# まえがき

このノートは小平邦彦教授が 1967 年 9 月より 1968 年 2 月まで，東京大学理学部数学科で毎週 1 回 2 時間ずつ講義されたものを，山島成穂氏がノートを取って整理したものである．山島氏に感謝します．

1968 年 5 月

河田敬義

# 目　次



（以上 “幾何学特論 II”（昭和 42 年 9 月–昭和 43 年 2 月））

# 代数曲面論

§0. はじめに（目標と知られている結果）

以下最後まで，$S$ を $\mathbb{C}$ 上定義された非特異代数曲面即ちある複素射影空間 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ に埋め込まれた 2 次元複素多様体とする．一般に，特異点のない 2 次元の完備な抽象多様体は射影的である．

記号 (0.1)　$K : S$ 上標準直線バンドル

$mK = K \otimes \cdots \otimes K = K^{\otimes m}$（$m$ 個のテンソル積）

$\mathcal{L}(mK)$：$mK$ の正則切断より成る線型空間

$P_m = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(mK)$：$S$ の $m$-種数

$\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$：$\mathbb{C}$ 上 $\mathcal{L}(mK)$ の基底

$$\begin{array}{cccl} \Phi_{mK} : S & \to & \mathbb{P}^n & \quad mK \text{ より定義される有理写像} \\ \Uplus & & \Uplus & \\ z & \rightsquigarrow & (\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z)) & \end{array}$$

$c_1$：$S$ の 1 次元チャーン類

$c_1^2$ は整数である（何者，$H^4(S, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ による）．

仮定 (0.2)　$S$ は第 1 種例外曲線を含まぬ．この時 $S$ を相対的極小であると言う．

仮定 (0.3)　$P_2 > 0$ 且 $c_1^2 > 0$

定義 (0.4)　仮定 (0.2) (0.3) が満たされる時，$S$ を “極小非特異一般型代数曲面”と呼ぶ．

注意 (0.5)　（i）ある $P_m > 0$ である相対的極小モデル $S$ は極小モデルである．（ii）“一般型（of general type）”はŠafarevič [8] の言葉では “of fundamental type”.

偖，$S$ に関して (0, 2) (0, 3) を仮定する．

問題 (0.6)　$\Phi_{mK}$ を調べる事.

(0.7)　今迄に分っている結果

イ）D. Mumford [5]：ある整数 $m_0(S)$ が存在して $m \geqq m_0(S)$ に対し $\Phi_{mK}$ は正則双有理写像.

ロ）I. R. Šafarevič [8]：$\Phi_{qK}$ は双有理写像（しかし正則性については言及しない）.

目標の定理 (0.8)　$m \geqq 6$ ならば，$\Phi_{mK}$ は正則双有理写像である．之は (8.17) で与えられる．

注意 (0.9)　$m \geqq 5$ まで下げられるか？例えば，$\Phi_{4K}$ は双有理でなく，$\Phi_{5K}$ が正則双有理となる例がある．

実際 (i) $W \subset \mathbb{P}^3$ を $\sum_{i=0}^{3} z_i^5 = 0$ で定義されるとし，$\varepsilon = \exp(\frac{2\pi i}{5})$ に対し $g : (z_0, z_1, z_2, z_3) \to (z_0, \varepsilon z_1, \frac{1}{\varepsilon} z_2, z_3)$，$G = \{g^n \mid n = 0, 1, \ldots, 4\}$ と置く．この時 $W/G$ は，$(1, 0, 0, \varepsilon^\nu)_{0 \leqq \nu \leqq 4}$ に対応する 5 つの特異点をもつが，その非特異モデルを $S$ とすると，$\Phi_{4K}$：双有理でないが，$\Phi_{5K}$：正則双有理となる．次に（ii）$W$ が $\sum_{i=1}^{3} z_i^6 = 0$ で定義されるとすると，$\Phi_{4K}$：双有理となる．

注意 (0.10)　$S$ が (0.2) を満たし，(0.3) を満たさぬ時（即ち $P_2 = 0$ 又は $c_1^2 \leqq 0$），$S$ は次の 5 つの内の何れかである．

イ）射影平面 $\mathbb{P}^2$　　ロ）線織曲面　　ハ）K3 曲面

ニ）アーベル多様体（トーラス）　　ホ）楕円曲面

# I 章　代数曲面の基本的事項

## §1. 完全列

記号 (1.1)

