微分捩れ積，加群微分子，Sullivan 模型による写像空間のホモトピー論

栗林 勝彦 述

境 圭一 記

はじめに

射影空間上の自由ループが作る空間のコホモロジー環の計算 [K-Y1] からはじまり，写像空間のオペラド的模型 [C-K] に到達するまで約 10 年かかっています．この間，写像空間のホモトピー論を展開するためにオペラド [Man], TV-模型 [H-L], 有理ホモトピー論等, 様々な概念が応用され，またスペクトル系列をはじめ多くの道具が改良されてきました．そこから数年後，幸運にも，こうした概念や道具を集中講義の題材として取り上げる機会を与えて頂きました．この講義録は 2010 年 1 月 25 日から 29 日まで東京大学大学院数理科学研究科で行われた集中講義「微分捩れ積，加群微分子，Sullivan 模型による写像空間のホモトピー論」の内容をまとめたものです．

講義全体の構成については，その詳細を次ページにまとめることにします．ここでは講義で扱った内容の概説と若干の補足を述べます．

講義では当初の予定どおり, Lie 群の分類空間の自由ループ空間やその一般化と考えられる随伴束の全空間のコホモロジー環を，Eilenberg-Moore スペクトル系列 (EMSS) を用いて調べる方法について解説しました．特に随伴束のコホモロジーの環としての分解と Steenrod 作用素も考慮した分解の差異を，EMSS 上定義される作用素と加群微分子を用いて明らかにしています．さらに定義域が曲面である写像空間のコホモロジー環の低次元での状況も解説する予定でしたが割愛しました．これについては [K4] を参照してください．

前半の 2 章までで用いたスペクトル系列の具体的な計算，及び射影分解の存在については，[K-M-N, Section 7] の手法を用いて実行，証明されるということをここで述べておきます．また講義では言及しなかった TV-模型の自由ループ空間の研究への応用に関しては，やはり [K-M-N] を参照してください．さらに近年．加群微分子が捩れループ空間のコホモロジー環の研究 [Ki-Ko] にも応用されているということを付記します．

後半では有理ホモトピー論の復習を行い，Lannes 関手について解説しました．Lannes 関手から写像空間の有理ホモトピー論的模型 (Haefliger-Brown-Szczarba 模型) へ導く筋道を解説した後，この模型が写像空間の有理分解の問題にどう関わるかを説明しました．模型の使い方を通して『空間の代数的モデル理論』の雰囲気が伝わればと思います．講義では写像空間のオペラド的模型について言及しませんでしたが，その構成にはやはり Lannes 関手が非常に重要な役割を果たしています．

最後に, この集中講義の講師として招いてくださった河野俊丈先生，講義に参加して頂いたすべての方々にお礼申し上げます．また境圭一氏には，講義中の板書を TEX で浄書していただき，この講義録をまとめて頂きました．さらに文献の補充や読者のことを考えた工夫等に加え，手直しでは数ヵ月も私に付き合って頂きました．この場を借りて感謝いたします．

2010 年 8 月 10 日
栗林 勝彦

この講義録について

講義では，大きく分けて次の二つの問題 (1), (2) が論じられました：

(1) G を有限ループ空間（有限 CW 複体のホモトピー型を持つ位相群），$P \to M$ を主 G 束とするとき，随伴束 $P \times_{\mathrm{ad}} G \to M$ について，

- いつ mod p コホモロジー分解するか?
- $H^*(P \times_{\mathrm{ad}} G; \mathbb{F}_p)$ は具体的にどのように計算されるか?

これらを考えるための道具として

- Eilenberg-Moore スペクトル系列 (EMSS),
- 加群微分子 (module derivation)

が用いられました．

(2) 有限 CW 複体 X と，写像 $\alpha : S^k \to X$ が任意に与えられたとき，コファイブレーション $i : X \to X \cup_\alpha e^{k+1} \to S^{k+1}$ から，ファイブレーション

$$F_*(S^{k+1}, Y) \longrightarrow F_*(X \cup_\alpha e^{k+1}, Y) \xrightarrow{i^\sharp} F_*(X, Y)$$

が得られます（ここで $F_*(-,-)$ は基点つき写像全体がなす空間）．最左辺は $\Omega^{k+1}Y$（基点つき $(k+1)$ 重ループ空間）です．この状況で

- いつ有理分解 $F_*(X \cup_\alpha e^{k+1}, Y) \simeq_{\mathbb{Q}} \Omega^{k+1}Y \times F_*(X, Y)$ があるか?

という問題が取り上げられ，道具として

- 有理ホモトピー論
- Haefliger-Brown-Szczarba による関数空間のモデル

が紹介されました．

問題 (1), (2) については，それぞれ第 2, 3 章に記しました．これに先立ち行われた Eilenberg-Moore スペクトル系列 (EMSS) についての概説は，第 1 章に記しました．

第 1, 2 章では，係数を明示しない（コ）ホモロジーは全て $\mathbb{F}_p$ 係数とします．$p = 0$ のときは $\mathbb{F}_0 := \mathbb{Q}$ とします．また第 3 章では，$H^*(-) = H^*(-; \mathbb{Q})$ とします．

編集の都合上，講義とは節番号などが異なりますことをご了承ください．

本文中では引用されていませんが，栗林先生が第 48 回トポロジーシンポジウムで講演された際の予稿 [K3] も参照しました．

今回の講義を拝聴できましたこと，講義録の作成の機会をいただきましたことは，私にとっても非常に意義深いことでした．栗林勝彦先生，河野俊丈先生に厚く御礼申し上げます．

2010 年 8 月

境 圭一

目 次

第1章　Eilenberg-Mooreスペクトル系列：概説

1.1　加群の分解

以下，R はネター環とし，U を R 上の $\mathbb{Z}$ 次数付き微分代数 (differential graded algebra, DGA) とする[1]：

- U^i で次数 i の部分を表す；$U = \bigoplus_i U^i$. 微分は $d : U^i \to U^{i+1}$, $d^2 = 0$.
- 積 $U^i \otimes U^j \to U^{i+j}$ について，d は Leibniz 則をみたす：

$$d(xy) = (dx)y + (-1)^{|x|}xdy.$$

  ここで $|x|$ は x の次数，つまり $x \in U^{|x|}$.

$\mathscr{M}_U$ で次数付き微分右 U 加群 (differential graded right U-module, DG right U-module) 全体のなす圏, ${}_U\mathscr{M}$ で次数付き微分左 U 加群全体のなす圏を表す.

定義 1.1.1. $\mathscr{M}_U$ の対象 X が **filtered** (resp. **extended filtered**) であるとは，X の微分 U 部分加群からなる減少 filtration $X \supset \cdots \supset F^{-1}X \supset F^0X \supset \ldots$ で

- $\bigcup_p F^pX = X$,
- $p > 0$ のとき (resp. $p > 1$ のとき) $F^pX = 0$

をみたすものが存在することをいう.

filtered DG right U-module 全体のなす部分圏を $\mathscr{F}\mathscr{M}_U$, extended filtered DG right U-module 全体のなす部分圏を $\mathscr{F}^+\mathscr{M}_U$ で表す. □

定義 1.1.2. $X \in \mathscr{F}\mathscr{M}_U$, $M \in \mathscr{M}_U$ とし，$\mathscr{M}_U$ における射 $\alpha : X \to M$ が与えられたとする．このとき，$X^\alpha \in \mathscr{F}^+\mathscr{M}_U$ を以下のように定義する：

(1) 次数 n の部分空間 $(X^\alpha)^n := M^{n-1} \oplus X^n$,

(2) 右からの U の作用 $(m, x) \cdot u := (mu, xu)$ $(m \in M^{n-1}, x \in X^n)$,

(3) filtration $F^1X^\alpha := M$, $F^pX^\alpha := M \oplus F^pX$ $(p \leq 0)$,

(4) 微分 $d_{X^\alpha}(m, x) := (\alpha(x) - d_M(m), d_X(x))$. □

[1]編者注：講義ではホモロジーを想定した定義が行われたが，§1.2 以降では主にコホモロジーを扱うので，このノートではコホモロジーに対応した記述に置き換える．双対を取ればホモロジーに対応した記述になる.

$d_{X^\alpha}((m,x)\cdot u) = (d_{X^\alpha}(m,x))\cdot u + (-1)^{|(m,x)|}(m,x)\cdot d_U(u)$ を確かめるのは容易である．
定義 1.1.2 の X^α は次のようなスペクトル系列 $\{E^r(X^\alpha)\}$ を誘導する：

- $E_0^{p,q}(X^\alpha) = (F^pX^\alpha/F^{p+1}X^\alpha)^{p+q}$,
- $E_1^{1,*}(X^\alpha) = H^*(M)$,
- $E_1^{p,*}(X^\alpha) = E_1^{p,*}(X)$ $(p \le 0)$.

定義 1.1.3. 定義 1.1.2 の $X^\alpha \in \mathscr{F}^+\mathscr{M}_U$ が M の**分解** (resolution) であるとは，右 $H^*(U)$ 加群の列

$$\ldots \longrightarrow E_1^{p,*}(X) \longrightarrow E_1^{p+1,*}(X) \longrightarrow \ldots \longrightarrow E_1^{0,*}(X) \longrightarrow H^*(M) \longrightarrow 0$$

が完全列であることをいう． □

$X \in \mathscr{F}\mathscr{M}_U$, $N \in {}_U\mathscr{M}$ に対し，$X \otimes_U N$ に自然な filtration が誘導される．つまり

$$F^p(X \otimes_U N) := (F^pX) \otimes_U N.$$

この filtration に付随するスペクトル系列 $E_r(X \otimes_U N)$ を考えることができる．

定義 1.1.4. M の分解 X^α が **Künneth 分解**であるとは，次がみたされることをいう：

(1) $E_1^{p,*}(X^\alpha)$ が射影的 $H^*(U)$ 加群,

(2) 任意の $N \in {}_U\mathscr{M}$ に対し，$\kappa : E_1(X)\otimes_{H^*(U)}H^*(N) \to E_1(X\otimes_U N)$ を $\kappa(\{x\}\otimes\{u\}) := \{x\otimes u\}$ で定義するとき，κ は同型． □

定義 1.1.5 ([G-M]). $M \in \mathscr{M}_U$, $N \in {}_U\mathscr{M}$ に対し

$$\mathrm{Tor}_U(M,N) := H^*(X \otimes_U N), \quad E_r(M,U,N) := E_r(X \otimes_U N)$$

とおく．ただし，M の Künneth 分解 $\alpha : X \to M$ を一つ選んでいる． □

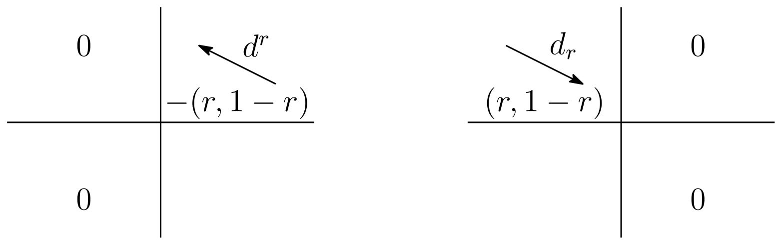
注意 1.1.6.
- 定義 1.1.5 の Tor および E_r は，Künneth 分解 X^α の取り方にはよらない．
- 定義 1.1.4, 1.1.5 から直ちに $E_2(M,U,N) = \mathrm{Tor}_{H^*(U)}(H^*(M), H^*(N))$ がわかる．
- Félix-Halperin-Thomas[F-H-T1] は，“semi-free resolution” $\alpha : \Gamma M \xrightarrow{\sim} M$ を用いて

$$\mathrm{Tor}_U(M,N)_{FHT} := H^*(\Gamma M \otimes_U M)$$

と定義した．ここで ΓM が semi-free resolution であるとは，各 $F^p\Gamma M/F^{p+1}\Gamma M$ が自由 U 加群であるような filtration $\{F^p\Gamma M\}$ を持つことをいう（例えば [F-H-T2, page 69] を参照）．定義 1.1.5 が Künneth 分解 X の取り方によらないことと，X が “distinguished”（定義 1.1.9 参照）なら $\alpha : X \xrightarrow{\sim} M$ は semi-free であるという事実から，[G-M] の定義は [F-H-T1] の定義と一致する． □

注意 1.1.7. filtration はすべて半有界なものを考えているので，（コ）ホモロジースペクトル系列は次のようになる：

homology　$\{E^r(M,U,N)\}$　　　cohomology $\{E_r(M,U,N)\}$



定義 1.1.8. $X \in \mathscr{F}\mathscr{M}_U$ が **split** であるとは，双次数付き R 加群 $\bar{X} = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} \bar{X}^{p,q}$ で次をみたすものが存在することをいう：

(1) $p > 0$ のとき $\bar{X}^{p,q} = 0$.

(2) 右 U 加群として $X = \bar{X} \otimes U$ と書ける.

(3) 次数について $X^n = \sum_{p+q+j=n} \bar{X}^{p,q} \otimes U^j$ が成り立つ.

(4) filtration について $F^p X = \sum_{m \geq p} \bar{X}^{m,*} \otimes U$ が成り立つ.

(5) $X^{p,q} := \sum_{i+j=q} \bar{X}^{p,i} \otimes U^j$ とおくと，微分 d は filtration を保つことから

$$d = \sum_{r\geq 0} d_r, \qquad d_r : X^{p,q} \to X^{p+r,\,q-r+1}, \quad \sum_{i+j=k} d_i d_j = 0$$

と書けるが，各 d_r は次の形である：

$$d_r(x\otimes u) = \begin{cases} d_{\bar{X},0}(x)u + (-1)^{|x|} x \otimes d_U(u) & r = 0, \\ d_{\bar{X},r}(x)u & r > 0. \end{cases}$$

ただし $d_{\bar{X},r} : \bar{X}^{p,q} \to \sum_j \bar{X}^{p+r,q-r-j+1} \otimes U^j$（従って $\{\bar{X}, d_{\bar{X}}\}$ は DGA でない）. □

定義 1.1.9. split object $X \in \mathscr{M}_U$ が **distinguished** であるとは，定義 1.1.8 の $\bar{X}$ が射影的 R 加群であり，さらに $d_0 = \mathrm{id} \otimes d_U$ である（つまり $d_{\bar{X},0} = 0$ である）ことをいう.

定義 1.1.2 で構成した X^α が **distinguished resolution** であるとは，$X \in \mathscr{F}\mathscr{M}_U$ が distinguished object であることをいう. □

補題 1.1.10. split object $X \in \mathscr{F}\mathscr{M}_U$ が $d_{\bar{X},0}(\bar{X}) \subset \bar{X}$ をみたし（このとき $d_{\bar{X},0}{}^2 = 0$ がわかる），$H^*(\bar{X}, d_{\bar{X},0})$ が平坦 R 加群であるとする．このとき X は Künneth object である．特に X が distinguished ならば，X は Künneth object である.

