等式 (5.3.16) の両辺を $\tilde{\gamma}$ 乗すると

$$\|u(t)\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{(p+1)\tilde{\gamma}} \le C\Big(1+\|u_t(t)\|_{L^{p_1}(\Omega)}^{\theta\tilde{\gamma}}\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^{(1-\theta)\tilde{\gamma}}\Big)$$

を得る．さらに，両辺を t について τ から $t+1$ まで積分する．不等式 (5.3.11) より

$$\begin{aligned}\int_\tau^{t+1}\|u(s)\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{(p+1)\tilde{\gamma}}\,ds &\le C\Big(1+\int_\tau^{t+1}\|u_t(s)\|_{L^{p_1}(\Omega)}^{\theta\tilde{\gamma}}\|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^{(1-\theta)\tilde{\gamma}}\Big)\,ds\\ &\le C\Big\{1+\Big(\int_\tau^{t+1}\|u_t(s)\|_{L^{p_1}(\Omega)}^{\theta\tilde{\gamma}\lambda'}\,ds\Big)^{\frac{1}{\lambda'}}\Big(\int_\tau^{t+1}\|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^{(1-\theta)\tilde{\gamma}\lambda}\Big)^{\frac{1}{\lambda}}\Big\}\,ds\\ &= C\Big\{1+\Big(\int_\tau^{t+1}\|u_t(s)\|_{L^{p_1}(\Omega)}^{\theta\tilde{\gamma}\lambda'}\,ds\Big)^{\frac{1}{\lambda'}}\Big(\int_\tau^{t+1}\|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^{2}\Big)^{\frac{1}{\lambda}}\Big\}\,ds\\ &\le C\Big(1+\int_\tau^{t+1}\|u_t(s)\|_{L^{p_1}(\Omega)}^{\theta\tilde{\gamma}\lambda'}\,ds\Big)^{\frac{1}{\lambda'}}\\ &\le C\Big\{\Big(1+\int_\tau^{t+1}\||u(s)|^p\|_{L^{p_1}(\Omega)}^{\theta\tilde{\gamma}\lambda'}\|\,ds\Big)^{\frac{1}{\lambda'}}\Big\}.\end{aligned}$$

最後の不等式は評価式 (5.3.14) と Maximal Regularity による．ここでもし

$$\frac{p\theta\tilde{\gamma}\lambda'}{(p+1)}\le\gamma$$

であれば不等式 (5.3.8) における指数 γ が $\tilde{\gamma}$ まで持ち上がる．そのためには少なくとも

$$\frac{p\theta\tilde{\gamma}\lambda'}{(p+1)}<\tilde{\gamma} \tag{5.3.17}$$

が成り立ってなくてはいけない．$p_1 = (p+1)/p$ よりこの条件は $\theta\lambda' < p_1$ に同値である．λ', p_1 の定義式より，この条件は次のように書き直せる．

$$p < \frac{\beta(\tilde{\gamma}-1)-\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}-2}.$$

この式の右辺は，$\tilde{\gamma}, \beta$ について単調増大なので $\tilde{\gamma} \to \gamma$, $\beta \to \beta_c(\gamma)$ のとき成り立てば十分である．したがって

$$p(\gamma-2) < \beta_c(\gamma)(\gamma-1)-\gamma$$

であればよい．これは自動的に成り立つ条件である．よって，条件 (5.3.17) は $\tilde{\gamma}$ の選び方に特別な制限を加えない．

最後に $\tilde{\gamma}-\gamma$ が下から一様に押さえられないとして矛盾を導こう．上述の手法に基づいて構成した単調増大列を $\{\gamma^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ とおく．その極限を $\gamma_\infty = \lim_{n\to\infty}\gamma^{(n)}$ とおく．対応する $\beta \sim \beta_c(\gamma^{(n)})$ の値を $\beta^{(n)}$ とおく．$\beta^{(n)} < p+1$ から適当な部分列をとるとある β_∞ があって，$\beta^{(n)} \to \beta_\infty \le p+1$．$\beta_\infty = p+1$ のとき，$\gamma_\infty = \infty$ より $p_s + 1 = \beta_\infty = p+1$ となって $p < p_s$ に矛盾．一方，$\beta_\infty < p+1$ のときは $\gamma_\infty < \infty$ である．γ_∞ を γ, β_∞ を β として前述の議論を繰り返すことができる．そのため，γ_∞ より真に大きな $\tilde{\gamma}$ が取れてしまう．これは，背理法の仮定に反する． □

本節で紹介したア・プリオリ評価式を用いても定理 1.4 を証明できる．

系 5.20. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は，C^2 級の境界をもつ有界領域とする．$p \in (1, p_s)$ ならば，境界値問題

$$\begin{cases} \Delta u + |u|^{p-1}u = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

は正値解 $u^* \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ を持つ．

系 5.20 の証明. つぎの 2 つの集合を考える．

$$X := \{u \in L^\infty(\Omega)\,;\, u \ge 0\},$$
$$A := \{u_0 \in X\,;\, \text{対応する (5.1.1) の解が大域的かつ} \lim_{t\to\infty}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = 0\}.$$

補題 8.3 によれば集合 A は X に おいて空でない開集合である．

$u_0 \in A$ の元を任意にとる．初期境界値問題 (5.1.1) の解を $u(x,t\,;\,u_0)$ と表すことにする．関数空間 $C^1(\Omega)$ において

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \end{cases}$$

が生成する力学系 $\{U_t\}_{t=0}^{\infty}$ を考える．式 (5.3.2) と補題 3.10 より $\omega(u_0)$ の元は定常問題の解である．

$\tilde{u}_0 \in \partial A$ を任意に選んで固定する．$\tilde{u} := U_t\,\tilde{u}_0$ とおく．$\lim_{n\to\infty} u_n(\cdot,0) = \tilde{u}_0$ なる関数列 $u_n(\cdot,0) \in A$ を考える．各 $u_n := U_t\,u_n(\cdot,0)$ に対して式 (5.3.2) が成り立つのでその極限 $\tilde{u}$ についても同じ式が成り立つ．よって，その ω 極限集合 $\omega(\tilde{u}_0)$ は定常解全体の集合に含まれる．

$0 \in \omega(\tilde{u}_0)$ であるとすると，ある $0 < t_1 < t_2 < \cdots < \infty$ があって

$$\lim_{n\to\infty} \|u(\cdot,t_n\,;\,\tilde{u}_0)\|_{C^1(\Omega)} \to 0.$$

よって，十分大きな n に対して $u(\cdot,t_n;\tilde{u}_0) \in A$ が成り立つ．これより $u_0 \in A$ もしたがう．これは，集合 A が X の開部分集合であることに矛盾する．よって， $\omega(\tilde{u}_0) \neq \emptyset$ は正値定常解を含むので題意が証明された． □

さらに，爆発解についても次のようなア・プリオリ評価が知られている．証明は [85] を参考にせよ．

定理 5.21. (Quittner 2003 [85]) Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな有界領域とする．$(N-2)p < N+2$ とする．ある $C_0 > 0$ があって $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_0$ が成り立つような初期値 $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ に対して

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C(\delta, C_0), \quad t < T(u_0) - \delta \tag{5.3.18}$$

が成立する．ただし，初期境界値問題 (5.1.1) の解 u の爆発時刻を $T(u_0)$ と書いた．

系 5.22. Ω は $\mathbb{R}^N$ 内のなめらかな有界領域とする．$(N-2)p < N+2$ とする．このとき $u_0 \mapsto T(u_0)$ によって定義される写像 $T\,:\, L^\infty(\Omega) \cap \{u \ge 0\} \to (0,\infty]$ は連続である．

系 5.22 の証明. 写像 $T: L^\infty(\Omega)\cap\{u\geq 0\}\to(0,\infty]$ が連続でないと仮定して矛盾を導く．$\alpha\in(0,1)$ をパラメータとする次のような方程式を考える．

$$\begin{cases} u_\alpha = \Delta u_\alpha + u_\alpha^p, & x\in\Omega,\, t>0,\\ u_\alpha = 0, & x\in\partial\Omega,\, t>0,\\ u_\alpha(\cdot,0)=\alpha u_0, & x\in\Omega. \end{cases}$$

比較原理より $T(\alpha u_0)\geq T(u_0)$ が成り立つ．背理法の仮定よりある δ と u_0 があって任意の $\alpha\in(0,1)$ に対して $T(\alpha u_0)>T(u_0)+\delta$ となる．不等式(5.3.18) より

$$\|u(\cdot,t;\alpha u_0)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C(\delta,C_0),\quad t<T(u_0)$$

が成り立つ．ここで $\alpha\nearrow 1$ の極限を考えると

$$\|u(\cdot,t;u_0)\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C(\delta,C_0),\quad t<T(u_0)$$

となることがわかる．これは，u が時刻 $T(u_0)$ で爆発することに反する．よって矛盾． $\square$

注意 5.23. アプリオリ評価 (5.3.2) には最適制御への応用がある．$1<p<p_s$, $q\geq 2$, $u_0\in C^2(\Omega)\cap C_0(\bar{\Omega})$ として制御関数は $w\in L^2(\Omega)$ とする．次の半線形熱方程式の解を $u(w)$ であらわす．

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u + w(x), & x\in\Omega,\, t\in(0,T],\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\, t\in(0,T],\\ u(\cdot,0)=u_0, & x\in\Omega. \end{cases} \tag{5.3.19}$$

またコスト汎関数を

$$\mathcal{C}(u(w),w) := \int_\Omega |u(x,T)-u_d(x)|^q\,dx + \int_\Omega w^2(x)\,dx,\qquad u_d\in L^q(\Omega)$$

であたえて次の問題を考える．

$$\text{Minimize } \mathcal{C}(u(w),w)\quad \text{subject to}\quad w\in L^2(\Omega)$$

すなわち時間 T をかけて解を目的とする関数 u_d にできるだけ近くにもっていくと同時に制御関数のノルムをなるべく小さくする問題を考える．

$q\in(N(p-1)/2,\, 2N/(N-4))$ とする．もし問題 (5.3.19) が時刻 T まで存在する解を少なくともひとつ持つならばこの最適制御問題が少なくともひとつは解を持つことが知られている ([3])．

6　大域解および爆発解の普遍評価式

6.1　大域解の普遍評価式

Ω は $\mathbb{R}^N$ の有界領域であり，$\partial\Omega$ は C^2 級とする．5 章では初期境界値問題

$$
\begin{cases}
u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\
u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\
u(\cdot, 0) = u_0, & x \in \Omega
\end{cases}
\tag{6.1.1}
$$

の任意の大域解に対して，初期値 u_0 に依存した先見的評価式を紹介した．それに対して，この章では u_0 に依存しない評価が成立することを示す．

定理 6.1. (Fila-Souplet-Weissler 2001 [23])　Ω は $\mathbb{R}^N$ の有界領域であり，$\partial\Omega$ は C^2 級とする．$(N-1)p < N+1$ で $\tau > 0$ は任意の正数とする．このとき定数 $C(\Omega, p, \tau) > 0$ があって初期境界値問題 (6.1.1) の任意の非負大域解 u に対し，

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C(\Omega, p, \tau), \quad t \in [\tau, \infty)$$

が成立する．

注意 6.2. 上の評価式に現れる係数 C は初期値 u_0 に依存しない．このような評価式を**普遍評価式** (universal bound) という．

6.2　関数空間 $L^q_\delta(\Omega)$ の基本性質とその応用

Ω が C^2 級の境界をもつとき $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ に対して $c_1\delta(x) \le \phi_1(x) \le c_2\delta(x)$ が成り立つ．このことは Hopf の補題を用いて容易に確かめることができる．そこで，$L^q_{\phi_1}(\Omega)$ と同値な関数空間

$$L^q_\delta(\Omega) = \left\{ v;\ \text{可測な関数}\ \|v\|_{q,\delta} = \left(\int_\Omega |v(x)|^q \delta(x)\, dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$$

を導入する．この重みつき関数空間における初期境界値問題 (6.1.1) の解の局所存在や一意性に関する理論は，領域の次元が 1 つ大きな L^q 空間の性質とよく似ていて扱いやすい．このことは L^q 空間と $L^q_\delta(\Omega)$ 空間の

違いは関数の境界 $\partial\Omega$ 近傍の様子のみによって生じることが原因である．これを直観的に説明すると以下のようになる．まず境界近傍の領域内部をほぼ半空間とみなす．境界の一点 $a \in \partial\Omega$ を原点にとり領域内部を極座標で表す．境界近傍の領域 $B_r(a) \cap \Omega$ での積分はほぼ

$$\|v\|_{L^q(B_r(a)\cap\Omega)} \propto \int_0^r |v(x)|^q\, r^N\, dr, \quad \|v\|_{L^q_\delta(B_r(a)\cap\Omega)} \propto \int_0^r |v(x)|^q\, r^{N+1}\, dr$$

と近似できる．このことにより重み付きの関数空間 L^q_δ の理論は次元が 1 つだけ大きい場合の L^q 空間の理論と類似していると予想されるであろう．

以下，本節では $L^q_\delta(\Omega)$ 空間における局所理論と，非線形の $L^q_\delta - L^\gamma_\delta$ 評価式を用いて定理 6.1 の証明を行う．これからの議論においては次の補間不等式が頻繁に使われる．

補題 6.3. (Riesz-Thorin の補間不等式) Ω は全空間または有界領域とする．$1 \le p_i \le q_i \le \infty$, $(i=1,2)\,, q_1 \ne q_2$ とする．$\mathcal{T}$ は $L^{p_i}(\Omega)$ から $L^{q_i}(\Omega)$ への線形作用素で次の有界性を持つ．すなわち，定数 $M_i\,(i=1,2)$ があって任意の $f \in L^{p_1}(\Omega) \cap L^{p_2}(\Omega)$ に対して

$$\|\mathcal{T}f\|_{L^{q_i}(\Omega)} \le M_i \|f\|_{L^{p_i}(\Omega)}$$

をみたす．さらに p, q が定数 $\theta \in (0,1)$ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}, \\ \frac{1}{q} &= \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2} \end{aligned}$$

と表されているものとする．このとき，$\mathcal{T}$ は L^p から L^q への有界線形作用素に拡張されて定数 $C = C(p_i, q_i, p, q)$ をうまくとると任意の $f \in L^p(\Omega)$ に対して

$$\|\mathcal{T}f\|_{L^q(\Omega)} \le C M_1^\theta M_2^{1-\theta} \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

が成り立つ．

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は，C^2 級の境界をもつ有界領域とする．初期条件 $u_0 \in L^q_\delta(\Omega)$ に対して，初期値問題 (6.1.1) を考える．ラプラス作用素 Δ は $D(\Delta) := H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ を定義域にもつ作用素であるとする．この作用素は，関

数空間 $L^2(\Omega)$ において解析半群 $\{e^{t\Delta}\}_{t>0}$ を生成する．$\lambda>0$ は $-\Delta$ の第 1 固有値とする．$\phi_1>0$ は，対応する正値固有関数であり

$$\int_\Omega \phi_1\,dx = 1$$

を満たすものとする．$\varphi\in L^2(\Omega)$ を任意に選ぶ．

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(e^{t\Delta}\phi_1) = e^{t\Delta}(\Delta\phi_1) = -\lambda_1(e^{t\Delta}\phi_1),\\ &e^{t\Delta}\phi_1\big|_{t=0} = \phi_1\end{aligned}$$

であるから $e^{t\Delta}\phi_1 = e^{-\lambda_1 t}\phi_1$ が成り立つ．これより

$$(e^{t\Delta}\varphi,\phi_1) = (\varphi, e^{t\Delta}\phi_1) = e^{-\lambda_1 t}(\varphi,\phi_1),\quad t>0$$

であることがわかる．よって，関数 φ を $\varphi=\varphi_+ + \varphi_-$ と正の部分と負の部分に分割すれば

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_{1,\phi_1} = (e^{t\Delta}\varphi_+,\phi_1) - (e^{t\Delta}\varphi_-,\phi_1) = (e^{t\Delta}|\varphi|,\phi_1) = e^{-\lambda_1 t}\|\varphi\|_{1,\phi_1}$$

である．$L^2(\Omega)$ は $L^1_{\phi_1}$ 内において稠密である．よって，C^0-半群 $\{e^{t\Delta}\}_{t>0}$ の定義域は関数空間 $L^1_{\phi_1}$ まで一意的に拡張できる．また，上記の性質からこの半群は縮小半群でもある．さらに，関数空間 $L^\infty_{\phi_1}(\Omega)$ についても全く同じ不等式が成り立つことが知られている．$L^1_{\phi_1}(\Omega)$ と $L^\infty_{\phi_1}(\Omega)$ とによって，Riesz-Thorin の補間不等式を用いれば $L^q_{\phi_1}(\Omega)$ における縮小半群としての性質

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_{q,\phi_1} \le e^{-\lambda_1 t}\|\varphi\|_{q,\phi_1}$$

を得る．

本節ではまず，重みつき空間における $L^\alpha - L^\beta$ 不等式 (定理 6.5) を導く．次の補題は認めるものとする．

補題 6.4. (Martel-Souplet 2000 [65]) $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ は，C^2 級の境界をもつ有界領域とする．初期境界値問題

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & x\in\Omega,\ t>0,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ u(\cdot,0)=1, & x\in\Omega\end{cases}$$

の解を $e^{t\Delta}1$ で表す．このとき定数 $C, T \in (0,\infty)$ があって，任意の $x \in \Omega$, $t \in (0,T]$ に対して

$$e^{t\Delta}1 \leq \frac{C}{\sqrt{t}}\delta(x).$$

定理 6.5. (Fila-Souplet-Weissler 2001 [23]) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は，C^2 級の境界をもつ有界領域とし，$1 \leq q \leq r \leq \infty$, $\alpha = (N+1)\left(1/q - 1/r\right)/2$ とする．Dirichlet 条件下の半群を $e^{t\Delta}$ と表す．このとき定数 $C(\Omega) > 0$ があって，任意の $\varphi \in L^q_\delta(\Omega)$ に対して，

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_{r,\delta} \leq Ct^{-\alpha}\|\varphi\|_{q,\delta}, \quad t > 0$$

が成り立つ．

定理 6.5 の証明. まず，補題 6.4 より $C' = C'(\Omega)$ があって任意の $t \in (0,\infty)$ と $x \in \Omega$ に対して，

$$e^{t\Delta}1 \leq \frac{C'}{\sqrt{t}}\delta(x) \tag{6.2.1}$$

が成り立つ．なぜならば，$t \in [T,\infty)$ において

$$\begin{aligned}
e^{t\Delta}\,1 &= e^{(t-T)\Delta}e^{T\Delta}\,1 \leq e^{(t-T)\Delta}\frac{C}{\sqrt{T}}\delta(x) \\
&\leq e^{(t-T)\Delta}\frac{C}{c_1\sqrt{T}}\phi_1(x) \leq e^{-\lambda_1(t-T)}\frac{C}{c_1\sqrt{T}}\phi_1(x) \\
&= e^{-\lambda_1(t-T)}\frac{C}{\sqrt{T}}\phi_1(x) = \frac{c_2Ce^{\lambda_1 T}}{c_1\sqrt{T}}e^{-\lambda_1 t}\delta(x)
\end{aligned}$$

であるからである．$e^x \geq x$ より $e^{-x/2} \leq 1/\sqrt{x}$ がわかる．これに $x = 2\lambda_1 t$ を代入して式 (6.2.1) を得る．

次に，任意の $\varphi \in L^q_\delta(\Omega)$ に対して，

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_{q,\delta} \leq Ce^{-\lambda_1 t}\|\varphi\|_{q,\delta} \tag{6.2.2}$$

であることを示す．$L^2(\Omega) \subset L^1_{\phi_1}(\Omega)$ が稠密であることに気をつける．任意の $\varphi \in L^2(\Omega)$ に対して

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_{1,\phi_1} = \left(e^{t\Delta}\varphi, \phi_1\right) = \left(\varphi, e^{t\Delta}\phi_1\right) = e^{-\lambda_1 t}\|\varphi\|_{1,\phi_1}$$

が成り立つ．よって，関数空間の同値性より

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_{1,\delta} \le Ce^{-\lambda_1 t}\|\varphi\|_{1,\delta}$$

がわかる．また，先に述べたことから

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_{\infty,\delta} \le e^{-\lambda_1 t}\|\varphi\|_{\infty,\delta}$$

を得る．補間不等式より式 (6.2.2) が成立する．

任意の $\varphi \in L^2(\Omega)$ をひとつ選ぶ．評価式 (6.2.1) より，任意の $t > 0$ に対して

$$\|e^{\frac{t}{2}\Delta}\varphi\|_1 = \left(e^{\frac{t}{2}\Delta}\varphi, 1\right) = \left(\varphi, e^{\frac{t}{2}\Delta}1\right) \le \frac{C'}{\sqrt{t}}\|\varphi\|_{1,\delta}$$

が成立する．したがって，補題 2.12 より

$$\begin{aligned} \|e^{t\Delta}\varphi\|_\infty = \|e^{\frac{t}{2}\Delta}(e^{\frac{t}{2}\Delta}\varphi)\|_\infty &\le (2\pi t)^{-\frac{N}{2}}\|e^{\frac{t}{2}\Delta}\varphi\|_1 \\ &\le C''t^{-\frac{N+1}{2}}\|\varphi\|_{1,\delta} \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

$L^2(\Omega) \subset L^1_{\phi_1}(\Omega)$ が稠密であることから任意の $\varphi \in L^1_{\phi_1}(\Omega)$ に対しても同じ式が成り立つ．

さらに，不等式 (6.2.2) において $q = 1$ を代入したものと不等式 (6.2.3) の 2 つの式に Riesz-Thorin の補間不等式を用いて

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_{r,\delta} \le Ct^{-\frac{(N+1)}{2}(1-\frac{1}{r})}\|\varphi\|_{1,\delta}$$

を得る．最後に，この式と不等式 (6.2.2) で $q = r$ を代入した 2 つの不等式にふたたび Riesz-Thorin の補間不等式を用いて

$$\|e^{t\Delta}\varphi\|_{r,\delta} \le Ct^{-\frac{(N+1)}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|\varphi\|_{q,\delta}.$$

よって題意が成立する． □

定理 6.5 を用いれば定理 2.7 の証明において N を $N+1$ に，$L^q(\Omega)$ を $L^q_\delta(\Omega)$ に置き換えれば，次の定理 6.6(i) の解の存在に関する主張が証明できる．また，定理の (ii) (iii) も第 2 章の結果とよく似ている．

第 2 章の議論と同様に初期境界値問題 (6.1.1) を積分方程式

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}|u^{p-1}(s)|u(s)\,ds \tag{6.2.4}$$

に変形して議論する．ここで $u(t) = u(\cdot, t)$ と表記している．以下の議論でも，数式を短く書くためにしばらくの間はこのように空間の添え字は省略して書くことにする．

定理 6.6. (Fila-Souplet-Weissler 2001 [23]) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は，C^2 級の境界をもつ有界領域とする．

(i) $q > q_c = (N+1)(p-1)/2$, $q \geq 1$ とする．さらに，任意の定数 $M > 0$ に対して $\tau_0 = \tau_0(M), K = K(M) > 0$ があって，

$$u_0 \in L^q_\delta(\Omega), \quad \|u_0\|_{q,\delta} \leq M$$

を仮定する．このとき積分方程式 (6.2.4) の解 $u \in C([0,\tau_0]\,;\, L^q_\delta(\Omega))$ があって次の不等式を満たす．

$$t^{\frac{N+1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)}\|u(\cdot,t)\|_{r,\delta} \leq K, \qquad t \in (0,\tau_0],\ r \in [q,\infty]. \tag{6.2.5}$$

しかも，この解は関数空間

$$C([0,\tau_0]\,;\, L^q_\delta(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}((0,\tau_0)\,;\, L^{pq}_\delta(\Omega))$$

において一意的である．

(ii) $q = q_c > 1$ とする． 任意の $u_0 \in L^q_\delta$ に対して u_0 に依存するある正定数 K, τ_0 および積分方程式 (6.2.4) の関数空間 $C([0,\tau_0]\,;\, L^q_\delta(\Omega))$ に解があって不等式 (6.2.5) が成立する．さらに，その解は関数空間

$$C([0,\tau_0]\,;\, L^q_\delta(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}((0,\tau_0)\,;\, L^r_\delta(\Omega))$$

において一意的である．ただし，$1 \leq r/p < q < r$ とする．

(iii) $1 \leq q < q_c$ とする．この場合，領域 Ω と正値関数 $u_0 \in L^q_\delta(\Omega)$ を適当に選ぶと非負値解が存在しない．

定理 6.6 の証明. (i) について解の存在に関する部分と評価式 (6.2.5) のみ証明する．$Y_\tau := L^\infty((0,\tau); L^q(\Omega)) \cap L^\infty_{loc}((0,\tau); L^{pq}(\Omega))$ に次のノルムを入れた Banach 空間を考える．

(6.2.6)
$$\|u\|_{Y_\tau} := \max\left\{\sup_{0<t<\tau}\|u(t)\|_{q,\delta},\ \sup_{0<t<\tau} t^\alpha\|u(t)\|_{pq,\delta}\right\}, \quad \alpha = \frac{(N+1)(p-1)}{2pq}.$$

M は $M \geq \|u_0\|_{Y_\tau}$ を満たす定数とし，Y_τ の閉部分集合

$$B_{M+1} = \left\{u \in Y_\tau; \|u\|_{Y_\tau} \leq M+1\right\}$$

を定義する．また写像 $\Phi:\,B_{M+1}\to Y_\tau$ を

$$\Phi(u)(t)=e^{t\Delta}u_0+\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\bigl(|u(s)|^{p-1}u(s)\bigr)\,ds$$

で定義する．まず，適当な $\tau=\tau_1>0$ を選べばこの写像が B_{M+1} への中への写像になっていることを示す．

定理 6.5 と $q>(N{+}1)(p{-}1)/2$ より，$m\geq q$ のとき，任意の $u\in B_{M+1}$ に対して

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\bigl(|u(s)|^{p-1}u(s)\bigr)\,ds\right\|_{m,\delta}&\leq C\int_0^t (t-s)^{-\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}\||u(s)|^p\|_{q,\delta}\,ds\\&=C\int_0^t (t-s)^{-\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}\|u(s)\|_{pq,\delta}^p\,ds\\&=C(M+1)^p\int_0^t (t-s)^{-\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}s^{-p\alpha}\,ds\\&=C(M+1)^p t^{1-p\alpha-\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}\\&\qquad\times\int_0^1 (1-s)^{-\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}s^{-p\alpha}\,ds\end{aligned}$$

が成立する．ここで，2 行目から 3 行目の変形には，Y_τ のノルムの定義と $\|u\|_{Y_\tau}\leq M+1$ を用いた．3 行目から 4 行目の変形は，変数変換 $s\mapsto st$ による．最後の積分は有界なので，

$$t^{\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\bigl(|u(s)|^{p-1}u(s)\bigr)\,ds\right\|_{m,\delta}\leq C(M+1)^p\tau^{1-p\alpha}$$

である．この不等式に $m=q$ と $m=pq$ を代入すると

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\bigl(|u(s)|^{p-1}u(s)\bigr)\,ds\right\|_{q,\delta}&\leq C(M+1)^p\tau^{1-p\alpha},\\ t^\alpha\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\bigl(|u(s)|^{p-1}u(s)\bigr)\,ds\right\|_{pq,\delta}&\leq C'(M+1)^p\tau^{1-p\alpha}\end{aligned}$$

を得る．ここで，左辺に関して $t\in(0,\tau)$ についての上限をとれば

$$\|\Phi(u)\|_{Y_\tau}\leq M+\max(C,C')\,(M+1)^p\tau^{1-p\alpha}\tag{6.2.7}$$

である．$q > (N+1)(p-1)/2$ より $1-p\alpha > 0$ なので不等式 (6.2.7) より十分小さな $\tau = \tau_1 > 0$ を取れば上の積分作用素は定義可能で B_{M+1} の中への写像になる．

次に，$\Phi : B_{M+1} \to Y_\tau$ が縮小写像であることを証明する．以下数式を短くするため $u^p = |u|^{p-1}u$ と簡略化して書くことにする．

$$\|u^p - v^p\|_{q,\delta} \le p(\|u\|_{pq,\delta}^{p-1} + \|v\|_{pq,\delta}^{p-1})\|u-v\|_{pq,\delta}$$

と定義式 (6.2.6) に注意し先程と同様の変形をすれば，$m \ge q$ のとき

$$\begin{aligned}
&\|\Phi(u_1)(t) - \Phi(u_2)(t)\|_{m,\delta} = C\int_0^t (t-s)^{-\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}\|u_1^p(s) - u_2^p(s)\|_{q,\delta}\,ds \\
&\le Cp\int_0^t (t-s)^{-\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}(\|u_1(s)\|_{pq,\delta}^{p-1} + \|u_2(s)\|_{pq,\delta}^{p-1})\,\|u_1(s) - u_2(s)\|_{pq,\delta}\,ds \\
&\le C'\int_0^t (t-s)^{-\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}s^{-(p-1)\alpha}s^{-\alpha}\|u_1 - u_2\|_{Y_\tau}\,ds \\
&\le C't^{1-p\alpha-\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}\int_0^1 (1-s)^{-\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}s^{-(p-1)\alpha}s^{-\alpha}\|u_1 - u_2\|_{Y_\tau}\,ds \\
&\le C''t^{-\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}\tau^{1-p\alpha}\|u_1 - u_2\|_{Y_\tau}
\end{aligned}$$

である．特に，$m = q$ と $m = pq$ を代入すると

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u_1)(t) - \Phi(u_2)(t)\|_{q,\delta} &\le C''\tau^{1-p\alpha}\|u_1 - u_2\|_{Y_\tau}, \\
t^\alpha\|\Phi(u_1)(t) - \Phi(u_2)(t)\|_{pq,\delta} &\le C''\tau^{1-p\alpha}\|u_1 - u_2\|_{Y_\tau}
\end{aligned}$$

がしたがう．ここで，左辺で $t \in (0,\tau)$ について上限をとれば

$$\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\|_{Y_\tau} \le C''\tau^{1-p\alpha}\|u_1 - u_2\|_{Y_\tau}. \tag{6.2.8}$$

$q > (N+1)(p-1)/2$ より $1-p\alpha > 0$ なので，不等式 (6.2.8) より十分小さな $\tau = \tau_2 > 0$ を取れば，$0 < t < \tau$ において写像 $\Phi : B_{M+1} \to Y_\tau$ は縮小写像である．

したがって，$\tau_0 = \min\{\tau_1, \tau_2\}$ とすれば Banach の縮小写像定理を用いることができて写像 Φ が $B_{M+1} \subset Y_{\tau_0}$ に唯一つの不動点を持つことがわかる．

また，これまでの議論から

$$\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\big(|u(s)|^{p-1}u(s)\big)\,ds\right\|_{q,\delta} \le C(M+1)^p t^{1-p\alpha}.$$

よって，$\displaystyle\int_0^t e^{(t-s)\Delta}u^p(s)\,ds$ の $L^q_\delta(\Omega)$ 値関数として連続性は $t=0$ まで伸びる．つまり

$$u(t)-e^{t\Delta}u_0=\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\big(|u(s)|^{p-1}u(s)\big)\,ds,\quad u\in C([0,\tau_0];L^q(\Omega)).$$

次に評価式 (6.2.5) を示す．$p\le m<r\le\infty$ を満たす m,r を固定する．

$$\sup_{(0,\tau_0]} t^{\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}\|u(t)\|_{m,\delta}\le L(m)<\infty \tag{6.2.9}$$