$S$：非特異代数曲面

$C \subset S$：$S$ 上の代数曲線（既約とする）

$\mu : \tilde{C} \to C$　　$C$ の特異点除去

即ち $\begin{cases} \tilde{C} : C \text{ の非特異モデル（同型を除き一意的）} \\ \mu : \text{正則双有理写像} \end{cases}$

$\mathcal{O} = \mathcal{O}_S$：$S$ 上正則函数の芽の層

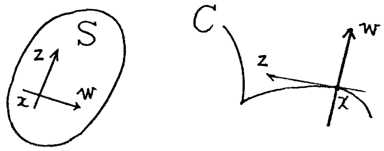
$\mathcal{O}(-C)$：$S$ 上正則函数で，$C$ 上 0 となるものの芽の層（これは $\mathcal{O}$ の部分層）

$\mathcal{O}_C = \mathcal{O}/\mathcal{O}(-C)$ と置く．

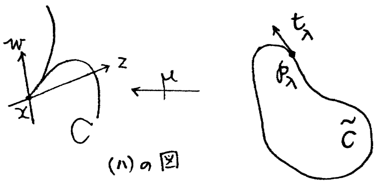
(1.2)　$\mathcal{O}_C$ の構造を調べる．

$x \in S$ に対し，$(w, z)$ を $x$ 中心の $S$ の局所座標とする．この時 $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{S,x} = \mathbb{C}\{w, z\}$（但し $\mathbb{C}\{w, z\} : (w, z)$ での収斂巾級数環）

以下 $x$ の $C$ に対する状態により 3 つの場合（イ）（ロ）（ハ）を考える．




(ロ) の 図




(ハ)の図

（イ）$x \notin C$ の場合，明らかに $(\mathcal{O}_C)_x = \{0\}$

（ロ）$x$ が $C$ の単純点の場合．

前頁の図の如く $x$ の近傍で，$C : w = 0$ で定義される様に $(w, z)$ をとると，$\mathcal{O}(-C)_x = w\mathbb{C}\{w, z\}$．従って，

$$(\mathcal{O}_C)_x = \mathcal{O}_x/\mathcal{O}(-C)_x = \mathbb{C}\{w, z\}/w\mathbb{C}\{w, z\} \simeq \mathbb{C}\{z\}$$

（ハ）$x$ が $C$ の特異点の場合．

$\mu^{-1}(x)$ は，$\tilde{C}$ の有限個の点 $\{\wp_1, \ldots \wp_\lambda \ldots \wp_\gamma\}$ より成る．中心 $\wp_\lambda$ の $\tilde{C}$ 上の局所座標 $t_\lambda$ を，$\wp_\lambda$ の近傍で，

$$\mu : t_\lambda \to (w, z) = (P_\lambda(t_\lambda), t_\lambda^{m_\lambda})$$

と書ける様にとる．（但し，$P_\lambda(t_\lambda) \in t_\lambda^{m_\lambda}\mathbb{C}\{t_\lambda\}$）．
$C_\lambda = \{\mu(t_\lambda) \mid |t_\lambda| < \alpha\}$ を $\wp_\lambda$ に対応する既約分枝とする．上述の $\mu$ を $\mu_\lambda$ と書く（即ち $\mu_\lambda$ は $\mu$ の $\wp_\lambda$ の近傍への制限である）．
次の様に $R_\lambda$，$R$ を定義する．

$$R_\lambda(w, z) = \prod_{k=0}^{m_\lambda - 1}(w - P_\lambda(\varepsilon_\lambda^k z^{\frac{1}{m_\lambda}})) = w^{m_\lambda} + A_{\lambda 1}(z)w^{m_\lambda - 1} + \cdots + A_{\lambda m_\lambda}(z)$$

$$R(w, z) = \prod_{\lambda=1}^{r} R_\lambda(w, z) = w^m + A_1(z)w^{m-1} + \cdots + A_m(z)$$

（但し $\varepsilon_\lambda = \exp(\frac{2\pi i}{m_\lambda})$ $A_k(z) \in z^k\mathbb{C}\{z\}$ $m = \sum_{\lambda=1}^{r} m_\lambda$）
この時 $x$ の近傍で $C : R(w, z) = 0$ である．
準同型 $\mu_\lambda^* : \mathcal{O}_x \to \mathbb{C}\{t_\lambda\}$（$= \vartheta_\lambda$ と置く）が

$$\mu_\lambda^* : \Phi(w, z) \to (\mu_\lambda^*\Phi)(t_\lambda) = \Phi(P_\lambda(t_\lambda), t_\lambda^{m_\lambda})$$