証明. 任意の $N \in {}_U\mathscr{M}$ に対し

$$E_1(X \otimes_U N) = E_1(\bar{X} \otimes N) = H^*(\bar{X}\otimes N, d_{\bar{X},0} \otimes \mathrm{id} \pm \mathrm{id} \otimes d_N)$$

であるが，最後のホモロジー群に通常の Künneth の定理を適用して

$$E_1(X \otimes_U N) \cong H^*(\bar{X}, d_{\bar{X},0}) \otimes H^*(N, d_N)$$

が成り立つ．特に $N = U$ と取ると，$E_1(X)$ が射影的 $H_*(U)$ 加群であることがわかる．さらに

$$\begin{aligned} E_1(X) \otimes_{H^*(U)} H^*(N) &= H^*(\bar{X}, d_{\bar{X},0}) \otimes H^*(U) \otimes_{H^*(U)} H^*(N) \\ &= H^*(\bar{X}, d_{\bar{X},0}) \otimes H^*(N) \\ &\cong E_1(\bar{X} \otimes_U N). \end{aligned}$$

これは定義 1.1.4 の κ が同型であることに他ならない． □

Künneth object の存在については，補題 1.1.10 と次の定理から保証される．

定理 1.1.11 ([G-M, Theorem 2.1])**.** $M \in \mathscr{M}_U$ とし，右 $H_*(U)$ 加群 $H_*(M)$ の射影分解

$$\dots \longrightarrow \bar{X}^{p,*} \otimes H^*(U) \longrightarrow \bar{X}^{p+1,*} \otimes H^*(U) \longrightarrow \dots \longrightarrow \bar{X}^{0,*} \otimes H^*(U) \longrightarrow H^*(M) \longrightarrow 0 \quad (1.1.1)$$

で，各 $\bar{X}^{p,q}$ が射影的 R 加群であるものが存在すると仮定する．このとき $X := \bar{X} \otimes U$ の微分 d と射 $\alpha : X \to M$ で次をみたすものが存在する：

- X^α は M の distinguished resolution,
- $E_1(X^\alpha)$ から得られる列（定義 1.1.3 参照）が (1.1.1) に一致する． □

1.2 Eilenberg-Moore スペクトル系列

以下では，空間はすべて連結であるとする．

ファイバー F を持つ Serre ファイブレーション $p : E \to B$, および連続写像 $f : A \to B$ に対し，引き戻しの図式

$$\begin{array}{ccc} E_f & \xrightarrow{g} & E \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \qquad (1.2.1)$$

を考える．ここで次の仮定をおく：

仮定． $H^*(A;\mathbb{Z})$, $H^*(B;\mathbb{Z})$ は有限型であり，$\pi_1(B)$ の $H^*(F;\mathbb{Z})$ への作用は自明とする．

$C^*(\ ) := C^*(\ ; R)$ を，ネーター環 R を係数とする特異コチェイン関手とし，§1.1 の設定において $U = C^*(B)$ とみなす．f^*, p^* を通して $C^*(A) \in \mathscr{M}_{C^*(B)}$, $C^*(E) \in {}_{C^*(B)}\mathscr{M}$ とみる．

$C^*(A)$ の distinguished resolution $\alpha : X \to C^*(A)$ を選び，**Eilenberg-Moore 写像**

$$\theta : X \otimes_{C^*(B)} C^*(E) \longrightarrow C^*(E_f)$$

を次の合成で定義する：

$$X \otimes_{C^*(B)} C^*(E) \xrightarrow{\alpha\otimes g^*} C^*(A) \otimes_{C^*(B)} C^*(E_f) \xrightarrow{q^*\otimes \mathrm{id}} C^*(E_f) \otimes_{C^*(B)} C^*(E_f) \xrightarrow{\cup} C^*(E_f).$$

定理 1.2.1 ([E-M], [G-M, Theorem 3.3])**.** X が連結ならば

$$H(\theta) : H^*(X \otimes_{C^*(B)} C^*(E)) \xrightarrow{\cong} H^*(E_f). \qquad \square$$

$X \otimes_{C^*(B)} C^*(E)$ には X の filtration から誘導される filtration が入り，従って $H^*(E_f)$ に収束するスペクトル系列が得られる．

定理 1.2.2. 上で得られたスペクトル系列 (**Eilenberg-Moore スペクトル系列，EMSS**) は，代数として $H^*(E_f)$ に収束する．また双次数付き代数として $E_2^{*,*} \cong \mathrm{Tor}_{H^*(B)}^{*,*}(H^*(A), H^*(E))$ である．

$\mathrm{Tor}_{C^*(B)}(C^*(A), C^*(E)) = H^*(X \otimes_{C^*(B)} C^*(E))$ の積は次の図式の左縦により定義され，$H(\theta)$ が代数の射であることは図式のホモトピー可換性から従う．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_{C^*(B)}(C^*(A), C^*(E)) \otimes \mathrm{Tor}_{C^*(B)}(C^*(A), C^*(E)) \arrow[r, "H(\theta)\otimes H(\theta)"] \arrow[d, "\pi'"'] & H^*(E_f) \otimes H^*(E_f) \arrow[d, "\pi"] \\
\mathrm{Tor}_{C^*(B)\otimes C^*(B)}(C^*(A) \otimes C^*(A), C^*(E) \otimes C^*(E)) \arrow[d, "\mathrm{Tor}(\gamma,\gamma)"] & H^*(C^*(E_f) \otimes C^*(E_f)) \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathrm{Tor}_{(C_*(B)\otimes C_*(B))^*}((C_*(A) \otimes C_*(A))^*, (C_*(E) \otimes C_*(E))^*) \arrow[r, "H(\theta)"] & H^*((C_*(E_f) \otimes C_*(E_f))^*) \arrow[d, shift left, "AW"] \\
\mathrm{Tor}_{C^*(B\times B)}(C^*(A \times A), C^*(E \times E)) \arrow[r, "H(\theta)"] \arrow[u, "\cong"', "\mathrm{Tor}_{EZ}(EZ,EZ)"] \arrow[d, "\mathrm{Tor}_{\Delta^*}(\Delta^*,\Delta^*)"] & H^*(E_f \times E_f) \arrow[u, shift left, "EZ"] \arrow[d, "\Delta^*"] \\
\mathrm{Tor}_{C^*(B)}(C^*(A), C^*(E)) \arrow[r, "H(\theta)"] & H^*(E_f)
\end{tikzcd} \tag{1.2.2}$$

ここで AW は Alexander-Whitney 写像，EZ は Eilenberg-Zilber 写像である．また π' は交換写像

$$X \otimes_{C^*(B)} C^*(E) \otimes X \otimes_{C^*(B)} C^*(E) \longrightarrow X \otimes X \otimes_{C^*(B)\otimes C^*(B)} C^*(E) \otimes C^*(E)$$

から誘導される．

(1.2.2) がホモトピー可換であることは次のようにしてわかる．下の四角形及び真ん中の四角形は写像 Δ, EZ に関する自然性から可換である．上の四角形については，カップ積のホモトピー可換性から従う．

ここで考えている状況では，コホモロジー EMSS が自明でないのは第 2 象限のみである（注意 1.1.7 参照）．このうち，Eilenberg-Moore 写像の定義より，$E_r^{0,*}$ については次が成り立つ：

命題 1.2.3 ([G-M, Corollary 3.6]). 次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd}
 & R \otimes H^*(E) = H^*(E) \arrow[dl, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "g^*"] & \\
H^*(A) \otimes H^*(E) \arrow[r, two heads] & H^*(A) \otimes_{H^*(B)} H^*(E) = E_2^{0,*} \twoheadrightarrow E_\infty^{0,*} \subset \mathrm{Tor}_{C^*(B)}(C^*(A), C^*(E)) \arrow[r, "\theta", "\cong"'] & H^*(E_f) \\
 & H^*(A) \otimes R = H^*(A) \arrow[ul, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] \arrow[ur, "q^*"'] &
\end{tikzcd}$$

従って，$E_r^{0,*}$ については，コホモロジー $H^*(E)$ と $H^*(A)$ から元を作り出すことができる．以下では更に，$E_r^{-1,*}$ の元をいかにして作り出すかを考える．

1.3 $E_\infty^{-1,*}$ と懸垂準同型

U を DGA とし，$M \in \mathscr{M}_U$, $N \in {}_U\mathscr{M}$ とする．$m \in M^0$, $n \in N^0$ をコサイクルとする．写像 $\mu : U \to M$, $\nu : U \to N$ を，それぞれ

$$\mu(u) := mu, \qquad \nu(u) := un$$

で定義する．

1.3.1 懸垂準同型の定義

以下，次のような**懸垂準同型**を定義する：

$$\sigma : \ker H(\mu) \cap \ker H(\nu) \longrightarrow E_\infty^{-1,*} = F^{-1}\mathrm{Tor}_U(M,N)/F^0\mathrm{Tor}_U(M,N).$$

$\ker H(\mu) \cap \ker H(\nu)$ の元 $\{u\}$ を取る（コサイクル u で代表されているとする）．μ, ν の定義から，ある $m' \in M$, $n' \in N$ があって

$$dm' = mu, \qquad dn' = un$$

が成り立つ．次に，$H^*(U)$ 加群 $H^*(M)$ の分解

$$\bar{X} \otimes H^*(U) \longrightarrow H^*(M) \longrightarrow 0$$

で，$\bar{X}$ が射影 R 加群であるものを選ぶ．定理 1.1.11 により，distinguished resolution

$$\alpha : X \longrightarrow M, \qquad X = \bar{X} \otimes U$$

が存在する．

補題 1.3.1 ([G-M, Theorem 1.7 の証明参照]). $G^{-p} := \{x \in F^{-p}X^\alpha \mid dx \in F^{-p+1}X^\alpha\}$ とおくとき

$$F^{-p+1}X^\alpha \cap \ker d = d(G^{-p})$$

が成り立つ． □

よって，ある $x \in F^0X^\alpha$ が存在して $dx = m$ が成り立つ．つまり，$x = (0, \bar{x}) \in F^0(X^\alpha) = M \oplus F^0(X)$, $dx = (\alpha(\bar{x}), d\bar{x}) = (m, 0)$. この x に対し

$$d(xu - m') = (dx)u - mu = 0$$

であるから，$xu - m' \in F^0X^\alpha \cap \ker d$ である．補題 1.3.1 を再び使うと，ある $y \in F^{-1}X^\alpha$ が存在して $dy = xu - m'$ が成り立つ．自然な射影

$$X^\alpha \twoheadrightarrow X^\alpha/M \cong X$$

による x, y の像を $\bar{x}, \bar{y}$ と書く．$X \otimes_U N$ において

$$d(\bar{y} \otimes n) = \bar{x}u \otimes n = \bar{x} \otimes un = \bar{x} \otimes dn' = d(\bar{x} \otimes n'),$$

従って $d(\bar{y} \otimes n - \bar{x} \otimes n') = 0$ であるから，

$$\sigma(\{u\}) := \{\bar{y} \otimes n - \bar{x} \otimes n'\} \in F^{-1}\mathrm{Tor}_U(M,N)/F^0\mathrm{Tor}_U(M,N)$$

が定義される．途中の元の選び方によらないことは容易にわかる．

1.3.2　懸垂準同型の位相的な意味

ファイブレーション $F \to E \xrightarrow{p} B$ と，写像 $f : A \to B$ が与えられている状況に戻る．$U = C^*(B)$, $M = C^*(A)$, $N = C^*(E)$ である．§1.3.1 のコサイクル m, n として

$$m = 1 \in C^0(A), \qquad n = 1 \in C^0(E)$$

を取る．このとき，$u \in C^*(B)$ に対し

$$\mu(u) = 1u = f^*(u), \qquad \nu(u) = u1 = p^*(u)$$

だから，$\mu = f^*, \nu = p^*$ である．

$u \in \ker H(f) \cap \ker H(p)$ とする：ある $m' \in C^*(A)$, $n' \in C^*(E)$ が存在して，$\delta_A(m') = f^*(u)$, $\delta_E(n') = p^*(u)$. §1.3.1 と同様に，ある $x \in F^0X^\alpha$, $y \in F^{-1}X^\alpha$ が存在して

$$d(x) = m = 1, \qquad d(y) = xu + m'$$

(m' の符号を変えた)．$y = (\bar{m}, \bar{y})$ と表すとき，この条件は $\alpha(\bar{x}) = m = 1$, $\alpha(\bar{y}) = m' + d\bar{m}$ と書き換えられることに注意する．このとき

$$\sigma\{u\} = \{\bar{y} \otimes 1 - x \otimes n'\} \in F^{-1}\mathrm{Tor}_{C^*(B)}(C^*(A), C^*(E)).$$

また，$\theta = q^*\alpha \cup g^*$ であったから (§1.2)

$$\begin{aligned}\theta\sigma\{u\} &= \{q^*\alpha(\bar{y}) \cup 1 - q^*\alpha(\bar{x}) \cup g^*n'\} \\ &= \{q^*(m') - g^*(n')\} \in F^{-1}H^*(E_f).\end{aligned}$$

こうして次を得る．

命題 1.3.2 ([G-M, Corollary 3.8])．$\sigma^* : \ker f^* \cap \ker p^* \to H^*(E_f)$ を

$$\sigma^*\{u\} := \{q^*(m') - g^*(n')\}$$

で定義される additive relation とする．ただし $\delta_A(m') = f^*(u)$, $\delta_E(n') = p^*(u)$. このとき，σ^* は次の additive relation と一致する：

$$\ker f^* \cap \ker p^* \xrightarrow{\sigma_2} E_2^{-1,*} \twoheadrightarrow E_\infty^{-1,*} \twoheadleftarrow F^{-1}\mathrm{Tor}_{C^*(B)}(C^*(A), C^*(E)) \underset{\cong}{\xrightarrow{\theta}} F^{-1}H^*(E_f)$$

ただし，σ_2 は DGA $H^*(B)$ 上の DG 加群 $H^*(A)$, $H^*(E)$（いずれも自明な微分を持つ）を用いて定義される懸垂準同型である．□

1.4　懸垂準同型の例

ここでは例を使って懸垂準同型 σ を具体的に調べる．そのために，まず**棒分解** (**bar resolution**) について復習する．以下，係数環 R は体であるとする．

A を次数付き添加代数 (augmented graded algebra) とし，添加写像を $\varepsilon : A \to R$, その核を $\bar{A} := \ker \varepsilon$ と書く．また N を右 A 加群とする．このとき

$$B^{-p}(N, A) := N \otimes \bar{A}^{\otimes p} \otimes A$$

とおく．慣例にならい，$B^{-p}(N, A)$ の元を $b[a_1|\dots|a_p]a$ ($b \in N$, $a_i \in \bar{A}$, $a \in A$) と書く．$\partial_p : B^{-p}(N, A) \to B^{-p+1}(N, A)$ ($p \geq 1$) を

$$\begin{aligned}\partial_p(&b[a_1|\dots|a_p]a) \\ &:= (-1)^{|b|} b a_1[a_2|\dots|a_p]a + (-1)^{|b|} \sum_{1 \leq i \leq p-1} b[\bar{a}_1|\dots|\bar{a}_{i-1}|\bar{a}_i a_{i+1}|a_{i+2}|\dots|a_p]a \\ &\qquad + (-1)^{|b|} b[\bar{a}_1|\dots|\bar{a}_{p-1}]a_p a\end{aligned}$$

で定義する．ただし $a \in A$ に対し，$\bar{a} := (-1)^{|a|+1} a$ である．このとき $\partial^2 = 0$ が成り立ち，

$$B^\bullet(N, A) \xrightarrow{\partial_0 := \varepsilon} N \to 0, \qquad \varepsilon(b[\ ]a) := ba$$

は U 加群 N の分解となる（例えば [Mc, Proposition 7.8] 参照）．実際，$s_p : B^{-p}(N, A) \to B^{-p-1}(N, A)$ ($p \geq -1$, ただし $B^1 := N$) を，$s_{-1}(b) := b[\ ]1$ および

$$s_p(b[a_1|\dots|a_p]a) := \pm b[a_1|\dots|a_p|a - \eta\varepsilon(a)]1$$

($\eta : R \to A$ は単位元) で定義すれば，$s_{p-1}\partial_p + \partial_{p+1}s_p = \mathrm{id}_{B^{-p}}$ が成立する．

注意 1.4.1. 代数 A が $(n-1)$ 連結であるとする．このとき，棒分解 $B^*(N, A)$ の元 $x \in B^p(N, A) = N \otimes \bar{A}^{\otimes(-p)} \otimes A$ が 0 でなければ，x の内部次数 q は $q \geq (-p)n$ となる．特に EMSS が $E_2^{p,q} = H^q(B^p(N, A) \otimes_A M)$ ならば，$q < -np$ のとき $E_2^{p,q} = 0$ である． □

例 1.4.2 (基点つきループ空間). X を単連結な空間とし，適当な基点 $* \in X$ を選んでおく．

$$\begin{aligned} PX &:= \{\gamma : I \to X \mid \gamma(1) = *\}, \\ \Omega X &:= \{\gamma \in PX \mid \gamma(0) = *\} \end{aligned}$$