が成り立つと仮定する．$q\le m\le pq$ のとき

$$t^{\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})}\|\int_0^t e^{(t-s)}\big(|u(s)|^{p-1}u(s)\big)\,ds\|_{m,\delta}\le C(M+1)^p t^{1-p\alpha}$$

が成り立つことが上記で述べた解の存在のときの議論から得られる．これと，積分表示式から $q\le m<r\le pq$ の場合の結果を得る．

$r=m=pq$ のときに評価式 (6.2.9) が成り立つと仮定して，任意の $pq\le r\le\infty$ に対してこの不等式が成り立つことを示す．積分表示式から

$$u(t)=e^{\frac{t}{2}\Delta}u\Big(\frac{t}{2}\Big)+\int_{\frac{t}{2}}^t e^{(t-s)\Delta}(|u(s)|^{p-1}u(s))\,ds$$

が成り立つ．したがって，定理 6.5 より

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{r,\delta}&\le\Big\|e^{\frac{t}{2}\Delta}u\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big\|_{r,\delta}+C\int_{\frac{t}{2}}^t(t-s)^{-\frac{N+1}{2}(\frac{p}{m}-\frac{1}{r})}\||u(s)|^p\|_{m/p,\delta}\,ds\\&\le Ct^{-\frac{N+1}{2}(\frac{1}{m}-\frac{1}{r})}\Big\|u\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big\|_{m,\delta}+C\int_{\frac{t}{2}}^t(t-s)^{-\frac{N+1}{2}(\frac{p}{m}-\frac{1}{r})}\|u(s)\|^p_{m,\delta}\,ds\\&\le CLt^{-\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}+CL^p\int_{\frac{t}{2}}^t(t-s)^{-\frac{N+1}{2}(\frac{p}{m}-\frac{1}{r})}s^{-p\left(\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})\right)}\,ds\\&=CLt^{-\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\\&\quad+CL^pt^{-\frac{N+1}{2}(\frac{1}{m}-\frac{1}{r})+1-p\alpha}\int_{\frac{1}{2}}^1(1-s)^{-\frac{N+1}{2}(\frac{p}{m}-\frac{1}{r})}s^{-p\left(\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{m})\right)}\,ds\end{aligned}$$

であることがわかる．

$$\frac{p}{m}-\frac{2}{N+1}<\frac{1}{r} \tag{6.2.10}$$

であれば，最右辺の積分は収束して

$$\sup_{(0,\tau_0]} t^{\frac{N+1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|u(t)\|_{r,\delta} \le L(r) < \infty \tag{6.2.11}$$

が成り立つ．たとえば，$r > m > q_c = (N+1)(p-1)/2$ ならばこの条件は満たされる．

上記の方法で，帰納的に大きくしていった正数 r が上限 r_0 をもつとする．これに対応する m の値は r_0 である．また，$r = r_0$ のとき不等式 (6.2.10) において等号が成立するので

$$r_0 = \frac{(N+1)(p-1)}{2} = q_c.$$

一方，$r_0 \ge pq$ なので $q < q_c$ となり矛盾．以上から任意の $pq \le r \le \infty$ に対して評価式 (6.2.11) が成り立つことがわかるので，任意の $q \le r \le \infty$ に対して題意の不等式が成立する． □

注意 6.7. $f \in C^1$ かつ $|f'(s)| \le C(1+|s|^{p-1})$ とする．このとき，方程式 $u_t = \Delta u + f(u)$ に対して定理 6.6 (i) が成り立つ．$f(0) = 0$ のとき，定理 6.6 (ii) が成立する．

定理 6.1 の証明. $\lambda_1 > 0$ は Dirichlet 条件下における $-\Delta$ の第 1 固有値とし，$\phi_1 \in C^2(\bar{\Omega})$ は $\lambda_1 > 0$ に対応する正値の第 1 固有関数とする．すなわち，正数 $\lambda_1 > 0$ と関数 ϕ_1 は，

$$\begin{cases} \Delta\phi_1 + \lambda_1\phi_1 = 0, & x \in \Omega, \\ \phi_1 = 0, & x \in \partial\Omega, \\ \phi_1 > 0, & x \in \Omega \end{cases} \tag{6.2.12}$$

を満たす．さらに正規化条件 $\|\phi_1\|_{L^1(\Omega)} = 1$ を課す．まず，問題 (6.1.1) 第 1 式の両辺に ϕ_1 をかけて Ω 上積分すると，式 (6.2.12) より

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1\,dx = -\lambda_1\int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1\,dx + \int_\Omega u^p(\cdot,t)\phi_1\,dx. \tag{6.2.13}$$

この式と Jensen の不等式より

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1\,dx \ge -\lambda_1\int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1\,dx + \Big(\int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1\,dx\Big)^p.$$

定理 6.1 の仮定から解 u は時間大域的に存在するので，$t \geq 0$ でこの微分不等式の右辺は負である．すなわち

$$\int_\Omega u(\cdot, t)\phi_1\, dx \leq \lambda_1^{\frac{1}{p-1}}, \qquad t \geq 0 \tag{6.2.14}$$

が成立する．不等式 (6.2.14) を等式 (6.2.13) に代入すれば

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(\cdot, t)\phi_1\, dx \geq -\lambda_1^{\frac{p}{p-1}} + \int_\Omega u^p(\cdot, t)\phi_1\, dx.$$

さらに，この式の両辺を t について $(0, \tau/2)$ 上積分すると

$$\int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_\Omega u^p\phi_1\, dxds \leq \frac{\tau}{2}\lambda_1^{\frac{p}{p-1}} + \int_\Omega u(\cdot, t)\Big(\cdot, \frac{\tau}{2}\Big)\phi_1\, dx - \int_\Omega u_0\phi_1\, dx.$$

この不等式と関数 u_0, ϕ_1 の正値性，および不等式 (6.2.14) より

$$\int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_\Omega u^p\phi_1\, dxds \leq \frac{\tau}{2}\lambda_1^{\frac{p}{p-1}} + \lambda_1^{\frac{1}{p-1}}. \tag{6.2.15}$$

一方中間値の定理よりある $t_1 \in (0, \tau/2)$ があって,

$$\int_\Omega u(\cdot, t_1)^p\phi_1\, dx = \frac{2}{\tau}\int_0^{\frac{\tau}{2}}\int_\Omega u^p\phi_1\, dxds. \tag{6.2.16}$$

不等式 (6.2.15), (6.2.16) から次を得る．

$$\int_\Omega u(\cdot, t_1)^p\phi_1\, dx \leq \lambda_1^{\frac{p}{p-1}} + \frac{2}{\tau}\lambda_1^{\frac{1}{p-1}} \leq C(\Omega, p, \tau).$$

この不等式と関数空間 $L^q_\delta(\Omega)$ と $L^q_{\phi_1}(\Omega)$ の同値性から

$$\|u(\cdot, t_1)\|_{p,\delta} \leq C_1(\Omega, p, \tau). \tag{6.2.17}$$

次に，定理 6.1 の仮定 $(N-1)p < N+1$ を書き換えると $p > q_c = (N+1)(p-1)/2$ である．したがって，定理 6.6 (i) が適用できる．$M = C_1(\Omega, p, \tau)$, $u_0 = u(t_1)$, $r = \infty$, $q = p$ として評価式 (6.2.5) を用いるとある $\tau_0(M) > 0$ があって

$$t^{-\frac{N+1}{2p}}\|u(\cdot, t + t_1)\|_\infty \leq C_2(\Omega, p, \tau), \quad t \in (0, \tau_0(M)).$$

特に，ある $t_2 \in (t_1, \tau)$ があって

$$\|u(\cdot, \tau_2)\|_\infty \leq C_3(\Omega, p, \tau). \tag{6.2.18}$$

また，$(N-1)p < N+1$ ならば $(N-2)p < N+2$ なので，定理 5.10, ないしは定理 5.16 が使えて，

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty \le C_4(\|u(\cdot,t_2)\|_\infty), \quad t \in [t_2,\infty). \tag{6.2.19}$$

よって式 (6.2.18), (6.2.19) より

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty \le C_5(\Omega,p,\tau), \quad t \in [t_2,\infty).$$

$t_2 \le \tau$ に注目すれば題意を得たことになる． □

注意 6.8. 定理 6.1 は次の条件を満たす非線形項 $f(u)$ に対しても成立する．

(i) $f \in C^1$, $|f'(u)| \le C(1+|u|^{p-1})$, かつ $1 < p < 1+2/(N+1)$
$f(u) \ge g(u) - C$
ただし，$g \ge 0$ は，凸関数で $\int_1^\infty ds/g(s) < \infty$ を満たす．

(ii) $1 < p < (N+1)(N-1)$, $\lim_{u\to\infty} f(u)/u^p = L \in (0,\infty)$.

定理における指数 p の条件を改良したものとして次の定理がある．

定理 6.9. (Quittner 2001 [84]) $N \le 3$ のとき，$(N-2)p < N+2$ かつ $\tau > 0$ とする．定数 $C(\Omega,p,\tau) > 0$ があって，初期境界値問題 (6.1.1) の任意の非負大域解 u に対して

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C, \quad t \in [\tau,\infty).$$

この定理をみると,「普遍評価は p がソボレフの臨界指数 p_s より小さければ任意の次元で成り立つのではないか.」と予想される．この予想については以下で述べるような部分的結果が得られているので特に $N \le 4$ のときは正しい．また $N \ge 5$ でも $p < (N-1)/(N-3)$ なら正しい．

定理 6.10. (Quittner-Souplet-Winkler 2004 [87]) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は，C^2 級の境界をもつ有界領域とする．

(i) $1 < p < 1+2/(N+1)$ とする．定数 $C(p,\Omega) > 0$ があって，境界値問題 (6.3.1) の任意の時間大域解 u に対して

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C(p,\Omega)\left(1+t^{-\frac{N+1}{2}}\right), \quad t > 0.$$

(ii) (a) $N \le 4$ のとき，$1+2/(N+1) \le p < (N+2)/(N-2)$ とする．もしくは，

(b) $N > 4$ のとき，$1+2/(N+1) \le p < (N-1)/(N-3)$ とする．

とする．このときある $\alpha(N,p) > 0$ と $C(p,\Omega) > 0$ があって，境界値問題 (6.3.1) の任意の大域解 u に対して

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C(1+t^{-\alpha}), \quad t > 0.$$

6.3 普遍評価式の精密化

定理 6.1 では，初期境界値問題 (6.1.1) の任意の非負大域解 u に対して

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C(\Omega,p,\tau), \quad t \in [\tau,\infty)$$

という形の普遍不等式が成り立つことを示した．本節ではこの不等式に現れる定数 $C(\Omega,p,\tau)$ の $\tau \to 0$ における挙動を考えたい．我々はこの目的のために初期条件を課さない次の問題を考える．

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0. \end{cases} \tag{6.3.1}$$

この問題の任意の正値解に対する Liouville 型の定理を確立し，それを用いて上記の普遍評価式を精密化した結果を導く．なおこの節の執筆にあたっては [89] の内容を大いに参考にした．

6.3.1 放物型方程式の Liouville 型の定理

定理 6.11 (Liouville 型の定理). (Poláčik–Quittner 2006 [79], Bidaut-Véron 1998 [7]) 方程式

$$u_t = \Delta u + u^p, \qquad x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R} \tag{6.3.2}$$

を考える．以下のいずれかが成り立つとする．

(i) $1 < p < p_s$ であって，解 u は原点に関して空間球対称とする．

(ii) $1 < p < p_B$ とする．ただし

$$p_B = \begin{cases} \infty, & N = 1, \\ \dfrac{N(N+2)}{(N-1)^2}, & N > 1. \end{cases}$$

このとき問題 (6.3.2) には正値かつ有界な古典解が存在しない．

注意 6.12. 問題 (6.3.2) の解を Entire solution と呼ぶことがある．一方 $t \in (-\infty, 0)$ で定義された解は Ancient solution と呼ぶ．

半空間 $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R}^N; \, x_N > 0\}$ の場合についても同様の定理が知られている．すなわち次の定理が成立する．

定理 6.13. (Poláčik-Quittner-Souplet 2006 [80]) $N \geq 2$, $1 < p < (N+1)(N+3)/(N-2)^2$ とする．方程式

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p, & x \in \mathbb{R}^N_+, \, t \in \mathbb{R}, \\ u = 0, & x \in \partial\mathbb{R}^N_+, \, t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{6.3.3}$$

には正値かつ有界な古典解が存在しない．

6.3.2 一般化された普遍評価式

定理 6.14. (Poláčik-Quittner-Souplet 2006 [80]) 定理 6.11 の仮定 (i), (ii) のいずれかが成り立つとする．問題 (6.3.1) の任意の非負値解 u に対して次が成り立つ．

(i) 初期境界値問題の場合は Ω は有界領域とする．このとき任意の $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$ に対して

$$u(x,t) \leq C(N,p,\Omega)(1 + t^{-1/(p-1)} + (T-t)^{-1/(p-1)}). \tag{6.3.4}$$

(ii) 初期値問題の場合は $\Omega = \mathbb{R}^N$ と考える．このとき任意の $x \in \mathbb{R}^N$, $t \in (0, T)$ に対して

$$u(x,t) \leq C(N,p,\Omega)(t^{-1/(p-1)} + (T-t)^{-1/(p-1)}). \tag{6.3.5}$$

注意 6.15. 一般に $p>1$ のとき任意の $\varepsilon>0$ に対してある $T_0>0$ と問題 (6.3.1) の古典解があって

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \geq C(p,\Omega)\, t^{-\alpha_1+\varepsilon}, \quad 0<t<T_0$$

が成立する．ここで $\alpha_1 := \min\left\{\dfrac{N+1}{2}, \dfrac{1}{p-1}\right\}$.

したがって $p<1+2/(N+1)$ ならば定理 6.10 (i) の評価式は最良である．すなわち $p<1+2/(N+1)$ ならば任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある領域 Ω と大域解 u があって

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \geq Ct^{-\frac{N+1}{2}+\varepsilon}, \quad t>0.$$

一方 $p>1+2/(N+1)$ ならば任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある領域 Ω と大域解 u があって

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \geq Ct^{-\frac{1}{p-1}+\varepsilon}, \quad t>0$$

となって定理 6.14 (i) に対する最良性を得る．一方 $(T-t)^{-\frac{1}{p-1}}$ の最良性は 3.3 節で述べたように Giga-Kohn [34] の結果からしたがう．

また初期値問題の場合は α_1 を $\alpha_0 := \min\left\{\dfrac{N}{2}, \dfrac{1}{p-1}\right\}$ に置き換えれば対応する主張が得られる．すなわち $p<1+2/N$ ならば $u(x,t)$ は $t\to 0$ のとき $t^{-N/2}$ のオーダーで抑えられて $p>1+2/N$ ならば $u(x,t)$ は $t\to 0$ のとき $t^{-1/(p-1)}$ のオーダーで抑えられる．

定理 6.11 の証明. (i) の場合のみ示す．問題 (6.3.2) の有界かつ球対称な古典解 $u(x,t)=U(r,t)$ が存在するとして矛盾を導く．

ステップ 1

関数 Φ_1 は境界条件 $\Phi_1(0)=1$, $\Phi_1'(0)=0$ を満たす次の楕円型方程式の球対称解とする．

$$\Phi'' + \frac{N-1}{r}\Phi' + |\Phi|^{p-1}\Phi = 0, \quad r>0. \tag{6.3.6}$$

容易に分かるように $\Phi_1''(0)<0$ となる．また補題 1.15 の証明における議論から関数 Φ_1 には最小の零点 $r_1\in(0,\infty)$ が存在する．常微分方程式の解の一意性より $\Phi_1'(r_1)<0$ でもある．以上をまとめると関数 Φ_1 は次の性質をもつ．

$$\Phi_1(r)>0, \quad r\in[0,r_1), \qquad \Phi_1(r_1)=0>\Phi_1'(r_1).$$

また方程式の自己相似性から $\Phi_a(r) := a\Phi_1(a^{(p-1)/2}r)$ も微分方程式 (6.3.6) の解であって $\Phi_a(0) = a$, $\Phi'_a(0) = 0$ を満たす．以下この関数 Φ_a の最小の零点を $r_a = a^{-(p-1)/2}r_1$ と表すことにする．ここで任意の $m > 0$ に対して次が成り立つことに気をつける．

$$(6.3.7) \qquad \lim_{a\to\infty}(\sup\{\Phi'_a(r)\,;\, r \in [0, r_0] \text{ は } \Phi_a(r) \le m \text{ 満たす }\}) = -\infty.$$

関数 $u(x,t) = U(r,t)$ の有界性とシャウダー評価から U, U_r は $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ において有界である．また式 (6.3.7) よりもし a が十分大きければ $U(\cdot,t)-\Phi_a$ は任意の t に対し，区間 $[0, r_a]$ においてただひとつの零点をもつ．しかも零点数の非増大性からその零点は単純である．

ステップ 2

次に

$$(6.3.8) \qquad Z_{[0,r_a]}(U(\cdot,t) - \Phi_a) \ge 1, \quad t \le 0,\ a > 0$$

が成り立つことを示そう．ただし，$Z_{[0,r_a]}(w)$ は関数 w が区間 $[0, r_a]$ に有する零点の数とする．もしこの不等式が成り立たないとするとある $t_0 \in \mathbb{R}$ があって区間 $[0, r_a]$ において $u(\cdot, t_0) > \Phi_a$．[60] の結果，あるいは定理 3.13，または定理 3.12 の議論によると区間 $[0, r_a]$ において $\bar{u}_0 > \Phi_a$ ならばつぎの Dirichlet 問題の解は有限時間に爆発する．

$$\begin{cases} \bar{u}_t = \Delta\bar{u} + \bar{u}^p, & |x| < r_a,\ t > 0, \\ \bar{u} = 0, & |x| = r_a,\ t > 0, \\ \bar{u}(x, t_0) = \bar{U}_0(|x|), & |x| < r_a. \end{cases}$$

関数 $\bar{U}_0$ を Φ_a と $u(\cdot, t_0)$ とに挟まれるように構成すると比較原理より u, $\bar{u}$ は有限時間に爆発する．これは u が問題 (6.3.2) の有界な解であることに反する．よって不等式 (6.3.8) が成り立つ．

ステップ 3 (Continuity argument)

$$a_0 := \inf\left\{b > 0\,;\, Z_{[0,r_a]}(U(\cdot,t) - \Phi_a) = 1, \quad t \le 0,\ a \ge b.\right\}$$

ステップ 1 より $a_0 < \infty$ である．また a が十分小さければ常に $Z_{[0,r_a]}(U(\cdot,t)-\Phi_a) \ge 2$ となる．よって $a_0 > 0$ でもある．不等式 (6.3.8) と a_0 の定義よりある単調増大な点列 $a_k \uparrow a_0$ と $t_k \le 0$ があって

$$Z_{[0,r_{a_k}]}(U(\cdot,t_k) - \Phi_{a_k}) \ge 2, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

零点数の非増大より

$$(6.3.9) \qquad Z_{[0,r_{a_k}]}(U(\cdot,t_k+t)-\Phi_{a_k}) \geq 2, \qquad t \leq 0,\ k=1,2,\cdots.$$

この不等式に気をつければ t_k を適当に取り直してはじめから $t_k \to -\infty$ と仮定してよいことがわかる．さらに部分列 $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ を取ればある関数 $v \in C^{2,1}_{loc}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ があって

$$\lim_{j\to\infty} \|u(\cdot,t_{k_j}+\cdot)-v\|_{C^{2,1}_{loc}(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R})} = 0.$$

したがって不等式 (6.3.9) より関数 $v(\cdot,t)-\Phi_{a_0}$ は区間 $[0,r_{a_0})$ において 2 つ以上の零点をもつか単純ではない零点をもつ．ステップ 2 の議論から 2 つ以上の零点をもたなくてはならないことがわかる．零点数の下半連続性より $U(\cdot,t+t_k)-\Phi_a$ は k が十分大きくて $a_0<a$ かつ a が a_0 に十分近いときには区間 $[0,r_a]$ 上に 2 つ以上の零点をもつ．これは a_0 の定義に反する． □

次に Doubling lemma と呼ばれる便利な補題を準備する．これは Hu [44] により放物型方程式のアプリオリ評価を証明するために用いられた．その後 Quittner-Souplet-Winkler らはその重要性に着目して，[44] の議論を関数列に用いる形に改良して普遍評価式を導いた．以下の述べるようにこの補題を用いることによって問題 (6.3.2) に「有界な」正値解の存在に帰着させることができる．特に極限論法の評価に現れる定数が初期値によらない点に注意せよ．またこの方法は途中でエネルギー汎関数を一度も用いないので，変分構造を持たないより一般的な場合にも簡単に拡張が可能である．

補題 6.16 (Doubling lemma). (X,d) は完備距離空間とする．D,Σ は部分集合であり，閉集合 Σ は包含関係 $\emptyset \neq D \subset \Sigma \subset X$ を満たす．$\Gamma := \Sigma \setminus D$ とおく．関数 $M : D \to (0,\infty)$ は D 内の各コンパクトな部分集合で有界とする．$k>0$ を任意の定数として固定する．もし，ある $y \in D$ に対して

$$(6.3.10) \qquad M(y)\,\mathrm{dist}(y,\Gamma) > 2k$$

が成り立つならば，ある $x \in D$ に対して

$$(6.3.11) \qquad M(x)\,\mathrm{dist}(x,\Gamma) > 2k, \quad M(x) \geq M(y),$$

および

$$M(z) \le 2M(x), \qquad z \in D \cap \bar{B}_X(x, kM^{-1}(x))$$

が成り立つ.

補題 6.16 の証明. 補題の結果が成り立たないとして議論する．ただし背理法の仮定において，任意の $x \in D$ に対して不等式 (6.3.11) が成り立たないということはあり得ない．なぜなら $x = y$ とおくと第 1 式は式 (6.3.10) に矛盾するからである．第 2 式に関しても同様である．したがって否定されるのは最後の不等式のみであることに注意せよ.

ステップ 1

まずある点列 $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ で任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して以下の不等式を満たすものが存在することを背理法で示す.

$$M(x_j)\,\mathrm{dist}(x_j, \Gamma) > 2k, \tag{6.3.12}$$

$$M(x_{j+1}) > 2M(x_j), \tag{6.3.13}$$

かつ

$$d(x_j, x_{j+1}) \le kM^{-1}(x_j) \tag{6.3.14}$$

数学的帰納法で示す．まず $x_0 = y$ とする．不等式(6.3.10) から不等式 (6.3.12) がしたがうのは明らかである．背理法の仮定よりある $x_1 \in D$ があって

$$M(x_1) > 2M(x_0) \quad \text{かつ} \quad d(x_0, x_1) \le kM^{-1}(x_0).$$

よって不等式 (6.3.13), (6.3.14) も成り立つ．次に点列 $x_0, x_1, \cdots x_{i-1}$ に対して式 (6.3.12), (6.3.13), (6.3.14) が成り立つとする.

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(x_i, \Gamma) &\ge \mathrm{dist}(x_{i-1}, \Gamma) - \mathrm{d}(x_{i-1}, x_i)\\ &> (2k - k)M^{-1}(x_{i-1}) > 2kM^{-1}(x_i).\end{aligned}$$

したがって $M(x_i)\,\mathrm{dist}(x_i, \Gamma) > 2k$．以上よりステップ 1 の証明が完了した.

ステップ 2

ステップ 1 より次のことがわかる.

$$M(x_i) \ge 2^i M(x_0), \quad \mathrm{dist}(x_i, x_{i+1}) \le k2^{-i}M^{-1}(x_0), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{6.3.15}$$

とくに $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ はコーシー列である．したがって完備性より $a \in \bar{D} \subset \Sigma$ があって $\lim_{i\to\infty} x_i = a$ かつ

$$\mathrm{d}(x_0, x_i) \le \sum_{j=0}^{i-1} \mathrm{d}(x_j, x_{j+1}) \le k\, M^{-1}(x_0) \sum_{j=0}^{i-1} 2^{-j} \le 2k\, M^{-1}(x_0).$$

ゆえに不等式 (6.3.10) より

$$\mathrm{dist}(x_i, \Gamma) \ge \mathrm{dist}(x_0, \Gamma) - 2k\, M^{-1}(x_0) =: \delta > 0.$$

このことから $\{x_i\}_{i=0}^{\infty} \cup \{a\}$ が閉集合 $D := \Sigma \setminus \Gamma$ におけるコンパクト部分集合であることがわかる．一方，不等式 (6.3.15) より $\lim_{i\to\infty} M(x_i) = \infty$ となる．これは関数 $M(x)$ の有界性に反するので矛盾． □

定理 6.14 の証明． もし不等式 (6.3.4) が成り立たないと仮定するとある点列 $T_k \in (0, \infty)$ と $u_k(x,t)$, $y_k \in \Omega$, $s_k \in (0, T_k)$ があって関数列

$$M_k := u_k^{\frac{p-1}{2}}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots \tag{6.3.16}$$

が不等式

$$M_k(y_k, s_k) > 2k(1 + d_k^{-1}(s_k)) \tag{6.3.17}$$

を満たす．ただし $\delta_k(t) = (\min\{t, (T_k - t)\})^{1/2}$．補題 6.16 を $X = \mathbb{R}^N$,

$$\mathcal{D}_P((x,t),(y,s)) := |x - y| + |t - s|^{1/2},$$

$\Sigma = \Sigma_k = \bar{\Omega} \times [0, T_k]$, $D = D_k = \bar{\Omega} \times (0, T_k)$, $\Gamma_k = \bar{\Omega} \times \{0, T_k\}$ として用いる．容易にわかるように

$$\delta_k(t) = \mathcal{D}ist_P((x,t), \Gamma_k), \quad (x,t) \in \Sigma_k$$

となる．ここで $\mathcal{D}ist_P$ は距離 $\mathcal{D}_P$ で測った点と集合の距離である．補題 6.16 よりある $x_k \in \Omega$, $t_k \in (0, T_k)$ があって

$$\begin{aligned} M_k(x_k, t_k) &> 2k\, \delta_k^{-1}(t_k), \\ M_k(x_k, t_k) &\ge M_k(y_k, s_k) > 2k \end{aligned} \tag{6.3.18}$$

かつ

$$M_k(x,t) \le 2M_k(x_k, t_k), \qquad (x,t) \in D_k \cap \bar{B}_k. \tag{6.3.19}$$

ただし

$$\tilde{B}_k := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1};\ |x-x_k| + |t-t_k| \le k\lambda_k\}$$

$$\lambda_k := M_k^{-1}(x_k, t_k) \to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty. \tag{6.3.20}$$

これらのことから不等式 (6.3.18) より任意の $(x,t) \in \tilde{B}_k$ に対して $|t-t_k| \le k^2\lambda_k^2 < \delta_k^2(t_k) = \min\{t_k, T_k - t_k\}$．この不等式から $t \in (0, T_k)$ であることがわかる．よって，次のことがしたがう．

$$\left(\Omega \cap \left\{|x-x_k| < \frac{k\lambda_k}{2}\right\}\right) \times \left(t_k - \frac{k^2\lambda_k^2}{4},\ t_k + \frac{k^2\lambda_k^2}{4}\right) \subset D_k \cap \tilde{B}_k.$$

変数変換した関数

$$v_k(y,s) = \lambda_k^{2/(p-1)} u_k(x_k + \lambda_k y, t_k + \lambda_k^2 s), \quad (y,s) \in \tilde{D}_k \tag{6.3.21}$$

を考える．ただし

$$\tilde{D}_k := (\lambda_k^{-1}(\Omega - x_k) \cap \{|y| < k/2\}) \times (-k^2/4, k^2/4)$$

とする．関数 v_k は次の初期値問題の解である．

(6.3.22)

$$\begin{cases} \partial_s v_k = \Delta_y v_k + v_k^p, & (y,s) \in \tilde{D}_k, \\ v_k = 0, & y \in \lambda_k^{-1}(\partial\Omega - x_k),\ |y| < k/2,\ |s| < k^2/4. \end{cases}$$

さらに

$$v_k(0,0) = \lambda_k^{2/(p-1)} u_k(x_k, t_k) = (M_k(x_k,t_k))^{-2/(p-1)}\, u_k(x_k,t_k) = 1$$

となる．一方，不等式 (6.3.19) より

$$\begin{aligned} v_k &\le (M_k(x_k,t_k))^{-2/(p-1)}\, u_k(x_k + \lambda_k y, t_k + \lambda_k s^2) \\ &= (M_k(x_k,t_k))^{-2/(p-1)}\, (M_k(x,t))^{2/(p-1)} \le 2^{2/(p-1)}. \end{aligned} \tag{6.3.23}$$

ここで右辺が k によらないことに注意せよ．$\rho_k := \mathrm{dist}(x_k, \partial\Omega)$ とおく．適当な部分列に取りかえることにより以下のいずれかが成り立つ．記号を簡略化するため部分列も同じ記号で表すことにする．

$$\rho_k/\lambda_k \to \infty \quad \text{as} \quad k \to \infty, \tag{6.3.24}$$

$$\rho_k/\lambda_k \to c \ge 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty. \tag{6.3.25}$$

極限式 (6.3.24) が成り立つ場合は式(6.3.20), (6.3.22), (6.3.23) とシャウダーの内部評価式を用いることよりある部分列があって v_k は $C^{\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^{N+1})$ ノルムで問題 (6.3.2) の非負値解 v に収束する．ただし $\alpha \in (0,1)$．ところが $v(0,0) = 1$ である．これは 定理 6.11 に反する．

極限式 (6.3.25) が成り立つときも式 (6.3.20), (6.3.22), (6.3.23) と内部評価によりある部分列があって v_k は $C^{\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^{N+1})$ ノルムで 初期境界値問題

$$
(6.3.26) \qquad \begin{cases} \partial_s v = \Delta_y v + v^p, & y \in H_c,\ s \in \mathbb{R}, \\ v = 0, & y \in \partial H_c,\ s \in \mathbb{R} \end{cases}
$$

の非負値解 v であって $v(0,0) = 1$ を満たす関数に収束する．ただし $H_c := \{y \in \mathbb{R}^N;\ y_1 \geq -c\}$ とする．これは定理 6.13 に反する． $\square$

先に述べたように Liouville 型の定理と普遍評価に関する Souplet 氏の詳しい解説が SNP2006 のアブストラクト集 [89] に掲載されている．これは非常にわかりやすい解説なので本節の内容についてもっと詳しく知りたい方はぜひこの報告集を参照せよ．

7　爆発後の解の延長と完全爆発

ここまでの議論を振り返ってみよう．まず第 3 章では初期境界値問題の解が爆発するか否かを論じるだけでなく，領域内のどこで爆発が起こり，それはどのようなオーダーで発散するのかを詳しく解析した．次に第 4 章では非線形熱方程式の初期値問題の解が爆発するかについて考慮した．また続く第 5, 6 章では時間大域解の有界性について考察した．

第 7 章，および第 8, 9 章では爆発時刻以後の解の様子を調べる．まず本章の前半で解の延長や完全爆発，不完全爆発について基本的な概念を導入する．爆発後の解の延長については，適正延長解と最小 L^1-延長解という 2 つの概念が知られている．本節ではそれらの定義の同等性についても論じる．[64] の論文においてはこれらも含めて詳しい一般論が論じられている．