により定義される．$\vartheta = \bigoplus_{\lambda=1}^{r} \vartheta_\lambda$ と置く．この時，
準同型 $\mu^* : \mathcal{O}_x \to \vartheta$ が，

$$\mu^* : \Phi \to \mu_1^*\Phi + \cdots + \mu_\lambda^*\Phi + \cdots + \mu_r^*\Phi$$

により定義される．（但し，以上に於て $\Phi = \Phi(w, z) \in \mathcal{O} = \mathbb{C}\{w, z\}$）
明らかに $\mathcal{O}(-C)_x = \{\Phi \in \mathcal{O}_x \mid \mu^*\Phi = 0\}$ 従って $(\mathcal{O}_C)_x = \mathcal{O}_x/\mathcal{O}(-C)_x = \mu^*\mathcal{O}_x \subset \vartheta$ である．あとは，$\mu^*\mathcal{O}_x$ について調べてみれば良い．これは (1.4) で与えられる．

例 (1.2.1)　特異点 $x \in C$ での既約分枝が 1 つの時の例．


$$\begin{cases} C = C_1 \text{（} x \text{ の近傍で）} \\ \mu = \mu_1 : t \to (w, z) = (t^q, t^m) \end{cases}$$

（但し，$q > m > 0$ $(q, m) = 1$）$\Phi = \sum a_{hk} w^h z^k \in \mathcal{O}_x$ に対し $(\mu^*\Phi)(t) = \sum_{h,k \geqq 0} a_{hk} t^{hq+mk}$ であるので，

$$\mu^*\mathcal{O}_x = \{\mu^*\Phi \mid \Phi \in \mathcal{O}_x\} = \left\{\varphi(t) \mid \varphi(t) = \sum_{\substack{n = hq + km \\ h,k \geqq 0}} b_n t^n\right\}$$

例えば $m=5$，$q=7$ の時，

$$\begin{aligned}\{hq+km\}_{h,k\geqq 0} &= \{7h+5k\}_{h,k\geqq 0}\\ &= \{0,5,7,10,12,14,15,17,19,20,21,22,24,25,26,27,\dots\}\end{aligned}$$

この数列で，0 から 22 までの個数は $12(=\frac{1}{2}(m-1)(q-1))$ そして $24(=(m-1)(q-1))$ 以後は全部の数字が現れる．例えは (1.4) (1.4.1).

定義 (1.3)　(1.2)（ハ）の状態に関して，

(1.3.1)
$$\sigma_\lambda dt_\lambda = \frac{d(t^{m_\lambda})}{R_w(P_\lambda(t_\lambda), t_\lambda^{m_\lambda})}\left(\text{但し}, R_w(w,z)=\frac{\partial R(w,z)}{\partial w}\right)$$

この時 $\sigma_\lambda = t_\lambda^{-c_\lambda}(a_{\lambda_0}+\lambda_{\lambda_1}t_\lambda+\cdots)$ $(a_{\lambda_0}\neq 0)$ と書ける．$x$ は特異点であるので，$c_\lambda$ は正整数である．

(1.3.2)　$\tilde{\vartheta}=\bigoplus_{\lambda=1}^{r} t_\lambda^{c_\lambda}\vartheta_\lambda$ $(\subset \vartheta = \bigoplus_{\lambda=1}^{r}\vartheta_\lambda)$ と置く．

注意 (1.3.3)　(1.2)（ロ）の状態に関して，(1.3.1) と同じ事を計算してみると，$m_\lambda=1$ $R(w,z)=w$ 故 $\sigma_\lambda=1$ $c_\lambda=0$ となる（実際 $r=1$ 故 $\lambda$ は 1 つしかない）.