とし，$\varepsilon_0 : PX \to X$ を $\varepsilon_0(\gamma) := \gamma(0)$ で定義すると、次のファイブレーション (path-loop fibration) を得る：

$$\Omega X \longrightarrow PX \xrightarrow{\varepsilon_0} X$$

§1.2 の設定において，$p = \varepsilon_0$, また $f : \{*\} \to X$ を基点の包含写像とする：

$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \xrightarrow{g} & PX \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_0} \\ \{*\} & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

$H^*(\Omega X)$ を計算するため，$H^*(X)$ 加群 $H^*(PX)$ の棒分解

$$B^\bullet(H^*(\{*\}), H^*(X)) \xrightarrow{\varepsilon} H^*(PX) = R \longrightarrow 0$$

を考える．$* > 0$ のとき $\mathrm{Tor}^{0,*}_{H^*(X)}(R,R) = 0$ であるから，$F^0H^*(\Omega X) = 0$. よって写像

$$\sigma^* : \ker f^* \cap \ker \varepsilon_0^* = \tilde{H}^*(X) \longrightarrow F^{-1}H^{*-1}(\Omega X)$$

が，$\{u\} \mapsto \{g^*(n') - q^*(0)\}$ で定まる（命題 1.3.2 における σ^* の定義において符号を変えていることに注意）．ただし $n' \in C^*(PX)$ は $\delta_{PX}(n') = \varepsilon_0^* u$ となるものである．つまりコホモロジーに誘導される写像 $\tilde{\sigma}$ は，コホモロジー懸垂

$$\tilde{H}^*(X) \xrightarrow{\varepsilon_0^*} H^*(PX, \Omega X) \xleftarrow[\cong]{\partial} H^{*-1}(\Omega X)$$

に他ならない． □

例 1.4.2 における懸垂準同型を E_2 項で見てみよう．$\{u\} \in \tilde{H}(X) = \ker f^* \cap \ker \varepsilon_0^*$ に対し，分解

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & B^{-1}(H^*(\{*\}), H^*(X)) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & B^0(H^*(\{*\}), H^*(X)) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, equal] & R \arrow[r] & 0 \\ & R \otimes \tilde{H}^*(X) \otimes H^*(X) & H^*(X) & & \end{tikzcd}$$

において $\partial \bar{y} = u$ となる元は，$\bar{y} := -1[u]1$ である．$\sigma_2 : \ker f^* \cap \ker \varepsilon_0^* \to E_2^{-1,*}$ を §1.3.1 に従って定めると

$$\sigma_2(\{u\}) = \{-\bar{y} \otimes 1\} \in H^*(B^{-1}(H(\{*\}), H^*(X)) \otimes_{H^*(X)} H^*(\{*\}))$$

となる．これが懸垂準同型を E_2 項において表現したものになっている．同型

$$B^{-n}(H^*(\{*\}), H^*(X)) \otimes_{H^*(X)} H^*(\{*\}) \cong R \otimes \tilde{H}^*(X)^{\otimes n} \otimes R$$

のもと

$$\sigma_2(\{u\}) = [u] \in \mathrm{Tor}^{-1,*}_{H^*(X)}(R,R)$$

が成り立つ．こうして命題 1.3.2 から次を得る．

命題 1.4.3. $\sigma_2 : \tilde{H}^*(X) \to \mathrm{Tor}^{-1,*}_{H^*(X)}(R,R)$ は次を可換にする：

$$\begin{tikzcd} \tilde{H}^*(X) \arrow[d, "\sigma_2"'] \arrow[rrrr, bend left=10, "\tilde{\sigma}"] & & & & \\ \mathrm{Tor}^{-1,*}_{H^*(X)}(R,R) \arrow[r, "\cong"] & E_2^{-1,*} \arrow[r, two heads] & E_\infty^{-1,*} \cong F^{-1}H^{*-1}(\Omega X) \arrow[rr, hook] & & H^{*-1}(\Omega X) \end{tikzcd}$$

例 1.4.4 (自由ループ空間). 自由ループ空間 LX は，引き戻しの図式

$$\begin{tikzcd} LX \arrow[r] \arrow[d] & X^I \arrow[d, "\varepsilon_0 \times \varepsilon_1"'] & X \arrow[l, "\cong"'] \arrow[dl, "\Delta"] \\ X \arrow[r, "\Delta"] & X \times X & \end{tikzcd} \tag{1.4.1}$$

で与えられる．ここで Δ は対角写像，また $X^I = F(I, X)$ は写像空間であり，$X \to X^I$ は定値写像を与える写像である (path を縮めることにより，ホモトピー同値となる). 右の三角形は可換で

あるから，§1.2 の設定において $p = f = \Delta$ と考えることができる．この設定における棒構成から得られる EMSS$\{E_r^{*,*}, d_r\}$ の E_2 項は次のようになる：

$$E_2^{*,*} = \mathrm{Tor}^{*,*}_{H^*(X)\otimes H^*(X)}(H^*(X), H^*(X))$$

これは次章で定義する **Hochschild ホモロジー**である．$D : H^*(X) \to \ker\Delta^* \cap \ker\Delta^*$ を

$$D(x) := x \otimes 1 - 1 \otimes x$$

で定義する．§1.3.1 の懸垂準同型の定義から，$\sigma_2 D(x) = 1[x \otimes 1 - 1 \otimes x]1 \in E_2^{-1,*}$ が成立することがわかり，さらに命題 1.3.2 より，次の図式は可換になる：

$$\begin{tikzcd}
H^*(X) \arrow[r, "D"] & \ker\Delta^* \cap \ker\Delta^* \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\sigma_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E_\infty^{-1,*} \arrow[r, "\cong"] & F^{-1}H^*(LX)/F^0H^*(LX) \\
 & \mathrm{Tor}^{-1,*}_{H^*(X)\otimes H^*(X)}(H^*(X), H^*(X)) \arrow[r, equal] & E_2^{-1,*} \arrow[u, two heads] &
\end{tikzcd}$$

このようにして，$H^*(X)$ から E_2 項の情報を，さらに $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ が計算できれば $H^*(LX)$ の情報を取り出すことができる．

第2章　加群微分子とその応用

例 1.4.4 において，写像 D を使って $H^*(X)$ から E_2 項の元を得た．これらの元を収束先の元と関連付けるため，加群微分子を導入する．以下では Künneth の定理を使うため，基礎環 R を体 k とする．

2.1　加群微分子

定義 2.1.1. A を次数付き可換代数とし，M を次数付き（左）A 加群とする．次数 -1 の写像 $\mathcal{D}: A \to M$ が**加群微分子** (module derivation) であるとは，Leibniz 則

$$\mathcal{D}(ab) = (-1)^{(|a|+1)|b|} b\mathcal{D}(a) + (-1)^{|a|} a\mathcal{D}(b)$$

がみたされることをいう． □

加群微分子の例を二つ挙げる．最初に代数的に構成されるものを与える．

A が可換代数ならば，A は $A \otimes A$ 加群となる．$A \otimes A$ 加群 A の分解として，棒分解

$$B^\bullet(A, A \otimes A) := A \otimes (\overline{A \otimes A})^\bullet \otimes (A \otimes A)$$

を取り，

$$HH^*(A) := \mathrm{Tor}_{A\otimes A}(A, A) = H^*(B^\bullet(A, A \otimes A) \otimes_{A\otimes A} A,\ d = d_{B^\bullet} \otimes 1)$$

とおく．$HH^*(A)$ を A の **Hochschild ホモロジー**とよぶ．

命題 2.1.2. $\mathcal{D}: A \to \mathrm{Tor}_{A\otimes A}(A, A) = HH^*(A)$ を

$$\mathcal{D}(x) := 1_A[x \otimes 1 - 1 \otimes x]1_A$$

で定めると，$\mathcal{D}$ は加群微分子である．

証明. $d\mathcal{D}(x) = 0$ であることは定義から直ちにわかる．

$$w := 1[y \otimes 1|x \otimes 1 - 1 \otimes x]1 - (-1)^{(|x|+1)(|y|+1)} 1[1 \otimes x|y \otimes 1 - 1 \otimes y]1$$

とおくと

$$dw = y[x \otimes 1 - 1 \otimes x] - (-1)^{(|x|+1)(|y|+1)} x[y \otimes 1 - 1 \otimes y] - (-1)^{|y|(|x|+1)}[xy \otimes 1 - 1 \otimes xy]$$

こうして $HH^*(A)$ 上では $\mathcal{D}(xy) = (-1)^{(|x|+1)|y|} y\mathcal{D}(x) + (-1)^{|x|} x\mathcal{D}(y)$ が成り立つ． □

次の加群微分子の例は，幾何的に定義されるものである．

X を単連結な空間とし，評価写像 (evaluation map) $\mathrm{ev} : S^1 \times LX \to X$ を $\mathrm{ev}(t,\gamma) := \gamma(t)$ で定義する．$H^1(S^1)$ の生成元 g を固定することで，写像

$$\int_{S^1} : H^*(S^1 \times LX; k) \cong H^*(S^1; k) \otimes H^*(LX : k) \longrightarrow H^{*-1}(LX; k)$$

が，$g \otimes w \mapsto w$ により定義される．

命題 2.1.3. 単連結な空間 X に対し，$\mathcal{D}_X : H^*(X) \to H^{*-1}(LX)$ を

$$\mathcal{D}_X := \int_{S^1} \circ \mathrm{ev}^*$$

で定めると，$\mathcal{D}_X$ は加群微分子である．さらに $k = \mathbb{Z}/p$ のとき，$\mathcal{D}_X$ は Steenrod 作用素と可換である．

証明. 次の可換図式を考える：

$$\begin{tikzcd} LX \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "p"'] & S^1 \times LX \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

ただし $i(\gamma) := (1,\gamma)$, $p(\gamma) := \gamma(1)$ である．$\mathcal{D}_X$ の定義により，$H^*(S^1 \times LX) \cong H^*(S^1) \otimes H^*(LX)$ のもとで

$$\mathrm{ev}^*(u) = 1 \otimes p^*(u) + g \otimes \mathcal{D}_X(u)$$

である ($g \in H^1(S^1)$ は上で固定した生成元). $\mathrm{ev}^*(uv) = \mathrm{ev}^*(u)\mathrm{ev}^*(v)$ に代入して整理すれば

$$\mathcal{D}_X(uv) = (-1)^{|u|} p^*(u)\mathcal{D}_X(v) + \mathcal{D}_X(u)p^*(v)$$

を得る．よって $\mathcal{D}_X$ は加群微分子である．後半の主張は，Steenrod 作用素が $H^*(S^1)$ には自明に作用することから従う． □

$\{E_r, d_r\}$ を，(1.4.1) に対する EMSS とする：

$$E_r^{*,*} \ \Rightarrow \ H^*(LM), \qquad E_2^{*,*} \cong HH^{*,*}(H^*(X)).$$

また

$$r : E_2^{-1,*} \twoheadrightarrow E_\infty^{-1,*}, \qquad q : F^{-1}H^*(LX) \twoheadrightarrow E_\infty^{-1,*}$$

を，それぞれ射影とする．ただし $\{F^pH^*(LX)\}$ は EMSS に対応する filtration である．

定理 2.1.4. (1) $\mathcal{D}_X(\tilde{H}^*(X)) \subset F^{-1}H^{*-1}(LX)$.

(2) 次は可換：

$$\begin{tikzcd} \tilde{H}^*(X) \arrow[r, "\mathcal{D}"] \arrow[d, "\mathcal{D}_X"'] & HH^{-1,*}(H^*(X)) \cong E_2^{-1,*} \arrow[r, two heads, "r"] & E_\infty^{-1,*} \\ F^{-1}H^{*-1}(LX) \arrow[urr, bend right=10, two heads, "q"'] & & \end{tikzcd}$$

証明には準備を必要とする．まずファイバー図式の間の射を考える：

$$\begin{tikzcd}
& \Omega X \arrow[rr] \arrow[dl, "j"'] \arrow[dd] & & PX \arrow[dl, "j'"] \arrow[dd] \\
LX \arrow[rr] \arrow[dd] & & X^I \arrow[dd] & \\
& * \arrow[rr] \arrow[dl] & & X \arrow[dl, "i"] \\
X \arrow[rr, "\Delta"] & & X \times X &
\end{tikzcd}$$

ここで $i(x) = (x, *)$, また j, j' は包含写像である．

奥の図式に対応する EMSS を $\{E'_r, d'_r\}$ とおく：$E'^{*,*}_r \Rightarrow H^*(\Omega X)$. このとき，$j$ はスペクトル系列の射 $E(j) : \{E_r, d_r\} \to \{E'_r, d'_r\}$ を誘導する．

補題 2.1.5. $E_\infty^{-1,*}(j) r \mathcal{D} = -\tilde{\sigma}$.

証明. $A = H^*(X)$ と書く．E_2, E'_2 は，それぞれ次の図式の上，下の分解により計算される：

$$\begin{tikzcd}
B^\bullet(A, A \otimes A) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dotted, "\exists \Psi"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \\
B^\bullet(k, A) \arrow[r] & k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ψ は $E_2^{-1,*}(j)$ に対応する写像で，$\Psi([x \otimes 1 - 1 \otimes x]) = [x]$ をみたす．主張は次の可換図式

$$\begin{tikzcd}
H^*(X) \arrow[r, "\mathcal{D}"] \arrow[dr, "\sigma_2"'] & HH^{-1,*}(A) \arrow[r, equal] \arrow[d, "H(\Psi \otimes_{i^*} j')"] & E_2^{-1,*} \arrow[r, two heads, "r"] \arrow[d, "E_2^{-1,*}(j)"] & E_\infty^{-1,*} \arrow[r, hook] \arrow[d, "E_\infty^{-1,*}(j)"] & F^{-1}H^*(LX) \\
& H^{-1,*}(B^\bullet(k, A) \otimes_A k) \arrow[r, equal] & E_2'^{-1,*} \arrow[r, two heads, "r"] & E_\infty'^{-1,*} \arrow[r, hook] & F^{-1}H^*(\Omega X)
\end{tikzcd}$$

および命題 1.4.3 から従う．　□

補題 2.1.6. $K_n := K(\mathbb{Z}/p, n)$ とおき，写像 $\tilde{\mathcal{D}}_{K_n} : H^*(K_n; \mathbb{Z}/p) \to H^*(\Omega K_n; \mathbb{Z}/p)$ を

$$\tilde{\mathcal{D}}_{K_n} := \int_{S^1} \circ \, \widetilde{\mathrm{ev}}^*$$

で定義する．ただし $\widetilde{\mathrm{ev}} : S^1 \times \Omega K_n \to K_n$, $\widetilde{\mathrm{ev}}(t, \gamma) = \gamma(t)$ である．このとき，基本類 $\iota \in H^n(K_n; \mathbb{Z}/p)$ に対し

$$\tilde{\mathcal{D}}_{K_n}(\iota) = -\tilde{\sigma}^*(\iota)$$

が成り立つ．

証明. ホモロジー群 $H_*(-; \mathbb{Z}/p)$ 上で考える．次の図式において，h は Hurewicz 準同型，∂ は連結準同型である：

$$\begin{tikzcd}
H_n(K_n) & H_n(PK_n, \Omega K_n) \arrow[l, "\varepsilon_{0*}"'] \arrow[r, "\partial", "\cong"'] & H_{n-1}(\Omega K_n) \\
{[S^n, K_n]} \arrow[u, "h"', "\cong"] \arrow[d, "h"', "\cong"] & & {[S^{n-1}, \Omega K_n]} \arrow[ll, "\mathrm{ad}"', "\cong"] \arrow[u, "\cong"', "h"] \arrow[d, "\cong"', "h"] \\
H_n(K_n) & & H_{n-1}(\Omega K_n) \arrow[ll, "\tilde{\mathcal{D}}_{K_n *}"']
\end{tikzcd}$$

一番上の横の写像を合成したものはホモロジー懸垂 $\tilde{\sigma}_*$ である．上の四角形は $(-1)^n$ 倍を除いて可換であり，下の四角形は $(-1)^{n-1}$ を除いて可換であることから，$\tilde{\mathcal{D}}_{K_n *}(\iota_*) = -\tilde{\sigma}_*(\iota_*)$ がわかる． □