また本章の後半では完全爆発に関するいくつかの結果を紹介する．不完全爆発については第 8, 9 章で論じる．

7.1　適正延長解と最小 L^1-延長解について

以下，$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は有界領域であり $\partial\Omega$ は C^2 級とする．この章では，関数 u は初期値 $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ に対する次の初期境界値問題の解であり，時刻 $T \in (0, \infty)$ において爆発するものとする．

$$(7.1.1)\qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \Omega, t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

また非線形項 $f(u)$ は $f' \geq 0, f(0) = 0$ を満たす関数とし u_0 は非負値関数とする．

冒頭では爆発後の解の振る舞いについて考察すると書いたが，古典解としての解の寿命は $t = T$ で終わっているので，それ以降は何らかの意味での広義解を考える必要がある．上に述べたように，これについては Baras-Cohen [6] による適正延長解と最小 L^1-延長解 ([22, 64, 77] など参照) の 2 つの概念がある．

まず適正延長解の定義から始める．基本的な考え方は解を次の近似方

程式の解 $\bar{u}_n$ の極限としてあらわすことである．そこで，以下で述べるような近似方程式を考える．

関数列 $f_n(u) = \min\{f(u), n\}$ に対して，偏微分方程式の族

$$
(7.1.2) \qquad \begin{cases} (u_n)_t = \Delta u_n + f_n(u_n), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u_n = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u_n(\cdot, 0) = u_0, & x \in \Omega \end{cases}
$$

を考える．この解は次の積分表示式を満たす

$$
(7.1.3) \qquad \bar{u}_n(t) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f_n(\bar{u}_n(s))\, ds.
$$

$f_n(u) \le n$ なので任意の $T_0 > 0$ に対して，$\|\bar{u}_n\|_{L^\infty((0,T_0)\times\bar{\Omega})} \le \|u_0\|_{C(\bar{\Omega})} + nT_0$ が成り立つ．ただし以下 $\{e^{t\Delta}\}_{t\ge 0}$ は，Dirichlet 境界条件下のラプラシアンが生成する半群とする．よって，近似解 $\bar{u}_n$ は古典解として時間大域的に存在する．この近似列が n に関して単調であることを示す．そのために

$$
\bar{u}_{n+1}(t) \ge \bar{u}_n(t), \quad 0 < t < \infty
$$

であることを帰納法で示そう．$n = 0$ のときは，$f_0(\bar{u}_0) = 0$ と任意の $u \ge 0$ に対して $f(u) \ge 0$ であること，及び作用素 $e^{(t-s)\Delta}$ の正値性より

$$
\bar{u}_1(t) - \bar{u}_0(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f_1(\bar{u}_1(s))\, ds \ge 0
$$

である．$\bar{u}_{n+1} \ge \bar{u}_n$ を仮定する．$f_n(u)$ の n，u に対する単調性と帰納法の仮定，及び作用素 $e^{(t-s)\Delta}$ の正値性より

$$
\bar{u}_{n+2}(t) - \bar{u}_{n+1}(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f_{n+1}(\bar{u}_{n+1}(s)) - f_n(\bar{u}_n(s))\, ds \ge 0
$$

である．以上から任意の $x \in \Omega,\ t \ge 0$ に対して $\bar{u}_{n+1}(x,t) \ge \bar{u}_n(x,t)$ が分かる．よって関数 $\bar{u}$ を

$$
\bar{u}(x,t) = \lim_{n\to\infty} \bar{u}_n(x,t), \qquad x \in \Omega,\ t \ge 0
$$

で定義できる．

注意 7.1. 非線形項 $f_n(u)$ の基本列のとり方が特殊に思われるかもしれない．実はこの非線形項の近似の仕方はより一般のとり方でもでもよい．すなわち適正延長解は，様々な f_n のとり方で同一の関数を与えるのでwell-defined である．詳細は [28] を参照．

定義 7.2. 上記のように定義された関数 $\bar{u}$ を，初期境界値問題 (7.1.1) の**適正延長解** (proper extension)，あるいは**最小解** (minimal solution) という．

補題 7.3. 初期境界値問題 (7.1.1) の適正延長解 $\bar{u}$ は任意の $t \in (0, \infty)$ に対して積分方程式

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(u(s))\, ds \tag{7.1.4}$$

を満たす．ただし上の等式は $+\infty$ の値をとる場合も含めて広義に解釈するものとする．

補題 7.3 の証明. $0 < t < \infty$ において

$$\begin{aligned}
\bar{u}(t) = \lim_{n\to\infty} \bar{u}_n(t) &= e^{t\Delta} u_0 + \lim_{n\to\infty} \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f_n(\bar{u}_n(s))\, ds \\
&= e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t \lim_{n\to\infty} e^{(t-s)\Delta} f_n(\bar{u}_n(s))\, ds \\
&= e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \lim_{n\to\infty} f_n(\bar{u}_n(s))\, ds \\
&= e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(\bar{u}(s))\, ds
\end{aligned}$$

である．第３番目の等号には，$e^{(t-s)\Delta}$ の正値性と $\{f_n(\bar{u}_n(s))\}_{n=1}^\infty$ の単調性より，$\{e^{(t-s)\Delta} f_n(\bar{u}_n(s))\}_{n=1}^\infty$ が n に関して単調増大であることと単調収束定理を適用した．また第４番目の等号には，基本解の正値性と $\{f_n(\bar{u}_n(s))\}_{n=1}^\infty$ の単調性より，$\{G(x, y, t-s) f_n(\bar{u}_n(s))\}_{n=1}^\infty$ が n に関して単調増大であることと単調収束定理を適用した．以上から等式 (7.1.4) がしたがう． □

つぎの補題が成り立つので適正延長解は最小解とも呼ばれる．

補題 7.4. t_1 は任意の正数とする．V は時間 $[0, t_1)$ において積分方程式(7.1.4) の非負可測関数解とする．このとき，$\Omega \times [0, t_1)$ 上において $V \geq \bar{u}$ が成り立つ．特に，適正延長解 $\bar{u}$ は $t \in [0, \infty)$ において上の積分方程式の最小な解 U に一致する．

補題 7.4 の証明. 関数 V は時刻 t_1 まで存在する上の積分方程式の任意の解とする．$\Omega\times[0,t_1)$ 上において $\lim_{n\to\infty}\bar{u}_n \le V$ が成り立つこと示す．まず，作用素 G_n, G を

$$\begin{aligned} G_n(w)(t) &= e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f_n(w(s))\,ds, \\ G(w)(t) &= e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(w(s))\,ds. \end{aligned}$$

で定めるとこれらの写像について次の性質が成り立つ．

① G, G_n は順序保存写像である．すなわち $w \le w'$ ならば $G_n(w) \le G_n(w')\,(n=1,2,3,\cdots)$, および $G(w) \le G(w')$ が成り立つ．

② $G_1 \le G_2 \le G_3 \le \cdots$ が成り立つ．

③ $w_k \nearrow w\,(k\to\infty)$ のとき $G_n(w_k) \nearrow G_n(w)$ かつ $G_k(w_k) \nearrow G(w)$.

性質③は $e^{t\Delta}$ の正値性と $f(u), f_n(u)$ の u, n に対する単調性と単調収束定理から容易に示される．

関数列 $\{u_n^k\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ を次のように定義する．

$$\begin{cases} u_n^k = G_n(u_n^{k-1}), \quad k=1,2,\cdots, \\ u_n^0(\cdot,t) \equiv 0. \end{cases}$$

このとき関数列

$$\hat{u}_n(x,t) := \lim_{k\to\infty} u_n^k(x,t), \qquad x\in\Omega,\, t\in[0,t_1)$$

が定義できることを示す．そのためには関数列 $\{u_n^k\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ の k に対する単調性を証明すればよい．すなわち $u_n^k \ge u_n^{k-1}\,(k=1,2,\cdots)$ を k に関する帰納法で示す．$f_n(u_n^0)=f(0)=0$ より $u_n^1(\cdot,t)=e^{t\Delta}u_0 \ge 0 = u_n^0$ である．$u_n^{k-1} \ge u_n^{k-2}\,(k=2,3,\cdots)$ を仮定する．性質①より

$$u_n^k = G_n(u_n^{k-1}) \ge G_n(u_n^{k-2}) = u_n^{k-1}.$$

$\hat{u}(x,t) := \lim_{n\to\infty}\hat{u}_n(x,t)$ が任意の時刻 $t\in[0,t_1)$ に対して定義可能であることを示す．$u_{n+1}^k \ge u_n^k\,(k=1,2,\cdots)$ を k に関する帰納法で示す．$0=u_{n+1}^0 \ge u_n^0 = 0$ であるから $k=0$ は自明．$u_{n+1}^k \ge u_n^k$ を仮定する．性質①より

$$u_{n+1}^{k+1} = G_n(u_{n+1}^k) \ge G_n(u_n^k) = u_n^{k+1}.$$

$k \to \infty$ の極限を考えることにより $\hat{u}_n$ が n に関して単調である．よって関数 $\hat{u}$ が定義できる．

$\hat{u}(x,t) := \lim_{n\to\infty} \hat{u}_n(x,t)$ が任意の時刻 $t \in [0,t_1)$ に対して積分方程式 (7.1.4) の解であることを示す．性質③より

$$G_n(\hat{u}_n) = G_n(\lim_{k\to\infty} \hat{u}_n^k) = \lim_{k\to\infty} G_n(\hat{u}_n^k) = \lim_{k\to\infty} u_n^{k+1} = \hat{u}_n.$$

よって $G_n(\hat{u}_n) = \hat{u}_n$．これと性質③より $n \to \infty$ の極限について

$$\hat{u} = \lim_{n\to\infty} \hat{u}_n = \lim_{n\to\infty} G_n(\hat{u}_n) = G(\hat{u}).$$

一方，初期境界値問題 (7.1.2) の解の一意性より $u_n = \hat{u}_n$ となる．すなわち $\bar{u} = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \hat{u}_n = \hat{u}$．すなわち $\hat{u}(x,t)$ が時間 $[0,t_1)$ において，積分方程式 (7.1.4) の解であることがわかった．

最後に $\bar{u} \leq V$ を証明する．$\bar{u} = \hat{u}$ であることから $\hat{u} \leq V$ を証明すればよい．そのためには $\hat{u}_n \leq V$ が成り立つことを示せばよい．関数列 $\{u_n^k\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ に対して $V \geq u_n^k$ $(n \in \mathbb{N}, k = 0,1,2,\cdots)$ であることを示して k に関して極限を考えればよいこの事実がしたがう．$k = 0$ のときは，明らか．$V \geq u_n^k$ $(k = 0,1,2,\cdots)$ を仮定する．このとき性質①，②より

$$V \geq G_n(V) \geq G_n(u_n^k) = u_n^{k+1}.$$

□

補題 7.5. $0 \leq t < T$ で $u = \bar{u}$ である．

補題 7.5 の証明. 補題 7.4 より適正延長解が積分方程式の最小な解である．古典解は積分方程式の解である．したがって，$u \geq \bar{u}$ が $(x,t) \in \Omega \times [0,T(u_0))$ において成立する．$t_0 < T$ ならば u は時間 $\Omega \times [0,t_0]$ において適当な定数 $M > 0$ によって上から押さえられる．関数 f の区間 $[0,M]$ における局所リプシッツ定数を $L = L_{f,M}$ とおく．定理 2.1 の証明の議論より

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq L \int_0^t \|u(s) - \bar{u}(s)\|_{L^\infty(\Omega)}\, ds.$$

Gronwall の不等式より

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq e^{L_f t} \|u(0) - \bar{u}(0)\|_{L^\infty(\Omega)} = 0.$$

よって古典解が存在する範囲では適正延長解は古典解と一致する． □

定義 7.6. $T^c = T^c(u_0) = \sup\{t \geq T\,;\, \bar{u}(x,t) < \infty \text{ for a.e. } x \in \Omega\}$ とする．一般には $T \leq T^c$ であるが，もし $T = T^c$ ならば初期境界値問題 (7.1.1) の解 u は**完全爆発** (complete blow-up) するという．また，$T < T^c$ ならば**不完全爆発** (incomplete blow-up) するという．

次に最小 L^1-延長解の概念について説明する．これは適正延長解と同様に非負の解に対して定義されるが，まずは符号変化を許す極限 L^1-解という概念を定義する．

定義 7.7. 以下の条件を満たす関数 $\tilde{u}$ を初期境界値問題 (7.1.1) の時刻 T^* までの**極限 L^1-解** (limit L^1-solution) と呼ぶ．関数列 $\{\tilde{u}_{0,n}\}_{n=1}^{\infty} \subset C(\Omega)$ は

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \tilde{u}_{0,n} = u_0 \quad \text{in} \quad C(\bar{\Omega})$

を満たし，これらを初期値にもつ初期境界値問題 (7.1.1) の古典解 $\{\tilde{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ は少なくとも $0 \leq t < T^*$ の範囲で存在するとする．さらに．

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n(\cdot,t) - \tilde{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} = 0, \quad t \in [0,T^*),$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|f(\tilde{u}_n) - f(\tilde{u})\|_{L^1(\Omega\times(0,t))} = 0, \quad t \in [0,T^*)$

が成り立つ．

定義 7.8. $u_0 \geq 0$ とする．極限 L^1-解 $\tilde{u}$ の近似関数列が以下の条件を満たすようにとれるとき $\tilde{u}$ を初期境界値問題 (7.1.1) の時間 T^* までの**最小 L^1-解** (minimal L^1-solution) と呼ぶ．

$$0 \leq \tilde{u}_{0,1} \leq \tilde{u}_{0,2} \leq \tilde{u}_{0,3} \leq \cdots \to u_0, \qquad u_{0,n} \not\equiv u_0. \tag{7.1.5}$$

u は初期値 u_0 に対する古典解，$\tilde{u}$ は同じ初期値に対する極限 L^1-解とすると，初期境界値問題 (7.1.1) の適切性より，$0 \leq t < T$ の範囲で $\tilde{u}_n(\cdot,t) \to u(\cdot,t)$ となることは明らか (ただし T は u の爆発時刻)．このとき $\tilde{u}$ を u の **極限 L^1-延長解** (limit L^1-continuation) と呼ぶ．**最小 L^1-延長解** (minimal L^1-continuation) についても同様に定義する．

注意 7.9. $u_{0,k}$ は不等式(7.1.5) を満たす点列とする．このとき極限関数は単調収束定理より極限 L^1-解の条件 (ii) (iii) を自動的に満たしている．したがって L^1-解として well-defined である．また全空間の問題を考える場合は初期値の近似列 $u_{0,k}$ の台はすべてコンパクトと仮定する．上で定義した最小 L^1-解が初期値の近似列のとり方によらないことは後述の命題 7.11 よりわかる．

最小 L^1-解についても補題 7.4 と同様の結果が成立する．すなわち次が成立する．

補題 7.10. 最小 L^1-解 $\tilde{u}$ は，時間 $[0, T^*)$ 上において積分方程式 (7.1.4) の解である．

補題 7.10 の証明. 関数 $\tilde{u}_n$ が満たす積分方程式は

$$\tilde{u}_n(t) = e^{t\Delta}u_{0,n} + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(\tilde{u}_n(s))\,ds$$

である．よって，$n \to \infty$ の極限を考えると

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \tilde{u}_n(t) &= \lim_{n\to\infty} e^{t\Delta}u_{0,n} + \lim_{n\to\infty} \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(\tilde{u}_n(s))\,ds \\
&= e^{t\Delta}(\lim_{n\to\infty} u_{0,n}) + \int_0^t \lim_{n\to\infty} e^{(t-s)\Delta} f(\tilde{u}_n(s))\,ds \\
&= e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \lim_{n\to\infty} f(\tilde{u}_n(s))\,ds \\
&= e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f\big(\lim_{n\to\infty} \tilde{u}_n(s)\big)\,ds.
\end{aligned}$$

第 2 式から第 3 式の変形には，$e^{t\Delta}$，$e^{(t-s)\Delta}$ の正値性と $\{u_{0,n}\}_{n=1}^{\infty}$ の n に対する単調性と，$f(u)$ の u に対する単調性より，$\{G(x,y,t-s)u_{0,n}(s)\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{e^{(t-s)\Delta}f_n(\tilde{u}_n(s))\}_n^{\infty}$ が n に関して単調増大であるので単調収束定理を適用した．また第 3 式から第 4 式の変形には，基本解の正値性と $\{f(\tilde{u}_n(s))\}_{n=1}^{\infty}$ の n に対する単調性，及び単調収束定理を適用した． □

さて適正延長解と最小 L^1-延長解の同値性を証明しよう．

命題 7.11. Ω は有界な凸領域とする．$f(u) = u^p$ とする．u_0 は有界かつ非負の関数とする．さらに初期境界値問題 (7.1.1) の解が時刻 $T > 0$ で爆発するとする．$\tilde{u}_n$ は問題 (7.1.1) の古典解の列であって

$$\begin{gathered}
0 \le \tilde{u}_n \le u_0, \quad \tilde{u}_n \not\equiv u_0 \quad \text{for} \quad n = 1, 2, \cdots \\
\tilde{u}_n(x, 0) \nearrow u_0(x) \quad \text{as} \quad n \to \infty \quad \text{for} \quad x \in \Omega.
\end{gathered}$$

$u_{0,n} \le u_0$ より比較原理を用いると，$\{\tilde{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ は n に対して単調増大列である．したがってその存在時間 $T(\tilde{u}_n)$ は単調減少であり，$T(\tilde{u}_n) \searrow {}^{\exists}T^*$.

このとき適正延長解 $\bar{u}$ と最小 L^1-延長解はそれらの最大存在時刻を込めて一致する．すなわち

$$\bar{u}(x,t) = \lim_{n\to\infty} \tilde{u}_n(x,t) \quad \text{for} \quad x \in \Omega, \quad t \in [0,T^*), \qquad T^* = T^c.$$

このことから特に $\tilde{u}$ は近似初期値列のとり方によらず well-defined であることもわかる．

この命題は以下の 2 つの補題からしたがう．

補題 7.12. 関数 $\bar{u}$ を初期境界値問題問題 (7.1.1) の適正延長解，関数 $\tilde{u}$ を問題 (7.1.1) の時間 T^* までの最小 L^1-延長解とする．この時,

$$\bar{u}(x,t) = \tilde{u}(x,t), \quad x \in \Omega,\, t \in [0,T^*) \tag{7.1.6}$$

が成り立つ.

補題 7.13. Ω は有界領域とする．$f(u) = u^p$ とする．このとき $T^c = T^*$.

補題 7.12 の証明. 最小 L^1-延長解 $\tilde{u}$ は，時間 $[0,T^*)$ 上において積分方程式(7.1.4) の正値解で最小なものに一致することを示せばよい．なぜならこの事実と補題 7.4 より題意が成立するからである．

これを示すためには関数列 $\{u_n^k\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ を $k=0$ に対しては $u_n^0(x,t) \equiv 0$, $k \geq 1$ に対しては

$$u_n^k(t) = e^{t\Delta}u_{0,n} + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(u_n^{k-1}(s))\, ds$$

で定義する．残りの議論は補題 7.4 の証明と全く同様なので省略する． $\square$

補題 7.13 の証明. 最小 L^1-解を定義するのに用いた点列 $\tilde{u}_n$ を考える．強最大値原理より Ω が有界の場合は Ω 内では $\tilde{u}_{n,0} < u_0$ と仮定してよい．適正延長解に関する後述の定理 7.26 (p 200) より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $T(\tilde{u}_n) \geq T^c(u_0)$ が成り立つ．よって $n \to \infty$ の極限を考えると，$T^* \geq T^c$．反対向きの不等式は以下の Kaplan の議論による．関数

$$h_n(t) := \int_\Omega \tilde{u}_n(\cdot,t)\varphi_1\, dx$$

は微分不等式

$$\begin{aligned}\frac{dh_n}{dt}(t) &= \int_\Omega (\tilde{u}_n)_t(\cdot,t)\varphi_1\,dx = \int_\Omega \{\,\Delta\tilde{u}_n(\cdot,t) + f(\tilde{u}_n(\cdot,t))\,\}\varphi_1\,dx \\ &= -\lambda_1\int_\Omega \tilde{u}_n(\cdot,t)\,\varphi_1\,dx + \int_\Omega f(\tilde{u}_n(\cdot,t))\,\varphi_1\,dx \\ &\geq -\lambda_1 h_n(t) + f(\,h_n(t)\,)\end{aligned}$$

を満たす．最小 L^1-解の定義より関数 $\tilde{u}_n$ は時刻 T^* 以降まで存在するから，関数 h_n も時刻 T^* まで存在する．ゆえに

$$\int_{h_n(t)}^\infty \frac{dh}{f(h)-\lambda_1 h} > \int_{h_n(t)}^{h_n(T^*)} \frac{dh}{f(h)-\lambda_1 h} \geq T^* - t.$$

ここで関数 $k(t)$ を以下の等式を満たすものとして定義する．

$$\int_{k(t)}^\infty \frac{dh}{f(h)-\lambda_1 h} = T^* - t.$$

この定義式より $t \in (0,T^*)$ に対して $h_n(t) \leq k(t)$ が成立する．関数 $\tilde{u}_n$ の n に対する単調性より

$$\begin{aligned}\int_\Omega \tilde{u}(\cdot,t)\varphi_1\,dx &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \tilde{u}_n(\cdot,t)\varphi_1\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \tilde{u}_n(\cdot,t)\varphi_1\,dx = \lim_{n\to\infty} h_n(t) \leq k(t).\end{aligned}$$

また，$f(u) = u^p$ を代入して計算すると，$t \to T^*$ のとき $k(t) = O(\,(T^* - t)^{-1/(p-1)}\,)$ であることがわかる．すなわち $t \to T^*$ のとき

$$\int_\Omega \tilde{u}(\cdot,t)\varphi_1\,dx = O(\,(T^*-t)^{-1/(p-1)}\,)$$

関数 $\tilde{u}$ が時刻 T^* までは，Ω 上においてほとんど至るところ有限の値をとることがわかる．すなわち，$T^* \leq T^c$ が成り立つ．以上から $T^* = T^c$ を得る． □

注意 7.14. 文献 [64] の命題 5.5 では u をリスケーリングした解を用いてよりシンプルな証明を与えている．上記の方法は Jensen の不等式を用いているので有界領域の場合にしか適用できないが，上記論文内の方法を用いれば，$\mathbb{R}^N$ の場合でも証明可能である．詳細は [64] を参照せよ．

注意 7.15. 適正延長解は非線形項をカットオフして近似列を構成している．したがってそれを定義する近似解 $\bar{u}_n$ は u と同じ方程式を満たしていない．一方，極限 L^1-延長解は近似列 $\tilde{u}$ が u と同じ方程式を満たしている．したがって近似関数について成り立つ不等式がそのまま極限 L^1-延長解に対しても成り立つのでいろいろと扱いやすいことがある．

また適正延長解に対しても比較原理が成り立つことが知られている．これについても [64] を見よ．

7.2　完全爆発の例

補題 7.16. $N = 1$, $\Omega = (-1, 1)$ とする．また，初期値 $u_0 \in C^2([-1, 1])$ は偶関数であり次の不等式を満たすとする．

$$u_0'' + u_0^p \geq 0, \quad u_0' \leq 0, \qquad x \in [0, 1].$$

このとき，初期境界値問題 (7.1.1) の解 u が爆発するならばそれは完全爆発である．

補題 7.16 の証明. 関数 $w = u_t$ は，方程式

$$\begin{cases} w_t = w'' + pu^{p-1}w, & x \in \Omega, 0 < t < T, \\ w(-1, t) = w(1, t) = 0, & 0 < t < T, \\ w(\cdot, 0) = {u_0}'' + {u_0}^p \geq 0, & x \in \Omega \end{cases}$$

を満たす．よって，最大値原理より $u_t \geq 0$, $(x, t) \in [-1, 1] \times [0, T)$ である．また関数 $w_2 = u_x$ は,

$$\begin{cases} w_t = w'' + pu^{p-1}w, & x \in \Omega, 0 < t < T, \\ w(1, t) \leq 0, & t > 0, \\ w(\cdot, 0) = u_0' \leq 0 \end{cases}$$

を満たす．よって，最大値原理より $u_x \leq 0$, $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T)$ である．

以下，$T < T^c$ として矛盾を導く．この仮定より，ある $x_0 \in (-1, 1)$ と $t_0 \in (T, \infty)$ があって，十分大きな任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $u_k(x_0, t_0) < \infty$ が成立する．$\varepsilon > 0$ を $t_0 - T \geq 2\varepsilon$, $|x_0| < 1 - \varepsilon$ を満たすように取る．積分表示式より

$$u_k(x, t) = \int_{-1}^{1} G(x, y, t) u_0(y)\, dy + \int_0^t \int_{-1}^{1} G(x, y, t - s) f_k(u_k(y, s))\, dyds.$$

ここで $C_\varepsilon = \inf\{G(x,y,s);\ |x|,\ |y| < 1-\varepsilon,\ s\in(\varepsilon,2\varepsilon)\} > 0$ とおく．また $G(x,y,t)$ は Dirichlet 境界条件を課した線形熱方程式 $v_t = \Delta v$ の Green 関数である．

関数 $u=u(x,t)$ は，$t\in[0,T)$ では古典解である．$\|u_0\|_{L^\infty([-1,1])}$ よりも十分大きな $k\in\mathbb{N}$ をえらぶ．このとき，十分短い時間 $(0,\tau)$ において u_k は u と同じ初期境界値問題の解である．したがって，区間 $[-1,1]\times[0,\tau)$ において $(u_k)_t\ge 0$ がわかる．これと比較原理を使って十分大きな任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して，

$$(u_k)_t \ge 0,\ (x,t)\in[-1,1]\times[0,\infty)$$

がしたがう．したがって，

$$\begin{aligned}
(7.2.1)\qquad \infty > u_k(x_0,t_0) &\ge \int_0^{t_0}\int_{-1}^{1} G(x_0,y,t_0-s) f_k(u_k(y,s))\,dyds\\
&\ge \int_{t_0-2\varepsilon}^{t_0-\varepsilon}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} G(x_0,y,t_0-s) f_k(u_k(y,s))\,dyds\\
&\ge C_\varepsilon \int_{t_0-2\varepsilon}^{t_0-\varepsilon}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} f_k(u_k(y,s))\,dyds\\
&\ge \varepsilon C_\varepsilon \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} f_k(u_k(y,T))\,dy.
\end{aligned}$$

である．はじめの不等式では，関数 u_0 と作用素 $e^{t\Delta}$ の正値性 2 番目，3 番目の不等式では基本解の正値性と $f_k(u_k)\ge 0$ を用いて，最後の不等式では $u_k(y,s)\ge u_k(y,T)$, $(y,s)\in(-1+\varepsilon,1-\varepsilon)\times[T,\infty)$ を用いた．これは，先に示した $(u_k)_t\ge 0,\ (x,t)\in[-1,1]\times[0,\infty)$ による．

以下の議論で不等式 (7.2.1) の右辺が有限値でないことを示して矛盾を示す．すなわち

$$(7.2.2)\qquad \lim_{t\nearrow T}\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} = \infty$$

を示すために，ある正の数 M があって，$t\in(0,T)$ に対して $\|u(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)}\le M$ として矛盾を導く．まず，補題 2.12 を $N=1$, $\alpha=1$, $\beta=\infty$ で適用すると

$$(7.2.3)\qquad \|e^{(t-s)\Delta}u^p(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \le (4\pi(t-s))^{-\frac{1}{2}}\|u^p(s)\|_{L^1(\Omega)}$$

を得る．したがって

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} &= \left\| e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(u(s))\,ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\le \|e^{t\Delta}u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(u(s))\,ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\le \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t (4\pi(t-s))^{-\frac{1}{2}} \|u^p(s)\|_{L^1(\Omega)}\,ds \\
&= \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t (4\pi(t-s))^{-\frac{1}{2}} \|u(s)\|^p_{L^p(\Omega)}\,ds \\
&\le \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + MC \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\,ds \\
&\le \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + 2MCt^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

を得る．2 番目の不等号では不等式 (7.2.3) と，作用素 $e^{t\Delta}$ の正値性より $e^{t\Delta}u_0 \le u_0$ であることを用いた．3 番目の不等号は，背理法の仮定である．右辺は任意の $t \in [0,T]$ に対して有界である．これは時刻 T に解 $u(x,t)$ が，爆発することに矛盾する．

$[-1,1] \times [0,T)$ において $u_t \ge 0$ であることより

$$
\phi(x) := \lim_{t \nearrow T} u(x,t)
$$

が定義できる．また

$$
\begin{aligned}
&u_x(x,t) > 0, \qquad x \in [-1,-1+\varepsilon],\ t \in (0,T), \\
&u_x(x,t) < 0, \qquad x \in [1-\varepsilon,1],\ t \in (0,T)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これと初期値の正値性，および式 (7.2.2) より

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to T} \int_{-1}^1 u^p(y,t)\,dy &= \lim_{t\to T} \left(\int_{-1}^{-1+\varepsilon} + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^1 \right) u^p(y,t)\,dy \\
&\le \lim_{t\to T} \left(\int_{-1+\varepsilon}^{-1+2\varepsilon} + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \int_{1-2\varepsilon}^{1-\varepsilon} \right) u^p(y,t)\,dy \\
&\le 3 \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} u^p(y,t)\,dy = \infty.
\end{aligned}
$$

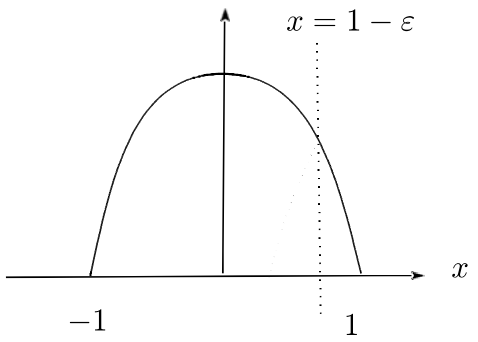


図 3: 解 u は境界近傍で外方向に減少している．

したがって，

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} f_k(u_k(y,T))\,dy = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\lim_{k\to\infty} f_k(u_k(y,T))\,dy \tag{7.2.4}$$
$$= \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\phi^p(y)\,dy$$
$$= \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\lim_{t\to T} u^p(y,t)\,dy$$
$$= \lim_{t\to T}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} u^p(y,t)\,dy = \infty$$

が得られる．はじめの等号では，k について単調に $f_k(u_k(y,T)) \nearrow \phi^p(y)$ であることと単調収束定理を用いた．4 番目の等号では $t \nearrow T_-$ のとき，t について単調に $u(y,t) \nearrow \phi(y)$ であることと単調収束定理を用いた．一方，不等式 (7.2.1) の右辺は有限値ではないので矛盾．ゆえに $T = T^c$ でなくてはいけない．したがって，題意が成立する． □

つぎの定理によると p がソボレフの臨界指数 p_s 未満では完全爆発しか起こらない．

定理 7.17. (Baras-Cohen 1987 [6]) $1 < p < p_s$ とする．領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を C^2 級境界をもつ有界領域とする．$u_0 \in L^\infty(\Omega)$ は Ω 上 $u_0 \geq 0$ とし，初期境界値問題 (7.1.1) の解 u が時刻 $t = T < \infty$ で爆発するとしよう．このとき，その爆発は完全爆発である．

定理 7.17 の証明. 次に述べる補題 7.18 を認めると任意の $\alpha \in (0,1)$ に対して $T(\alpha u_0) > T^c(u_0)$ が成り立つ．一方 系 5.22 より $\lim_{\alpha\nearrow 1} T(\alpha u_0) = T(u_0)$．よって $T(u_0) \geq T^c(u_0)$ が成り立つので完全爆発． □