定理 2.1.4 の証明． $\tilde{H}^n(X;\mathbb{Z}/p) \cong [X, K(\mathbb{Z}/p, n)]$（写像のホモトピー類全体の集合）と加群微分子の自然性から，$X = K(\mathbb{Z}/p, n) = K_n$ の基本類について (1), (2) を示せば十分である．

(1) K_n に対して (1.4.1) を考え，対応する EMSS $\{E_r\}$ ($E_2^{*,*} \cong HH^*(H^*(K_n)) \Rightarrow H^*(LK_n)$) を考えると，$K_n$ が $(n-1)$ 連結であることから

$$E_2^{p,q} = 0 \qquad (q < -np)$$

がわかる（注意 1.4.1 参照）．スペクトル系列の形と次元に関する理由から

$$H^{n-1}(LK_n) = F^{-1}H^{n-1}(LK_n) \supset F^0 H^{n-1}(LK_n) = 0$$

である．よって

$$\mathcal{D}_{K_n}(\iota) \in F^{-1}H^{n-1}(LK_n)$$

であることがわかる．これで (1) が示された．

(2) 包含写像 $j : \Omega K_n \to LK_n$ を考える．$\mathrm{ev} : S^1 \times LK_n \to K_n$ に対し，$\mathrm{ev} \circ (\mathrm{id} \times j) = \widetilde{\mathrm{ev}}$ だから

$$j^*\mathcal{D}_{K_n} = j^* \circ \int_{S^1} \circ\, \mathrm{ev}^* = \int_{S^1} \circ\, (\mathrm{id} \times j)^* \circ \mathrm{ev}^* = \int_{S^1} \circ\, \tilde{\mathrm{ev}}^* = \tilde{\mathcal{D}}_{K_n}.$$

このことから

$$E_\infty^{-1,*}(j) q \mathcal{D}_{K_n}(\iota) = j^*\mathcal{D}_{K_n}(\iota) = \tilde{\mathcal{D}}_{K_n}(\iota) \overset{\text{補題 2.1.6}}{=} -\tilde{\sigma}^*(\iota) \overset{\text{補題 2.1.5}}{=} E_\infty^{-1,*}(j) r \mathcal{D}(\iota). \tag{2.1.1}$$

ところが，$F^0 H^{n-1}(LK_n) = 0$ であることから，写像 $E_\infty^{-1,*}(j)$ の次数 $n-1$ の部分 $E_\infty^{-1,n}(j)$ は，j^* の次数 $n-1$ の部分に一致する．さらに，$LK_n \to K_n$ が H 空間のファイバー束であることから，$LK_n \simeq K_n \times \Omega K_n$ が成り立つ．j は第 2 成分への包含写像とみなせるから，次数 $n-1$ においては $j^* = E_\infty^{-1,n}(j)$ は同型である．よって (2.1.1) から

$$q\mathcal{D}_{K_n}(\iota) = r\mathcal{D}(\iota)$$

を得る．これは ι に対する (2) の主張に他ならない． □

2.2　随伴束

G を連結な位相群で，有限 CW 複体のホモトピー型を持つものとする．M を連結な空間，$P \to M$ を G 束とする．左からの随伴作用 $\mathrm{ad} : G \times G \to G$ を，$(h,k) \mapsto hkh^{-1}$ で定義する．これらから，随伴束

$$G \xrightarrow{j} P \times_{\mathrm{ad}} G \xrightarrow{\pi} M \tag{2.2.1}$$

を得る．以下で $P \times_{\mathrm{ad}} G$ の mod p コホモロジー分解について考えたい．

定義 2.2.1. ファイバー束 $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} M$ が **mod p コホモロジー分解**を許すとは，$H^*(M;\mathbb{Z}/p)$ 代数の同型

$$\phi : H^*(E;\mathbb{Z}/p) \xrightarrow{\cong} H^*(M;\mathbb{Z}/p) \otimes H^*(F;\mathbb{Z}/p)$$

が存在して，$\mathrm{in}_2^* \circ \phi = j^*$ をみたすことをいう．ここで $\mathrm{in}_2 : F \to M \times F$ は第 2 成分への包含写像である：

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dl, "j"'] \arrow[dr, "\mathrm{in}_2"] & \\
E \arrow[dr, "p"'] & & M \times F \arrow[ll, dotted, "\phi_*"'] \arrow[dl, "\mathrm{proj}"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

□

定理 2.2.2. G は位相群で，$H^*(G;\mathbb{Z})$ が p ねじれ部分群を持たないとする．このとき，随伴束 (2.2.1) は mod p コホモロジー分解を許す.

以下では段階を追って証明に必要な準備を行う.

2.2.1 準備：あるホモトピーファイバー図式

ここでは，まずホモトピーファイバー図式

$$\begin{tikzcd}
P \times_{\mathrm{ad}} G \arrow[r] \arrow[d] & BG \arrow[d, "\Delta"] \\
M \arrow[r, "\Delta\circ f"] & BG \times BG
\end{tikzcd} \tag{2.2.2}$$

を構成する．ただし $f : M \to BG$ は，元の G 束 $P \to M$ の分類写像である．さらに，(2.2.2) が次のホモトピー可換図式に適合することを見る：

$$\begin{tikzcd}
 & & LBG \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
G \arrow[r, "j"] \arrow[dd] & P \times_{\mathrm{ad}} G \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[rr] \arrow[dd] & & BG \arrow[dd, "\Delta"] \\
 & & BG \arrow[dr, "\Delta"] & \\
* \arrow[r] & M \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\Delta\circ f"] & & BG \times BG
\end{tikzcd} \tag{2.2.3}$$

特に $P \to M$ が普遍束 $EG \to BG$ の場合を考えると，ホモトピー引き戻しに関する結果 [Mat, Corollary 7] より以下を得る：

系 2.2.3. $\tilde{f} : EG \times_{\mathrm{ad}} G \xrightarrow{\simeq} LBG.$ □

以下，(2.2.2), (2.2.3) を同時に構成していく．$G^2 := G \times G$ とおき，

$$\delta G := \{(g,g) \in G^2\} \quad (\cong G)$$

を対角集合とする．また，G^2 の閉部分群 $H \subset G^2$ を取り，包含写像を $i : H \hookrightarrow G^2$ と書く．G^2 の G への作用を

$$G^2 \times G \longrightarrow G, \qquad (h,k) \cdot g := hgk^{-1}$$

で定め，この作用を $H \subset G^2$ に制限したものも考える．このとき，次の可換図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[d] & G^2/\delta G \arrow[l] \arrow[d] \\
EG^2 \times_H G \arrow[r] \arrow[d] & EG^2 \times_{G^2} G \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & EG^2/\delta G \arrow[l, "f'"', "\cong"] \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\
BH \arrow[r, "Bi"] & BG^2 \arrow[r, equal] & BG^2
\end{tikzcd} \tag{2.2.4}$$

ここで，$f' : EG^2/\delta G \to EG^2 \times_{G^2} G$ は

$$f'(x\delta G) := (x,e)G^2$$

で，逆写像 $q : EG^2 \times_{G^2} G \to EG^2/\delta G$ は

$$q((x,g)G^2) := x(g,e)\delta G$$

で与えられる ($x \in EG^2$, $g \in G$)．また，$\tilde{\varphi}$ は (2.2.4) の右下が可換になるように定義する．

$\Delta : G \to G^2$ は，ファイバー束の間の射

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, equal] \arrow[d] & G \arrow[d] \\
EG \times_{\mathrm{ad}} G \arrow[r, "E\Delta \times \mathrm{id}"] \arrow[d] & EG^2 \times_{\delta G} G \arrow[d] \\
BG \arrow[r, "\eta", "\simeq"'] & EG^2/\delta G
\end{tikzcd} \tag{2.2.5}$$

を誘導する．$\delta G \cong G$ より，η はホモトピー同値となる．

以上の構成から，次の図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & LBG \arrow[dr] \arrow[ddd] & \\
P \times_{\mathrm{ad}} G \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[urrrrr, bend left, "\tilde{f}"] & EG \times_{\mathrm{ad}} G \arrow[r] \arrow[d] & EG^2/\delta G \arrow[d, "\tilde{\varphi}"'] \arrow[dr, "\tilde{\Delta} := \xi \circ \tilde{\varphi}"] & & BG \arrow[ll, "\eta"', "\simeq"] \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[d, "\Delta"] & & (BG)^I \arrow[d, "\varepsilon_0 \times \varepsilon_1"] \\
M \arrow[r, "f"] \arrow[drrrrr, bend right, "f"] & BG \arrow[r, "B\Delta"] & BG^2 \arrow[r, "\xi"] & (EG^2/\delta G)^2 & (BG)^2 \arrow[l, "\eta \times \eta"', "\simeq"] \arrow[rr, equal] & & (BG)^2 \\
 & & & & & BG \arrow[ur, "\Delta"] &
\end{tikzcd} \tag{2.2.6}$$

ただし，分類空間を無限ジョインとみなしたとき

$$\xi((x_1, y_1)t_1 \oplus \dots) := ((x_1, x_1)t_1 \oplus \cdots, (y_1, y_1)t_1 \oplus \cdots)$$

である．また，一番左の四角形の $\Delta : BG \to BG^2$ に着目し，これの自身による引き戻しを考えることで $\tilde{f}$ が誘導されることがわかる．(2.2.6) の左から二番目の四角形は，(2.2.4) において $H = \delta G$ とおいたものになっている．(2.2.6) の左から 4 列目までが (2.2.2) を与える．また間のホモトピー同値をすべて同一視していけば，全体として (2.2.3) になっている．

2.2.2　準備：Koszul-Tate 分解

次に，計算可能な **Koszul-Tate 分解**を導入する．k を体とする．

$$\Lambda := \bigwedge(y_1, \dots, y_l) \otimes k[x_1, \dots, x_n]/(\rho_1, \dots, \rho_m)$$

という形の代数を次数付き**完備交差代数** (graded complete intersection algebra, GCI algebra) と呼ぶ．ここで $\rho_1, \dots, \rho_m$ は正則列 (つまり各 ρ_i は $k[x_1, \dots, x_n]/(\rho_1, \dots, \rho_{i-1})$ の零因子でない) または $m = 0$ とし，$\deg y_i$ は偶数，$\deg x_i$ は $p \neq 2$ のときは奇数とする．

以下，Λ の $\Lambda \otimes \Lambda$ 加群としての射影分解 $\mathscr{F}$, および k の Λ 加群としての射影分解 $\mathscr{K}$ を与える．次の命題は [S2, Proposition 3.5] の標数 p 版である．

命題 2.2.4. Λ を上のような GCI 代数とするとき，左 $\Lambda \otimes \Lambda$ 加群の射影分解

$$\mathscr{F} \xrightarrow{\mu} \Lambda \to 0$$

(**Koszul-Tate 分解**) が次のように与えられる：

$$\mathscr{F} := \Lambda \otimes \Lambda \otimes \Gamma[v_1, \dots, v_l] \otimes \bigwedge(u_1, \dots, u_n) \otimes \Gamma[w_1, \dots, w_m]$$

ここで Γ は後で述べる分配べき代数 (divided power algebra) を表す．微分は次のように与えられる：

$$\begin{aligned} d(\Lambda \otimes \Lambda) &= 0, \\ d(v_i) &= y_i \otimes 1 - 1 \otimes y_i, \\ d(u_i) &= x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i, \\ d(\gamma_r(w_i)) &= \left(\sum_{j=1}^{n} \zeta_{ij} u_j \right) \otimes \gamma_{r-1}(w_i) \end{aligned}$$

ここで $\zeta_{ij} \in k[x_1, \dots, x_n] \otimes k[x_1, \dots, x_n]$ は次を満たすものである：

$$\rho_i \otimes 1 - 1 \otimes \rho_i = \sum_{j=1}^{n} (x_j \otimes 1 - 1 \otimes x_j)\zeta_{ij},$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial x_j} = \mu(\zeta_{ij}).$$

$\mu : \mathscr{F} \to \Lambda$ は $\Lambda \otimes \Lambda$ の積で与えられる．さらに次数については

$$\begin{aligned}
\operatorname{bideg} \lambda &= (0, \deg \lambda) \qquad (\lambda \in \Lambda \otimes \Lambda), \\
\operatorname{bideg} v_i &= (-1, \deg y_i), \\
\operatorname{bideg} u_i &= (-1, \deg x_i), \\
\operatorname{bideg} w_i &= (-2, \deg y_i)
\end{aligned}$$

である．従って

$$\mathscr{E} := \Lambda \otimes \Gamma[v_1, \dots, v_l] \otimes \bigwedge(u_1, \dots, u_n) \otimes \Gamma[w_1, \dots, w_m],$$
$$d(\Lambda) := 0, \quad d(v_i) := 0, \quad d(u_i) := 0, \quad d(w_i) := \sum_{1 \le j \le m} \frac{\partial \rho_i}{\partial x_j} u_j$$

とおけば，これにより $\operatorname{Tor}_{\Lambda \otimes \Lambda}(\Lambda, \Lambda)$ が計算される．　□

注意 2.2.5 (divided power algebra). ベクトル空間としては

$$\Gamma[w] \cong k\{\gamma_r(w) \mid r \ge 0\}$$

である．ここに積構造を

$$\gamma_0(w) := 1, \quad \gamma_1(w) := w, \quad \gamma_i(w)\gamma_j(w) := \binom{i+j}{i} \gamma_{i+j}(w)$$

で定めたものが分配べき代数である．　□

命題 2.2.6. Λ を上のような GCI 代数とするとき，左 Λ 加群 k の射影分解

$$\mathscr{K} \xrightarrow{\varepsilon} k \to 0$$

(**Koszul-Tate 分解** [S2]) が次のように与えられる：

$$\mathscr{K} := \Gamma[s^{-1}y_1, \dots, s^{-1}y_l] \otimes \bigwedge(s^{-1}x_1, \dots, s^{-1}x_n) \otimes \Gamma[\tau\rho_1, \dots, \tau\rho_m] \otimes \Lambda$$

ここで s^{-1} は次数を 1 下げることを表す．微分は次のように与えられる：

$$\begin{aligned}
d(\Lambda) &= 0, \\
d(s^{-1}y_i) &= y_i, \\
d(s^{-1}x_i) &= x_i, \\
d(\gamma_r(\tau\rho_i)) &= \xi_i \otimes \gamma_{r-1}(\tau\rho_i)
\end{aligned}$$

ここで，$\xi_i \in \bigwedge^*(s^{-1}x_1, \dots, s^{-1}x_n) \otimes k[x_1, \dots, x_n]$ は $d(\xi_i) = \rho_i$ をみたすものである．さらに次数については

$$\begin{aligned}
\operatorname{bideg} s^{-1}y_i &= (-1, \deg y_i), \\
\operatorname{bideg} s^{-1}x_i &= (-1, \deg x_i), \\
\operatorname{bideg} \tau\rho_i &= (-2, \deg \rho_i)
\end{aligned}$$

である．従って

$$\operatorname{Tor}_\Lambda^{*,*}(k, k) \cong \Gamma[s^{-1}y_1, \dots, s^{-1}y_l] \otimes \bigwedge(s^{-1}x_1, \dots, s^{-1}x_n) \otimes \Gamma[\tau\rho_1, \dots, \tau\rho_m]$$

である．　□

2.2.3　準備：EMSS 上での Steenrod 作用素

定理 2.2.7 ([S1, R, C-K]). ファイバー図式 (1.2.1) に付随する EMSS は，Steenrod 代数 $\mathcal{A}(p)$ の作用を持つ．つまり

- 各 $r \geq 0$ について，$E_r^{*,*}$ は微分 d_r と可換な $\mathcal{A}(p)$ 作用を持ち，
- $\mathcal{A}(p)$ 代数として $E_r^{*,*} \cong H^*(E_{r-1}, d_{r-1})$ が成り立ち，
- $\mathcal{A}(p)$ 代数として $E_\infty^{*,*} \cong E_0 H^*(E_f)$ が成り立ち，
- $\mathcal{A}(p)$ 作用は「垂直方向」に働く：

$$\begin{aligned} \beta^\varepsilon \wp^i_{EM} : E_r^{l,s} &\longrightarrow E_r^{l,s+2i(p-1)+\varepsilon} & \quad p \neq 2,\ \varepsilon = 0, 1, \\ Sq^i : E_r^{l,s} &\longrightarrow E_r^{l,s+i} & \quad p = 2. \end{aligned}$$

さらに，E_2 項では Cartan 関係式が成り立つ：

$$\wp^k(a[x_1|\dots|x_m]b) = \sum_{l+i_1+\cdots+i_m+s=k} \wp^l(a)[\wp^{i_1}(x_1)|\dots|\wp^{i_m}(x_m)]\wp^s(b). \quad \square$$

2.2.4　定理 2.2.2 の証明

加群の同型 $H^*(P \times_{\mathrm{ad}} G) \cong H^*(M) \otimes H^*(G)$ の証明. $H^*(G;\mathbb{Z})$ が p 捩れ部分群を持たないことから，$H^*(BG;\mathbb{F}_p)$ は偶数次の元で生成される多項式環となる：

$$H^*(BG) \cong \mathbb{F}_p[y_1, \dots, y_l].$$

$E_f := P \times_{\mathrm{ad}} G$ と略記する．(2.2.2) に付随する EMSS を $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ とする．つまり

$$E_2^{*,*} \cong \mathrm{Tor}^{*,*}_{H^*(BG)\otimes H^*(BG)}(H^*(M), H^*(BG))$$

であり，これは代数として $H^*(E_f)$ に収束する．命題 2.2.4 の Koszul-Tate 分解

$$\mathscr{F}^\bullet \xrightarrow{\rho} H^*(BG) \to 0$$

を考えると，次の代数の同型を得る：

$$\begin{aligned} E_2^{*,*} &\cong H^*(H^*(M) \otimes_{H^*(BG)\otimes H^*(BG)} \mathscr{F}^\bullet, 1 \otimes d) \\ &\cong H^*(H^*(M) \otimes \textstyle\bigwedge(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_l), d(\bar{y}_i) = (\Delta f)^*(y_i \otimes 1 - 1 \otimes y_i)) \\ &\cong H^*(M) \otimes \textstyle\bigwedge(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_l) \qquad ((\Delta f)^*(y_i \otimes 1 - 1 \otimes y_i) = 0 \text{ による}). \end{aligned}$$

ここで次数は，命題 2.2.4 で述べたように

$$x \in H^*(M) \text{ に対し } \operatorname{bideg} x = (0, \deg x), \qquad \operatorname{bideg} \bar{y}_i = (-1, \deg y_i)$$

である．

注意 2.2.8. EMSS に入る代数構造は (1.2.2) で与えられる．従って E_2 項の Tor に定義される代数構造は，カップ積

$$H^*(E) \otimes H^*(E) \longrightarrow H^*(E)$$

の持ち上げから誘導される．$\mathscr{F}$ 上の積 $\mathscr{F} \otimes \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ は確かに $H^*(BG) \otimes H^*(BG) \to H^*(BG)$ の持ち上げであるから，$\mathscr{F}$ の代数構造が E_2 項のそれを導く．

生成元が $E_2^{-1,*}$ および $E_2^{0,*}$ にしかないから，スペクトル系列は E_2 で退化し

$$E_2^{*,*} \cong E_\infty^{*,*} \cong E_0 H^*(E_f)$$

となる．ただし

$$E_0^{p,q} H^*(E_f) := (F^p H^*(E_f)/F^{p+1}H^*(E_f))^{p+q}.$$

ここで E_∞ 項の元の拡張問題を考える．

$p \neq 2$ **のとき**．各 $\bar{y}_i$ の次数は奇数であるから，$H^*(E_f)$ において $\bar{y}_i^2 = 0$ である．この場合は拡張問題は自明に解けて，$H^*(M)$ 代数として

$$H^*(E_f) \cong H^*(M) \otimes \bigwedge(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_l).$$

$p = 2$ **のとき**．まず，切断

$$s : M \longrightarrow E_f$$

が存在することに注意する（実際，$M \cong P/G$ とみなし，$s([x]) := (x, e)$ とおけばよい）．もし $s^*\bar{y}_i \neq 0$ ならば，$\bar{y}_i - \pi^* s^* \bar{y}_i$ $(\pi : P \to M)$ を改めて $\bar{y}_i$ とおくことにより，

$$s^*\bar{y}_i = 0 \qquad (1 \leq i \leq l)$$

と仮定してよい．

$\bar{y}_i^2 = 0 \in E_\infty^{-2,*}$ より，$\bar{y}_i^2 \in F^{-1}H^*(E_f)$ がわかる．同型

$$\mathrm{Tor}_{\Lambda\otimes\Lambda}(H^*(M), \Lambda)_{\text{bar}} \cong \mathrm{Tor}_{\Lambda\otimes\Lambda}(H^*(M), \Lambda)_{\text{Koszul-Tate}}$$

$(\Lambda := H^*(BG))$ が，$1[y_i \otimes 1 - 1 \otimes y_i]1 \mapsto \bar{y}_i$ で得られることから

$$\bar{y}_i^2 = Sq_{EM}^{|y_i|-1}(1[y_i \otimes 1 - 1 \otimes y_i]1) = 1[Sq_{BG}^{|y_i|-1}(y_i) \otimes 1 - 1 \otimes Sq_{BG}^{|y_i|-1}(y_i)]1$$

であるが，$Sq_{BG}^{|y_i|-1}(y_i)$ は奇数次数だから，$\bar{y}_i^2 = 0 \in E_0^{-1,*}H^*(E_f)$ でなければならない．よって $\bar{y}_i^2 \in F^0 H^*(E_f) \cong H^*(M)$ がわかる．従って，$\bar{y}_i^2 = \pi^* Q_i$ となるような $Q_i \in H^*(M)$ が存在する．ところが $s^*\bar{y}_i = 0$ だったから

$$0 = s^*\bar{y}_i^2 = s^*\pi^* Q_i = Q_i$$

である．こうして $\bar{y}_i^2 = 0 \in H^*(E_f)$ であることがわかり

$$H^*(E_f) \cong H^*(M) \otimes \bigwedge(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_l)$$

が示された．　□

注意 2.2.9. $H^*(BG) \cong \mathbb{F}_2$ とする．$\deg y_i$ が偶数であることを仮定しない場合も，定理 2.2.2 の証明から，$H^*(E_f; \mathbb{F}_2)$ に収束する EMSS は E_2 項で退化し，$H^*(M)$ 代数として

$$H^*(E_f) \cong H^*(M) \otimes \Delta(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_l)$$

と表せる．ただし $\Delta(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_l)$ は，$\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_l$ を 2 単純系として持つ可換代数を表す．すなわち，ベクトル空間としては

$$\Delta(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_l) \cong \mathbb{F}_2\{\bar{y}_1^{\epsilon_1} \ldots \bar{y}_l^{\epsilon_l}\,;\, \epsilon_i = 0 \text{ or } 1\}$$

であり，$i_n \neq j_n$, $i_k \neq i_{k'}$, $j_k \neq j_{k'}$ $(k \neq k')$ ならば

$$(\bar{y}_{i_1} \ldots \bar{y}_{i_s})(\bar{y}_{j_1} \ldots \bar{y}_{j_t}) = \bar{y}_{i_1} \ldots \bar{y}_{i_s} \bar{y}_{j_1} \ldots \bar{y}_{j_t}$$

が成り立つ．　□

$H^*(G)$ **の入り方について．** (2.2.3) の前面の図式

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & BG \arrow[d, "\Delta"] \\ * \arrow[r] & (BG)^2 \end{tikzcd}$$

に対する EMSS を $\{E_r'^{*,*}, d_r'\}$ と書く．すなわち

$$\begin{aligned} E_2'^{*,*} &\cong \mathrm{Tor}^{*,*}_{H^*(BG) \otimes H^*(BG)}(\mathbb{F}_p, H^*(BG)) \\ &\cong H^*(\mathbb{F}_p \otimes_{H^*(BG) \otimes H^*(BG)} \mathscr{F}, 1 \otimes d) \cong \bigwedge(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_l), \\ E_r'^{*,*} &\Rightarrow H^*(G), \end{aligned}$$

ただし $\mathrm{bideg}\, \tilde{y}_i = (-1, \deg y_i)$．上と同様に，次元の理由により $E_2'^{*,*} \cong E_\infty'^{*,*}$ がわかる．

$j : G \to E_f = P \times_{\mathrm{ad}} G$ は，スペクトル系列の射

$$E_r(j) : E_r^{*,*} \longrightarrow E_r'^{*,*}$$

を誘導する．スペクトル系列の自然性と図式 (2.2.3) から

$$E_0(j)(\bar{y}_i) = \tilde{y}_i,$$

従って $j^* \bar{y}_i = \tilde{y}_i$ が成り立つ．$H^*(M)$ 代数の同型

$$\phi : H^*(E_f) \xrightarrow{\cong} H^*(M) \otimes H^*(G)$$

を $\phi(\bar{y}_i) := 1 \otimes \tilde{y}_i$ となるように定めれば，$\mathrm{in}_2^* \circ \phi = j^*$ であることが確かめられる．　□

2.3　$\mathcal{A}(p)$ 代数構造

定理 2.2.2 により，$H^*(P \times_{\mathrm{ad}} G)$ の環構造は（もとの G 束の分類写像によらず）完全に決定される．従って，環構造だけでは $P \to M$ を自明な G 束と区別できないことになる．
$p = 0$ **のとき** ($\mathbb{F}_0 := \mathbb{Q}$). 局所化された空間においては，次のような分解が存在する：

$$\begin{tikzcd}
 & G_{\mathbb{Q}} \arrow[dl, "j"'] \arrow[dr, "in_2"] & \\
(P \times_{\mathrm{ad}} G)_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, dotted, "\simeq"] \arrow[dr] & & (M \times G)_{\mathbb{Q}} \arrow[dl] \\
 & M_{\mathbb{Q}} &
\end{tikzcd}$$

実際，$G \xrightarrow{j} P \times_{\mathrm{ad}} G \to M$ の模型として

$$\begin{tikzcd}
A_{PL}(G) & A_{PL}(P \times_{\mathrm{ad}} G) \arrow[l] & A_{PL}(M) \arrow[l] \\
(\bigwedge(y_i), 0) \arrow[u, "\simeq"] & (\bigwedge(y_i) \otimes \bigwedge V, 1 \otimes d) \arrow[l] \arrow[u, "\simeq"] & (\bigwedge V, d) \arrow[l] \arrow[u, "\simeq"]
\end{tikzcd}$$

の形のものを取ることができる．ここで右下は M の Sullivan 模型である．詳しくは §3 参照．

$p \neq 0$ **のとき**．以下では，コホモロジーの $\mathcal{A}(p)$ 上の代数構造をみることで，空間上では上のような分解が起こらないことを示す．

定理 2.3.1. $H^*(BG) \cong \mathbb{F}_p[y_1, \ldots, y_l]$, $p \neq 2$ のときは $\deg y_i$ が偶数，となるような連結な位相群 G を考える．このとき，加群微分子

$$\mathcal{D}'_f : H^*(BG) \longrightarrow H^{*-1}(P \times_{\mathrm{ad}} G)$$

($f : M \to BG$ は $P \to M$ の分類写像) で，Steenrod 作用素と可換になるものが存在する．特に次が成立する：

$$\begin{aligned}
Sq^i \bar{y}_j &= \mathcal{D}'_f Sq^i y_j, & & p = 2, \\
\wp^i \bar{y}_j &= \mathcal{D}'_f \wp^i y_j, \quad \beta\wp^i \bar{y}_j = 0, & & p \neq 2.
\end{aligned}$$

代数の生成元については定理 2.2.2 の証明，注意 2.2.9 を参照．

証明. 定理 2.2.2 の証明と同じように，切断 $s : M \to P \times_{\mathrm{ad}} G$ に対し，$\bar{y}_i \in H^*(P \times_{\mathrm{ad}} G)$ を $s^*\bar{y}_i = 0$ をみたすように選び

$$\mathcal{D}'_f(y_i) := \bar{y}_i \tag{2.3.1}$$

と定義する．

(2.2.3) に現れた $\tilde{f} : P \times_{\mathrm{ad}} G \to LBG$ を思い出す．EMSS の自然性から

$$\tilde{f}^* \circ \mathcal{D}'_{\mathrm{id}} = \mathcal{D}'_f$$

が成り立つ．ただし $\mathcal{D}'_{\mathrm{id}}: H^*(BG) \to H^*(LBG)$ は，(2.3.1) と同様にして定義された加群微分子である．従って，$\mathcal{D}'_{\mathrm{id}}$ に対して定理の主張を示せば十分である．

$[y_i \otimes 1 - 1 \otimes y_i] \mapsto \bar{y}_i$ で与えられる同型

$$\mathrm{Tor}_{\Lambda\otimes\Lambda}(\Lambda,\Lambda)_{\mathrm{bar}} \cong \mathrm{Tor}_{\Lambda\otimes\Lambda}(\Lambda,\Lambda)_{\text{Koszul-Tate}}$$

及び定理 2.1.4 (2) から

$$q\mathcal{D}'_{\mathrm{id}} = q\mathcal{D}_{BG}$$

がわかる．ただし $q: F^{-1}H^*(LBG) \to E_\infty^{-1,*}$, また $\mathcal{D}_{BG}$ は幾何的に定義された加群微分子 (命題 2.1.3) である．よって $\mathcal{D}'_{\mathrm{id}}$ と $\mathcal{D}_{BG}$ は F^0 を法として等しい．つまり

$$\mathcal{D}'_{\mathrm{id}}(y_i) = \mathcal{D}_{BG}(y_i) + \pi^* Q_i \tag{2.3.2}$$

となる $Q_i \in H^{*-1}(BG)$ が存在する．

ここで下に述べる補題 2.3.2 と，$\bar{y}_i = \mathcal{D}'_{\mathrm{id}}(y_i)$ を $s_X^*(\bar{y}_i) = 0$ となるように選べる（定理 2.2.2 の証明を参照せよ）ことから，s_X^* を (2.3.2) に適用して

$$Q_i = 0$$

を得る．よって $\mathcal{D}'_{\mathrm{id}} = \mathcal{D}_{BG}: H^*(BG) \to H^{*-1}(LBG)$ であるが，$\mathcal{D}_{BG}$ は Steenrod 作用素と可換だった (命題 2.1.3) から，$\mathcal{D}'_{\mathrm{id}}$ もそうであることがわかる．□

補題 2.3.2. $s_X: X \to LX$ を，$s_X(x) = c_x$（定値ループ）で定まる切断とする．このとき $s_X^*\mathcal{D}_X \equiv 0$ である．

証明. $H^n(X) = [X, K_n]$ $(X = K_n = K(\mathbb{Z}/p, n))$ とみなすことで，K_n の基本類について示せば十分であるが，それは $s_{K_n}^*\mathcal{D}_{K_n}\iota \in H^{n-1}(K_n) = 0$ から直ちに従う．□

注意 2.2.9 により，$H^*(M)$ 代数として，2 単純系を用いて

$$H^*(P \times_{\mathrm{ad}} G; \mathbb{F}_2) \cong H^*(M) \otimes \Delta(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_l)$$

と表せた．$\bar{y}_i^2$ に関する拡張問題は次のように解ける：

$$\bar{y}_i^2 = Sq^{|y_i|-1}\bar{y}_i = Sq^{|y_i|-1}\mathcal{D}'_f y_i = \mathcal{D}'_f Sq^{|y_i|-1} y_i.$$

こうして次の定理を得る．

定理 2.3.3. $p = 2$ とし，G は $H^*(BG; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[y_1, \ldots, y_l]$ となる群とする（ここでは $\deg y_i$ は偶数とは限らない）．このとき，$H^*(M; \mathbb{F}_2)$ 代数として

$$H^*(P \times_{\mathrm{ad}} G; \mathbb{F}_2) \cong H^*(M; \mathbb{F}_2) \otimes \mathbb{F}_2[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_l]/(\bar{y}_i^2 + \mathcal{D}'_f Sq^{|y_i|-1} y_i,\ 1 \le i \le l)$$