補題 7.18. 非線形項 f はある $\gamma > 1$ に対して $f(u)/u^\gamma$ が $u > 0$ で単調増大であるようなものとする．u_0 は有界な非負値連続関数とし，次の問題の爆発時刻を T とおく．

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \Omega,\, t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega,\, t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0. & x \in \Omega. \end{cases}$$

また，$T^c(\lambda) > 0$ をつぎの問題の適正延長解が完全爆発する時刻とする．

$$\begin{cases} (u_\lambda)_t = \Delta u_\lambda + f(u_\lambda), & x \in \Omega,\, t > 0, \\ u_\lambda = 0, & x \in \partial\Omega,\, t > 0, \\ u_\lambda(\cdot, 0) = \lambda u_0, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{7.2.5}$$

このとき任意の $\lambda > 1$ に対して $T > T^c(\lambda)$ であり，さらに

$$\bar{u}(x,t) \le \frac{\lambda}{(\lambda^{\gamma-1} - 1)^{\frac{1}{\gamma-1}}} v(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0, T^c(\lambda)].$$

ここで v は次の熱方程式の解とする．

$$\begin{cases} v_t = \Delta v, & x \in \Omega,\, t > 0, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega,\, t > 0, \\ v(\cdot, 0) = u_0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

補題 7.18 の証明 . 初期値問題 (7.2.5) の適正延長解を $\bar{u}_\lambda$ とおく．関数列 $\{u_\lambda^n\}$ を $n = 0$ のときは $u_\lambda^0 \equiv 0$ とし，$n \ge 1$ に対しては以下の初期境界値問題の解として帰納的に定義する．

$$\begin{cases} u_{\lambda t}^n = \Delta u_\lambda^n + f(u_\lambda^{n-1}), & x \in \Omega,\, 0 < t < 0, T^c(\lambda), \\ u_\lambda^n = 0, & x \in \partial\Omega,\, 0 < t < T^c(\lambda), \\ u_\lambda^n(\cdot, 0) = \lambda u_0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

補題 7.4 の証明より任意の $x \in \Omega, t > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} u_\lambda^n(x,t) \equiv \bar{u}_\lambda(x,t)$ が成り立つ．任意の $\lambda \ge 1$ に対して

$$0 \le u_\lambda^n \le u_\lambda^{n+1} \le \bar{u}_\lambda, \quad x \in \Omega,\, 0 < t < T^c(\lambda), \tag{7.2.6}$$

$$\lambda u_1^n \le u_\lambda^n, \quad x \in \Omega,\, 0 < t < T^c(\lambda) \tag{7.2.7}$$

が成り立つことを示そう．

まず，不等式 (7.2.6) を帰納法で証明する．$n = 0$ のときは明らか．$n=k$ での成立を仮定する．すなわち，

$$0 \le u_\lambda^k \le u_\lambda^{k+1} \le \bar{u}_\lambda$$

を仮定する．このとき，f の単調性および $e^{t\Delta}$ の正値性より

$$\begin{aligned}
u_\lambda^{k+2}(t) - u_\lambda^{k+1}(t) &\ge \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\bigl\{f(\,u_\lambda^{k+1}\,) - f(\,u_\lambda^k\,)\bigr\}\,ds \ge 0,\\
\bar{u}_\lambda(t) - u_\lambda^{k+2}(t) &\ge \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\bigl\{f(\,\bar{u}_\lambda\,) - f(\,u_\lambda^{k+1}\,)\bigr\}\,ds \ge 0.
\end{aligned}$$

これより $n=k+1$ のときも不等式(7.2.6) が成立することがわかる．

次に不等式 (7.2.7) を示す．$n=0$ のときは自明．$n=k$ での成立を仮定する．すなわち，$\lambda u_1^k \le u_\lambda^k$ を仮定する．このとき，$\lambda \ge 1$ と f の優線形性より $f(u_\lambda^k) \ge \lambda f(u^k)$．これと関数 f の単調性，および $e^{(t-s)\Delta}$ の正値性より

$$\begin{aligned}
u_\lambda^{k+1}(t) - \lambda u_1^{k+1}(t) &= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\bigl\{f(\,u_\lambda^k\,) - \lambda f(\,u_\lambda^1\,)\bigr\}\\
&\ge \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\bigl\{\lambda f(\,u_1^k\,) - \lambda f(\,u_\lambda^1\,)\bigr\} \ge 0.
\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも不等式 (7.2.7) が成立する．

$m \in \mathbb{N}$，$\mu \ge 1$ に対して

$$E_\mu^m := \{(x,t) \in \Omega \times (\,0, T^c(\lambda)\,)\,;\, u_1^m(x,t) \ge \mu v(x,t)\}$$

とおき，さらに $g_n^m(\mu)$, w を以下で定義する．

$$\begin{aligned}
&g_n^m(\mu) = \inf_{(x,t)\in E_\mu^m} \frac{u_\lambda^n(x,t)}{u_1^m(x,t)},\\
&w(x,t) = u_\lambda^{n+1}(x,t) - F(\,g_n^m(\mu)\,)u_1^m(x,t) + \mu\bigl(F(\,g_n^m(\mu)\,) - g_{n+1}^m(\mu)\bigr)v(x,t).
\end{aligned}$$

ただし，$F(\sigma) = \sigma^\gamma$ とする．w は $\Omega \times (\,0, T^c(\lambda)\,)$ のおいて古典解である．また，$n \ge m > 1$, $\lambda > 0$ ならば任意の $(x,t) \in E_\mu^m$ に対して次を得る．

$$\begin{aligned}
&w_t - \Delta w = f(u_\lambda^m) - F(\,g_n^m(\mu)\,)\,f(u_1^{m-1}),\\
&\quad w(x,t) \ge g_{n+1}^m(\mu) u_1^m(x,t) - F\bigl(g_n^m(\mu)\bigr)\,u_1^m(x,t) + \mu\bigl(F(g_n^m(\mu)\bigr) - g_{n+1}^m(\mu))v(x,t).
\end{aligned}$$

不等式 (7.2.7) より $n \geq m > 1$, $\lambda > 0$ ならば $\lambda u_1^m \leq \lambda u_1^n \leq u_\lambda^n$ であることがわかる．ゆえに

$$\frac{u_\lambda^n(x,t)}{u_1^m(x,t)} \geq \lambda, \quad x \in \Omega,\, t \in (\,0, T^c(\lambda)\,).$$

左辺に対して $(x,t) \in E_\mu^m$ に関する下限を考えれば，$g_n^m(\mu)$ の定義より任意の $\mu \geq 1$ に対して次の不等式を得る．

$$g_n^m(\mu) = \inf_{(x,t)\in E_\mu^m} \frac{u_\lambda^n(x,t)}{u_1^m(x,t)} \geq \lambda > 1. \tag{7.2.8}$$

また，非線形項の条件より $f(ab) \geq F(a)f(b)$ if $a \geq 1$ が成り立つから

$$f(u_\lambda^n) \geq f(g_n^m(\mu)u_1^m) \geq F\bigl(g_n^m(\mu)\bigr)f(u_1^m), \quad (x,t) \in E_\mu^m.$$

したがって，

$$w_t - \Delta w \geq 0, \quad (x,t) \in E_\mu^m$$

を得る．さらに，$\partial E_\mu^m \setminus (\Omega \times T)$ 上において $u_1^m = \mu v$ であることから

$$w \geq 0, \qquad (x,t) \in \partial E_\mu^m \setminus (\Omega \times T).$$

よって，最大値原理より E_μ^m 上において $w \geq 0$ が成り立つ．

$\mu' \geq \mu$ に対して $E_{\mu'}^m \subset E_\mu^m$ であり次の不等式が成立する．

$$v(x,t) < \frac{u_1^m(x,t)}{\mu'}, \quad (x,t) \in E_{\mu'}^m\ .$$

E_μ^m 上において $w \geq 0$ が成り立つことから

$$g_{n+1}^m(\mu') \geq f\bigl(g_n^m(\mu)\bigr) - \bigl(F(\,g_n^m(\mu)\,) - g_{n+1}^m(\mu)\bigr)\frac{\mu}{\mu'} \tag{7.2.9}$$

が成立することがわかる．$E_\mu^m \neq \emptyset$ であるような任意の μ, m に対して，$\{g_n^m(\mu)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調非増大な列であり，有界な実数 $\inf_{E_\mu^m} \bar{u}_\lambda/u_\lambda^m$ により上から押さえられる．よって $\lim_{n\to\infty} g_n^m(\mu) := g^m(\mu)$ が存在する．さらに不等式 (7.2.9) より

$$g^m(\mu') \geq f(\,g^m(\mu)\,) - \bigl(F(\,g^m(\mu)\,) - g^m(\mu)\bigr)\frac{\mu}{\mu'}$$

を満たす．したがって，任意の $\mu' \geq \mu > 1$ に対して

$$\frac{g^m(\mu') - g^m(\mu)}{F(\, g^m(\mu)\,) - g^m(\mu)} \geq \frac{\mu' - \mu}{\mu'}$$

が成り立つことがわかる．

$$\Theta(\sigma) := F(\sigma) - \sigma = \sigma^\gamma - \sigma$$

とおいて上の式を変形すれば

$$\frac{\big(g^m(\mu') - g^m(\mu)\big)/(\mu' - \mu)}{\Theta(\, g^m(\mu)\,)} = \frac{1}{\mu'}$$

を得る．$\mu' \to \mu$ の極限を考えれば

$$\frac{\dfrac{d}{d\mu} g^m(\mu)}{\Theta(\, g^m(\mu)\,)} \geq \frac{1}{\mu}.$$

したがって両辺を積分すれば，任意の $\mu \geq \mu_0 > 1$ に対して

$$\log\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) \leq \int_{g^m(\mu_0)}^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^\gamma - \sigma} = \left[\frac{1}{\gamma - 1}\log\left(x^{\gamma-1} - 1\right) - \log x\right]_{g^m(\mu_0)}^{\infty}$$

であることがわかる．式 (7.2.8) から $g^m(\mu_0) \geq \lambda$ である．よって

$$\log\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) \leq \log\left[\frac{\lambda}{(\lambda^{\gamma-1} - 1)^{\frac{1}{\gamma-1}}}\right]$$

もし μ が

$$\mu > \frac{\lambda}{(\lambda^{\gamma-1} - 1)^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

を満たすならば E^m_μ は空集合．したがって，$\Omega \times (\, 0, T^c(\lambda)\,)$ 上

$$u_1^m(x,t) \leq \frac{\lambda}{(\lambda^{\gamma-1} - 1)^{\frac{1}{\gamma-1}}}\; v(x,t).$$

不等式 (7.2.6) において極限をとると

$$\lim_{m\to\infty} u_\lambda^m \leq \bar{u}_\lambda$$

を得る．$\lim_{m\to\infty} u_\lambda^m$ は問題 (7.2.5) の適正延長解であるから，任意の $\lambda \geq 1$ に対して $\lim_{m\to\infty} u_\lambda^m = \bar{u}_\lambda$ が成り立つ．よって題意が成立する． □

進行波型の劣解との比較を用いた完全爆発の証明法について紹介する．この方法は初期値問題ならば正値球対称である限り一般の次元にも退化した拡散項を有する方程式の場合も一般化が可能である．定理 7.23 の (i) には線形拡散の場合の主張のみ紹介しているが，[28] にその詳細な議論が書かれている．ここでは 1 次元の場合のみを考察し，彼らのアイディアのみ紹介する．初期値問題

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + |u|^{p-1}u, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0 & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{7.2.10}$$

を考えよう．ただし，$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ は非負値関数で $|x| \to \infty$ のとき $u_0(x) \to 0$ とする．

定理 7.19. (Galaktionov-Vázquez 1995 [27])　初期値 $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ に対してある正の定数 $M_0, M_1 > 0$ があって，つぎが成り立つとする．

$$u_0(x) \le M_0,\ |u_0'(x)| \le M_1, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7.2.11}$$

このとき初期値問題 (7.2.10) の解が爆発するならば，その爆発は完全である．

正数 $\lambda > 0$ は任意とし，初期値問題 (7.2.10) に対して

$$V(x,t) = \theta(\xi), \qquad \xi = x - \lambda t + a$$

の形に書ける解があるとすれば問題 (7.2.10) の第 1 式より関数 θ は次の常微分方程式を満たす.

$$\theta''(\xi) + \lambda\theta'(\xi) + \theta^p(\xi) = 0. \tag{7.2.12}$$

$\theta' =: -Y$ とおく．関数 $Y = Y(\theta)$ は次の方程式を満たす.

$$Y\frac{dY}{d\theta} - \lambda Y + \theta^p = 0. \tag{7.2.13}$$

微分方程式 (7.2.12) が単調減少かつ正値解であることは，(θ, Y) 相平面の第 1 象限内に解 $(\theta, Y(\theta))$ がとどまり続けることと同値であることに注意する．

補題 7.20. 常微分方程式 (7.2.13) の (θ, Y) 相平面の第 1 象限内に初期値をもつ解 $(\theta, Y(\theta))$ はある有限の θ_0 で $Y(\theta_0) = 0$ になる．すなわちもし(7.2.12) の解 $\theta(\xi)$ の上限値がとても大きいならば関数 $\theta(\xi)$ は極大点を有する．

補題 7.20 の証明. 微分方程式 (7.2.13) より $\dfrac{dY}{d\theta} \leq \lambda$ である．ゆえに

$$Y \leq \lambda\theta + c. \tag{7.2.14}$$

方程式 (7.2.13) より (θ, Y) 相平面上 $\lambda Y \leq \theta^p$ が成り立つ点 (θ, Y) では $Y(\theta)$ は θ について単調減少，$\lambda Y \geq \theta^p$ が成り立つ点 (θ, Y) では $Y(\theta)$ は θ について単調増大である．これと式(7.2.14) より $(\theta, Y(\theta))$ は有限のある θ_0 で $Y(\theta_0) = 0$ になるか，任意の $\theta > 0$ に対して $Y(\theta) > 0$ のいずれかである．

一方，方程式 (7.2.13) の両辺を θ について 1 から θ まで積分すると次を得る．

$$\frac{1}{2}Y^2(\theta) - \frac{1}{2}Y^2(1) = \lambda\int_1^\theta Y(\theta)\,d\theta - \frac{1}{p+1}(\theta^{p+1} - 1).$$

この等式と不等式 (7.2.14) より次の不等式を得る．

$$\frac{1}{2}Y^2 \leq \frac{\lambda^2}{2}\theta^2 + c\theta - \frac{\theta^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}Y^2(1).$$

この不等式よりの右辺は $\theta \to \infty$ のとき負になってしまう．よって，解曲線 $Y(\theta)$ が第 1 象限上に存在するならば θ の大きさに上限があることがわかる．したがってある θ_0 があって $Y(\theta_0) = 0$ にならなければならない．

これは微分方程式 (7.2.12) の解は $\mathbb{R}$ 全体で単調にはなり得ないことを意味する． □

常微分方程式 (7.2.12) に初期条件を課した次の問題を考える．

$$\begin{cases} \theta'' + \lambda\theta' + \theta^p = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ \theta(0) = \mu, \quad \theta'(0) = 0. \end{cases} \tag{7.2.15}$$

以下，初期値問題 (7.2.15) の解を $\theta_\mu(\xi)$ と書くことにする．

補題 7.21. 任意の $C > 0$ に対して，十分大きな $\mu > 0$ を選べば，任意の $1 \ll \lambda < \lambda_\mu$ に対して次が成り立つ．

$$|\theta'_\mu(\xi)| \gg C, \qquad \xi \in \{\theta = m \in [0, C]\}.$$

ただし，$\lambda_\mu := \sqrt{2\mu^{p-1}/(p+1)}$ とする．

補題 7.21 の証明. 補題 7.20 と同様の計算により

$$\frac{1}{2}Y^2(\mu)-\frac{1}{2}Y^2(m)=\lambda\int_m^\mu Y(\theta)\,d\theta-\frac{1}{p+1}(\mu^{p+1}-m^{p+1}).$$

を得る．したがって $Y(\theta)\le\lambda\theta+c,\ Y>0,\ \lambda<\lambda_\mu$ に注意すれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}Y^2(m)&\ge-\lambda\int_m^\mu Y(\theta)\,d\theta+\frac{1}{p+1}(\mu^{p+1}-m^{p+1})\\&\ge\Big(\frac{\lambda_\mu^2}{2}-\frac{\lambda^2}{2}\Big)\mu^2+O(\mu)\to\infty\qquad\text{as}\quad\mu\to\infty.\end{aligned}$$

□

補題 7.22. 定数 $M_0,M_1>0$ は式 (7.2.11) に与えたものとする．ある正の定数 $M_k=M_k(M_0,M_1)$ があって，点 $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}\times(0,T)$ に対して $u_0(x_0,t_0)\ge M_k$ とする．このとき任意の $t\in[t_0,T)$ に対して $u_t(x_0,t)\ge 0$.

補題 7.22 の証明. $U_0(x;\alpha,a)$ を次の 2 階常微分方程式の解とする．

$$U_{xx}+U^p=1,\quad U(a)=\alpha,\quad U'(a)=0.$$

ただし，$a\in\mathbb{R},\alpha>0$ とする．この関数は初期値問題 (7.2.10) の正値とは限らない定常解である．さらに，$U_0(x;\alpha,a)$ を点 $a\in\mathbb{R}$ から最も近い 2 つの零点の外側では恒等的に 0 と置きかえ，その非負値関数を $U(x;\alpha,a)$ と書くことにする．定常解の自己相似性より次が成り立つ．

$$U(x;\alpha,a)=\alpha U(\alpha^{(p-1)/2}|x-a|;1,0). \tag{7.2.16}$$

式 (7.2.11)，(7.2.16) より定数 $M_k=M_k(M_0,M_1)$ があって，任意の $\alpha\ge M_k$ と任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して $u_0(x)$ と $U(x;\alpha,a)$ は交点を 2 点のみもち，その両方で横断的に交わる．点 $(x_0,t_0)\in\mathbb{R}\times(0,T)$ に対して $u(x_0,t_0)\ge M_k$ とする．適当な $\alpha_0>0,\ a_0\in\mathbb{R}$ を選べば $U(x;\alpha_0,a_0)$ と $u(x,t_0)$ が点 $x_0\in\mathbb{R}$ のみで交わるようにできる．すなわち次が成立．

$$U(x_0;\alpha_0,a_0)=u(x_0,t_0),\qquad U'(x_0;\alpha_0,a_0)=u_x(x_0,t_0). \tag{7.2.17}$$

一方 $M_k>0$ の定義より $u_0(x)$ と $U(x;\alpha,a)$ は 2 つの交点をもち，その交わりは横断的．これと等式 (7.2.17)，及び零点数の非増大の性質から

$$u(x_0,t)\ge U(x_0;\alpha_0,a_0)=u(x_0,t_0),\qquad t\in[t_0,T).$$

これより補題が証明された． □

定理 7.19 の証明. $0 \in B(u_0)$ としても一般性を失わないので，以下この証明では $x=0$ の近傍のみを考える．$\lim_{\mu\to\infty} \lambda_\mu = \infty$ が成り立つことに注意する．このことから，十分大きな $\mu > 0$ に対して $u_0(x)$ と $V(x,0)$ は少なくとも 2 点で交わる．$u(x,t) - V(x,t)$ の $I(t) := \{x \in \mathbb{R}\,;\, V(x,t) > 0\}$ の範囲での零点の数を $Z_{I(t)}(u(\cdot,t) - V(\cdot,t))$ と書き表すことにする．

$$Z_{I(0)}(u(\cdot,0) - V(\cdot,0)) \le 2, \qquad 1 \ll \lambda \le \lambda_\mu, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{7.2.18}$$

u は正値であり，関数 V は集合 $\{x \in \mathbb{R}\,;\, V(x,t) > 0\}$ の境界で 0 になるから零点数の非増大の定理を使うことができる．よって

$$Z_{I(t)}(u(\cdot,t) - V(\cdot,t)) \le 2, \quad t \in (0,T), \quad 1 \ll \lambda \le \lambda_\mu, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{7.2.19}$$

一方，$0 \in B(u_0)$ より $k \to \infty$ のとき $x_k \to 0$，$t_k \to T$ を満たす点列があって $u(x_k,t_k) \to \infty$．したがって $\mu \to \infty$ のとき $x_\mu \to 0$，$t_\mu \to T$ であって以下の不等式を満たす点列が存在する．

$$u(x_\mu, t_\mu) \ge \mu, \quad x_\mu \to 0, \quad t_\mu \to T.$$

$\lambda = \lambda_\mu$, $a = \lambda_\mu t_\mu$ とおくと $V(x,t_\mu) = \theta(x)$ となる．不等式(7.2.19) より $Z_{I(t_\mu)}(u(\cdot,t_\mu) - V(\cdot,t_\mu)) \le 2$．これより $Z_{I(t_\mu)}(u(\cdot,t_\mu) - V(\cdot,t_\mu)) > 0$ のとき $u(x,t_\mu)$ と $V(x,t_\mu)$ の交点は x_μ の左右の一方にのみ存在する．このことから，ある $b_\mu \in \mathbb{R}$ があって $\tilde{V}(x,t_\mu) := \theta(x+b_\mu)$ に対して $Z_{I(t_\mu)}(u(\cdot,t_\mu) - V(\cdot,t_\mu)) = 0$ が成り立つとしてよい．なぜならば，もしこれが成り立たないとすると，幾何学的な考察により適当な平行移動を施したら零点数が 3 以上になるが不等式 (7.2.19) は任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して成り立つので零点数の非増大性に矛盾するからである．ここで関数 θ は補題 7.21 より十分大きな傾きを持つ釣り鐘型の関数であるから $\mu \to \infty$ のとき $b_\mu \to 0$ となることに注意する．

以下 $Z_{I(t_\mu)}(u(\cdot,t_\mu) - V(\cdot,t_\mu)) = 0$ が成り立つとして議論する．このとき，比較原理より

$$u(x,t) \ge \tilde{V}(x,t) = \theta(x - \lambda_\mu(t-t_\mu) + b_\mu), \quad t \in (t_\mu, T).$$

再び比較原理を適用することにより適正延長解の $\bar{u}$ に対しても

$$\bar{u}(x,t) \ge \tilde{V}(x,t) = \theta(x - \lambda_\mu(t-t_\mu) + b_\mu), \quad t \in (t_\mu, \infty)$$

が成り立つことがわかる．

よって，ある $\mu > 0$ によらない定数 $\delta > 0$ があって

$$\bar{u}(x, T+\delta) \geq \tilde{V}(x, T+\delta) = \theta(x - \lambda_\mu(T - t_\mu + \delta) + b_\mu).$$

$\mu \to \infty$ のとき $\lambda_\mu \to \infty$, $t_\mu \to T$, $b_\mu \to 0$ であるから

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, T+\delta) &\geq \tilde{V}(x, T+\delta)\\ &= \sup_{\mu \gg 1} \theta(x - \lambda_\mu(T - t_\mu + \delta) + b_\mu)\\ &= \sup_{\lambda \gg 1} \theta(x - \lambda\delta).\end{aligned}$$

これより $\bar{u}$ は時刻 $t \in (T, T+\delta)$ において $x = \lambda t$ の近傍で極大値 $\mu \gg 1$ をとる．よって，補題 7.22 より $(0, \lambda\delta) \times (T, T+\delta)$ では関数 $\bar{u}$ は単調増大と考えてよい．ここで，$\lambda \gg 1, \mu \gg 1$ はいくらでも大きく取れるので $x > 0$ に対して $\bar{u}(x, T+\delta) \equiv \infty$ となる．よって解は完全爆発する． □

p が臨界指数以上のときは，以下の定理が知られている．正値球対称である限り一般の次元にも退化した拡散項を有する方程式の場合でも同様の定理が成り立つ．(i) の証明は上記 1 次元の場合と同様で進行波との比較を行う．また (ii) については，8 章で扱う．

定理 7.23. (Galaktionov-Vázquez 1997 [28]) $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N;\ r = |x| < R\}$ であり，$N \geq 3$ とする．関数 u_0 は $u_0 \geq 0, (u_0)_r \leq 0$ を満たすとする．この関数 u_0 を初期値とした初期境界値問題 (7.1.1) の解に対して，次のことが成立する．

(i) $p = (N+2)/(N-2)$ か，$B(u_0) := \{x \in \mathbb{R}^N; u(x,t) = \infty\} \neq \{0\}$ のとき，初期境界値問題 (7.1.1) の解 u は完全爆発する．

(ii) $p > (N+2)/(N-2)$, $N > 2$ のとき，初期境界値問題 (7.1.1) は完全爆発しない解を持つ．

より一般の場合を含む次の定理は [66] のアイディアに基づく．証明は大変短い．[37, 38] の結果とを組み合わせれば完全爆発についてこれまでの結果のすべてを含む定理が得られる．

定理 7.24. 初期境界値問題 (7.1.1) の解が有限時間 $t = T$ で爆発するとする．$a \in \Omega$ は方程式 (7.1.1) の解 u の爆発点の 1 つとする．もし任意の $C > 0$ に対して $|y| \leq C$ 上一様に $\lim_{s\to\infty} w_{a,T}(y,s) = \kappa$ または $\lim_{s\to\infty} w_{a,T}(y,s) = -\kappa$ ならば u は完全爆発する．

定理 7.24 の証明. 以下の議論では記号を簡単にするため

$$I(w(s)) := -2E(w(\cdot,s)) + \frac{p-1}{p+1}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} w^2(\cdot,s)\rho\,dy\Big)^{\frac{p+1}{2}}$$

と書き表すことにする．w が定関数のときは

$$I(w) = \int_{\mathbb{R}^N}\Big(-\frac{w^2}{p+1} + |w|^{p+1}\Big)\rho\,dy.$$

よって $I(\kappa)=0$. さらに簡単な計算から

$$I(\mu\kappa) > 0 \quad \text{for all} \quad \mu > 1. \tag{7.2.20}$$

しかも $\mu>1$ が増大すれば $I(\mu\kappa)$ はいくらでも大きくなる．$I(w_{a,T_1}(\cdot,s^*))<0$ がある $s^*>s_0$ に対して成り立つとき w_{a,T_1} は有限時間で発散することに注意せよ．これは $T(u_0)<T_1$ を意味する．$\Omega=\mathbb{R}^N$ であって $|y|\le C$ 上一様に $\lim_{s\to\infty} w_{a,T}(y,s)=\kappa$ の場合のみ証明する．一般の有界領域の場合や $-\kappa$ に収束する場合も全く同様の議論で証明できる．$T^*>T$ を仮定して矛盾を導く．$T_1\in(T,T^*)$ を一つ選んで固定する．近似列の性質より $T_n=T(\tilde{u}_n)$ を $\tilde{u_n}$ の最大存在時間とすれば十分大きな n では常に $T^*>T_n>T_1>T$ と仮定して良い．方程式 (7.1.1) の平行移動不変性から $a=0$ として一般性を失わない．まず

$$s=-\log(T-t),\quad s_1=-\log(T_1-t),\quad y=\frac{x}{\sqrt{T-t}}.$$

変数変換の形から

$$w_{0,T}\Big(\sqrt{\frac{T_1-t}{T-t}}y,s\Big) = \Big(\frac{T-t}{T_1-t}\Big)^{\frac{1}{p-1}} w_{0,T_1}(y,s_1),$$

$t=T-\varepsilon$ を代入して

$$w_{0,T_1}\Big(y,s_\varepsilon\Big) = \mu_\varepsilon w_{0,T}\Big(\mu_\varepsilon^{\frac{p-1}{2}}y,\,\log\frac{1}{\varepsilon}\Big). \tag{7.2.21}$$

ただし $s_\varepsilon=-\log(T_1-T+\varepsilon)$, $\mu_\varepsilon=\Big(\frac{T_1-T+\varepsilon}{\varepsilon}\Big)^{\frac{1}{p-1}}$ と書き表すことにする．$\mu_\varepsilon>1$，$\lim_{\varepsilon\to0}\mu_\varepsilon=\infty$ および $\lim_{\varepsilon\to0}s_\varepsilon=-\log(T_1-T)$ に注意せよ．$\varepsilon>0$ を十分小さく選べばある定数 $\delta>0$ があって

$$I(w_{0,T_1}(s_\varepsilon)) \ge \delta \tag{7.2.22}$$

とできることを示そう．以下 $I(w_{0,T_1}(s))$ の右辺の積分領域を集合 $D \subset \mathbb{R}^N$ に制限したものを $I_D(w_{0,T_1}(s))$ と書き表すことにする．重み関数 ρ が遠方で指数減衰することと (7.2.20) から $\mu > 1$ ならば十分大きな任意のコンパクト集合 $\mathcal{K}$ に対して $I_{\mathcal{K}}(\mu\kappa) > 0$ が成り立つ．一方，定理の仮定と (7.2.21) から $\varepsilon > 0$ を十分小さく選べば $w_{0,T_1}(s_\varepsilon)$ は y について任意のコンパクト集合上 C^1 の意味で $\mu_\varepsilon\kappa$ ($\mu_\varepsilon > 1$) にとても近い．したがってある $\delta > 0$ があって $I_{\mathcal{K}}(w_{0,T_1}(s_\varepsilon)) \geq 2\delta$．エネルギーの重み ρ は遠方で指数関数的に減少していることから必要ならコンパクト集合 $\mathcal{K}$ を大きく取り直すことで $|I_{\mathbb{R}^N\setminus\mathcal{K}}(w_{0,T_1}(s_\varepsilon))| \leq \delta$ とできる．以上 2 式から

$$\begin{aligned} I(w_{0,T_1}(s_\varepsilon)) &= I_{\mathcal{K}}(w_{0,T_1}(s_\varepsilon)) + I_{\mathbb{R}^N\setminus\mathcal{K}}(w_{0,T_1}(s_\varepsilon)) \\ &\geq I_{\mathcal{K}}(w_{0,T_1}(s_\varepsilon)) - |I_{\mathbb{R}^N\setminus\mathcal{K}}(w_{0,T_1}(s_\varepsilon))| \geq 2\delta - \delta = \delta. \end{aligned}$$

よって(7.2.22) が成り立つ. 一方，区間 $(0, T^*)$ で $\tilde{u}_n$ は $\tilde{u}$ に C^1_{loc} の意味で収束する．また $\tilde{u}_n$ を $x = a$, $t = T_1$ でスケーリングした関数を $w^{(n)}_{a,T_1}$ と書き表す．1 階の微分まで込めて

$$w^{(n)}_{0,T_1}(s_\varepsilon) \to w_{0,T_1}(s_\varepsilon) \quad \text{as} \quad n \to \infty, \quad \text{on} \quad \{y : |y| \leq C\} = \mathcal{K}.$$

よって任意のコンパクト集合 $\mathcal{K}$ に対してある $n_K \in \mathbb{N}$ があって $n \geq n_K$ のとき $|I_{\mathcal{K}}(w^{(n)}_{0,T_1}(s_\varepsilon)) - I_{\mathcal{K}}(w_{0,T_1}(s_\varepsilon))| \leq \delta/4$．重み関数 ρ が遠方で指数減衰することから十分大きな $C > 0$ を選べば $|I_{\mathbb{R}^N\setminus\mathcal{K}}(w^{(n)}_{0,T_1}(s_\varepsilon))| \leq \delta/4$．これらと (7.2.22) より $n \geq n_{\mathcal{K}}$ に対して

$$\begin{aligned} I(w^{(n)}_{0,T_1}(s_\varepsilon)) &= I_{\mathcal{K}}(w^{(n)}_{0,T_1}(s_\varepsilon)) + I_{\mathbb{R}^N\setminus\mathcal{K}}(w^{(n)}_{0,T_1}(s_\varepsilon)) \\ &\geq I_{\mathcal{K}}(w_{0,T_1}(s_\varepsilon)) - \delta/4 - \delta/4] \geq \delta/2. \end{aligned}$$

補題 4.2 から $w^{(n)}_{0,T_1}$ は有限時間で爆発してしまう．これは $T_1 > T_n$ を意味するので $T < T_1 < T_n < T^*$ に矛盾する．これは $T = T^*$ でなければならないことを意味するので題意の解は完全爆発する． □

7.3　一般の非線形項の場合

関数 u は初期値 $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ に関する初期境界値問題

$$
(7.3.1) \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, & x \in \Omega \end{cases}
$$

の解であり，時刻 $T(u_0) \in (0, \infty)$ において爆発するものとする．

以下，$f(u) = u^p\,(p > 1)$ ないしは $f(u) = e^u$ とする．つぎのような変数変換を考える．

$$
(7.3.2) \qquad v = \int_u^\infty \frac{ds}{f(s)}.
$$

関数 v は次の偏微分方程式を満たす.

$$
\begin{cases} v_t = \Delta v - 1 - g(v)|\nabla v|^2, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ v = A, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ v = v_0, & x \in \Omega. \end{cases}
$$

ここで,

$$
v_0 = \int_{u_0}^\infty \frac{ds}{f(s)}, \quad A = \int_0^\infty \frac{ds}{f(s)}, \quad g(v) = f'(u).
$$

補題 7.25. Ω は滑らかな境界をもつ有界凸領域とする．$\bar{u}, \hat{u}$ は初期値 $\bar{u}_0 < \hat{u}_0$ に対する初期値問題 (7.3.1) の適正延長解とする．$\Omega_1 \subset \Omega$ は $\bar{u}$ の爆発集合を含む部分集合とする．変換 (7.3.2) により $\bar{u}, \hat{u}$ を関数 $\bar{v}, \hat{v}$ にする．このとき，ある $b > 0$ があって

$$
\bar{v} - \hat{v} \geq b, \qquad x \in \Omega_1,\ t \in [0, \min\{T^c(\hat{u}_0), T(\bar{u}_0)\}]
$$

が成り立つ．ここで $T^c(\hat{u}_0)$ は解 $\hat{u}$ が完全爆発する時刻であり，$T(\bar{u}_0)$ は解 $\bar{u}$ の爆発時刻である．

補題 7.25 の証明. $0 \leq \bar{u}_0 < \hat{u}_0$ と比較原理，および単純な極限論法から $\hat{u}(x,t) \geq \bar{u}(x,t)$ が任意の $x \in \Omega,\ t \in (0,\infty)$ について成り立つことがわかる．この不等式と $u \mapsto f(u)$ の単調性から $x \in \Omega,\ t \in (0, \infty)$ 対して

$$
\begin{aligned}
\hat{u}(t) - \bar{u}(t) &= e^{t\Delta}(\hat{u}_0 - \bar{u}_0) + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\{f(\hat{u}(s)) - f(\bar{u}(s))\}ds \\
&\geq e^{t\Delta}(\hat{u}_0 - \bar{u}_0).
\end{aligned}
$$

一方 $T(u_0) < \infty$ なのである正数 $a > 0$ があって次の不等式がしたがう．

$$\hat{u}(t) - \bar{u}(t) \geq e^{t\Delta}(\hat{u}_0 - \bar{u}_0) \geq a, \qquad x \in \bar{\Omega}_1,\, t \in [0, \min\{T^c(\hat{u}_0), T(\bar{u})\}].$$

ところで，補題の仮定により関数 $\bar{v}$ は $\partial\Omega_1$ において 0 から離れた値をとる．これと変換 (7.3.2) が双連続であることを用いると，ある定数 $b > 0$ に対して以下の不等式が成り立つことがわかる．

$$\begin{aligned} \bar{v}(x,t) - \hat{v}(x,t) \geq b, &\qquad x \in \partial\Omega_1,\, t \in [0, \min\{T^c(\hat{u}_0), T(\bar{u}_0)\}], \\ \bar{v}_0(x) - \hat{v}_0(x) \geq b, &\qquad x \in \bar{\Omega}_1. \end{aligned}$$

関数 g_n を以下で定義する．

$$g_n(s) = \begin{cases} g(s), & s \geq 1/n, \\ g(1/n), & s \leq 1/n. \end{cases}$$

また，関数 $\bar{v}_n$ は次の方程式の解とする．

$$\begin{cases} (v_n)_t = \Delta v_n - 1 - g(v_n)|\nabla v_n|^2, & x \in \Omega_1,\, t > 0, \\ v_n = A, & x \in \partial\Omega_1,\, t > 0, \\ v_n = \bar{v}_0, & x \in \Omega_1. \end{cases}$$

関数 $\hat{v}_n$ は $\hat{v}_0$ に対応するこの方程式の解とする．このとき，関数 $z_n = \bar{v}_n - \hat{v}_n$ は

$$\begin{aligned} (z_n)_t &= \Delta z_n - g_n(\bar{v}_n)|\nabla \bar{v}_n|^2 + g_n(\bar{v}_n)|\nabla \hat{v}_n)|^2 \\ &= \Delta z_n - g_n(\bar{v}_n)(|\nabla \bar{v}_n|^2 - |\nabla \hat{v}_n)|^2) + (g_n(\bar{v}_n) - g_n(\hat{v}_n))|\nabla \hat{v}_n)|^2 \\ &= \Delta z_n - g_n(\bar{v}_n)(\nabla \bar{v}_n + \nabla \hat{v}_n) \cdot \nabla z_n - g_n'(s)|\hat{v}_n| z_n \end{aligned}$$

を満たす．ただし $\hat{v} \leq s \leq \bar{v}$．ここで

$$g'(s) = -f(\sigma)f''(\sigma) < 0$$

が成り立つことに注意する．ただし，$s = \int_\sigma^\infty d\tau/f(\tau)$ である．比較原理より

$$\bar{v}_n(x,t) - \hat{v}_n(x,t) \geq b, \qquad x \in \bar{\Omega}_1,\, t \in [0, \min\{T^c(\hat{u}_0), T(\bar{u}_0)\}]$$

最後に $n \to \infty$ の極限を考えれば補題の結論を得る． □

定理 7.26. Ω は滑らかな境界をもつ有界凸領域とする．$\bar{u}, \hat{u}$ は初期値 $\bar{u}_0 < \hat{u}_0$ に対する初期値問題 (7.3.1) の適正延長解とする．このとき，$T^c(\hat{u}_0) \leq T(\bar{u}_0)$．ただし $T^c(\hat{u}_0)$ は解 $\hat{u}$ が完全爆発する時刻であり，$T(\bar{u}_0)$ は解 $\bar{u}$ の爆発時刻である．とくに，$T(\hat{u}_0) \leq T(\bar{u}_0)$．

定理 7.26 の証明. $T^c(\hat{u}_0) > T(\bar{u}_0)$ と仮定して矛盾を導く．定理 3.17 より $\bar{u}$ の爆発集合を含む部分集合 $\Omega_1 \subset \Omega$ が存在する．変換 (7.3.2) により $\bar{u}, \hat{u}$ を関数 $\bar{v}, \hat{v}$ にする．補題 7.25 よりある $b > 0$ があって

$$\bar{v} - \hat{v} \geq b, \qquad x \in \Omega_1,\, t \in [0, T(\bar{u}_0)] \tag{7.3.3}$$

が成り立つ．$\bar{u}$ の爆発点 $x_0 \in \Omega_1$ に対してある点列 $\{(x_n, t_n)\} \subset \Omega_1 \times [0, T(\bar{u}_0))$ で $x_n \to x_0,\, t_n \uparrow T(\bar{u}_0)$ かつ $n \to \infty$ のとき $\bar{v}(x_n, t_n) \to 0$ を満たすものが存在する．したがって不等式 (7.3.3) より十分大きな $n \gg 1$ に対して $\hat{v}(x_n, t_n) < 0$．これは $\hat{v}$ の定義に反する． □

系 7.27. (Lacey-Tzanetis 1988 [53]) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は，C^2 級の境界をもつ有界領域とし，$f(u) = u^p\,(p > 1)$ または $f(u) = e^u$ とする．$u_0 \in L^\infty(\Omega)$ で, Ω 上 $u_0 \geq 0$ とする．さらに，初期境界値問題 (7.3.1) の解 u は時刻 $t = T < \infty$ で爆発して，次の条件を満たすとする．$\Delta u_0 + f(u_0) \geq 0$．このとき解 u は完全爆発する．

系 7.27 の証明. $\varepsilon > 0$ に対して，$u_\varepsilon(\cdot, t) := u(\cdot, t + \varepsilon)$ とおく強比較原理より $\partial u/\partial t > 0$, $(t > 0)$ が成り立つので $u_\varepsilon > u$．よって定理 7.26 を用いると $T^c(u_\varepsilon(\cdot, 0)) \leq T$ が成り立つ．また，$T^c(u_\varepsilon(\cdot, 0)) = T^c - \varepsilon$ であるから，$T^c(u) - \varepsilon \leq T$．$\varepsilon > 0$ は任意に選べるので $T^c(u) \leq T$．よって解 u は完全爆発する． □

一般に非線形項の増大度がそれ程大きくない場合も完全爆発が起こる．

定理 7.28. Ω は凸領域とする．初期境界値問題 (7.3.1) の非線形項について $f(s) = o(s^{1+N/2})$ が成り立つとき解は完全爆発する．

補題 7.29. Ω は凸領域とする．初期境界値問題 (7.3.1) の解が爆発する時刻を T とする．$M(t) := \sup_{x \in \Omega} u(x, t)$ とおく．$t_0 \in (0, T)$ を勝手に固定する．Ω 上において

$$\frac{1}{2}|\nabla u_0(x)|^2 \leq \int_{u_0(x)}^{M(t_0)} f(s)\, ds$$

が成り立つとき $\Omega \times [0, t_0]$ 上においても次の不等式が成立する．

$$\frac{1}{2}|\nabla u(x,t)|^2 \le \int_{u(x,t)}^{M(t_0)} f(s)\,ds.$$

補題 7.29 の証明．

$$w(x,t) := M(t_0) - u(x,t)$$

とおく．

$$w_t - \Delta w = -u_t + \Delta u = -f(M(t_0) - w(x,t)) := -h(w)$$

であるから，この関数 w は次の熱方程式を満たす．

$$\begin{cases} w_t = \Delta w - h(w), & x \in \Omega,\ t \in (0, t_0), \\ w = M(t_0), & x \in \partial\Omega, \\ w(\cdot, 0) = M(t_0) - u_0, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{7.3.4}$$

さて次のような関数を導入しよう．

$$L(x,t) := \frac{1}{2}|\nabla w|^2(x,t) - \int_0^{w(x,t)} h(s)\,ds.$$

容易にわかるように題意を示すためには $\Omega \times (0, t_0)$ 上において $L \le 0$ が成り立つことを示せばよい．以下，n は境界点における単位法線ベクトルとする．まず $t = 0$ のとき任意の $x \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned} L(\cdot, 0) &= \frac{1}{2}|\nabla u_0|^2 - \int_0^{M(t_0) - u_0(x)} h(s)\,ds \\ &= \frac{1}{2}|\nabla u_0|^2 - \int_{u_0(x)}^{M(t_0)} f(s)\,ds \le 0. \end{aligned}$$

また，$\partial\Omega \times (0, T)$ 上

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + (N-1)\kappa \frac{\partial w}{\partial n}.$$

ただし κ は $\partial\Omega$ 上の任意の点における平均曲率であり，領域の凸よりその値は非負である．これを用いれば $\partial\Omega \times (0, T)$ 上において次の不等式が

成り立つことがわかる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial n} &= \frac{\partial w}{\partial n}\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} - h\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n}\Big\{\Delta w - (N-1)\kappa\frac{\partial w}{\partial n} - h\Big\}\\ &= \frac{\partial w}{\partial n}\Big\{w_t - (N-1)\kappa\frac{\partial w}{\partial n}\Big\}\\ &= -(N-1)\kappa\Big(\frac{\partial w}{\partial n}\Big)^2 = -(N-1)\kappa\Big(\frac{\partial u}{\partial n}\Big)^2 < 0.\end{aligned}$$

最後に L が適当な微分不等式を満たすことを証明しよう．

$$\begin{aligned}L_t &= \nabla w \nabla w_t - h(w)w_t\\ &= \nabla w\cdot(\nabla(\Delta w) - h'(w)\nabla w) - h(w)w_t\\ (\nabla L)_j &= \sum_{i=1}^N w_{x_i}w_{x_ix_j} - h(w)(\nabla w)_j\\ \Delta L &= \sum_{i,j=1}^N w_{x_ix_j}^2 + \sum_{i,j=1}^N w_{x_i}w_{x_ix_jx_j} - h'(w)|\nabla w|^2 - h(w)\Delta w\\ &= \sum_{i=1,j}^N w_{x_ix_j}^2 + \nabla w\cdot(\nabla(\Delta w) - h'(w)\nabla w) - h(w)\Delta w\end{aligned}$$

であるから

$$L_t - \Delta L = h^2 - \sum_{i=1,j}^N w_{x_ix_j}^2. \tag{7.3.5}$$

一方，$L_{x_i} - hw_{x_i} = \nabla w\cdot\nabla w_{x_i}$ であるから

$$\sum_{i=1}^N (L_{x_i} - hw_{x_i})^2 = \sum_{i=1,j}^N (w_{x_i}w_{x_ix_j})^2 \le |\nabla w|^2\sum_{i,j=1}^N (w_{x_ix_j})^2. \tag{7.3.6}$$

式 (7.3.6) (7.3.5) より ∇w が 0 の点を除いて

$$L_t - \Delta L \le h^2 - \frac{1}{|\nabla w|^2}\sum_{i=1}^N (L_{x_i} - hw_{x_i})^2 \le -b\cdot\nabla L, \qquad b := \frac{2h\nabla w}{|\nabla w|^2}$$

が成り立つ．ここで，b は ∇w が 0 でない点において有界な関数である．ゆえに，比較原理から ∇w が 0 の点を除いて $L \le 0$ であることがわかる．また， ∇w が 0 ならば $L \le 0$ であるから題意が成立する． □

さて，補題 7.29 を用いて定理 7.28 を証明しよう．

定理 7.28 の証明. $t_1 \in (0,T)$ は爆発時刻 T に十分近いとする．また，$\sup_{x\in\Omega} u(x,t_1)$ の上限に到達する点を $X(t_1)$ と表すことにする．すなわち $M(t_1) := \sup_{x\in\Omega} u(x,t_1) = u(X(t_1),t_1)$ が成り立つ．補題 7.29 より

$$\frac{1}{2}|\nabla u|^2(x,t) \le \int_{u(x,t_1)}^{M(t_1)} f(s)\,ds$$

であることがわかる．r は点 $X(t_1)$ からの距離とする．$r(\theta)$ は $u(x,t) =: v(r,\theta,t_1)$ に対して $v(r,\theta,t_1) = M(t_1)/2$ を満たす最小の r とする．

$$u_r^2(x,t) \le 2(M(t_1) - u(x,t_1))f(M(t_1))$$

となる．変数分離により

$$\frac{|u_r|}{\sqrt{M(t_1) - u(x,t_1)}} \le \sqrt{2f(M(t_1))}$$

であるから両辺を r について 0 から $r(\theta)$ まで積分して

$$\sqrt{M(t_1)/2} \le \sqrt{M(t_1) - u(x,t_1)} \le \sqrt{2f(M(t_1))}\,r(\theta)$$

よって，

$$r(\theta) \ge \frac{M^{\frac{1}{2}}(t_1)}{2f(M(t_1))^{\frac{1}{2}}} \tag{7.3.7}$$

が成り立つ．以下，$X(t_1)$ を中心にもち半径が式 (7.3.7) で与えられる円板を B で表す．任意の $t \ge T$ に対して

$$\begin{aligned}
u(x,t) &\ge \int_{t_1}^{t}\int_{\Omega} G(x,y,t-\tau)f(u(y,\tau))\,d\tau dy + \int_{\Omega} G(x,y,t-t_1)u(y,t_1)\,dy \\
&\ge \int_{\Omega} G(x,y,t-t_1)u(y,t_1)\,dy \\
&\ge \int_{B} G(x,y,t-t_1)u(y,t_1)\,dy \\
&\ge C\inf_{B} G(x,\cdot,t-t_1)M(t_1)^{1+\frac{N}{2}}f(M(t_1))^{-\frac{N}{2}}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$t \to T$ の極限を考える．このとき定理の仮定より右辺は発散する．すなわち，$t > T$ のとき Ω 上の任意の点 x において $u(x,t) = \infty$．これは初期境界値問題 (7.3.1) の解 u が完全爆発することを意味する． □

8　不完全爆発について

8.1　非有界 L^1-大域解

Ω を $\mathbb{R}^N$ 内の有界領域とする．初期境界値問題

$$
\begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \geq 0, & x \in \Omega \end{cases} \tag{8.1.1}
$$

の爆発解を解の延長という観点から分類すると完全爆発と不完全爆発がある．7 章で扱った完全爆発は，解の延長が不可能な爆発現象であった．一方，不完全爆発では爆発時刻 $T < \infty$ 以降 L^1 の解として延長が可能である．この章では p がソボレフの臨界指数 p_s より大きい時，不完全爆発が起こりうることを証明する．これは，ソボレフの臨界指数より小さいときは完全爆発しか起こらないことを主張する 7 章の定理とは対照的である．まず本節ではその準備として非有界な L^1-大域解を構成する．

定義 8.1. 関数 u が次の 3 つの条件を満たす時，u は $[0, \tau]$ 上における，初期境界値問題 (8.1.1) の **L^1-弱解** (L^1-weak solution) であるという．

(i) $u \in C([0, \tau], L^1(\Omega))$.

(ii) $u^p \in L^1(\Omega \times (0, \tau))$.

(iii) 任意の $0 \leq t_1 < t_2 \leq \tau$ と $\partial\Omega$ 上で $\psi = 0$ であるような任意の $\psi \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, \tau])$ に対して，

$$
\begin{aligned} \int_\Omega u(\cdot, t_2)\psi(\cdot, t_2)\, dx - \int_\Omega u(\cdot, t_1)\psi(\cdot, t_1)\, dx - \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega u\psi_t\, dxds \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega (u\Delta\psi + \psi u^p)\, dxds. \end{aligned}
$$

$T^* := \sup\{\tau > 0 ; L^1\text{-弱解が時刻}\, t = \tau\, \text{まで存在する}\}$ とおく．$T^* = \infty$ の時 u は **L^1-大域解** (global L^1-solution) と呼ばれる．

定理 8.2. (Ni-Sacks-Tavantzis 1984 [77])　$p \geq p_s$　$(N > 2)$ であり，Ω は凸有界領域とする．$g \in X = \{v \in L^\infty(\Omega),\ v \geq 0\}$ を任意にとる．このとき，ある $\mu^* > 0$ があって，初期値 $u_0 = \mu^* g$ に対する初期境界値問題 (8.1.1) の解 u^* は，L^1-大域的だが L^∞ では非有界である．

本章では，以下で定義する 2 つの集合を用意する．

$X := \{v \in L^\infty(\Omega)\,;\, v \geq 0\}$,
$A := \{u_0 \in X\,;$ 対応する (8.1.1) の解が大域的かつ $\lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = 0\}$.

補題 8.3. 集合 A は X において空でない開集合である．

補題 8.3 の証明. <u>ステップ 1</u>

ある $\varepsilon_0 > 0$ があって，ある $\tau > 0$ に対して $u(x,\tau;u_0) \leq \varepsilon_0$ ならば，$t \to \infty$ のとき，$\|u(\cdot,t;u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ であることを示す．ただし，$u(x,t;u_0) = u(x,t)$ は初期値問題 (8.1.1) の解とする．

以下，$\lambda_1 > 0$ は $-\Delta$ の Dirichlet 条件下の第 1 固有値とし，$\phi_1 \in C^2(\bar{\Omega})$ は $\lambda_1 > 0$ に対応する正値第 1 固有関数とする．ただし，関数 ϕ_1 には $\|\phi_1\|_{L^1(\Omega)} = 1$ を課すことにする．

領域 $\hat{\Omega}$ は $\Omega \subset\subset \hat{\Omega}$ なる領域とする．領域 $\hat{\Omega}$ に対応する第 1 固有値，および正値第 1 固有関数を各々 $\hat{\lambda}_1 > 0$, $\hat{\phi}_1$ とする．ただし，関数 $\hat{\phi}_1$ には $\|\hat{\phi}_1\|_{L^\infty(\hat{\Omega})} = 1$ を課すことにする．

まず，$v \equiv 0$ が境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta v = v^p, & x \in \Omega, \\ v > 0, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{8.1.2}$$

の解集合から孤立していることを示す．0 の任意の近傍に正値定常解 $v \not\equiv 0$ があると仮定して矛盾を導く．境界値問題 (8.1.2) 第 1 式の両辺に ϕ_1 をかけて Ω 上積分すると

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \phi_1(\Delta v + v^p)\,dx = \int_\Omega (\Delta\phi_1 v + \phi_1 v^p)\,dx \\ &= \int_\Omega (-\lambda_1\phi_1 v + \phi_1 v^p)\,dx = \int_\Omega \phi_1(v^p - \lambda_1 v)\,dx = \int_\Omega \phi_1 v(v^{p-1} - \lambda_1)\,dx \end{aligned}$$

である．関数 ϕ_1 と v の正値性より，$\|v^{p-1}\|_{L^\infty(\Omega)} > \lambda_1$ でなければならない．だが，これは $\|v\|_{L^\infty(\Omega)}$ が十分小さなとき不成立．よって矛盾．

つぎに，定常解 0 の安定性を証明する．$\varepsilon_1 > 0$ を任意の $x \in \hat{\Omega}$ に対して，$\varepsilon_1\hat{\phi}_1 \leq \hat{\lambda}_1^{\frac{1}{p-1}}$ を満たすように小さく取る．任意の $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$ に対して $v_\varepsilon = \varepsilon\hat{\phi}_1$ は，方程式 (8.1.1) の優解である．実際，定数 ε_1 の取り方から

$$\begin{aligned} 0 = (v_\varepsilon)_t = (\varepsilon\hat{\phi}_1)_t &\geq \varepsilon\hat{\phi}_1(-\hat{\lambda}_1\varepsilon^{p-1}\hat{\phi}_1^{p-1})_t = -\hat{\lambda}_1\varepsilon\hat{\phi}_1 + \varepsilon^p\hat{\phi}_1^p \\ &= \Delta\varepsilon\hat{\phi}_1 + (\varepsilon\hat{\phi}_1)^p = \Delta v_\varepsilon + (v_\varepsilon)^p \end{aligned}$$

であることと，$v_\varepsilon|_{\partial\Omega} > 0$ であることを考慮すればよい．

$$\varepsilon_2 = \min_{x\in\bar{\Omega}} v_\varepsilon(x)$$

とおく．$\hat{\phi}_1|_{\partial\Omega} > 0$ であるから $\varepsilon_2 > 0$ である．比較原理より，ある $t_0 > 0$ に対して $\|u(\cdot, t_0; u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \varepsilon_2$ ならば，任意の $t > t_0$ に対して

$$\|u(\cdot, t; u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|v_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \le \varepsilon_1 \|\hat{\phi}_1\|_{L^\infty(\hat{\Omega})} = \varepsilon_1$$

である．最後の等式では，$\hat{\phi}_1$ の L^∞ ノルムによる正規化条件を用いた．

以上から $\|u(\cdot, t_0; u_0)\|_{L^\infty(\Omega)}$ が十分小さければ，その後 0 以外の定常解が一つもない領域に含まれることがわかる．一方，補題3.10 より $\omega(u_0)$ は定常解の集合に含まれる．したがって，$t \to \infty$ のとき $\|u(\cdot, t; u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ である．

<u>ステップ 2</u>

集合 A の定義から，任意の $u_0 \in A$ に対してある $\tau > 0$ があって，

$$\|u(\cdot, \tau; u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \varepsilon_0/2 \tag{8.1.3}$$

が成り立つ．ただし，$\varepsilon_0 > 0$ はステップ 1 で与えられた定数とする．すなわち，ある $\tau > 0$ で $\|u(\cdot, \tau; u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \varepsilon_0$ ならば，$t \to \infty$ のとき，$\|u(\cdot, t; u_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ である．

以下このステップでは $\hat{u}(\cdot, t) = \hat{u}(\cdot, t; \hat{u}_0)$ は初期値 $\hat{u}_0$ に対する初期境界値問題 (8.1.1) の解とする．集合 A が開集合であるとは，定数 τ と $\|u\|_{L^\infty(\Omega\times(0,\tau))}$ に依存する $\delta > 0$ があって $\|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^\infty(\Omega)} \le \delta$ ならば $\lim_{t\to\infty} \|\hat{u}(\cdot, t; \hat{u}_0)\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$ が成り立つことである．このことを示すために，$\|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^\infty(\Omega)} \le \delta$ ならば

$$\|u - \hat{u}\|_{L^\infty(\Omega\times(0,\tau))} \le \varepsilon_0/2 \tag{8.1.4}$$

が成立すること証明する．もしこれが示せたら不等式 (8.1.3) から

$$\|\hat{u}(\cdot, \tau; \hat{u}_0)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \varepsilon_0$$

でありステップ 1 から．$\lim_{t\to\infty} \|\hat{u}(\cdot, t; \hat{u}_0)\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$ が成り立つ．

以下，不等式 (8.1.4) を示す．そのため関数 $z = u - \hat{u}$ の満たす方程式

$$\begin{cases} z_t = \Delta z + b(x, t, z), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ z = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ z(\cdot, 0) = u_0 - \hat{u}_0, & x \in \Omega \end{cases} \tag{8.1.5}$$

を考える．ただし，$b(x,t,z) = u(x,t)^p - (u(x,t) - z)^p$ とする．$M = \|u\|_{L^\infty(\Omega\times(0,\tau))}$ に対して，$b(x,t,z) \le |z| \max\{M^{p-1}, (M-z)^{p-1}\} \equiv \gamma_M(z)$ が成立する．十分小さな $\delta > 0$ を取ると，常微分方程式

$$
\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = \gamma_M(h), \\ h(0) = \delta \end{cases} \tag{8.1.6}
$$

の解は，z の満たす方程式の優解になっている．なぜなら

$$
\begin{aligned}
h_t &= \Delta h + \gamma_M(h) \ge \Delta h + b(x,t,h), && x \in \Omega, t > 0, \\
h(0) &= \delta \ge \|u_0 - \hat{u}_0\|_{L^\infty(\Omega)} \ge u_0 - \hat{u}_0, \\
h(t) &> 0, && t > 0
\end{aligned}
$$

であるからである．初期値問題 (8.1.6) 第 1 式の右辺は h に関してリプシッツ連続なので，常微分方程式の初期値問題の適切性の結果が使える．$h \equiv 0$ は問題 (8.1.6) の第 1 式を満たすので，$\delta > 0$ を十分小さく取れば，

$$
\max_{t\in[0,\tau]} |h(t)| < \frac{\varepsilon_0}{2}.
$$

関数 h には x 依存性が無いことと比較原理より

$$
\max_{t\in[0,\tau]} \|u(\cdot,t) - \hat{u}(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \max_{t\in[0,\tau]} |h(t)| < \frac{\varepsilon_0}{2}
$$

である．よって不等式 (8.1.4) がしたがう． □

$\gamma \in \mathbb{R}^N$ を単位ベクトルとする．任意の $x_0 \in \partial\Omega$ を取る．$T_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} | x\cdot\gamma = \lambda\}$ とおく．$T_\lambda \cap \Omega \ne \emptyset$ になる最大の λ を $\lambda(x_0) = \lambda_0$ とする．$\lambda < \lambda(x_0)$ は λ_0 に十分近い数とする．$\Sigma(\lambda,\gamma)$ は，超曲面 T_λ が切り落とす Ω の部分集合のうち小さいほうとする．

$\Sigma(\lambda,\gamma)$ を T_λ に関して折り返した領域を $\Sigma'(\lambda,\gamma)$ とおく．λ を小さくしていくと，いつかは $\Sigma'(\lambda,\gamma)$ が $\partial\Omega$ に接するか，$\Sigma(\lambda,\gamma)$ と T_λ が直交する．そのような λ を λ_1 と書き表すことにする．x^λ を T_λ に関する $x \in \Sigma(\lambda,\gamma)$ の折り返し点とする．

補題 8.4. Ω はなめらかな境界をもつ有界領域．関数 f はリプシッツ連続とする．$\tau > 0$ とし，関数 u は次の初期境界値問題の正値古典解とする．

$$
\begin{cases}
u_t = \Delta u + f(u), & x \in \Omega,\ t \in (0,\tau), \\
u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in (0,\tau), \\
u(\cdot,0) = u_0, & x \in \Omega.
\end{cases}
$$

$\lambda \in (\lambda_1, \lambda_0)$ とする．このとき

$$u_0(x) < u_0(x_\lambda), \quad \nabla u_0 \cdot \gamma < 0, \qquad x \in \Sigma(\lambda, \gamma)$$

ならば

$$u(x,t) < u(x_\lambda, t), \quad \nabla u(x,t) \cdot \gamma < 0, \qquad x \in \Sigma(\lambda, \gamma),\ t \in [0, \tau].$$

補題 8.4 の証明. 十分小さな $\varepsilon > 0$ を取れば $x_0 \in \partial\Omega$ の ε 近傍 $B_\varepsilon(x_0) \cap \Omega$ において，$\nabla u_0(x) \cdot \gamma < 0$ である．$\lambda < \lambda_0$ を定数 λ_0 に十分近くとって $\Sigma(\lambda,\gamma) \cup \Sigma'(\lambda,\gamma) \subset B_\varepsilon(x_0) \cap \Omega$ となるようにすれば，次の不等式が成り立つ．

$$\nabla u_0(x) \cdot \gamma < 0,\ u_0(x) < u_0(x^\lambda), \qquad x \in \Sigma(\lambda, \gamma). \tag{8.1.7}$$

$v_\lambda(x,t) := u(x^\lambda, t)$ とおき，$w_\lambda(x,t) := v_\lambda(x,t) - u(x,t)$ とする．Dirichlet 条件と式 (8.1.7) から容易にわかるように

$$\begin{aligned} w_\lambda(x,t) &= 0, \quad x \in T_\lambda,\, t \in [0,\tau] \\ w_\lambda(x,t) = u(x^\lambda, t) &> 0, \quad x \in \partial\Sigma(\lambda,\gamma) \setminus T_\lambda,\ t \in [0,\tau], \\ w_\lambda(x,0) &> 0, \quad x \in \Sigma(\lambda,\gamma). \end{aligned}$$

ここで比較原理を用いれば

$$w_\lambda(x,t) \geq 0, \quad x \in \Sigma(\lambda,\gamma),\ t \in [0,\tau].$$

$w_\lambda(x,t) \not\equiv 0$ であるからさらに，強最大値原理を用いることができて

$$w_\lambda(x,t) > 0, \quad x \in \Sigma(\lambda,\gamma),\ t \in [0,\tau].$$

これより次の不等式を得る．

$$u(x,t) < u(x^\lambda, t), \quad x \in \Sigma(\lambda,\gamma),\ t \in [0,\tau]$$