が成り立つ．□

例 2.3.4. ここでは $p=3$ とする．$H^*(BU(2)) \cong \mathbb{F}_3[c_1,c_2]$ である．ただし c_i は i 次 Chern 類で，$\deg c_i = 2i$ であり，$\wp^1 c_2 = c_1^2 c_2 + c_2^2$ が知られている．$\mathcal{A}(3)$ 代数として

$$H^*(LBU(2)) \cong H^*(EU(2)\times_{\mathrm{ad}} U(2)) \cong \mathbb{F}_3[c_1,c_2]\otimes \bigwedge(\bar{c}_1,\bar{c}_2)$$

である．ただし $\deg \bar{c}_i = 2i-1$. また定理 2.3.1 と，$\mathcal{D}'_{\mathrm{id}}$ が Leibniz 則を満たすことから

$$\wp^1\bar{c}_2 = \mathcal{D}'_{\mathrm{id}}(\wp^1 c_2) = 2c_1c_2\bar{c}_1 + c_1^2\bar{c}_2 + 2c_2\bar{c}_2.$$

以下，$\mathcal{A}(3)$ 代数としての以下の分解が存在しないことを見る：

$$\begin{tikzcd}
& \bigwedge(\bar{c}_1,\bar{c}_2) \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
\mathbb{F}_3[c_1,c_2]\otimes\bigwedge(\bar{c}_1,\bar{c}_2) \arrow[ur, "j^*"] & {} & H^*(LBU(2);\mathbb{F}_3) \arrow[ul, "j^*"'] \arrow[ll, "\nexists\phi"']
\end{tikzcd}$$

実際，もし ϕ が存在したとすると，図式の可換性と次数の理由から

$$\phi(\bar{c}_1) = \bar{c}_1, \qquad \phi(\bar{c}_2) = \bar{c}_2 + \alpha c_1\bar{c}_1 \quad (\exists \alpha\in\mathbb{F}_3)$$

であるが，$\phi\wp^1 = \wp^1\phi$ と

$$\begin{aligned}
&\phi(\wp^1(\bar{c}_2)) = \phi(2c_1c_2\bar{c}_1 + c_1^2\bar{c}_2 + 2c_2\bar{c}_2) = 2c_1c_2\bar{c}_1 + c_1^2(\bar{c}_2+\alpha c_1\bar{c}_1) + 2c_2(\bar{c}_2+\alpha c_1\bar{c}_1),\\
&\wp^1(\phi(\bar{c}_2)) = \wp^1(\bar{c}_2+\alpha c_1\bar{c}_1) = 0 + \alpha c_1^3\bar{c}_1
\end{aligned}$$

の $c_1c_2\bar{c}_1$ の項の比較により矛盾が生じる． □

定理 2.3.3 で見たように，EMSS 上の Steenrod 作用素の作用を考えることで代数の拡張問題を解くことができる場合がある．そのような例を挙げ，この章を終える．

例 2.3.5. X を単連結な $\mathbb{F}_2$ コホモロジー $SU(3)$ とする：$H^*(X;\mathbb{F}_2)\cong H^*(SU(3);\mathbb{F}_2)$ $(\cong \bigwedge(e_3,e_5)$, $Sq^2(e_3)=e_5)$. $H^*(\Omega X)$ を計算するための EMSS は

$$E_2^{*,*} \cong \mathrm{Tor}^{*,*}_{H^*(X)}(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2)_{\text{K-T}} \cong \Gamma[s^{-1}e_3, s^{-1}e_5]$$

である．ただし $\mathrm{bideg}\, s^{-1}e_i = (-1,i)$, $\mathrm{bideg}\,\gamma_{2^i}(s^{-1}e_j) = (-2^i, j\cdot 2^i)$ である．この E_2 項はさらに，代数として

$$E_2^{*,*} \cong \bigotimes_{i\geq 0}\mathbb{F}_2[\gamma_{2^i}(s^{-1}e_3)]/(\gamma_{2^i}(s^{-1}e_3)^2)\otimes\bigotimes_{j\geq 0}\mathbb{F}_2[\gamma_{2^j}(s^{-1}e_5)]/(\gamma_{2^j}(s^{-1}e_5)^2)$$

と書き直すことができる（例えば [H, Example 3C.5] 参照）．

双次数の形から，$E_2^{*,*}\cong E_\infty^{*,*}$ であることはすぐにわかる．さらに，$H^*(\Omega X)$ においては

$$\gamma_{2^i}(s^{-1}e_3)^2 = \gamma_{2^i}(s^{-1}e_5) + (\text{分解可能な元の和})$$

である．実際，同型

$$\mathrm{Tor}_{H^*(X)}(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2)_{\text{K-T}} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Tor}_{H^*(X)}(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2)_{\mathrm{bar}}$$

が，$\gamma_{2^i}(s^{-1}e_j) \mapsto 1[e_j|\ldots|e_j]1 \in \mathbb{F}_2 \otimes \tilde{H}^*(X)^{\otimes 2^i} \otimes H^*(X)$ $(j=3,\,5)$ で与えられることから

$$\begin{aligned}\gamma_{2^i}(s^{-1}e_3)^2 &= Sq_{EM}^{2^i\cdot 2}[e_3|\ldots|e_3] \\ &= [Sq_{EM}^2(e_3)|\ldots|Sq_{EM}^2(e_3)] + (Sq^i(e_3)\ (i \geq 3)\ \text{を含む元}) \\ &= \gamma_{2^i}(s^{-1}e_5) + (...)\end{aligned}$$

が成り立つが，$i \geq 3$ のとき $Sq_{EM}^i(e_3) = 0$ である．次元を考えると，F^{-2^i} より下の filtration に入る元は全て分解可能元であるから，$H^*(\Omega X)$ においては分解可能元を除いて $\gamma_{2^i}(s^{-1}e_3)^2 = \gamma_{2^i}(s^{-1}e_5)$ であることがわかる．Borel による Hopf 代数の構造定理（例えば [Mi, 定理 4.9] 参照）から

$$H^*(\Omega X;\mathbb{F}_2) \cong \bigotimes_{i\geq 0} \mathbb{F}_2[\gamma_{2^i}(s^{-1}e_3)]/(\gamma_{2^i}(s^{-1}e_3)^4)$$

がわかる．　□

スペクトル系列の拡張問題を解くための，より正確な議論は [K1, K2] 参照．

第3章　基点付き写像空間の有理分解

3.1　有理分解定理

空間 X, Y に対し，写像空間 $F(X,Y)$ および基点付き写像空間

$$F(X,Y) := \{f : X \to Y\} \supset F_*(X,Y) := \{f : (X,*) \to (Y,*)\}$$

を考える（コンパクト開位相を入れる）．この章の目標は次の定理である．

定理 3.1.1. X を単連結な有限 CW 複体，$\varphi : S^k \to X$ を連続写像とする．また Y を十分に連結性の高い空間とする；$\mathrm{Conn}(Y) \geq \max\{k+1, \dim X\}$. φ の「ブラケット長」が Y の「Whitehead 長」より大きいとき，$F_*(X \cup_\varphi e^{k+1}, Y)_{\mathbb{Q}}$ は次のような分解を持つ：

$$\begin{tikzcd}
F_*(X \cup_\varphi e^{k+1}, Y)_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "i^\sharp"'] & \circlearrowleft & (F_*(X,Y) \times \Omega^{k+1}Y)_{\mathbb{Q}} \arrow[dl, "\mathrm{proj}"] \\
& F_*(X,Y)_{\mathbb{Q}} &
\end{tikzcd}$$

ここで $i : X \to X \cup_\varphi e^{k+1}$ は包含写像である．

注意 3.1.2. 定理 3.1.1 における Y の連結性に関する条件により，$F_*(X \cup_\varphi e^{k+1}, Y)$ は連結になる． □

3.2　有理ホモトピー論の復習

有理ホモトピー論については [F-H-T2], また単体的対象については [B-K] などを参照のこと．

V を $\mathbb{Q}$ 上の次数付きベクトル空間とする．この章では，$\bigwedge V$ は V で生成される自由代数を表す．つまり

$$\bigwedge V := P[V^{\mathrm{even}}] \otimes \bigwedge V^{\mathrm{odd}}.$$

A_{PL} を，多項式微分形式のなす $\mathbb{Q}$ 上の単体的 DGA とする．つまり，$A_{PL} = \{(A_{PL})_n\}_{n\geq 0}$,

$$(A_{PL})_n := \frac{\bigwedge(t_0,\ldots,t_n,dt_0,\ldots,dt_n)}{(\sum t_i - 1,\ \sum dt_i)},$$

次数は $\deg t_i = 0$, $\deg dt_i = 1$, 微分は $d(t_i) = dt_i$, $d(dt_i) = 0$ で定義される．また，境界作用素 $d_i : (A_{PL})_n \to (A_{PL})_{n-1}$, 面作用素 $s_j : (A_{PL})_n \to (A_{PL})_{n+1}$ $(0 \leq i, j \leq n)$ は次で定義される：

$$d_i(t_k) := \begin{cases} t_k & i < k, \\ 0 & i = k, \\ t_{k-1} & i > k, \end{cases} \qquad s_j(t_k) := \begin{cases} t_k & j < k, \\ t_k + t_{k+1} & j = k, \\ t_{k+1} & j > k. \end{cases}$$

sS を単体的集合のなす圏，$\mathcal{DGA}$ を可換 DGA のなす圏とする．このとき，互いに他の随伴である関手

$$\mathrm{sS} \underset{\Delta}{\overset{\Omega}{\rightleftarrows}} \mathcal{DGA}$$

が，次のように定義される：

$$\Omega(K) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{sS}}(K, A_{PL}), \qquad \Delta(A) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{DGA}}(A, A_{PL}).$$

実際，集合の 1:1 写像

$$\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{DGA}}(A, \Omega(K)) \xrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}_{\mathrm{sS}}(K, \Delta(A))$$

が，$\eta(\phi)(\sigma)(a) := \phi(a)(\sigma)$ $(\sigma \in K,\, a \in A)$ で与えられることがわかる．

定理 3.2.1 ([B-G])**.** 次のホモトピー圏の同値 (**Sullivan-de Rham equivalence**) が成り立つ：

$$ho\left\{\begin{matrix}\text{連結べき零有理空間から}\\ \text{なる sS の充満部分圏}\end{matrix}\right\}^{\mathrm{op}} \underset{\Delta}{\overset{\Omega}{\rightleftarrows}} ho\left\{\begin{matrix}\text{有限型連結 Sullivan 代数から}\\ \text{なる } \mathcal{DGA} \text{ の充満部分圏}\end{matrix}\right\}$$

ここで $(\bigwedge V, d)$ が **Sullivan 代数**であるとは，V が増大 filtration

$$0 = V(-1) \subset V(0) \subset \cdots \subset V(n) \subset \cdots \subset V = \bigcup_n V(n)$$

を持ち，微分が $d : V(n) \to \bigwedge V(n-1)$ をみたすことをいう．またそれが**有限型**であるとは，各次元において有限次元であることをいう． □

定理 3.2.1 の左辺の圏は，幾何学的実現関手 $|\ |$ と特異単体的集合関手 $S_*(\ )$ により，連結べき零有理空間 ($H^*(X;\mathbb{Z})$ が $\mathbb{Q}$ ベクトル空間となる位相空間 X) のなす圏のホモトピー圏と同値である．単連結な空間のなすホモトピー圏を扱った定理 3.2.1 の証明は [F-H-T2, §17] を参照．

定義 3.2.2. 空間 X に対して，$A_{PL}(X) := \Omega(S_*(X))$ と書く．Sullivan 代数 $(\bigwedge V, d)$ から $A_{PL}(X)$ への擬同型

$$\varphi : (\bigwedge V, d) \longrightarrow A_{PL}(X)$$

（すなわち，コホモロジー上に同型写像を誘導する微分代数の射 φ）が存在するとき，$(\bigwedge V, d)$ を X の **Sullivan 模型**という．また，写像 $f : X \to Y$ に対して，次の図式をホモトピー可換にする微分代数の射 $\tilde{f}$ を f の **Sullivan 模型**という:

$$\begin{tikzcd} A_{PL}(Y) \arrow[r, "A_{PL}(f)"] & A_{PL}(X) \\ (\bigwedge V_Y, d_Y) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r, "\tilde{f}"] & (\bigwedge V_X, d_X) \arrow[u, "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

ただし $(\bigwedge V_X, d_X)$, $(\bigwedge V_Y, d_Y)$ はそれぞれ X, Y の Sullivan 模型である． □

3.3　Lannes 関手，写像空間の Haefliger-Brown-Szczarba 模型

写像空間の有理模型を構成するために，まず Lannes の**除法関手** (division functor) を導入する．$A, B, C \in \mathcal{DGA}$ とし，B は有限型であるとする．

$$(: B) : \mathcal{DGA} \longrightarrow \mathcal{DGA}$$

を，$B \otimes -$ の左随伴関手として定義する．すなわち，自然な 1:1 対応

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{DGA}}((A : B), C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{DGA}}(A, B \otimes C)$$

が存在するものとする．

定理 3.3.1 ([B-P-S])**.** C を Sullivan 代数，$X \in \mathrm{sS}$ とし，$B^*(X)$ を $\Omega(X) \in \mathcal{DGA}$ の模型で，連結，有限型であるものとする．このとき，sS において

$$\Delta(C : B^*(X))_{\mathcal{DGA}} \simeq F(X, \Delta(C)) \quad (\in \mathrm{sS})$$

が成り立つ．

注意 3.3.2. sS における写像空間 $F(X, Y)$ は

$$F(X, Y)_q := \mathrm{Hom}_{\mathrm{sS}}(X \times \Delta[q], Y)$$

で定義される．ただし $\Delta[q] \in \mathrm{sS}$ は次のように定義される．Δ を有限全順序集合 $[q] := \{0, \ldots, q\}$ $(q \geq 0)$ と非減少写像からなる圏とする．このとき $\Delta[q] := \mathrm{Hom}_\Delta(-, [q])$，つまり

$$\Delta[q]_p := \mathrm{Hom}_\Delta([p], [q]).$$

$\Delta[q]$ は単体的 q 単体と呼ばれ，幾何学的実現を取ると通常の q 単体 Δ^q となる．　□

定理 3.3.1 の証明のスケッチ. 任意の $Y \in \mathrm{sS}$ に対し

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{ho(\mathrm{sS})}(Y, \Delta(C : B^*(X))) &\cong \mathrm{Hom}_{ho(\mathcal{DGA})}((C : B^*(X)), \Omega(Y)) && (\Omega \text{と} \Delta \text{の随伴性}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{ho(\mathcal{DGA})}(C, B^*(X) \otimes \Omega(Y)) && ((\,:B^*(X)) \text{の定義}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{ho(\mathcal{DGA})}(C, \Omega(X \times Y)) && (B^*(X) \simeq \Omega(X)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{ho(\mathrm{sS})}(X \times Y, \Delta(C)) && (\Omega \text{と} \Delta \text{の随伴性}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{ho(\mathrm{sS})}(Y, F(X, \Delta(C)). && \square
\end{aligned}$$

定理 3.3.1 により，Lannes の除法関手は写像空間の模型を与えていることがわかる．この模型を空間 X, Y の模型を使って具体的に記述するのが次の目標である．

主張 1. 任意の $B \in \mathcal{DGA}$ に対し，$(\bigwedge V : B)_{\mathcal{DGA}} \cong (\bigwedge(V \otimes B_*), \delta)$ となるような微分 δ を定義することができる．ただし，$q \leq 0$ に対し

$$B_q := \mathrm{Hom}(B^{-q}, \mathbb{Q})$$

である（後述の系 3.3.7）.