最後に λ を λ_0 近くで動かしてやることにより

$$\nabla u(x,t) \cdot n(x_0) < 0, \quad x \in \Sigma(\lambda,\gamma),\ t \in [0,\tau].$$

この手法を**動平面法** (moving plane method) という． □

補題 8.5. Ω は有界な凸領域とする．初期境界値問題 (8.1.1) の任意の大域解を u とする．このとき，ある $C = C(\Omega) > 0$ があって

$$\int_\Omega u(\cdot,t)\,dx \le C\lambda_1^{\frac{1}{p-1}}, \qquad \int_0^t \int_\Omega u^p\,dxds \le C\lambda_1^{\frac{1}{p-1}}(1+\lambda_1 t), \quad t>0.$$

補題 8.5 の証明. 第 1 式を示す．仮定より，$u = u(x,t)$ は時間大域的なので任意の 2 つの定数 t_0, t_1 であって $t_0 < t_1$ を満たすものに対して，関数 u は $\Omega \times [t_0, t_1]$ において古典解である．任意の $x \in \Omega, t \in (t_0, t_1)$ に対して $u(x,t) > 0$ である．したがって境界条件と Hopf の補題から

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0, t_0) < 0, \quad x_0 \in \partial\Omega.$$

任意の $x_0 \in \partial\Omega$ に対して，$n(x_0)$ をこの点における外向き単位法線ベクトルとする．領域が凸であることから，ある $\lambda_0(x_0)$, $\lambda_1(x_0)$ があって任意の $\lambda \in (\lambda_0(x_0), \lambda_1(x_0))$ に対して $\Sigma(\lambda, n(x_0))$ は空でない．また，x_0 近傍 $B(x_0)$ があって

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t_0) < 0, \quad x \in B(x_0). \tag{8.1.8}$$

$\lambda(x_0)$ を $\lambda_0(x_0)$ に十分近くに選んで，次が成り立つようにする．

$$\Sigma(\lambda(x_0), n(x_0)) \cup \Sigma'(\lambda(x_0), n(x_0)) \subset B(x_0) \cap \Omega.$$

(y', y_N) は $x_0 \in \partial\Omega$ を中心とし，y_N が $n(x_0)$ 方向を表示する座標とする．十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して以下，

$$C(x_0) := \{y\,;\, |y'| < \varepsilon,\, |y_N| < \varepsilon\}$$

をシリンダーと呼ぶ．$\varepsilon > 0$ を十分小さく選んで $\overline{C(x_0) \cap \Omega}$ の $T_{\lambda(x_0)}$ に関する折り返しが Ω にコンパクトに含まれるようにする．

さて，

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^m C(x_i), \qquad x_i \in \partial\Omega$$

なるシリンダー列 $\{C(x_i)\}_{i=1}^m$ を取り，

$$C_0 = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^m C(x_i)$$

とおく．また，$C'(x_i)$ は $C(x_i)\cap\Omega$ を超平面 $T_{\lambda(x_i)}$ に関して折り返したものとする．

以上の設定において

$$u(x,t_0)\le u(x^{\lambda(x_i)},t_0),\qquad x\in\Sigma(\lambda(x_i),n(x_i))$$

が成り立つので，式 (8.1.8) と補題 8.4 より

$$u(x,t)\le u(x^{\lambda(x_i)},t),\qquad x\in\Sigma(\lambda(x_i),n(x_i)),\ t\in[t_0,t_1].$$

ゆえに，任意の $i=1,2,\cdots,m$ に対して

$$u(x,t)\le u(x^{\lambda(x_i)},t),\qquad x\in C(x_i)\cap\Omega,\ t\in[t_0,t_1].$$

$a_0=\inf_{x\in\Omega_0}\phi_1(x)$ とおく．$C_0\cup\big(\bigcup_{i=1}^m C'(x_i)\big)\subset\Omega_0\subset\subset\Omega$ を満たす任意の領域 Ω_0 に対して，

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u(\cdot,t)\,dx &\le \sum_{i=1}^m\int_{C(x_i)\cap\Omega}u(\cdot,t)\,dx+\int_{C_0}u(\cdot,t)\,dx\\
&\le \sum_{i=1}^m\int_{C'(x_i)}u(\cdot,t)\,dx+\int_{C_0}u(\cdot,t)\,dx\\
&\le (m+1)\int_{\Omega_0}u(\cdot,t)\,dx\le\frac{m+1}{a_0}\int_{\Omega_0}u(\cdot,t)\phi_1\,dx\\
&\le\frac{m+1}{a_0}\int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1\,dx
\end{aligned}\tag{8.1.9}$$

が成立する．第 2 番目の不等式で上記の動平面法を用いた．一方，解 u が時間大域的なことと定理 3.3 より

$$\int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1\,dx\le\lambda_1^{\frac{1}{p-1}}\tag{8.1.10}$$

がしたがう．不等式 (8.1.10) と (8.1.9) を組み合わせれば $t\in[t_0,t_1]$ に対して第 1 式を得る．また，正数 t_0, t_1 は任意に選べるので題意の不等式が任意の $t>0$ に対して成立する．

次に，第 2 式を示す．以下 $f(u)=u^p$ と書くことにする．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1\,dx&=\int_\Omega u_t(\cdot,t)\phi_1\,dx=\int_\Omega\big(\Delta u(\cdot,t)+f(u(\cdot,t))\big)\phi_1\,dx\\
&=\int_\Omega u(\cdot,t)\Delta\phi_1\,dx+\int_\Omega f\big(u(\cdot,t)\big)\phi_1\,dx\\
&=-\lambda_1\int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1\,dx+\int_\Omega f\big(u(\cdot,t)\big)\phi_1\,dx
\end{aligned}$$

の両辺を t について 0 から t まで積分すると，

$$\int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1\,dx-\int_\Omega u_0\phi_1\,dx=-\lambda_1\int_0^t\int_\Omega u\phi_1\,dxds+\int_0^t\int_\Omega f(u)\phi_1\,dxds$$

である．この式と不等式 (8.1.10) を用いると

$$\int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1\,dx-\int_\Omega u_0\phi_1\,dx\geq -\lambda_1^{\frac{p}{p-1}}t+\int_0^t\int_\Omega f(u)\phi_1\,dxds.$$

次に，u_0，ϕ_1 の正値性から

$$\text{(8.1.11)}\quad \int_0^t\int_\Omega f(u)\phi_1\,dxds\leq \lambda_1^{\frac{p}{p-1}}t+\int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1\,dx\leq \lambda_1^{\frac{1}{p-1}}(1+\lambda_1 t).$$

関数 $f(u)$ の u に対する単調増大性から $u(x,t)\leq u(x^\lambda,t)$ ならば $f(u)(x,t)\leq f(u)(x^\lambda,t)$ である．これに注意して，第 1 式を導いたときの議論を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega f(u)\,dxds&\leq\sum_{i=1}^m\int_0^t\int_{C(x_i)\cap\Omega}f(u)\,dxds+\int_0^t\int_{C_0}f(u)\,dxds\\&\leq\sum_{i=1}^m\int_0^t\int_{C'(x_i)}f(u)\,dxds+\int_0^t\int_{C_0}f(u)\,dxds\\&\leq(m+1)\int_0^t\int_{\Omega_0}f(u)\,dxds\\&\leq\frac{m+1}{a_0}\int_0^t\int_{\Omega_0}f(u)\phi_1\,dxds\\&\leq\frac{m+1}{a_0}\int_0^t\int_\Omega f(u)\phi_1\,dxds.\end{aligned}$$

これと不等式 (8.1.11) を組み合わせることにより第 2 式を得る． □

さて，それでは本節の主定理を証明しよう．

定理 8.1 の証明. $g\in X$ に対して，$\mu^*=\sup\{\mu>0;\mu g\in A\}$ とおく．もし $\mu^*=\infty$ とすれば，補題 8.5 より任意の μ に対して $\int_\Omega \mu g\,dx<C\lambda_1^{\frac{1}{p-1}}$ である．しかし、この式の左辺は $\mu\to\infty$ のとき発散する．したがって，$\mu^*<\infty$ である．

$\mu < \mu^*$ とし，関数 u_μ は，初期境界値問題

$$(8.1.12) \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(\cdot, 0) = \mu g, & x \in \Omega \end{cases}$$

の解とする．集合 A と μ^* の定義より u_μ は時間大域的に存在する．比較原理より u_μ は μ について単調非減少であるから

$$u^*(x,t) = \lim_{\mu \nearrow \mu^*} u_\mu(x,t), \quad x \in \Omega, t \in [0, \infty)$$

が定義できる．ただし関数値として $+\infty$ も許すものとする．以下，この関数が L^1-大域解の条件 (i)-(iii) を満たすことを証明する．

次に，Fatou の補題より

$$\int_\Omega u^*(\cdot,t)\,dx = \int_\Omega \lim_{\mu \nearrow \mu^*} u_\mu(\cdot,t)\,dx \le \liminf_{\mu \nearrow \mu^*} \int_\Omega u_\mu(\cdot,t)\,dx \le C(\Omega)\lambda_1^{\frac{1}{p-1}}$$

である．最右辺の不等式では関数 u_μ の時間大域性と補題 8.5 を用いた．したがって任意の $\tau > 0$ に対して

$$(8.1.13) \qquad u^*(\cdot,t) \in L^1(\Omega), \quad t \in [0,\tau).$$

同様に関数 $u_\mu(x,t)$ の μ に対する単調性と単調収束定理，および補題 8.5 により

$$\int_0^\tau \int_\Omega u^*\,dxds = \int_0^\tau \int_\Omega \lim_{\mu \nearrow \mu^*} u_\mu\,dxds = \lim_{\mu \nearrow \mu^*} \int_0^\tau \int_\Omega u_\mu\,dxds \le C(\Omega)\tau\lambda_1^{\frac{1}{p-1}}$$

である．それゆえ

$$(8.1.14) \qquad \lim_{\mu \nearrow \mu^*} \|u_\mu - u^*\|_{L^1(\Omega \times (0,\tau))} = 0$$

が成立する．

関数 $u_\mu^p(x,t)$ の μ に対する単調性と単調収束定理より

$$\begin{aligned} \int_0^\tau (u^*)^p\,dxds &= \int_0^\tau \int_\Omega \Big(\lim_{\mu \nearrow \mu^*} u_\mu\Big)^p dxds = \int_0^\tau \int_\Omega \lim_{\mu \nearrow \mu^*} u_\mu^p\,dxds \\ &= \lim_{\mu \nearrow \mu^*} \int_0^\tau \int_\Omega u_\mu^p\,dxds \le C(\Omega)\lambda_1^{\frac{1}{p-1}}(1 + \lambda_1\tau). \end{aligned}$$

最右辺の不等式では 補題8.5 を用いた．この結果，$(u^*)^p \in L^1(\Omega\times(0,\tau))$ であるので弱解の定義における条件 (ii) を満たす．

$$\lim_{\mu\nearrow\mu^*} \|u_\mu^p - (u^*)^p\|_{L^1(\Omega\times(0,T))} = 0 \tag{8.1.15}$$

も確かめられる．

次に条件 (iii) を確認する．任意の $0\le t_1 < t_2 \le \tau$ と $\partial\Omega$ 上で $\psi=0$ であるような任意の $\psi\in C^2(\overline{\Omega}\times[0,\tau])$ に対して

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u^*(\cdot,t_2)\psi(\cdot,t_2)\,dx - \int_\Omega u^*(\cdot,t_1)\psi(\cdot,t_1)\,dx - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u^*\psi_t\,dxds \\
&\qquad = \int_\Omega \lim_{\mu\nearrow\mu^*} u_\mu(\cdot,t_2)\psi(\cdot,t_2)\,dx - \int_\Omega \lim_{\mu\nearrow\mu^*} u_\mu(\cdot,t_1)\psi(\cdot,t_1)\,dx \\
&\qquad\qquad - \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \lim_{\mu\nearrow\mu^*} u_\mu\psi_t\,dxds \\
&\qquad = \lim_{\mu\nearrow\mu^*}\int_\Omega u_\mu(\cdot,t_2)\psi(\cdot,t_2)\,dx - \lim_{\mu\nearrow\mu^*}\int_\Omega u_\mu(\cdot,t_1)\psi(\cdot,t_1)\,dx \\
&\qquad\qquad - \lim_{\mu\nearrow\mu^*}\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u_\mu\psi_t\,dxds \\
&\qquad = \lim_{\mu\nearrow\mu^*}\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (u_\mu\Delta\psi + \psi u_\mu^p)\,dxds \\
&\qquad = \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \lim_{\mu\nearrow\mu^*}(u_\mu\Delta\psi + \psi u_\mu^p)\,dxds \\
&\qquad = \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (u^*\Delta\psi + \psi(u^*)^p)\,dxds.
\end{aligned}$$

2 番目の等号では極限式 (8.1.14) を，3 番目の等号は古典解 u_μ が L^1-弱解であることを，4 番目の等号では極限式 (8.1.15) を用いた．以上より，関数 u^* は条件 (iii) を満たす．

上で構成した関数 u^* が L^1 弱解であることをいうためには，最後に u^* が条件 (i) を満たすことを確認すればよい．そのために，次の初期境界値問題

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |u^*|^{p-1}u^*, & x\in\Omega,\ t>0, \\ u=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0, \\ u(\cdot,0)=\mu^* g, & x\in\Omega \end{cases} \tag{8.1.16}$$

を考える．補題 8.5 より任意の $\tau \in (0,\infty)$ に対して非線形項 $|u^*|^{p-1}u^*$ が $L^1(\Omega\times(0,\tau))$ に属する．半群の一般論 (Amann 1983 [2]) よると，初期境界値問題 (8.1.16) は $(u^*)^p \in L^1(\Omega\times(0,\tau))$ のとき，L^1 解 $v \in C([0,\tau];L^1(\Omega))$ を持つことが知られている．しかもそれは L^1-縮小半群である．一方，積分表示式

$$
\begin{aligned}
v(t) &= e^{t\Delta}\mu^* g + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\big(|u^*(s)|^{p-1}u^*(s)\big)\,ds,\\
u_\mu(t) &= e^{t\Delta}\mu g + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\big(|u_\mu(s)|^{p-1}u_\mu\big)\,ds
\end{aligned}
$$

より任意の $\mu \in (0,\mu^*)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\|v(t)-u_\mu(t)\|_{L^1(\Omega)} &= \left\| e^{t\Delta}(\mu^*-\mu)g + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\big((u^*)^p(s) - u_\mu^p(s)\big)\,ds \right\|_{L^1(\Omega)}\\
&\le (\mu^*-\mu)\|e^{t\Delta}g\|_{L^1(\Omega)}\\
&\qquad + \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta}\big((u^*)^p(s)-u_\mu^p(s)\big)\|_{L^1(\Omega)}\,ds\\
&\le (\mu^*-\mu)\|g\|_{L^1(\Omega)} + \int_0^t \|(u^*)^p(s)-u_\mu^p(s)\|_{L^1(\Omega)}\,ds
\end{aligned}
$$

が成立する．ここで，$\mu \to \mu^*$ とすると，右辺は 0 に収束する．したがって，$u^* = v$．これは，u^* が条件 (i) を満たすことを意味する．また，v が L^1-大域的だから u^* も L^1-大域的である．

最後に u^* が非有界であることを示す．以下の，証明では

$$
\omega(u_0) = \Big\{ v \in C_0(\bar{\Omega});\ \text{ある } \{t_n\}_{n=1}^\infty \text{があって一様に} \lim_{n\to\infty} u(t_n;u_0) = v \Big\}
$$

とする．もし，u^* が 一様有界だとすると，u^* は初期境界値問題 (8.1.1) の初期値 $\mu^* g$ に対する古典解である．補題 3.10 と u^* の非負性より $\omega(\mu^* g)$ の各要素は非負の定常解からなる集合に含まれる．しかし $p \ge p_s$ なので Pohožaev による系 1.12 より問題 (8.1.1) は正値定常解を持たない．よって $\omega(\mu^* g) = \{0\}$ でなければならない．これは $t \to \infty$ のとき $u^* \to 0$ であることを意味する．よって補題 8.3 より μ^* に十分近い μ に対して $u_\mu \in A$ となる．これは μ^* の定義に反するので関数 u^* は一様有界ではない． □

8.2 不完全爆発の例

前節では初期値の 1 パラメーター族 $u_\mu(\cdot,0)=\mu g$ $(\mu>0)$ を考えた．$p>p_s$ ならばこの族に関して大まかには次の結果が成り立つ:

(1) $\mu<\mu^*$ の場合，解は $t\to\infty$ で 0 に収束する．

(2) $\mu=\mu^*$ なら不完全爆発する．

(3) $\mu>\mu^*$ であれば完全爆発であることが多い．

この問題は例えば [28, 67, 64, 16] などで扱われている．Matano-Merle [64] の結果は正値球対称な解なら Ω が全空間でも球でも適用できる．ただし (3) に関しては，解が爆発することまでは分かるが，それが任意の $\mu>\mu^*$ で完全爆発なのかどうかまでは分からない (これは未解決の問題である)．また全空間の場合は初期値は遠方でかなり早く減衰することを仮定しなくてはならない．一方 Mizoguchi [67] は全空間の場合で，初期値はコンパクトな台を持ち，$p_s<p<p_L$ でなければならないという制限があるものの $\mu>\mu^*$ のときは完全爆発であることをも主張している．ここで p_L は以下の議論で登場するレピンの臨界指数と呼ばれるものである．Chou-Du-Zheng [16] は有界領域で球対称性を仮定しない場合をも扱っている．また [16, 64] は $\mu=\mu^*$ のときに不完全爆発した解を弱解として延長すると，十分に時間が立てば解が正則化して $t\to\infty$ のときには 0 に収束することも結論している．

前節の定理 8.2 では，構成した非有界 L^1-大域解が爆発するのか，時間大域的なのか分からない．本節では，この解が爆発することを証明しよう．本講義録ではまず，上記で紹介された諸結果に比べて適用範囲は狭いが，最も初等的と思われる Galaktionov-Vázquez [28] の議論を紹介する．この講義録では指数

$$p_L:=\begin{cases}\infty, & N\le 10,\\ 1+\dfrac{6}{N-10}, & N\ge 11\end{cases}$$

を**レピンの臨界指数** (Critical Lepin exponent) と呼ぶ．

定理 8.6. (Galaktionov-Vázquez 1997 [28]) $\Omega=B_R(0)=\{x\in R^N;\ |x|<R\}$ で $p_s<p<p_L$ とする．初期値 $u_0(x)=U_0(|x|)$ は球対称で $U_0\in C^1([0,R])$ と $U_0'(r)\le 0$ を満たす．関数 $u^*(x,t)=U^*(r,t)$ は定理 8.2 の

ものとする．このとき L^1-弱解 u^* は有限時間で爆発する．すなわち u^* は不完全爆発する．

定理 8.6 の証明. まず,

$$\Phi^*(r) = c^* r^{-\frac{2}{p-1}}, \quad (c^*)^{p-1} = \frac{2}{p-1}\left(N-2-\frac{2}{p-1}\right)$$

とおく．定理の仮定のにおいては $p > N/(N-2)$ と $N \geq 3$ が成り立つのでこの係数 c^* は問題なく定義できる．単純な計算によって関数 Φ^* が

$$U_{rr} + \frac{N-1}{r}U_r + U^p = 0 \qquad r > 0$$

を満たすことが容易に確かめられる．この解を**特異定常解**と呼ぶ.

ところで $p_s < p < p_L$ のとき初期値問題

$$\begin{cases} U_t = U_{rr} + \dfrac{N-1}{r}U_r + U^p, & r > 0,\ 0 < t < T, \\ U(r,T) = mr^{-\frac{2}{p-1}}, & 0 < m < k \end{cases} \tag{8.2.1}$$

は，**後ろ向き自己相似解** (backward self-similar solution) U_b を持つ (Lepin [56, 57])．すなわち，任意の $T \in \mathbb{R}$ をとると常微分方程式

$$\begin{aligned} &g'' + \left(\frac{N-1}{y} - \frac{y}{2}\right)g' + g^p - \frac{1}{p-1}g = 0,\ y > 0, \\ &g'(0) = 0, \quad \lim_{y\to\infty} y^{\frac{2}{p-1}} g(y) = m \end{aligned}$$

の解 $g > 0$ によって，

$$U_b(r,t) = (T-t)^{-\frac{1}{p-1}}\, g\left(\frac{r}{\sqrt{T-t}}\right) \tag{8.2.2}$$

と書ける解 U_b が存在する．

L^1-弱解 u^* が爆発しないと仮定して矛盾を導く．さて，$f \in C([0,R])$ に対して区間 $(0,R)$ における零点数 $Z(f) = Z_{(0,R)}(f)$ を導入する．以下の証明には，次の零点数非増大の性質が本質的に使われる．

補題 8.7. (Chen-Poláčik, [15]) 恒等的に 0 でない滑らかな球対称関数 $V(r,t)$ が，線形放物型方程式

$$\begin{aligned} v_t = \Delta v + a(|x|,t)v,\ x \in B_R(0),\ t_1 < t < t_2, \\ v \neq 0,\ x \in \partial B_R(0),\ t_1 < t < t_2 \end{aligned}$$

を満たすとする．ただし $a(|x|,t)$ は $B_R(0) \times (t_1,t_2)$ において連続であるとする．このとき

(i) $Z(V(\cdot,t))$ は，区間 (t_1,t_2) 内において有限である．

(ii) $t \mapsto Z(V(\cdot,t))$ は単調非増大．

(iii) ある r^*, t^* に対し $V_r(r^*,t^*) = V(r^*,t^*) = 0$ が成り立つならば

$$Z(V(\cdot,t)) > Z(V(\cdot,s)), \quad t_1 < t < t^* < s < t_2.$$

注意 8.8. 零点数を与える汎関数は，下半連続である．すなわち，閉区間 I 上の関数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 u に各点収束するとき

$$Z(u) \le \liminf_{n\to\infty} Z(u_n)$$

が成り立つ．しかし一般には連続とは限らない．実際，閉区間 $[-\pi,\pi]$ において

$$u_n(x) := \sin x + \frac{\sin n^2 x}{n}$$

なる関数列を考えれば $0 = Z(u) < \liminf_{n\to\infty} Z(u_n) = \infty$ が成り立つ．

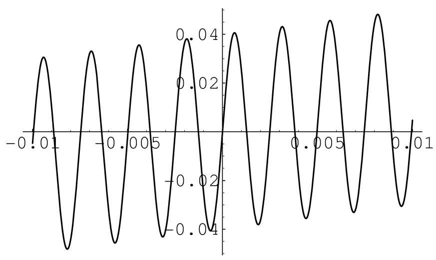


図 4: $\sin x + \{\sin(2500x)\}/50$ のグラフ

<u>ステップ 1</u>

L^1-弱解 $u^*(x,t) = U^*(r,t)$ と特異定常解 Φ^* の零点数について，任意の $t > 0$ に対して

$$Z(U^*(\cdot,t) - \Phi^*(\cdot)) \ge 2 \tag{8.2.3}$$

でなければならないことを証明する．言い換えれば，$\Phi^*(r)$ と $U^*(r,t)$ は図 5 のようなグラフになる．

もし不等式 (8.2.3) が成り立たないとする．すなわち，ある $t_0>0$ があって

$$Z(U^*(\cdot,t_0)-\Phi^*(\cdot))=0,1$$

であると仮定しよう．つまり，関数 $U^*(\cdot,t_0)$ と関数 $\Phi^*(\cdot)$ は全く交わらないか，ある 1 点において接するとする．前者の場合は補題 8.7 の (ii) を，後者の場合は (iii) を用いることにより $\tilde{t}>t_0$ において

$$Z(U^*(\cdot,\tilde{t})-\Phi^*(\cdot))=0$$

である．$|x_0|$ が十分小さな任意の $x_0\in B_R(0)$ に対して，比較原理を $\Phi^*(|\cdot-x_0|)$ と $U^*(\cdot,t)$ に適用すると，任意の $t\in(t_0,\infty)$, $x\in B_R(0)$ に対して $U^*(|x|,t)\le\Phi^*(|x-x_0|)$ が成立する．したがって，関数 $U^*(r,t)$ は r, t について一様有界．一方，$p>p_s$ より定常解は定数 0 しかない．任意の $x\in B_R(0)$ に対して $\lim_{t\to\infty}u^*(x,t)=0$ である．これは，定理 8.2 における L^1-弱解 u^* の構成の仕方と補題 8.3 に矛盾する．

ステップ 2

L^1-弱解 U^* と後ろ向き自己相似解 U_b の零点数について考察する．式 (8.2.2) より，後ろ向き自己相似解 u_b の爆発時刻 $T>0$ を十分大きく取って，$t_1\ll T$ のとき $B_R(0)$ 上

$$U_b(r,t_1)\ll U^*(r,t_1),\qquad |(U_b)_r(r,t_1)|\ll|(U^*)_r(r,t_1)| \tag{8.2.4}$$

が成り立つようにできる．任意の $t>0$ に対して，

$$U^*(R,t)=0,\ U_b(R,t)>0 \tag{8.2.5}$$

なので式 (8.2.4), (8.2.5) より関数 U^* と U_b の時刻 t_1 でのグラフは図 5 のようになる．すなわち，$Z(U^*(\cdot,t_1)-U_b(\cdot,t_1))=1$．補題 8.7 より，任意の $t\ge t_1$ に対して

$$Z(U^*(\cdot,t)-U_b(\cdot,t))\le 1 \tag{8.2.6}$$

が成立する．

今度は，$T>0$ に十分近い $t_2<T$ を取る．このとき式 (8.2.1) より関数 $U^*(r,t_2)$ と関数 $U_b(r,t_2)$ のグラフは図 5 のようになる．したがって，初期値問題 (8.2.1) の第 2 式と不等式 (8.2.3) より

$$Z(U^*(\cdot,t_2)-U_b(\cdot,t_2))\ge 2 \tag{8.2.7}$$

が成立．ところが零点数非増大の原理より不等式 (8.2.6), (8.2.7) は両立し得ない．ゆえに矛盾． □

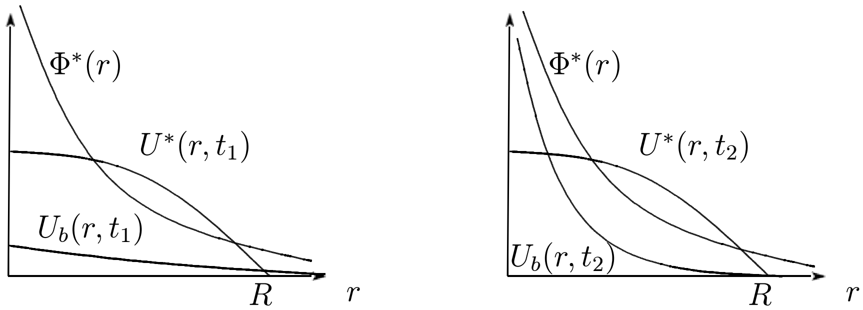


図 5: $t=t_1,t_2$ に対する $U^*(\cdot,t)$ と $U_b(\cdot,t)$ のグラフ

注意 8.9. (Galaktionov-Vázquez 1997 [28]) $\Omega=\mathbb{R}^N$ かつ $T\in\mathbb{R}$ であり，p は定理 8.2 の条件を満たすように取る．このとき，方程式 $u_t=\Delta u+u^p$ の初期値問題に対し，L^1-大域的であり，時刻 $T<\infty$ に一度だけ後ろ向き自己相似解として爆発する解が存在する．しかも，爆発後の延長解は，前向き自己相似解として振舞う．すなわち，常微分方方程式

$$g''+\left(\frac{N-1}{y}+\frac{y}{2}\right)g'+g^p+\frac{1}{p-1}g=0,\quad y>0$$
$$g'(0)=0$$

の解によって $U_f(r,t)=(t-T)^{-\frac{1}{p-1}}g\left(\frac{r}{\sqrt{t-T}}\right)$ と書ける解 U_f が存在する．しかも $U_f(r,T)=mr^{-\frac{2}{p-1}}$ を満たす．なおこのように一度だけ爆発してその後，延長解が時間大域的に存在する解を **peaking 解** (peaking solution) と呼ぶ．証明には Lacey-Tzanetis ([54]) が方程式 $u_t=\Delta u+\lambda e^u$ ($\lambda>0$, $N=3$) の初期値問題の解析に用いたアイディアを用いる．

上の定理の証明を注意深く見ると以下が成り立つことも明らかであろう．

系 8.10. 領域 Ω は $B_R(0)=\{x\in R^N;\ |x|<R\}$ とする．また $p_s<p<p_L$ とする．さらに球対称な正値初期値 $u_0=U_0(|x|)$ は $U_0\in C^1([0,R])$ とする．このとき解が時間大域的なら一様有界である．

詳しい証明は例えば [86] の定理 22.4 に掲載されている．なお [12] ではこの結果をより一般の非線形項に拡張している．

$\mathbb{R}^N$ 上の初期値問題に関しては初期値のクラスを制限すれば同様の結果が成り立つことが知られている．例えば Mizoguchi [67] はコンパクトな台をもつ非負の初期値を扱っている．この結果は，遠方で速く減衰する

初期値に関しても拡張されている ([90]). これらの主張の指数 p に関する仮定はさらに緩めることが可能である. 実際 $p > p_s$ の場合についての時間大域解の一様有界性は例えば [69, 63, 64] において議論されている. 特に Matano-Merle [63, Remark 3.5] または [64, Theorem 5.14] は $p > p_s$ で $\Omega = B_R(0), \mathbb{R}^N$ のとき球対称関数 u_0 が符号変化する場合も解析しており, その証明はとても簡潔である. ここではアイディアのみを手短かに説明しよう.

定理 8.11. (Matano-Merle 2009 [64]) $p > p_s$ とし $\Omega = B_R(0) = \{x \in R^N;\ \ |x| < R\}$ とする. このとき球対称な時間大域解は一様有界であり $\lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$. また $\Omega = \mathbb{R}^N$ で初期値 u_0 が $H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ に属する場合も同じ結果が成り立つ.

系 8.12. $\Omega = B_R(0) = \{x \in R^N;\ \ |x| < R\}$ または $\Omega = \mathbb{R}^N$ で $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ とする. 非有界な球対称 L^1-時間大域解は必ず有限時間で爆発する.

まず次の補題を認めることにする. 証明は原論文を参照せよ.

補題 8.13. ([64, Lemma 2.9]) $\Omega = B_R, \mathbb{R}^N$ として球対称な正値解 $u(x,t) = U(r,t)$ を考える. $\theta \in (0,1)$ とする. 任意の $\delta > 0$ に対してある $M_\delta > 0$ があって

$$|U(r,t_0)| \le \theta\Phi^*(|x|) + c, \qquad x \in \Omega \setminus \{0\}$$

が成り立つならば

$$|U(r, t_0 + c^{-(p-1)}\delta)| \le M_\delta c, \qquad x \in \Omega.$$

定理 8.11 の証明方針. まず球対称時間大域解 $u(x,t) = U(r,t)$ に対して命題 3.44 の不等式 (3.3.19) と (3.3.20) を使う. $C_T = O\big(T^{-\frac{1}{p-1}\left(\frac{N-2}{2} - \frac{2}{p-1}\right)}\big)$ であったから, $p > p_s$ のときこの係数は $T \to \infty$ のとき 0 に収束する. よって $t \to \infty$ のとき $C(t) \to 0$ なる関数 $C(t) > 0$ があって

$$|U(r,t)| \le C(t)\,(1 + |x|^{-\frac{2}{p-1}}), \qquad x \in \Omega \setminus \{0\}. \tag{8.2.8}$$

補題 8.13 と上の不等式 (8.2.8) から $p > p_s$ ならば時間大域解は一様有界のみならず $t \to \infty$ のとき 0 に一様収束することも容易に見て取れる. □

注意 8.14. さらに上の議論と簡単な極限論法を組み合わせることにより大域的な最小 L^1-延長解が $t \to \infty$ のとき 0 に収束することも証明できる．詳細は [64, Theorem 5.15] を参考にせよ．実はこの事実は球対称でない場合も有界領域の場合については正しいことが知られている ([16]).

注意 8.15. $\Omega = \mathbb{R}^N$ の場合は，初期値 u_0 の $|x| \to \infty$ での減衰の仕方に適当な制限を課さないと定理 8.11 の結論は必ずしも成り立たない．実際, [81] では $t \to \infty$ のとき L^∞ ノルムが無限大に発散する正値解 (grow-up solution) の例を構成している．このトピックに関しては [98, 99] にわかりやすい解説がある．

9 不完全爆発後の正則化現象

9.1 瞬時正則化

この章では不完全爆発後，解 $\underline{u}$ が瞬時に古典解に戻る現象を扱う．このような現象を**瞬時正則化** (immediate regularization) と呼ぶ．$B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| < 1\}$ とし，初期境界値問題

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in B_1(0),\ t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial B_1(0),\ t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, & x \in B_1(0) \end{cases} \tag{9.1.1}$$

を考える． ただし $u_0 \geq 0$ とする．

定義 9.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ はなめらかな境界をもつ有界領域とする．関数 $f(u)$ は滑らかな関数とする．関数 u は初期境界値問題

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, & x \in \Omega \end{cases} \tag{9.1.2}$$

の L^1-大域解とする．この初期境界値問題の古典的大域解 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を与える初期値の単調増大列 $\{u_{0,n}\}_{n=1}^{\infty} \subset C(\Omega)$ があって

(i) $\lim_{n\to\infty} \|u_{0,n} - u_0\|_{C(\Omega)} = 0$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \|u_n(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} = 0, \quad t \in [0, \infty)$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \|f(u_n) - f(u)\|_{L^1(\Omega\times[0,t))} = 0, \quad t \in [0, \infty)$

が成り立つとする．このとき，関数 $\underline{u} := \lim_{n\to\infty} u_n$ を**大域的最小 L^1-延長解** (global minimal L^1-continuation) と呼ぶ.

注意 9.2. 領域 Ω が凸であり，非線形項 f が凸関数とする．定理 8.2 の証明法によれば，u の L^1-大域性の下では収束の条件 (ii), (iii) を仮定する必要がないことがわかる.

以下，本章では $p_s = (N+2)/(N-2)$ $(N > 3)$ であり，

$$p_{JL} := \begin{cases} \infty, & N \le 10, \\ 1 + 4/(N - 4 - 2\sqrt{N-1}), & N > 10 \end{cases}$$

とする．この指数を**ジョセフ-ルンドグレンの臨界指数** (Critical Joseph-Lundgren exponent) という．

定理 9.3. (Fila-Matano-Poláčik [22]) $p_s < p < p_{JL}$ とし，球対称な関数 $u_0 = U_0(|x|)$ は，$C^2([0,1])$ の元であり，区間 $[0,1]$ 上で $U_0' \le 0$ とする．関数 $\underline{u}$ は初期境界値問題 (9.1.1) の大域的最小 L^1-延長解であって古典解としては時刻 $T < \infty$ で爆発するものとする．このとき，大域的最小 L^1-延長解 $\underline{u}$ は爆発後，瞬時に古典解に戻る．

補題 9.4. 関数 $u(x,t) = U(|x|,t)$ は初期境界値問題 (9.1.1) の時間大域的な古典解とする．また，区間 $[0,1]$ 上において $U_0 \ge 0$ かつ $U_0' \le 0$ とする．このとき定数 $C > 0$ があって

$$u(x,t) \le C|x|^{-2/(p-1)}, \quad x \in B_R(0) \setminus \{0\}, \quad t > 0.$$

この補題と大域的最小 L^1-延長解の定義から，極限論法によりつぎの主張を得る．

系 9.5. 関数 $\tilde{u}(x,t) = \tilde{U}(|x|,t)$ は初期境界値問題 (9.1.1) の大域的最小 L^1-延長解とする．また，区間 $[0,1]$ 上において $U_0 \ge 0$ かつ $U_0' \le 0$ とする．このとき定数 $C > 0$ があって

$$\tilde{u}(x,t) \le C|x|^{-2/(p-1)}, \quad x \in B_R(0) \setminus \{0\}, \quad t > 0.$$

Matano-Merle は [63, 64] において初期値に関する正値性や単調性を仮定しなくても，また解が時間大域的に存在しない場合をも含む形に補題 9.4 を一般化した．それが命題 3.44 である．実際，命題 3.44 の式 (3.3.20) に $T = \infty$ を代入すると補題 9.4 の不等式になる．この一般化によると領域は全空間 $\Omega = \mathbb{R}^N$ でもよい．また命題 3.44 と簡単な極限論法により次を得る．

命題 9.6. (Matano-Merle 2004, 2009 [63, 64]) $\Omega = B_R(0)$ とし，$p_s < p < \infty$ とする．また $\tilde{u}$ は $0 \le t < T^*$ まで定義されている初期境界値問

題 (9.1.1) の球対称な極限 L^1-延長解とする．このとき任意の $T_1 \in (0, T^*)$ に対してある C_T があって

$$|\tilde{u}(x,t)| \le C_{T_1}(1+|x|^{-\frac{2}{p-1}}), \quad x \in \Omega \setminus \{0\}, \quad T_1/2 \le t \le T_1.$$

さらに $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ならば C_{T_1} はつぎの評価式を満たす．

$$C_{T_1} = O\Big(T_1^{-\frac{1}{p-1}(\frac{N-2}{2}-\frac{2}{p-1})} \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{p+1}}\Big)$$

以下で紹介する 補題 9.4 の証明は [67] による．これまで学んだ Kaplan の方法をパラメーター付きの形で用いる．

補題 9.4 の証明. $\lambda_1 > 0$ は Dirichlet 条件付き $-\Delta$ の第 1 固有値とし，$\varphi_1 \in C^2(\bar{B}_1(0))$ は，固有値 $\lambda_1 > 0$ に対応する正値固有関数とする．すなわち，正数 $\lambda_1 > 0$ と関数 φ_1 は

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 + \lambda_1\varphi_1 = 0, & x \in B_1, \\ \varphi_1 = 0, & x \in \partial B_1, \\ \varphi_1 > 0, & x \in B_1, \end{cases}$$

を満たす．任意の $R \in (0,1)$ に対して $\psi_R = \varphi_1(R^{-1}x)$ とおき，

$$h_R(t) := \Big(\int_{B_R} \psi_R \, dx\Big)^{-1} \int_{B_R} u(\cdot,t)\psi_R \, dx$$

とおく．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{B_R} u(\cdot,t)\psi_R \, dx &= \int_{B_R} u(\cdot,t)\Delta\psi_R \, dx + \int_{B_R} u^p(\cdot,t)\psi_R \, dx \\ &\qquad - \int_{\partial B_R} u(\cdot,t)\frac{\partial\psi_R}{\partial n} \, dS_x \\ &\ge \int_{B_R(0)} u(\cdot,t)\Delta\psi_R \, dx + \int_{B_R} u^p(\cdot,t)\psi_R \, dx \\ &= -\frac{\lambda_1}{R^2}\int_{B_R} u(\cdot,t)\psi_R \, dx + \int_{B_R} u^p(\cdot,t)\psi_R \, dx. \end{aligned}$$

この式の両辺を $\displaystyle\int_{B_R} \psi_R \, dx$ で割って Jensen の不等式を用いると

$$\frac{d}{dt}h_R(t) \ge -\frac{\lambda_1}{R^2}h_R(t) + h_R^p(t)$$

解が時間大域的であるという仮定よりそのようにして得られた不等式の右辺は負でなくてはならない．よって，

$$h_R(t) \le \left(\frac{\lambda_1}{R^2}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \qquad t > 0.$$

また仮定より $[0,1] \times (0,\infty)$ において $U_r(r,t) \le 0$ なので

$$\begin{aligned} U(R,t) &= \Big(\int_{B_R} \psi_R\, dx\Big)^{-1} \int_{B_R} U(R,t)\, \psi_R\, dx \\ &\le \Big(\int_{B_R} \psi_R\, dx\Big)^{-1} \int_{B_R} u(\cdot,t)\, \psi_R\, dx = h_R(t). \end{aligned}$$

よって，題意の不等式が成立する． □

以下断らない限り大域的最小 L^1-延長解 $\underline{u}$ を u で表示することにする．

補題 9.7. $N > 2$, $p > (N+2)/(N-2)$ とし，球対称な関数 $u_0 = U_0(|x|)$ は区間 $[0,1]$ において連続とする．関数 u は初期境界値問題 (9.1.1) の大域的最小 L^1-延長解であるとし，その近似関数列を $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ と表す．このとき $q < N(p-1)/2$ に対して，

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \|u_n(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{H_0^1(B_1)\cap L^q(B_1)\cap C^2_{loc}(\bar{B}_1\setminus\{0\})} = 0, \\ &\qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \|u_n^p(\cdot,t) - u^p(\cdot,t)\|_{L^q(B_1)} = 0, \quad t > 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．さらに，$u \in C((0,\infty), H_0^1(B_1))$ であり関数

$$J(u(\cdot,t)) = \int_{B_1} \left(\frac{1}{2}|\nabla u(\cdot,t)|^2 - \frac{1}{p+1}|u(\cdot,t)|^{p+1}\right) dx$$

は $t \in (0,\infty)$ において単調非増大である．

補題 9.7 の証明. まず，解 u が時間大域的であると仮定して任意の $t > 0$ に対して $u(t) \in H_0^1(B_1) \cap L^q(B_1) \cap C^2_{loc}(\bar{B}_1 \setminus 0)$ を示す．関数 $U(r,t)$ が r に関して単調減少であることと補題 9.4 より

$$0 \le |U(r,t)| \le \left(\frac{\lambda_1}{r^2}\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{9.1.3}$$

$\tilde{q} < N(p-1)/(2p)$ を満たす定数を選んで固定する．$2\tilde{q}/(p-1) < N/p < N$ であるからある定数 $M_q > 0$ に対して任意の $t > 0$ に対して

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{\tilde{q}}(B_1)} \le \Big\| \Big(\frac{\lambda_1}{r^2}\Big)^{\frac{1}{p-1}} \Big\|_{L^{\tilde{q}}(B_1)} \le M_q, \tag{9.1.4}$$

$$\|u^p(\cdot,t)\|_{L^{\tilde{q}}(B_1)} \le \Big\| \Big(\frac{\lambda_1}{r^2}\Big)^{\frac{p}{p-1}} \Big\|_{L^{\tilde{q}}(B_1)} \le M_q^p. \tag{9.1.5}$$

一方，ソボレフ空間の埋め込み定理と補題 2.12 によると，$1/\tilde{q} - (1/\tilde{q} - 2\beta/N) = 2\beta/N$ より

$$\|e^{t\Delta}\phi\|_{W^{2\beta,\tilde{q}}(B_1)} \le Ct^{-\frac{N}{2}\frac{2\beta}{N}}\|\phi\|_{L^{\tilde{q}}(B_1)} \le Ct^{-\beta}\|\phi\|_{L^{\tilde{q}}(B_1)}, \quad t > 0.$$

したがって任意の $\beta \in (0,1)$ に対して

$$\begin{aligned} &\|u(t+\delta)\|_{W^{2\beta,\tilde{q}}(B_1)} \\ &\le \|e^{\delta\Delta}u(t)\|_{W^{2\beta,\tilde{q}}(B_1)} + \Big\| \int_0^\delta e^{(\delta-\tau)\Delta}u^p(t+\tau)\,d\tau \Big\|_{W^{2\beta,\tilde{q}}(B_1)} \\ &\le C\delta^{-\beta}\|u(t)\|_{L^{\tilde{q}}(B_1)} + \frac{C\delta^{1-\beta}}{1-\beta} \sup_{\tau\in(0,\tau)} \|u^p(t+\tau)\|_{L^{\tilde{q}}(B_1)} \\ &\le CM_q\Big(\delta^{-\beta} + \frac{\delta^{1-\beta}}{1-\beta}\Big) \end{aligned} \tag{9.1.6}$$

を得る．最後の不等式には式 (9.1.4), (9.1.5) を用いた．$\tilde{q}$ を $N(p-1)/2p$ に β を 1 に十分近くに選ぶ．このとき，$1/q - 2\beta/N < 1/2 - 1/N$ $1/q - 2\beta/N < 2 - 2p/(p-1)$ なのでソボレフの埋め込み定理から任意の $q < N(p-1)/2$ に対して

$$W_0^{2\beta,\tilde{q}}(B_1) \subset\subset H_0^1(B_1), \qquad W_0^{2\beta,\tilde{q}}(B_1) \subset\subset L^q(B_1).$$

これと不等式 (9.1.6) より任意の $\delta > 0$ に対してある $C_\delta > 0$ があって

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^1(B_1)} \le C_\delta, \qquad t \in [\delta,\infty). \tag{9.1.7}$$

つぎに，前半の議論を用いて題意の収束性の部分を証明する．大域的最小 L^1-延長解の定義から，近似関数列は時間大域的である．ゆえに，十分小さな $t > 0$ と十分大きな任意の $n \in \mathbb{N}$ で，近似関数列 u_n に対して不等式 (9.1.3), (9.1.4), (9.1.7) が成り立つ．不等式 (9.1.4), (9.1.7) とルベーグの収束定理より H_1-ノルムでの収束性と L^q-ノルムでの収束性がわ

かる．C^2_{loc}-ノルムでの収束は不等式 (9.1.3) とシャウダーの内部評価式から得られる．以上から，$q < N(p-1)/2$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{H_0^1(B_1)\cap L^q(B_1)\cap C^2_{loc}(\bar{B_1}\setminus\{0\})} = 0, \quad t > 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \|u_n^p(\cdot,t) - u^p(\cdot,t)\|_{L^q(B_1)} = 0, \quad t > 0$$

が成り立つ．

近似関数 u_n に対して，$J(u_n(\cdot,t))$ は $t \in (0,\infty)$ に関して単調減少である．上記で述べた収束性の結果から

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{H_0^1(B_1)} = 0, \quad t > 0.$$

一方，$(p+1)q \geq 4N^2/(N^2-4) > 1$ なので

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n^{p+1}(\cdot,t) - u^{p+1}(\cdot,t)\|_{L^q(B_1)} = 0.$$

以上 2 つの極限式より $J(u_n(\cdot,t))$ において $n\to\infty$ の極限を考えれば極限と積分の順序が交換可能である．これから大域的最小 L^1-延長解についても汎関数の単調性がしたがう． □

大域的最小 L^1-延長解と特異定常解

$$\Phi^*(r) = c^* r^{-2/(p-1)}, \qquad (c^*)^{p-1} = \frac{2}{p-1}\left(N - 2 - \frac{2}{p-1}\right)$$

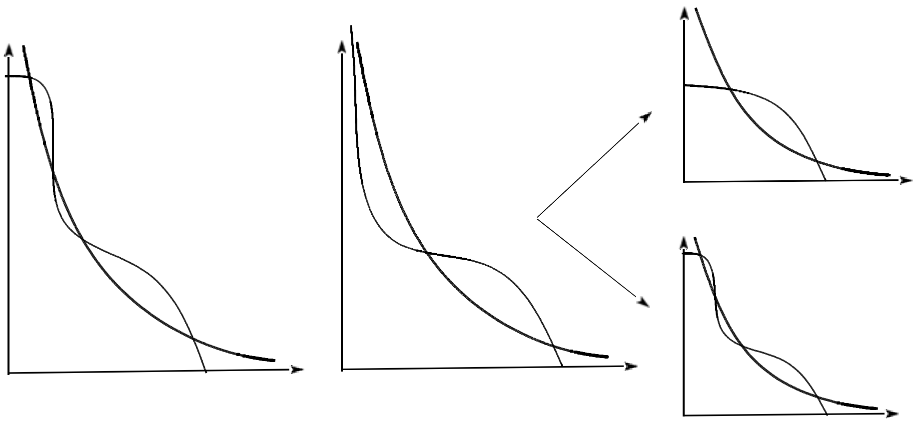
の零点数について次の補題が成り立つ．

補題 9.8. $U(r,t)$ を大域的最小 L^1-延長解，$\Phi^*(r)$ を特異定常解とする．$t^* > 0$ に対してある点列 $0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k < t^*$ があって，$U(r,\tau_i) - \Phi^*(r)$ は，区間 $(0,1]$ 上に退化した零点を持つものとする．このとき，

$$Z_{[0,1]}(U(\cdot,t^*) - \Phi^*(\cdot)) \leq Z_{[0,1]}(U(\cdot,0) - \Phi^*(\cdot)) - k$$

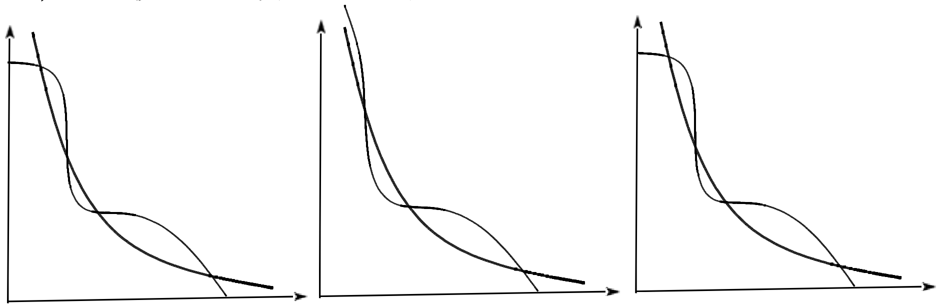
が成り立つ．

注意 9.9. ここで，注意すべきは比較する関数が両方とも古典解ではないから一般には零点数は時間非増大とは限らないことである．実際，爆発時刻の瞬間に $r=0$ で交点が消えて，その直後に生まれたりすることがある．しかし，この補題は非横断的な交点があるとその回数は減少することを主張している．



$t=T-\varepsilon$ $t=T$ $t=T+\varepsilon$

図 6: 零点 2 つが爆発の瞬間に原点に消えてそのままなくなるとき場合と，その後もとに戻るときの図.



$t=T-\varepsilon$ $t=T$ $t=T+\varepsilon$

図 7: 零点 1 つが爆発の瞬間に原点に消えてその後もとに戻るときの図.

補題 9.8 の証明. 時間 $[0,T]$ では大域的最小 L^1-延長解 $u(x,t)=U(|x|,t)$ は古典解と一致する．u が古典解ならば，任意の $t>0$ に対して $U(r,t)-\Phi^*(r)$ は原点近傍では常に負である．そのため，原点を除いた部分では補題 8.7 が適用できる．よって，u が古典解であるかぎり，$U(r,t)-\Phi^*(r)$ の退化した零点の出現する時刻は有限離散集合をなす．ゆえに，ある $t_0<\tau_1$ を満たす $t_0\in(0,T)$ があって $U(r,t_0)-\Phi^*(r)$ は非退化な零点のみもつ．

$u_n(x,t)=U_n(r,t)$ は大域的最小 L^1-延長解を近似する時間大域解の列とする．補題 2.2，補題 2.3 で述べた先験的評価式から

$$u_n(\cdot,t_0)\to u(\cdot,t_0)\quad \text{in}\quad C^2(\bar{B}_1).$$

$U(r,t_0)-\Phi^*(r)$ が単純零点のみを持つということから，十分大きな任意

の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$Z_{[0,1]}(U_n(\cdot, t_0) - \Phi^*) = Z_{[0,1]}(U(\cdot, t_0) - \Phi^*) \tag{9.1.8}$$

が成立する．一方，補題 9.7 より

$$u_n(\cdot, t^*) \to u(\cdot, t^*) \quad \text{in} \quad C^2_{loc}(\bar{B}_1 \setminus \{0\})$$

である．したがって，零点数の下半連続性から $Z_{[0,1]}(U(\cdot, t^*) - \Phi^*)$ が有限ならば

$$Z_{[0,1]}(U_n(\cdot, t^*) - \Phi^*) \geq Z_{[0,1]}(U(\cdot, t^*) - \Phi^*) \tag{9.1.9}$$

が十分大きな $n \in \mathbb{N}$ について成り立つ．一方，$Z_{[0,1]}(U(\cdot, t^*) - \Phi^*)$ が有限でない場合は

$$Z_{[0,1]}(U_n(\cdot, t^*) - \Phi^*) = \infty.$$

しかしながらこのようなことはあり得ない．なぜなら等式 (9.1.8) と補題 8.7 より $Z_{[0,1]}(U_n(\cdot, t^*) - \Phi^*) < \infty$ でなくてはならない．よって，$Z_{[0,1]}(U(\cdot, t^*) - \Phi^*) < \infty$.

$r_i \in (0, \infty]$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ を $U(\cdot, \tau_i) - \Phi^*$ が退化した零点をもつ位置とする．$u|_{\partial\Omega} = 0$ より $r_i \in (0, 1)$ がわかる．また，a_i ,b_i は $0 < a_i < r_i < b_i < 1$ かつ任意の $i = 1, 2, \cdots, k$ に対し

$$U(a_i, \tau_i) - \Phi^*(a_i) \neq 0, \qquad U(b_i, \tau_i) - \Phi^*(b_i) \neq 0$$

を満たす点とする．ここで $\varepsilon > 0$ を十分小さく選べば，

$$U(a_i, t) - \Phi^*(a_i) \neq 0, \quad U(b_i, t) - \Phi^*(b_i) \neq 0, \quad t \in (\tau_i - \varepsilon, \tau_i + \varepsilon) \tag{9.1.10}$$

が成り立つ．必要ならば，$\varepsilon > 0$ を十分小さく取り直して $[\tau_i - \varepsilon, \tau_i + \varepsilon]$ は $i \in \{1, 2, \cdots k\}$ が異なれば互いに交わらず，$U(\cdot, \tau_i \pm \varepsilon) - \Phi^*$ は区間 $[a_i, b_i]$ において，単純零点のみもつようにできる．なぜなら，区間 $[a_i, b_i]$ では大域的最小 L^1-延長解 u は任意の時刻において有界なので，退化した零点が出現する時刻が離散的であるからである．

$U(r, \tau_i) - \Phi^*(r)$ が点 $r_i \in [a_i, b_i]$ において退化した零点をもつこと，関数 Φ^* が区間 $[a_i, b_i]$ において有界であること，式 (9.1.10), および補題 8.7 より，

$$Z_{[a_i, b_i]}(U(\cdot, \tau_i - \varepsilon) - \Phi^*) > Z_{[a_i, b_i]}(U(\cdot, \tau_i + \varepsilon) - \Phi^*). \tag{9.1.11}$$

一方，関数 $U(\cdot,\tau_i\pm\varepsilon)-\Phi^*$ は区間 $[a_i,b_i]$ において，単純零点のみをもつ．ゆえに，十分大きな $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$Z_{[a_i,b_i]}(U_n(\cdot,\tau_i\pm\varepsilon)-\Phi^*)=Z_{[a_i,b_i]}(U(\cdot,\tau_i\pm\varepsilon)-\Phi^*) \tag{9.1.12}$$

が成り立つ．式 (9.1.11), (9.1.12) より十分大きな任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$Z_{[a_i,b_i]}(U_n(\cdot,\tau_i-\varepsilon)-\Phi^*)>Z_{[a_i,b_i]}(U_n(\cdot,\tau_i+\varepsilon)-\Phi^*). \tag{9.1.13}$$

また，式 (9.1.10) より $n\in\mathbb{N}$ を十分大きく選べば，任意の $t\in[\tau_i-\varepsilon,\tau_i+\varepsilon]$ に対して

$$U_n(a_i,t)-\Phi^*(a_i)\neq 0,\quad U_n(b_i,t)-\Phi^*(b_i)\neq 0 \tag{9.1.14}$$

が成立する．したがって，補題 8.7 と 不等式 (9.1.13) よりある $t\in[\tau_i-\varepsilon,\tau_i+\varepsilon]$ があって，関数 $U_n(\cdot,t)-\Phi^*(\cdot)$ は区間 $[a_i,b_i]$ 内において退化した零点をもつ．すなわち，関数 $U_n(\cdot,t)-\Phi^*(\cdot)$ は区間 $[t_0,\tau_i]$ において少なくとも k 個の退化した零点をもつ．この事実と式 (9.1.14), および補題 8.7 より

$$Z_{[0,1]}(U_n(\cdot,t^*)-\Phi^*)\leq Z_{[0,1]}(U_n(\cdot,t_0)-\Phi^*)-k \tag{9.1.15}$$

がしたがう．最後に式 (9.1.8), (9.1.9), (9.1.15) より

$$Z_{[0,1]}(U(\cdot,t^*)-\Phi^*)\leq Z_{[0,1]}(U(\cdot,t_0)-\Phi^*)-k$$

である．さらに，時間 $[0,T]$ では関数 u が古典解であることと補題 8.7 より $Z_{[0,1]}(U(\cdot,t_0)-\Phi^*)\leq Z_{[0,1]}(U(\cdot,0)-\Phi^*)$ である．よって，題意が成立する． □

では，定理 9.3 を証明しよう．ある $\delta>0$ に対して，時間 $[T,T+\delta]$ で常に延長解が爆発しているとして矛盾を導く．

定理 9.3 の証明． 補題 9.8 より $\underline{U}-\Phi^*$ が，区間 $[0,1]$ に退化した零点を持つ時刻は，時間 $[T,T+\delta]$ 内に有限個しかない．したがって，閉区間 $[T,T+\delta]$ の適当な部分区間 $[\tau_1,\tau_2]$ においては，$[0,1]$ 上で退化した零点はない．注意 9.9 によれば区間 $[\tau_1,\tau_2]$ 上でも零点数は増減するかもしれない．しかしながら，必要に応じて $[\tau_1,\tau_2]$ をさらに小さく取りかえれば，ある $r_0>0$ があって次のいずれかが成り立つ．

$$\begin{aligned}&\text{Case (1)}\qquad \underline{U}<\Phi^*,\ r\in(0,r_0],\ t\in[\tau_1,\tau_2],\\ &\text{Case (2)}\qquad \underline{U}>\Phi^*,\ r\in(0,r_0],\ t\in[\tau_1,\tau_2].\end{aligned}$$

以下の議論で Case (1) と Case (2) がいずれも起こらないことを示す.

Case (1) が起こりえないこと

もし，このようになったとすると近似関数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$U_n(r,\tau_1) < \Phi^*(r), \quad r \in (0, r_0], \tag{9.1.16}$$

$$U_n(r_0,t) < \underline{U}(r_0,t), \quad t \in [\tau_1, \tau_2] \tag{9.1.17}$$

が成立する.

$p < 1 + 4/(N - 4 - 2\sqrt{N-1})$ のとき初期値問題

$$\begin{cases} U_t = U_{rr} + \dfrac{N-1}{r}U_r + U^p, & r > 0,\, t > 0, \\ U_r(0,t) = 0, & t > 0, \\ U(r,0) = \Phi^*(r), & r > 0 \end{cases}$$

は前向き自己相似解 $u_f(x,t) = U_f(r,t)$ を持つことが知られている [28]. $r = 0$ を除いたところでは $\underline{U}, U_f$ は有界である. よってある δ_0 があって

$$\underline{U}(r_0,t) < U_f(r_0, t - \tau_1), \quad t \in [\tau_1, \tau_1 + \delta_0]. \tag{9.1.18}$$

これと不等式 (9.1.17) より

$$U_n(r_0,t) < U_f(r_0, t - \tau_1), \quad t \in [\tau_1, \tau_1 + \delta_0]. \tag{9.1.19}$$

よって，比較原理と不等式 (9.1.16), (9.1.19) から

$$U_n(r,t) < U_f(r, t - \tau_1), \quad r \in (0, r_0],\, t \in [\tau_1, \tau_1 + \delta_0]$$

がしたがう. 大域的最小 L^1-延長解の定義から $n \to \infty$ の極限を考えると

$$\underline{U}(r,t) < U_f(r, t - \tau_1), \quad r \in (0, r_0],\, t \in [\tau_1, \tau_1 + \delta_0].$$

背理法の仮定より，時間 $[T, T+\delta]$ においては大域的最小 L^1-延長解が常に爆発している. よって，左辺は発散するが右辺は有界になり矛盾.

Case (2) が起こりえないこと

以下、記号を簡略化するため関数 $\underline{u}$ を u として表示する.