主張 1 において，B が $A_{PL}(X)$ に，$\bigwedge V$ が $A_{PL}(Y)$ に対応する模型である．
$D : B_* \to B_* \otimes B_*$ を，B の積の双対として定まる余積とする．$\mathcal{I} \subset \bigwedge(\bigwedge V \otimes B_*)$ を

$$1 \otimes 1_* - 1, \qquad a_1 a_2 \otimes \beta - \sum_i (-1)^{|a_2||\beta_i'|}(a_1 \otimes \beta_1')(a_2 \otimes \beta_2'') \qquad (a_i \in V,\ \beta \in B_*)$$

の形の元で生成されるイデアルとする．ただし β_i', β_i'' は

$$D(\beta) = \sum_i \beta_i' \otimes \beta_i''$$

で定まる元である．

主張 2. $(\bigwedge V : B) \cong (\bigwedge(\bigwedge V \otimes B_*)/\mathcal{I}, \delta')$ となる微分 δ' を定義することができる．

主張 3. $(\bigwedge(\bigwedge V \otimes B_*)/\mathcal{I}, \delta') \cong (\bigwedge(V \otimes B_*), \delta'')$ となる微分 δ'' を定義することができる．

主張 1 は主張 2 および主張 3 から従う．

補題 3.3.3. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{DGM}}(A \otimes B_*, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{DGM}}(A, C \otimes B)$. ここで $\mathcal{DGM}$ は次数付き微分加群の圏である．

証明. B の基底を $\{b_i\}$, その双対基底を $\{\beta_i\}$ と書くと，同型写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{DGM}}(A \otimes B_*, C) \underset{\Phi}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{DGM}}(A, C \otimes B)$$

が次のように定義される：

$$\psi(w)(a) := \sum (-1)^{\alpha(|b_i|)} w(a \otimes \beta_i) \otimes b_i,$$
$$\Phi(u)(a \otimes \beta_i) := (-1)^{\alpha(|b_i|)} w_i.$$

ただし w_i は $u(a) = \sum_i w_i \otimes b_i$ で定まる元であり，また $\alpha(n) := \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. □

ここで，$\bigwedge(A \otimes B_*)$ には微分 $\delta' := d_A \otimes 1 \pm 1 \otimes d_{B_*}$ を入れて DGA とみなせること，また $\mathrm{Hom}_{\mathcal{DGM}}(A \otimes B_*, C)$ は自然に $\mathrm{Hom}_{\mathcal{DGA}}(\bigwedge(A \otimes B_*), C)$ と同一視できることに注意する．

補題 3.3.4 ([B-S]). A, B, C は連結な DGA とする．このとき，任意の $w \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{DGM}}(A \otimes B_*, C)$ に対し，次の二つは同値：

- $\psi(w)$ は微分代数の準同型：$\psi(w) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{DGA}}(A, C \otimes B)$,
- $w(1 \otimes 1_*) = 1$, また任意の $a_i \in A$, $\beta \in B_*$ に対し $w(\sigma(a_1 \otimes a_2 \otimes \beta)) = 0$.

ただし $\sigma : A \otimes A \otimes B_* \to \bigwedge(A \otimes B_*)$ は

$$\sigma(a_1 \otimes a_2 \otimes \beta) := a_1 a_2 \otimes \beta - \sum_i (-1)^{|a_2||\beta_i'|}(a_1 \otimes \beta_i')(a_2 \otimes \beta_i'')$$

で定義される．また余積を $D(\beta) = \sum_i \beta_i' \otimes \beta_i''$ と書いている．

証明のアイデア. 次数の理由から

$$\psi(w)(1) = \sum w(1 \otimes \beta_i) \otimes b_i = w(1 \otimes 1_*) \otimes 1$$

である．よって，$\psi(w)$ が単位元を単位元にうつすことは $w(1 \otimes 1_*) = 1$ と同値である．

評価写像 (evaluation map)

$$\eta : B \otimes B_* \longrightarrow \mathbb{Q}, \qquad \eta(b \otimes \beta) := (-1)^{\alpha(|b|)}\beta(b)$$

を考える．任意の $z \in C \otimes B$ について

$$z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 任意の\ k\ に対し\ (\mathrm{id}_C \otimes \eta)(z \otimes \beta_k) = 0$$

であるが，一方で $\alpha(m+n) = \alpha(m) + \alpha(n) + mn \pmod 2$ であることを使うと

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id}_C \otimes \eta)\{\psi(w)(a_1a_2) - \psi(w)(a_1) \cdot \psi(w)(a_2)\} \otimes \beta_k \\
&= (-1)^{\alpha(b_k)} \left\{ w(a_1a_2 \otimes \beta_k) - \sum_i (-1)^{|a_2||\beta'_i|} w(a_1 \otimes \beta'_i) w(a_2 \otimes \beta''_i) \right\} \\
&= (-1)^{\alpha(b_k)} w(\sigma(a_1 \otimes a_2 \otimes \beta_k))
\end{aligned}$$

がわかる．よって $\psi(w)$ が代数の積を保つことは，$w(\sigma(a_1 \otimes a_2 \otimes \beta)) = 0$ と同値である． □

定理 3.3.5 ([B-S]). $\bigwedge(A \otimes B_*)$ のイデアル $\mathcal{I}$ を

$$1 \otimes 1_* - 1, \quad \sigma(a_1 \otimes a_2 \otimes \beta) \qquad (a_i \in A,\ \beta \in B_*)$$

の形の元で生成されるものとする．このとき $\mathcal{I}$ は微分イデアルである，つまり $\delta'\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$ が成り立つ．さらに同型

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{DGA}}(\bigwedge(A \otimes B_*)/\mathcal{I}, C) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{DGA}}(A, C \otimes B)$$

が存在する．

証明. 前半は計算で示される．後半について，まず可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{DGA}}(\bigwedge(A \otimes B_*)/\mathcal{I}, C) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{DGA}}(A, C \otimes B) \arrow[dd, hook] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{DGA}}(\bigwedge(A \otimes B_*), C) & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{DGM}}(A \otimes B_*, C) \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{DGM}}(A, C \otimes B)
\end{tikzcd}$$

から単射性がわかる．一番下の横向きの写像の同型は補題 3.3.3 による．また補題 3.3.3 の Φ について，$u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{DGA}}(A, C \otimes B)$ に対しては補題 3.3.4 より $\Phi(u)$ が $\mathcal{I}$ 上で 0 になることを確かめられ，そのことから全射性が従う． □

定理 3.3.6 ([B-S]). $A = \bigwedge V$, $\dim V^q < \infty$ $(q \geq 0)$ であるとする．合成

$$\bigwedge(V \otimes B_*) \hookrightarrow \bigwedge(\bigwedge V \otimes B_*) \xrightarrow{p} \bigwedge(\bigwedge V \otimes B_*)/\mathcal{I}$$

で定義される $\rho : \bigwedge(V \otimes B_*) \to \bigwedge(\bigwedge V \otimes B_*)/\mathcal{I}$ は代数の同型である．

系 3.3.7. $(\bigwedge V : B)_{\mathcal{DGA}} \cong (\bigwedge(V \otimes B_*), \delta)$. ただし $\delta := \rho^{-1}\delta'\rho$.

証明. 任意の C に対し，定理 3.3.5, 3.3.6 の同型および除法関手の定義から，代数の同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{DGA}}(\bigwedge(V \otimes B_*), C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{DGA}}(\bigwedge V, C \otimes B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{DGA}}((\bigwedge V : B), C)$$

を得る．この同型により $\bigwedge(V \otimes B_*)$ に微分を導入すればよい． □

注意 3.3.8. (1) Sullivan 代数 C に対し，$\Delta(C)$ が空間（単体的集合）Y の有理模型となるとき，定理 3.3.1 と系 3.3.7 により

$$\Delta((V \otimes B_*), \delta) \xrightarrow{\simeq} F(X, Y_{\mathbb{Q}})$$

となる．X が CW 複体で，空間 Y の連結性が $\dim X$ より大きければ

$$(\bigwedge(V \otimes B_*), \delta) \xrightarrow{\simeq} \Omega\Delta((\bigwedge V \otimes B_*), \delta) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(F(X, Y_{\mathbb{Q}}))$$

となる．最後の擬同型は，ホモトピー同値写像の列

$$F(X, Y_{\mathbb{Q}}) \simeq F(|S_*(X)|, |S_*(Y)_{\mathbb{Q}}|) \simeq |F(S_*(X), S_*(Y)_{\mathbb{Q}})|$$

から得られる（[B-S, Theorem 2.1] 参照）.

(2) 系 3.3.7 の δ は次のように計算される：任意の $v \in V$ と，任意のサイクル $\beta_* \in B_*$ について，もし $dv = v_1 \dots v_m$, $v_i \in V$ となっていれば

$$\delta v \otimes \beta_* = \sum_{\mathbf{j}=(j_1,\dots,j_m)} \varepsilon_{\mathbf{j}} (v_1 \otimes \beta_{j_1}) \dots (v_m \otimes \beta_{j_m})$$

となる．ただし $D^{m-1}\beta_* = \sum \beta_{j_1} \otimes \cdots \otimes \beta_{j_m}$, また $\varepsilon_{\mathbf{j}}$ は Koszul の符号である：

$$\varepsilon_{\mathbf{j}} v_1 \beta_{j_1} \dots v_m \beta_{j_m} = v_1 \dots v_m \beta_{j_1} \dots \beta_{j_m}. \quad \square$$

B を単連結な空間とし，$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ をファイブレーションとする．$\mathcal{DGA}$ における次の図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
A_{PL}(B) \arrow[r, "A_{PL}(p)"] & A_{PL}(E) \arrow[r, "A_{PL}(i)"] & A_{PL}(F) \\
(\bigwedge V, d) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r, hook] & (\bigwedge V \otimes \bigwedge W, \hat{d}) \arrow[u, "\alpha"] &
\end{tikzcd}$$

ここで左下は B の Sullivan 模型であり，中央下は写像 p に対する「相対 Sullivan 模型」である [F-H-T2, §14, §15]：

$$W = \bigcup_n W(n), \qquad W(0) \subset W(1) \subset \dots$$

$$\hat{d}(W(n)) \subset \bigwedge V \otimes \bigwedge W(n-1).$$

このとき，誘導される写像

$$\bar{\alpha} : (\bigwedge W, \bar{d}) := (\bigwedge V \otimes \bigwedge W, \hat{d})/(\bigwedge^{\geq 1} V, d) \longrightarrow A_{PL}(F)$$

は擬同型である．従って自然な射影 $(\bigwedge V \otimes \bigwedge W, \hat{d}) \to (\bigwedge W, \bar{d})$ は写像 i の Sullivan 模型である． □

3.4 Lie 模型 (Quillen 模型)

[Q], [F-H-T2, §21, §22] も参照のこと．

(L, d_L) を次数付き微分 Lie 代数 (differential graded Lie algebra, DGLA) とする．つまり，Lie ブラケット $[\ ,\ ] : L_i \otimes L_j \to L_{i+j}$ は次数付きの意味で反交換則，Jacobi 関係式

$$[y, x] + (-1)^{|x||y|}[x, y] = 0,$$
$$(-1)^{|z||x|}[x, [y, z]] + (-1)^{|x||y|}[y, [z, x]] + (-1)^{|y||z|}[z, [x, y]] = 0$$

をみたし，微分 $d_L : L_i \to L_{i-1}$ は $[\ ,\ ]$ に関して Leibniz 則をみたすとする．

次の二つの関手を定義する：

$$\{\mathbb{Q} \text{ 上の連結 DGLA}\} \underset{\mathscr{L}}{\overset{\mathscr{C}}{\rightleftarrows}} \{\mathbb{Q} \text{ 上の単連結余添加余代数}\}$$

$\mathscr{C}$ の定義．L を DGLA とし，$\bigwedge(sL)$ を sL で原始的に生成された余代数とする．ただし s は代数的な（ホモロジー）懸垂を表す：$(sL)_n = L_{n-1}$．二つの写像 d_v, $d_h : \bigwedge sL \to \bigwedge sL$ を次で定義する：

$$d_v(sx_1 \wedge \cdots \wedge sx_k) := -\sum_{1\le i\le k} (-1)^{n_i} sx_1 \wedge \cdots \wedge sd_L(x_i) \wedge \cdots \wedge sx_k,$$
$$d_h(sx_1 \wedge \cdots \wedge sx_k) := \sum_{1\le i<j\le k} (-1)^{n_{ij}} s[x_i, x_j] \wedge sx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{sx_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{sx_j} \wedge \cdots \wedge sx_k$$

ただし，$n_i := |sx_1| + \cdots + |sx_{i-1}|$, また n_{ij} は Koszul の符号である：

$$sx_1 \wedge \cdots \wedge sx_k = (-1)^{n_{ij}} sx_i \wedge sx_j \wedge sx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{sx_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{sx_j} \wedge \cdots \wedge sx_k$$

これを用いて

$$\mathscr{C}_*(L, d_L) := (\bigwedge(sL), d_v + d_h)$$

と定める．これは DGCA（次数付き微分余代数）となることが確かめられる．

$\mathscr{L}$ の定義．C を余添加 DGCA, $\overline{C} := C_{\ge 2} \oplus \mathbb{Q}$ とし，$s^{-1}\overline{C}$ で生成される自由 Lie 代数 $\mathbb{L}_{s^{-1}\overline{C}}$ を考える：$\mathbb{L}_{s^{-1}\overline{C}}$ はテンソル Lie 代数 $Ts^{-1}\overline{C}$ の部分 Lie 代数．$\overline{C}$ の微分 d は自然に $Ts^{-1}\overline{C}$ に拡張する．これを用いて

$$\mathscr{L}(C, d) := (\mathbb{L}_{s^{-1}\overline{C}}, d|_{\mathbb{L}_{s^{-1}\overline{C}}})$$

とおく．

注意 3.4.1 ([F-H-T2, Theorem 22.9])**.** $\mathscr{L}\mathscr{C}(L, d_L) \simeq (L, d_L)$, $\mathscr{C}\mathscr{L}(C, d) \simeq (C, d)$ が成り立つ． □

定義 3.4.2. $\mathscr{C}^*(L, d_L)$ を $\mathscr{C}_*(L, d_L)$ の双対 DGA とする．

X を単連結な空間とする．DGLA $(\mathbb{L}_V, d)$ が X の **Lie 模型**であるとは，擬同型

$$\mathscr{C}^*(\mathbb{L}_V, d) \simeq A_{PL}(X)$$

が存在することをいう． □

定理 3.4.3 ([Q]). $\mathbb{L}$ が X の Lie 模型のとき，$H_*(\mathbb{L}, d) \cong \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$. □

例 3.4.4 (球面の Lie 模型). $V = \mathbb{Q}\{\alpha\}$ を一つの基底を持つベクトル空間とする．交換則，Jacobi 関係式から，ベクトル空間として

$$\mathbb{L}_V = \begin{cases} \mathbb{Q}\{\alpha\} & |\alpha| : \text{偶数}, \\ \mathbb{Q}\{\alpha\} \oplus \mathbb{Q}\{[\alpha, \alpha]\} & |\alpha| : \text{奇数}. \end{cases}$$

いずれの場合にも，微分は $d_L := 0$ で定める．このとき

$$\mathscr{C}^*(\mathbb{L}_V) = \begin{cases} \bigwedge(s\alpha) & |\alpha| : \text{偶数}, \\ \bigwedge(s\alpha, s[\alpha, \alpha]) & |\alpha| : \text{奇数}. \end{cases}$$

ただし微分は，$|\alpha|$ が偶数のときは $d = 0$, $|\alpha|$ が奇数のときは $d = d_h^* : s[\alpha, \alpha] \mapsto (s\alpha)^2$ である．これらのことから，$\mathbb{L}_V$ が球面 $S^{|\alpha|+1}$ の Lie 模型を与えていることがわかる．この Lie 模型に対して定理 3.4.3 が成り立つこともわかる． □

空間 X に $(k+1)$ 胞体を写像 $\varphi : S^k \to X$ で貼り合わせることを考える：

$$\begin{tikzcd} S^k \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "i"] \\ e^{k+1} \arrow[r] & X \cup_\varphi e^{k+1} \end{tikzcd}$$

対応する Lie 模型の図式が存在する：

$$\begin{tikzcd} \mathbb{L}_{\mathbb{Q}\{\alpha\}} \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d] & \mathbb{L}_W \arrow[d, "\eta"] \\ \mathbb{L}_{\mathbb{Q}\{\alpha,\beta\}} \arrow[r] & \mathbb{L}_W \cup_{\mathbb{L}_{\mathbb{Q}\{\alpha\}}} \mathbb{L}_{\mathbb{Q}\{\alpha,\beta\}} \end{tikzcd} \tag{3.4.1}$$

ただし

- W は，$\mathbb{L}_W$ が X の Lie 模型を与えるようなベクトル空間,
- $\tilde{\varphi} : \alpha \mapsto z_\varphi$ は Lie 代数の準同型，ただし z_φ は，$\varphi : S^k \to X$ が代表するホモトピー類 $[\varphi] \in \pi_k(X) \otimes \mathbb{Q} \cong H_{k-1}(\mathbb{L}_W)$ を表すサイクル,
- 左下の $\mathbb{L}_{\mathbb{Q}\{\alpha,\beta\}}$ は，e^{k+1} の Lie 模型として $d\beta = \alpha$ となるように取ったもの,
- 右下の $\mathbb{L}_W \cup_{\mathbb{L}_{\mathbb{Q}\{\alpha\}}} \mathbb{L}_{\mathbb{Q}\{\alpha,\beta\}}$ は，Lie 代数としては $\mathbb{L}_{W \oplus \mathbb{Q}\{\beta\}}$ で，$d\beta = \tilde{\varphi}(\alpha) = z_\varphi$ と定めたもの

である．

3.5 写像空間に対する Sullivan-Quillen 混合型模型

二つの評価ファイブレーション

$$
\begin{aligned}
&F_*(X,Y) \longrightarrow F(X,Y) \xrightarrow{\mathrm{ev}} Y,\\
&F_*(X\cup_\varphi e^{k+1},Y) \longrightarrow F(X\cup_\varphi e^{k+1},Y) \xrightarrow{\mathrm{ev}} Y, \quad \mathrm{ev}(\gamma) := \gamma(*)
\end{aligned}
$$

の相対 Sullivan 模型を構成し，写像

$$
i^\sharp : F_*(X\cup_\varphi e^{k+1},Y) \longrightarrow F_*(X,Y)
$$

の Sullivan 模型を導く.