ステップ 1

まず，$\theta \in (\tau_1, \tau_2)$ を選び，有限区間の関数を無限区間にスケール変換した関数

$$\begin{cases} W_{0,\theta}(\xi,s) = (\theta - t)^{\frac{1}{p-1}} U(r,t), \\ \xi = \dfrac{r}{\sqrt{\theta - t}}, \quad s = -\log(\theta - t) \end{cases} \tag{9.1.20}$$

および，関数 $\rho(\xi)=\xi^{N-1}e^{-\xi^2/4}$ を導入する．ここで，$t=\theta$ は必ずしも爆発時刻には一致していないでもよい．大域的最小 L^1-延長解 u の $t\to\theta$ の挙動を解析することは，関数 $W_{0,\theta}$ で $s\to\infty$ の漸近挙動を解析することに対応する．特異定常解 $\Phi^*(r)$ はこのスケール変換を施しても不変であることに注意せよ．

関数 $W=W_{0,\theta}$ は方程式

$$(9.1.21)\qquad \begin{cases} W_s=\dfrac{1}{\rho}(\rho W_\xi)_\xi+W^p-\dfrac{1}{p-1}W, \\ W_\xi(0,s)=0, \\ W(e^{s/2},s)=0, \\ W(\xi,-\log\theta)=\theta^{\frac{1}{p-1}}u_0(\xi\sqrt{\theta}),\ 0<\xi<e^{s/2}, s>-\log\theta \end{cases}$$

を満たす．次にエネルギー汎関数を以下で定義する:

$$E(\varphi):=\int_0^{e^{s/2}}\left(\frac{1}{2}\varphi_\xi^2-\frac{1}{p+1}\varphi^{p+1}+\frac{1}{2(p-1)}\varphi^2\right)\rho\,d\xi.$$

補題 9.10. 問題 (9.1.21) の解 W に対して関数 $E(W(\cdot,s))$ がある時刻で負になるならば関数 W は有限時間で爆発する．

補題 9.10 の証明. $U_t(R,t)=0$ と $\dfrac{\partial}{\partial t}=\dfrac{1}{\theta-t}\Big\{\dfrac{\partial}{\partial s}+\dfrac{\xi}{2}\dfrac{\partial}{\partial\xi}\Big\}$ より

$$W_s(e^{s/2},s)+\frac{e^{s/2}}{2}W_\xi(e^{s/2},s)=0.$$

これと 初期境界値問題 (9.1.21) より

$$\begin{aligned}\frac{dE(W(\cdot,s))}{ds}&=\frac{1}{2}e^{s/2}\left(\frac{1}{2}W_\xi^2-\frac{1}{p+1}W^{p+1}+\frac{1}{2(p-1)}W^2\right)\rho\Bigg|_{\xi=e^{s/2}}\\ &\quad+\int_0^{e^{s/2}}\left(W_\xi W_{\xi s}-W^pW_s+\frac{1}{p-1}WW_s\right)\rho\,d\xi+\Big[\rho W_\xi W_s\Big]_{\xi=0}^{\xi=e^{s/2}}\\ &=\int_0^{e^{s/2}}\left\{-(\rho W_\xi)_\xi-\rho W^p+\frac{\rho}{p-1}W\right\}W_s\,d\xi-\frac{1}{4}e^{s/2}W_\xi^2(e^{s/2},s)\\ &\le-\int_0^{e^{s/2}}W_s^2\rho\,d\xi,\quad s>-\log\theta.\end{aligned}$$

方程式 (9.1.21) の両辺に関数 $W\rho$ をかけて $\mathbb{R}^N$ で積分すると任意の $s > s^*$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_{\mathbb{R}^N} W^2\rho\,d\xi &= \int_0^{e^{s/2}} \Big(-|\nabla W|^2 - \frac{1}{p-1}W^2 + |W|^{p+1}\Big)\rho\,d\xi \\ &= -2E(W(\cdot,s)) + \frac{p-1}{p+1}\int_0^{e^{s/2}} |W|^{p+1}\rho\,d\xi \\ &\geq -2E(W(\cdot,s^*)) + C\Big(\int_0^{e^{s/2}} W^2\rho\,d\xi\Big)^{\frac{p+1}{2}}\end{aligned}$$

である．最後の不等式は，エネルギー汎関数の単調減少性と Jensen の不等式による．関数 $W(\cdot,s)$ が爆発しないためには上の式の最左辺が非正でなければばならない．よって，ある $s^* \in \mathbb{R}$ に対して

$$2E(W(\cdot,s^*)) < C\left(\int_0^{e^{s/2}} |W(\cdot,s^*)|^2\rho\,d\xi\right)^{\frac{p+1}{2}}$$

ならば $W(\cdot,s)$ は有限時間に爆発する．特に，エネルギーがある時刻で負になるならば関数 W は有限時間で爆発する． □

大域的最小 L^1-延長解の定義における近似関数列 u_n に対して大域的最小 L^1-延長解 u と同じスケール変換 (9.1.20) を施した関数を以下 $W_n = (W_n)_{0,\theta}$ と書くことにしする． W_n に対しても次が成立．

$$\frac{dE(W_n(\cdot,s))}{ds} \leq -\int_0^{e^{s/2}} \big|(W_n)_s(\cdot,s)\big|^2\rho\,d\xi, \quad s > -\log\theta.$$

ただし $(W_n)_s$ は関数 W_n を s に関して偏微分した関数とする．この汎関数 $E(W_n(\cdot,s))$ を s について積分すると

$$\int_{s_1}^{s_2}\int_0^{e^{s/2}} \big|(W_n)_s\big|^2\rho\,d\xi ds \leq E(W_n(\cdot,s_1)) - E(W_n(\cdot,s_2)), \quad s_1 > -\log\theta$$

を得る．この関数 W_n は時間大域的に存在する．ここで，補題 9.10 より時間大域解 W_n のエネルギーは非負である．また，エネルギーの単調非増大性より任意の $s > -\log\theta$ に対して $E(W_n(\cdot,s)) \leq E(W_n(\cdot,-\log\theta))$ が成り立つことを考慮すれば $s_2 \to \infty$ のとき

$$\int_{s_1}^{\infty}\int_0^{e^{s/2}} \big|(W_n)_s\big|^2\rho\,d\xi ds < \infty$$

が成り立つ．よって，Fatou の補題より $n \to \infty$ の極限から得られる関数 $W = W_{0,\theta}$ に対しても

$$\int_{s_1}^{\infty} \int_0^{e^{s/2}} |W_s|^2 \rho \, d\xi ds < \infty. \tag{9.1.22}$$

さらに，関数 u が半径方向に単調減少であることと補題 9.4 より

$$W(\xi, s) \leq C\xi^{-2/(p-1)}. \tag{9.1.23}$$

この不等式(9.1.23) から任意の $M > 0$ に対して $[M^{-1}, M] \times [s_1, \infty)$ 上 W_s, $W_\xi, W_{\xi\xi}$ が ξ について一様ヘルダー連続であることがしたがう．よって，アスコリ・アルツェラの定理より $\{W(\cdot, s)\}_{s \in [s_1, \infty)} \subset\subset C^2([M^{-1}, M])$ である．ゆえに ω 極限集合は空でない．また，適当な時間列 $\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots \to \infty$ と関数 ψ をとると $I_M := [M^{-1}, M]$ 上では $s \in [\delta, \tau_0]$ に対して一様に $\lim_{j\to\infty} W_s(\cdot, s + \sigma_j) = \psi$ となる．このとき不等式 (9.1.22) から

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{j\to\infty} \int_{\sigma_j+\delta}^{\sigma_j+\tau_0} \int_0^{e^{s/2}} |W_s|^2 \rho \, d\xi ds \\
&> \lim_{j\to\infty} \int_{\sigma_j+\delta}^{\sigma_j+\tau_0} \int_{I_M} |W_s|^2 \rho \, d\xi ds \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_{\delta}^{\tau_0} \int_{I_M} |W_s|^2(\xi, s+\sigma_j) \rho \, d\xi ds \\
&\geq \lim_{j\to\infty} \int_{\delta}^{\tau_0} \int_{I_M} \left(\frac{1}{\rho}(\rho W_\xi)_\xi + W^p - \frac{1}{p-1} W \right)^2 \rho \, d\xi ds \\
&\geq \int_{\delta}^{\tau_0} \int_{I_M} \left(\frac{1}{\rho}(\rho \psi_\xi)_\xi + \psi^p - \frac{1}{p-1} \psi \right)^2 \rho \, d\xi ds.
\end{aligned}$$

よって， $I_M \times [\delta, \tau_0]$ 上で一様に

$$\lim_{j\to\infty} W_s(\xi, s + \sigma_j) = 0$$

であり，$W(\cdot, -\log(\theta))$ の ω 極限集合は

$$(\rho\psi_\xi)_\xi + \rho \left(\psi^p - \frac{1}{p-1}\psi \right) = 0,\ \xi > 0 \tag{9.1.24}$$

の解集合に含まれる．

次に，Case (2) の仮定を用いて時間列 $\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots \to \infty$ のとり方に依らず $\psi \equiv \Phi^*$ であることを示す．最大値原理より，ある $\xi_0 \in (0,\infty)$ があって $\psi(\xi_0) = \Phi^*(\xi_0)$ が成り立つならば関数 ψ と関数 Φ^* は恒等的に一致してしまう．よって，任意の $\xi \in (0,\infty)$ に対して $\Phi := \psi/\Phi^* > 1$ が成り立つと仮定して矛盾を導けばよい．$\sigma(\xi) = \xi^{-\frac{4}{(p-1)}}\rho(\xi) = \xi^{N-1-4/(p-1)}e^{-\xi^2/4}$ とおく．関数 Φ は,

$$(\sigma\Phi_\xi)_\xi + (c^*)^{p-1}\frac{\sigma}{\xi^2}(\Phi^p - \Phi) = 0$$

を満たす．これより，$(\sigma\Phi_\xi)_\xi < 0$ がしたがう．$p > p_s$ ならば，変数変換

$$z = \int_1^\xi \frac{d\xi}{\sigma(\xi)}$$

により ξ の区間 $(0,\infty)$ は，$\mathbb{R}$ に位相同型に写される．しかも，$\Phi_{zz} = \sigma(\sigma\Phi_\xi)_\xi < 0$ である．よって，$\Phi(z)$ は $\mathbb{R}$ 上で狭義凸関数である．これは,背理法の仮定に矛盾．よって，$\Phi \equiv 1$ でなくてはならない．

以上の議論から，$I_M = [M^{-1}, M]$ 上で一様に

$$\lim_{s\to\infty} W_{0,\theta}(\xi, s) = \Phi^*(\xi) \tag{9.1.25}$$

が成立することが分かった．

<u>ステップ 2</u>

定数 $t_0 \in (0,T)$ を,

$$Z_{(0,1)}(U(r,t_0) - \Phi^*(r)) = m_0 < \infty \tag{9.1.26}$$

かつ，2 つの関数の交わり方は横断的なものとして固定する．補題 1.20 の極限式 (1.2.18), 式 (9.1.26) および $t = t_0$ における関数 u , Φ^* の横断性から，十分大きな $a > 0$ に対して

$$Z_{(0,1)}(U(r,t_0) - \Phi_a(r)) = m_0 \tag{9.1.27}$$

が成り立つ．

一方，補題 1.20 の式 (1.2.19) より十分大きな s_1 を取ると

$$Z_{(0,e^{s_1/2})}(\Phi_1(\xi) - \Phi^*(\xi)) > m_0$$

である．したがって極限式 (9.1.25) と零点数の下半連続性より十分大きな s に対して

$$Z_{(0,e^{s_1/2})}(W_{0,\theta}(\xi,s) - \Phi_1(\xi)) > m_0$$

が成立する．特に $s > s_1$ に対して

$$\begin{aligned}
m_0 &< Z_{(0,e^{s/2})}(W_{0,\theta}(\xi,s) - \Phi_1(\xi)) \\
&= Z_{(0,e^{s/2})}\Big((\theta-t)^{\frac{1}{p-1}}\big(U(\sqrt{\theta-t}\,\xi,t) - \Phi_{\vartheta(t)}(\sqrt{\theta-t}\,\xi)\big)\Big) \\
&= Z_{(0,e^{s/2})}(U(\sqrt{\theta-t}\,\xi,t) - \Phi_{\vartheta(t)}(\sqrt{\theta-t}\,\xi)) \\
&= Z_{(0,1)}(U(r,t) - \Phi_{\vartheta(t)}(r)).
\end{aligned}$$

ただし $\vartheta(t) := (\theta-t)^{-\frac{1}{p-1}}$ 上の式では，はじめの変数で書くため，

$$\begin{aligned}
W_{0,\theta}(\xi,s) &= (\theta-t)^{\frac{1}{p-1}}U(r,t), \\
\Phi_1(\xi) &= (\theta-t)^{\frac{1}{p-1}}\Phi_{\vartheta(t)}(\sqrt{\theta-t}\,\xi)
\end{aligned}$$

を代入した．最後に，$t_2 := \theta - e^{-s_2/2} > t_0$ を満たすほど $s_2 > s_1$ を大きく選んで固定すると

$$m_0 < Z_{(0,1)}(U(r,t_2) - \Phi_{\vartheta(t_2)}(r)) \tag{9.1.28}$$

が成り立つ．補題 8.7 より関数 U, $\Phi_{\vartheta(t_2)}$ の零点数は $t > 0$ について単調非増大であるから，不等式 (9.1.28) は等式 (9.1.27) と両立し得ない．よって矛盾． □

注意 9.11. 本節で紹介した文献 [22] では指数型の非線形項をもつ方程式 $u_t = \Delta u + e^u$ (ただし $3 \le N \le 9$) に対しても定理 9.3 と同じ結論を導いている．なおベキ型の初期境界値問題 (9.1.1) の場合は Matano-Merle [64] によって定理 9.3 が $p_s < p < \infty$ の場合に拡張され，かつ解の正値性も延長解の最小性の仮定も除かれている (ただし爆発が Type I であることが仮定されている．なお $p_s < p < p_{JL}$ の場合は [63, 64] に示されているようにほとんどすべての解がタイプ I である)．手法は上で述べたものと異なりエネルギーとスケーリング法による．

9.2 爆発の回数

定理 9.12. (Fila-Matano-Poláčik [22]) 定理 9.3 の仮定の下，初期値 u_0 がある自然数 $j \in \mathbb{N}$ に対して，

$$Z_{[0,1]}(u_0'' + \frac{N-1}{r}u_0' + u_0^p) = j.$$

を満たすとする．集合 B を $B = \{t > 0; \underline{u}(0,t) = \infty\}$ によって定義すれば，$k \leq (j+1)/2$ を満たすある自然数 k があって $B = \{t_i\}_{i=1}^k$, $t_1 = T < t_2 < \cdots < t_k < \infty$ である．

定理 9.12 の証明. 集合 B の連結成分の個数が $k > (j+1)/2$ 個であるとする．このとき

$$0 < \tau_1 < t_1 = T < \tau_2 < t_2 < \cdots < \tau_k < t_k$$

となる時間列であって

$$\lim_{t \nearrow t_i} u(0,t) = \infty$$

かつ，時間 $[\tau_i, t_i)$ で常に大域的最小 L^1-延長解 u が正則なものがとれる．したがって，ある $\tilde{\tau}_i \in (\tau_i, t_i)$ があって

$$u(0,\tau_1) < u(0,\tilde{\tau}_1) > u(0,\tau_2) < u(0,\tilde{\tau}_2) > \cdots < u(0,\tilde{\tau}_k)$$

関数値が有界ならばその時間では，解の近似列は C^2-ノルムで収束する．そのため，十分大きな任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$u_n(0,\tau_1) < u_n(0,\tilde{\tau}_1) > u_n(0,\tau_2) < u_n(0,\tilde{\tau}_2) > \cdots < u_n(0,\tilde{\tau}_k)$$

である．このことから，$(u_n)_t(0,t)$ は少なくとも $2(k-1)$ 回符号変化する．

関数 u_n の球対称性より $(u_n)_t(0,t)$ が 0 ならば，それは関数 $u_n(\cdot,t)$ の退化した零点である．ゆえに，補題 8.7 より $(u_n)_t(0,t)$ が符号変化を起こすごとに，$Z_{[0,1]}((u_n)_t(r,t))$ は少なくとも 1 つ減少することがわかり，

$$Z_{[0,1]}((u_n)_t(\cdot,\tilde{\tau}_k)) \leq Z_{[0,1]}((u_n)_t(\cdot,\tau_1)) - 2(k-1).$$

次に，零点数の下半連続性を用いると

$$Z_{[0,1]}(u_t(\cdot,\tilde{\tau}_k)) \leq Z_{[0,1]}((u_n)_t(\cdot,\tau_1)) - 2(k-1). \tag{9.2.1}$$

また，補題 8.7 より τ_1 が t_1 に十分近いとき $u_t(\cdot, \tau_1)$ は退化した零点を持たないので

$$Z_{[0,1]}((u_n)_t(0, \tau_1)) = Z_{[0,1]}((u)_t(0, \tau_1)). \tag{9.2.2}$$

解 u は，はじめに爆発する時刻までは古典解であることに注意して，(9.2.1) (9.2.2) と古典解に関する零点数の非増大定理を用いれば，次の不等式が得られる．

$$Z_{[0,1]}(u_t(\cdot, \tilde{\tau}_k)) \leq Z_{[0,1]}(u_t(\cdot, 0)) - 2(k-1).$$

よって

$$Z_{[0,1]}(u_t(\cdot, \tilde{\tau}_k)) \leq j - 2(k-1)$$

がわかる．最後に，$Z_{[0,1]}(u_t(\cdot, \tilde{\tau}_k)) \geq 1$ でなくてはならないことを示そう．もし，$u_t(\cdot, \tilde{\tau}_k) > 0$ だとする．補題 7.17 により解は完全爆発してしまうので爆発時刻以降の大域的最小 L^1-延長解は存在しない．これは定理 8.6 に反する．よって，$j \geq 2k-1$. □

注意 9.13. 上記の定理だけでは実際に複数回爆発する解が存在するかどうかは分からない．Mizoguchi [70, 71] では $p > p_{JL}$ の場合に実際に複数回爆発する解の例を構成している．

参考文献

[1] H. Amann, *Parabolic evolution equations and nonlinear boundary conditions.* J. Differential Equations 72 (1988), no. 2, 201–269.

[2] H. Amann, *Dual semigroups and second order linear elliptic boundary value problems.* Israel J. Math. 45 (1983), no. 2-3, 225–254.

[3] H. Amann and P. Quittner, *Optimal control problems with final observation governed by explosive parabolic equations.* SIAM J. Control Optim. 44 (2005), no. 4, 1215–1238.

[4] S. Angenent, *The zero set of a solution of a parabolic equation.* J. Reine Angew. Math. 390 (1988), 79–96.

[5] J. M. Ball, *Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations.* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 28 (1977), 473–486.

[6] P. Baras and L. Cohen, *Complete blow-up after $T_{\max}$ for the solution of a semilinear heat equation.* J. Funct. Anal. 71 (1987), no. 1, 142–174.

[7] M.F. Bidaut-Véron, *Initial blow-up for the solutions of a semilinear parabolic equation with source term.* Equations aux dérivées partielles et applications, articles dédiés à Jacques-Louis Lions, Gauthier-Villars, Paris, 189–198, 1998.

[8] H. Brezis and T. Cazenave, *A nonlinear heat equation with singular initial data.* J. Anal. Math. 68 (1996), 277–304.

[9] J. Bricmont and A. Kupiainen, *Universality in blow-up for nonlinear heat equations.* Nonlinearity 7 (1994), no. 2, 539–575.

[10] J. Byeon, *Existence of many nonequivalent nonradial positive solutions of semilinear elliptic equations on three-dimensional annuli.* J. Differential Equations 136 (1997), no. 1, 136–165.

[11] T. Cazenave and P.L. Lions, *Solutions globales d'équations de la chaleur semi linéaires.* Comm. Partial Differential Equations 9 (1984), no. 10, 955–978.

[12] X. Chen, M. Fila and J.S. Guo, *Boundedness of global solutions of a supercritical parabolic equation.* Nonlinear Anal. 68 (2008), no. 3, 621–628.

[13] X. Y. Chen and H. Matano, *Convergence, asymptotic periodicity, and finite-point blow-up in one-dimensional semilinear heat equations.* J. Differential Equations 78 (1989), no. 1, 160–190.

[14] W.X. Chen and C. Li, *Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations.* Duke Math. J. 63 (1991), no. 3, 615–622.

[15] X.Y. Chen and P. Poláčik, *Asymptotic periodicity of positive solutions of reaction diffusion equations on a ball.* J. Reine Angew. Math. 472 (1996), 17–51.

[16] K.S. Chou, S.Z. Du and G.F. Zheng, *On partial regularity of the borderline solution of semilinear parabolic problems.* Calc. Var. Partial Differential Equations 30 (2007), 251–275.

[17] C.V. Coffman, *Lyusternik-Schnirelman theory: complementary principles and the Morse index.* Nonlinear Anal. 12 (1988), no. 5, 507–529.

[18] M. Escobedo and O. Kavian, *Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation.* Nonlinear Anal. 11 (1987), no. 10, 1103–1133.

[19] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, V. 19, 1998

[20] C. F.Kammerer, F. Merle, and H.Zaag, *Stability of the blow-up profile of non-linear heat equations from the dynamical system point of view.* Math. Ann. 317 (2000), no. 2, 347–387.

[21] M. Fila, *Boundedness of global solutions of nonlinear diffusion equations.* J. Differential Equations 98 (1992), no. 2, 226–240.

[22] M. Fila, H. Matano and P. Poláčik, *Immediate regularization after blow-up.* SIAM J. Math. Anal. 37 (2005), no. 3, 752–776.

[23] M. Fila, P. Souplet and F.B. Weissler, *Linear and nonlinear heat equations in L^q_δ spaces and universal bounds for global solutions.* Math. Ann. 320 (2001), no. 1, 87–113.

[24] S. Filippas, M.A. Herrero, J.J.L. Velázquez, *Fast blow-up mechanisms for sign-changing solutions of a semilinear parabolic equation with critical nonlinearity.* R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 456 (2000), no. 2004, 2957–2982.

[25] A. Friedman and B. McLeod, *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations.* Indiana Univ. Math. J. 34 (1985), no. 2, 425–447.

[26] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I 13 (1966), 109–124.

[27] V.A. Galaktionov and J.L. Vázquez, *Necessary and sufficient conditions for complete blow-up and extinction for one-dimensional quasilinear heat equations.* Arch. Rational Mech. Anal. 129 (1995), no. 3, 225–244.

[28] V.A. Galaktionov and J. L. Vázquez, *Continuation of blow-up solutions of nonlinear heat equations in several space dimensions.* Comm. Pure Applied Math. 50 (1997), no. 1, 1–67.

[29] B. Gidas, W.M. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in R^n.* Mathematical analysis and applications, Part A, pp. 369–402, Adv. in Math. Suppl. Stud., 7a, Academic Press, New York-London, 1981.

[30] B. Gidas, W.M. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle.* Comm. Math. Phys. 68 (1979), no. 3, 209–243.

[31] B. Gidas and J. Spruck, *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations.* Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981), no. 4, 525–598.

[32] Y. Giga, *A bound for global solutions of semilinear heat equations.* Comm. Math. Phys. 103 (1986), no. 3, 415–421.

[33] Y. Giga and R.V. Kohn, *Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations.* Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985), no. 3, 297–319.

[34] Y. Giga and R.V. Kohn, *Characterizing blowup using similarity variables.* Indiana Univ. Math. J. 36 (1987), no. 1, 1–40.

[35] Y. Giga and R.V. Kohn, *Nondegeneracy of blowup for semilinear heat equations.* Comm. Pure Appl. Math. 42 (1989), no. 6, 845–884.

[36] 儀我美一・儀我美保, 非線形偏微分方程式. 共立講座 21 世紀の数学 25 (1999).

[37] Y. Giga, S. Matsui and S. Sasayama, *Blow up rate for semilinear heat equations with subcritical nonlinearity.* Indiana Univ. Math. J. 53 (2004), no. 2, 483–514.

[38] Y. Giga, S. Matsui and S. Sasayama, *On blow-up rate for sign-changing solutions in a convex domain.* Math. Methods Appl. Sci. 27 (2004), no. 15, 1771–1782.

[39] K. Hayakawa, *On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations.* Proc. Japan Acad. 49 (1973), 503–505.

[40] A. Haraux and F.B. Weissler, *Nonuniqueness for a semilinear initial value problem.* Indiana Univ. Math. J. 31 (1982), no. 2, 167–189.

[41] M.A. Herrero and J.J.L. Velázquez, *Blow-up profiles in one-dimensional semilinear parabolic problems.* Comm. Partial Differential Equations 17 (1992), no. 1-2, 205–219.

[42] M.A. Herrero and J.J.L. Velázquez, *Blow-up behaviour of one-dimensional semilinear parabolic equations.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. non linéaire 10 (1993), no. 2, 131–189.

[43] M.A. Herrero and J.J.L. Velázquez, *Explosion de solutions d'équations paraboliques semilinéaires supercritiques.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 319 (1994), no. 2, 141–145.

[44] B. Hu, *Remarks on the blowup estimate for solutions of the heat equation with a nonlineat boundary condition.* Differential Integral Equations 9 (1996), 891–901.

[45] 石毛和弘・溝口紀子, 非線形熱方程式の解の爆発について,『数学』56 (2004), 182–192.

[46] D.D. Joseph and T.S. Lundgren, *Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources*, Arch. Rational Mech. Anal. 49 (1973), 241–269.

[47] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag, New York., 1966.

[48] S. Kaplan, *On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations.* Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963), 305–330.

[49] O. Kavian, *Remarks on the large time behaviour of a nonlinear diffusion equation.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 4 (1987), no. 5, 423–452.

[50] T. Kawanago, *Asymptotic behavior of solutions of a semilinear heat equation with subcritical nonlinearity.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. non linéaire 13 (1996), no. 1, 1–15.

[51] K. Kobayashi, T. Sirao and H. Tanaka, *On the growing up problem for semilinear heat equations.* J. Math. Soc. Japan 29 (1977), no. 3, 407–424.

[52] A.A. Lacey, *Global blow-up of a nonlinear heat equation.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 104 (1986), no. 1-2, 161–167.

[53] A.A. Lacey and D. Tzanetis, *Complete blow-up for a semilinear diffusion equation with a sufficiently large initial condition.* IMA. J. Appl. Math, 41 (1988), 207–215.

[54] A.A. Lacey and D. Tzanetis, *Global, unbounded solutions to a parabolic equation.* J. Differential Equations 101 (1993), no. 1, 80–102

[55] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov and N.N. Ural'ceva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type.* Transl. Math. Monographs, 23, 1968.

[56] L.A. Lepin, *Countable spectrum of the eigenfunctions of the nonlinear heat equation with distributed parameters.* (Russian) Differentsial'nye Uravneniya 24 (1988), no. 7, 1226–1234, (English Translation: Differential Equations 24 (1988), 799–805)

[57] L.A. Lepin, *Self-similar solutions of a semilinear heat equation.* (Russian) Mat. Model. 2 (1990), no. 3, 63–74.

[58] H.A. Levine, *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form* $Pu_t = -Au + F(u)$. Arch. Rational Mech. Anal. 51 (1973), 371–386.

[59] Y.Y. Li, *Existence of many positive solutions of semilinear elliptic equations on annulus.* J. Differential Equations 83 (1990), no. 2, 348–367.

[60] P.L. Lions, *Asymptotic behavior of some nonlinear heat equations.* Phys. D 5 (1982), no. 2-3, 293–306.

[61] 増田久弥, 発展方程式, 紀伊国屋数学叢書 (1975).

[62] H. Matano, *Blow-up in nonlinear heat equations with supercritical power nonlinearity.* Perspectives in nonlinear partial differential equations, 385–412, Contemp. Math., 446, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[63] H. Matano and F. Merle, *On nonexistence of type II blowup for a supercritical nonlinear heat equation.* Comm. Pure Appl. Math. 57 (2004), no. 11, 1494–1541.

[64] H. Matano and F. Merle, *Classification of typeI and type II blowup for a supercritical nonlinear heat equation.* J. Funct. Anal. 256 (2009), no 4, 992–1064.

[65] Y. Martel and P. Souplet, *Small time boundary behavior of solutions of parabolic equations with noncompatible data.* J. Math. Pures Appl. (9) 79 (2000), no. 6, 603–632.

[66] F. Merle and H. Zaag, *A Liouville theorem for vector-valued nonlinear heat equations and applications.* Math. Ann. 316 (2000), no. 1, 103–137.

[67] N. Mizoguchi, *On the behavior of solutions for a semilinear parabolic equation with supercritical nonlinearity.* Math. Z. 239 (2002), no. 2, 215–229.

[68] N. Mizoguchi, *Type-II blowup for a semilinear heat equation.* Adv. Differential Equations 9 (2004), no. 11-12, 1279–1316.

[69] N. Mizoguchi, *Boundedness of global solutions for a supercritical semilinear heat equation and its application.* Indiana Univ. Math. J. 54 (2005), no. 4, 1047–1059

[70] N. Mizoguchi, *Multiple blowup of solutions for a semilinear heat equation.* Math. Ann. 331 (2005), no. 2, 461–473.

[71] N. Mizoguchi, *Multiple blowup of solutions for a semilinear heat equation* II. J. Differential Equations 231 (2006), no. 1, 182–194.

[72] N. Mizoguchi, *Rate of type II blowup for a semilinear heat equation.* Math. Ann. 339 (2007), no. 4, 839–877.

[73] N. Mizoguchi and E. Yanagida, *Critical exponents for the blow-up of solutions with sign changes in a semilinear parabolic equation.* Math. Ann. 307 (1997), no. 4, 663–675.

[74] N. Mizoguchi and E. Yanagida, *Critical exponents for the blowup of solutions with sign changes in a semilinearparabolic equation* II. J. Differential Equations 145 (1998), no. 2, 295–331.

[75] Y. Naito and T. Suzuki, *Existence of type II blowup solutions for a semilinear heat equation with critical nonlinearity.* J. Differential Equations 232 (2007), no. 1, 176–211.

[76] 内藤雄基, 非線形熱方程式の自己相似解について. これからの非線型偏微分方程式, 日本評論社 (2007).

[77] W.M. Ni, P.E. Sacks and J. Tavantzis, *On the asymptotic behavior of solutions of certain quasilinear parabolic equations.* J. Differential Equations 54 (1984), no. 1, 97–120.

[78] S. I. Pohožaev, *On the eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 165 (1965), 36–39.

[79] P. Poláčik and P. Quittner, *A Liouville-type theorem and the decay of radial solutions of a semilinear heat equation.* Nonlinear Anal. 64 (2006), no. 8, 1679–1689.

[80] P. Poláčik, P. Quittner and P. Souplet, *Singularity and decay estimates in superlinear problems via Liouville-type theorems* II. *Parabolic equations.* Indiana Univ. Math. J. 56 (2007), no. 2, 879–908.

[81] P. Poláčik and E. Yanagida *On bounded and unbounded global solutions of a supercritical semilinear heat equation.* Math. Ann. (2003), 745–771

[82] P. Quittner, *Global existence of solutions of parabolic problems with nonlinear boundary conditions.* Banach Center Publ., 33:309–314, 1996.

[83] P. Quittner, *A priori bounds for global solutions of a semilinear parabolic problem.* Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) 68 (1999), no. 2, 195–203.

[84] P. Quittner, *Universal bound for global positive solutions of a superlinear parabolic problem.* Math. Ann. 320 (2001), no. 2, 299–305.

[85] P. Quittner, *Continuity of the blow-up time and a priori bounds for solutions in superlinear parabolic problems.* Houston Journal of Mathematics, 29 (2003), 757–798.

[86] P. Quittner and P. Souplet, *Superlinear Parabolic Problems. Blow-up, Global Existence and Steady States.* Birkhäuser Advanced Texts, Basler Lehrbücher, 2007.

[87] P. Quittner, P. Souplet and M. Winkler, *Initial blow-up rates and universal bounds for nonlinear heat equations.* J. Differential Equations 196 (2004), no. 2, 316–339.

[88] A.A.Samarskii,V.A.Galaktionov,S.P.Kurdyumov and A.P.Mikhailov, *Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations.* Translated from the 1987 Russian original by Michael Grinfeld and revised by the authors. de Gruyter Expositions in Mathematics, 19. Walter de Gruyter Co., Berlin, 1995.

[89] P. Souplet, *Liouville-type theorems and universal bounds in semilinear parabolic equations.* Book of Abstracts of Workshop on "Singularities arising in nonlinear problems", SNP 2006 (edited by H. Matano and K.–I. Nakamura).

[90] R. Suzuki, *Asymptotic behavior of solutions of quasilinear parabolic equations with supercritical nonlinearity.* J. Differential Equations 190 (2003), no. 1, 150–181

[91] 鈴木貴・上岡友紀, 偏微分方程式講義, 半線形楕円型方程式入門, 培風館 (2005).

[92] M. Tsutsumi, *On solutions of semilinear differential equations in a Hilbert space.* Math. Japon. 17 (1972), 173–193.

[93] J.J.L. Velázquez, *Estimates on the* $(n-1)$*-dimensional Hausdorff measure of the blow-up set for a semilinear heat equation.* Indiana Univ. Math. J. 42 (1993), no. 2, 445–476.

[94] J.J.L. Velázquez, *Local behaviour near blow-up points for semilinear parabolic equations.* J. Differential Equations 106 (1993), no. 2, 384–415.

[95] J.J.L. Velázquez, *Classification of singularities for blowing up solutions in higher dimensions.* Trans. Amer. Math. Soc. 338 (1993), no. 1, 441–464.

[96] F.B. Weissler, *Semilinear evolution equations in Banach spaces.* J. Funct. Anal. 32 (1979), no. 3, 277–296.

[97] F.B. Weissler, *Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p.* Indiana Univ. Math. J. 29 (1980), no. 1, 79–102.

[98] 柳田英二, 爆発と凝集, 非線型非平衡系の現象 3, 東京大学出版会 (2006).

[99] 柳田英二, 藤田型方程式の大域解の挙動,『数学』63 (2011), 85–102.

[100] H. Zaag, *On the regularity of the blow-up set for semilinear heat equations.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. non linéaire 19 (2002), no. 5, 505–542.