補題 3.5.1 ([K-Y2]). X, Y は定理 3.1.1 の仮定をみたすとする．$(\bigwedge V,d) \simeq A_{PL}(Y)$ を Y の極小 Sullivan 模型（すなわち，全ての v に対し dv が分解可能元となる）とし，

$$
\begin{aligned}
&m_1 : (\bigwedge V,d) \hookrightarrow \bigwedge(V\otimes \mathscr{C}_*(\mathbb{L}_W)) = (\bigwedge V : \mathscr{C}^*(\mathbb{L}_W))_{\mathcal{DGA}}\\
&m_2 : (\bigwedge V,d) \hookrightarrow \bigwedge(V\otimes \mathscr{C}_*(\mathbb{L}_{W\oplus\mathbb{Q}\{\beta\}}))
\end{aligned}
$$

を自然な包含写像とする．このとき，次の可換図式が存在する：

$$
\begin{tikzcd}
 & \bigwedge V \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dl, "m_1"'] \arrow[dd] & & A_{PL}(Y) \arrow[dl, "A_{PL}(\mathrm{ev}_*)"'] \arrow[dd, "A_{PL}(\mathrm{ev}_*)"] \\
\bigwedge(V\otimes \mathscr{C}_*(\mathbb{L}_W)) \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "\tilde\eta"'] & & A_{PL}(F(X,Y)) \arrow[dr, "A_{PL}(i^\sharp)"'] & \\
 & \bigwedge(V\otimes \mathscr{C}_*(\mathbb{L}_{W\oplus\mathbb{Q}\{\beta\}})) \arrow[rr, "\simeq"'] & & A_{PL}(F(X\cup_\varphi e^{k+1},Y))
\end{tikzcd}
$$

ただし，$\tilde\eta$ は (3.4.1) の η から導かれる写像，$i^\sharp : F(X\cup_\varphi e^{k+1},Y) \to F(X,Y)$ は制限写像である. □

§3.3 の最後に見たように，$i^\sharp$ に対する Sullivan 模型

$$
\bar\eta : \bigwedge(V\otimes \mathscr{C}_*(\mathbb{L}_W)^+) \longrightarrow \bigwedge(V\otimes \mathscr{C}_*(\mathbb{L}_{W\oplus\mathbb{Q}\{\beta\}})^+)
$$

を得る．ここで $\mathscr{C}_*(\mathbb{L}_W)^+ := \mathscr{C}_*(\mathbb{L}_W)^{\geq 1}$,

$$
\bigwedge(V\otimes \mathscr{C}_*(\mathbb{L}_W)^+) \cong \bigwedge(V\otimes \mathscr{C}_*(\mathbb{L}_W)) \Big/ \Big(\bigwedge^{\geq 1} V\Big)
$$

であることに注意する.

3.6 定理 3.1.1 の証明の概略

定理 3.1.1 の主張に現れた用語の定義から始める.

定義 3.6.1. • L を次数つき Lie 代数とするとき，$[L,L]^{(l)} := [L,[L,\ldots,[L,L]\ldots]]$ (l 重のブラケットで生成される部分空間) とおく．また，$[L,L]^{(0)} := L$ とする．

- （単連結）空間 X に対し，$\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q}\cong\pi_{*-1}(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}$ を Whitehead 積で Lie 代数とみたものを L_X と書く．$\varphi\in L_X$ の**ブラケット長** (**bracket length**) を
$$\mathrm{bl}(\varphi) := \sup\{n\,|\,\varphi\in[L_X,L_X]^{(n)}\}$$
で定義する．

- （単連結）空間 Y の **Whitehead 長** (**Whitehead length**) を
$$\mathrm{WL}(Y) := \sup\{n\,|\,[L_Y,L_Y]^{(n)}\neq 0\}$$
で定義する． □

定義 3.6.2. $(\bigwedge V,d)$ を極小 Sullivan 代数とし，$d=d_1+d_2+\ldots$ と書く．ただし d_i は語の長さを i だけ増やす部分である（つまり，$dv=v_1v_2+v_1'v_2'v_3'+\ldots$, $v,v_i,v_i',\cdots\in V$ のときは，$d_1(v)=v_1v_2$, $d_2(v)=v_1'v_2'v_3'$, ..., である）．V の部分空間の列 V_i $(i\geq -1)$ を，以下のように帰納的に定義する：
$$V_{-1} := 0,\quad V_0 := \{v\in V\,|\,d_1v=0\},$$
$$V_i := \{v\in V\,|\,d_1v\in\bigwedge V_{i-1}\}$$
$(V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset\ldots$ であることに注意する)．このとき，$(\bigwedge V,d)$ の d_1 **深さ** (d_1**-depth**) を
$$d_1\text{-depth} := \sup\{k\,|\,V_{k-1}\subsetneq V_k\}$$
で定義する．空間 Y の d_1 深さ d_1-depth(Y) は，Y の極小 Sullivan 模型の d_1 深さで定義する． □

例 3.6.3. $n>1$ とする．$H^*(\mathbb{C}P^n)=\mathbb{Q}[x_2]/(x_2^{n+1})$ だから，Sullivan 模型として
$$(\bigwedge(x_2,\rho_{2n+1}),d),\quad d(x_2)=0,\ d(\rho_{2n+1})=x^{n+1}$$
を取ることができる．明らかに $d_1(x_2)=0$, また $n>1$ より $d_1(\rho)=0$ であるから
$$V_{-1}=0,\quad V_0=\mathbb{Q}\{x\}=V_1=\ldots$$
となる．よって d_1-depth$(\mathbb{C}P^n)=0$ である． □

Whitehead 長は Lie 模型に，d_1 深さは Sullivan 模型に由来する不変量であるが，実は次が成り立つ．

補題 3.6.4 ([K-Y2, Appendix])**.** $\mathrm{WL}(Y)=d_1$-depth(Y). □

定理 3.1.1 の証明の概略. W を，$\mathbb{L}_W$ が X の Lie 模型となるようなベクトル空間とし，$n:=\mathrm{bl}(\varphi)$, $m:=\mathrm{WL}(Y)=d_1$-depth(Y) とする $(n>m)$．また $U:=V\otimes\mathscr{C}_*(\mathbb{L}_{W\oplus\mathbb{Q}\{\beta\}})^+$ とおく．

$z_\varphi\in\mathbb{L}_W$ は，(3.4.1) で与えられる $\tilde{\varphi}$ に対し，$\tilde{\varphi}(\alpha)=z_\varphi$ をみたす元であった．このことと $\mathrm{bl}(\varphi)=n$ より，$\mathbb{L}_W$ のあるサイクル z_φ が存在して
$$z_\varphi=\sum x_{i_n}[x_{i_{n-1}},[\ldots,[x_{i_1},x_{i_0}]\ldots]]$$

と書ける.

$$c_\alpha := s\beta - \sum sx_{i_n} \wedge s[x_{i_{n-1}}, [\dots, [x_{i_1}, x_{i_0}] \dots]],$$
$$\gamma_1 := v \otimes c_\alpha \in \bigwedge U$$

とおく．また $\bigwedge U$ の微分 δ（系 3.3.7, 注意 3.3.8）に対し

$$\delta_1 := \delta \text{ の線型部分}, \quad \delta_2 := \delta - \delta_1$$

とおくと，方程式

$$\delta(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{m+1}) = 0$$

の解 $\gamma_2, \dots, \gamma_{m+1}$ を見つけることができる：

$$\begin{tikzcd}
0 & & & & \\
\gamma_1 \arrow[u, mapsto, "\delta_1"] \arrow[r, mapsto, "\delta_2"] & 0 & & & \\
& \gamma_2 \arrow[u, mapsto, "\delta_1"] \arrow[r, mapsto, "\delta_2"] & \cdots \arrow[r] & 0 & \\
& & & \gamma_{m+1} \arrow[u, mapsto, "\delta_1"] \arrow[r, mapsto, "\delta_2"] & 0
\end{tikzcd}$$

これは，$\delta_2\gamma_1 + \delta_1\gamma_2 = 0$, ..., の意味である．この解は，仮定 $n > m$ のもと，具体的に構成される．詳細は [K-Y2, page 318] を参照.

上で得た解を $\gamma(v) := \gamma_1 + \cdots + \gamma_{m+1}$ とおく．写像

$$\psi : \bigwedge(V \otimes \mathscr{C}_*(\mathbb{L}_W)^+) \otimes (\bigwedge(V \otimes s\beta), 0) \xrightarrow{\simeq} \bigwedge U$$

を，$\bigwedge(V \otimes \mathscr{C}_*(\mathbb{L}_W))$ 上では自然な包含写像，$(\bigwedge(V \otimes s\beta), 0)$ 上では $v \mapsto \gamma(v)$ で定めると，これは擬同型であることがわかる．左辺はそれぞれ $F_*(X, Y)$ と $\Omega^{k+1}Y$ の模型，右辺は $F_*(X \cup_\varphi e^{k+1})$ の模型になっている．この擬同型 ψ の作り方より，その幾何学的実現 $\Delta(\psi)$ は要求されたホモトピー同値写像となる. $\square$

最後に定理 3.1.1 の応用例を挙げる.

例 3.6.5. $Y = \mathcal{L}P^2$ (Cayley 平面) とすると，$H^*(Y) \cong \mathbb{Q}[x_8]/(x_8^2)$ である．d_1 深さ，Whitehead 長ともに 0 である．$X = \mathbb{C}P^2 = S^2 \cup_\gamma e^4$ と書くとき，γ は Hopf 写像だから $[\gamma] = q[\iota, \iota]$ ($\iota \in \pi_3(S^2) \otimes \mathbb{Q}$, $q \neq 0$) となって，$\mathrm{bl}(\gamma) = 1$ である．よって定理 3.1.1 より

$$F_*(\mathbb{C}P^2, \mathcal{L}P^2)_\mathbb{Q} \simeq (\Omega^2\mathcal{L}P^2 \times \Omega^4\mathcal{L}P^2)_\mathbb{Q}$$

が成り立つ. $\square$

参考文献

[B-G] A. K. Bousfield, V. K. A. M. Gugenheim, *On* PL *de Rham theory and rational homotopy type*, Mem. Amer. Math. Soc. **8** (1976), no. 179

[B-K] A. K. Bousfield, D. M. Kan, *Homotopy limits, completions and localizations*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972

[B-P-S] A. K. Bousfield, C. Peterson, L. Smith, *The rational homology of function spaces*, Arch. Math. (Basel) **52** (1989), no. 3, 275–283

[B-S] E. H. Brown Jr., R. H. Szczarba, *On the rational homotopy type of function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 4931-4951

[C-K] D. Chataur, K. Kuribayashi, *An operadic model for a mapping space and its associated spectral sequence*, J. Pure Appl. Algebra **210** (2007), no. 2, 321–342

[E-M] S. Eilenberg, J. C. Moore, *Homology and fibrations I, Coalgebras, cotensor and its derived functors*, Comment. Math. Helvet., **40** (1966), 199–236

[F-H-T1] Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, *Gorenstein spaces*, Adv. in Math. **71** (1988), 92–112

[F-H-T2] ———, *Rational homotopy theory*, Graduate Texts in Mathematics, **205**, Springer-Verlag, New York, 2001

[G-M] V. K. A. M. Gugenheim, J. P. May, *On the Theory and Applications of Differential Torsion Products*, Memoirs of Amer. Math. Soc. **142** (1974)

[H] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press

[H-L] S. Halperin, J.-M. Lemaire, *Notions of category in differential algebra*, Algebraic topology–rational homotopy (Louvain-la-Neuve, 1986), 138–154, Lecture Notes in Math., **1318**, Springer, Berlin, 1988.

[Ki-Ko] D. Kishimoto, A. Kono, *On the cohomology of free and twisted loop spaces*, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), 646–653.

[Ko-Ku] A. Kono, K. Kuribayashi, *Module derivations and cohomological splitting of adjoint bundles*, Fund. Math. **180** (2003), no. 3, 199–221

[K1] K. Kuribayashi, *The extension problem and the mod 2 cohomology of the space of loops on* Spin(N), Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **121** (1992), no. 1-2, 91–99

[K2] ———, *The cohomology ring of the spaces of loops on Lie groups and homogeneous spaces*, Pacific J. Math. **163** (1994), no. 2, 361–391

[K3] 栗林勝彦, 加群微分子による EILENBERG-MOORE スペクトル系列の解析（随伴バンドルのコホモロジカル分解について）, http://marine.shinshu-u.ac.jp/kuri/survey/topsympo01.pdf

[K4] K. Kuribayashi, *Eilenberg-Moore spectral sequence calculation of function space cohomology*, Manuscripta Math. **114** (2004), no. 3, 305–325

[K-M-N] K. Kuribayashi, M. Mimura, T. Nishimoto, *Twisted tensor products related to the cohomology of the classifying spaces of loop groups*, Memoirs of AMS, **180** (2006), no. 849

[K-Y1] K. Kuribayashi, T. Yamaguchi, *The cohomology algebra of certain free loop spaces*, Fund. Math. **154** (1997), 57–73.

[K-Y2] K. Kuribayashi, T. Yamaguchi, *A rational splitting of a based mapping space*, Alg. Geom. Topol. **6** (2006), 309–327

[Man] M. A. Mandell, *E_∞ algebras and p-adic homotopy theory*, Topology **40** (2001), 43–94

[Mat] M. Mather, *Pull-backs in homotopy theory*, Canad. J. Math. **28** (1976), 225–263

[Mc] J. McCleary, *Users Guide to Spectral Sequence*, second ed. Cambridge Studies in Advanced Math. vol. 58, 2001

[Mi] 三村護，ホップ空間，紀伊國屋数学叢書 26, 紀伊国屋書店，1986

[Q] D. Quillen, *Rational homotopy theory*, Ann. of Math. (2) **90** (1969), 205–295

[R] D. Rector, *Steenrod operations in the Eilenberg-Moore spectral sequence*, Comment. Math. Helv. **45** (1970), 540–552

[S1] L. Smith, *On the Künneth theorem. I. The Eilenberg-Moore spectral sequence*, Math. Z. **116** (1970), 94–140

[S2] ———, *On the characteristic zero cohomology of the free loop space*, Amer. J. Math. **103** (1981), no. 5, 887–910