定理 (1.4)　（Gorenstein [3]，Rosenlicht [7]）

（イ）$\tilde{\vartheta}$ は $\mu^*O_x$ の部分環 即ち $\tilde{\vartheta}\subset\mu^*O_x\subset\vartheta$

（ロ）$\dim[\vartheta/\mu^*O_x]=\dim[\mu^*O_x/\tilde{\vartheta}]=\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{r}c_\lambda$

例 (1.4.1)　(1.2.1) の例に於いて，

$$R(w,z)=w^m-z^q \qquad P(t)=t^q$$

従って $R_w=mw^{m-1}$，$\sigma dt=\frac{d(t^m)}{mt^{q(m-1)}}=\frac{1}{t^{(m-1)(q-1)}}$ 特に $m=5$ $q=7$ の例で

$$\begin{cases}\vartheta\leftrightarrow\mathbb{Z}^{\geqq 0}=\{0,1,2,3,\dots\}\\ \mu^*O_x\leftrightarrow\{7h+5k\}_{h,k\geqq 0} \qquad ((1.2.1)\text{ みよ})\\ \tilde{\vartheta}\leftrightarrow\{24,25,\dots\}\\ c=c_1=(m-1)(q-1)=4\times 6=24\end{cases}$$

（実際 $\vartheta=\mathbb{C}\{t\}$ 　　$\tilde{\vartheta}=t^{24}\mathbb{C}\{t\}$）

この場合定理 (1.4) は確かに成立している．

問題 (1.4.2)　定理 (1.4) を多次元の場合に拡張すること．

(1.5)　定理 (1.4) を証明する為に (1.6) 迄，暫く準備を行う．証明は (1.7).

以下常に (1.2)（ハ）の状態を扱う．

次の様に $\mathfrak{f}_\lambda$，$\mathfrak{f}$，$\mathcal{R}$ を定義する．

$$\mathfrak{f}_\lambda = \vartheta_\lambda \text{の商体} = \left\{ \varphi(t_\lambda) \,\middle|\, \varphi(t_\lambda) = \sum_{n=m}^{+\infty} a_n t_\lambda^n \right\} = \mathbb{C}(\{t_\lambda\})$$

（但し以下 $\mathbb{C}(\{2\}) = \mathbb{C}\{2\}$ の商体）

$$\mathfrak{f} = \bigoplus_{\lambda=1}^{r} \mathfrak{f}_\lambda$$

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{\Phi}{\Psi} \,\middle|\, \Phi, \Psi \in O_x \text{各 } \lambda \text{ に対し} \mu_\lambda^* \Psi \neq 0 \right\}$$

準同型 $\mu^* : O \to \vartheta$ は，準同型 $\tilde{\mu}^* : \mathcal{R} \to \mathfrak{f}$ に拡張される．即ち，$\tilde{\mu}^* \mid O_x = \mu^*$．

実際 $\tilde{\mu}^* : \frac{\Phi}{\Psi} \to \sum_{\lambda=1}^r \frac{\mu_\lambda^*\Phi}{\mu_\lambda^*\Psi}$ とする．

補題 (1.5.1)　$\tilde{\mu}^* : \mathcal{R} \to \mathfrak{f}$ は全射である．

実際任意の $\xi \in \mathfrak{f}$ は次の形に表わされる．

$$\xi = \tilde{\mu}^* F$$
$$F = F(w,z) = F_0(z)w^{m-1} + F_1(z)w^{m-2} + \cdots + F_{m-1}(z)$$
$$\left( \text{但し}, F_k(z) \in \mathbb{C}(\{z\}) \qquad m = \sum_{\lambda=1}^{r} m_\lambda \right)$$

更に，前頁の形の $F$ は一義的に定まる．

証明）　（イ）$\tilde{\mu}^*$ が全射である事：$w_\lambda^* = P_\lambda(t_\lambda)$ $z_\lambda^* = t_\lambda^{m_\lambda}$ $\mathfrak{f}_\lambda^* = \mathbb{C}(\{z_\lambda^*\})$ $(\subset \mathfrak{f}_\lambda)$ と置く．明らかに $[\mathfrak{f}_\lambda : \mathfrak{f}_\lambda^*] = m_\lambda$．一方 $R_\lambda(w, z_\lambda^*) = w^{m_\lambda} + A_{\lambda 1}(z_\lambda^*) w^{m_\lambda - 1} + \cdots + A_{\lambda m_\lambda}(z_\lambda^*)$ $(A_{\lambda k}(z_\lambda^*) + \mathfrak{f}_\lambda^*)$ は既約であり，$R_\lambda(w_\lambda^*, z_\lambda^*) = 0$ 故 $[\mathfrak{f}_\lambda^*(w_\lambda^*), \mathfrak{f}_\lambda^*] = m_\lambda$．従って $\mathfrak{f}_\lambda \supseteqq \mathfrak{f}_\lambda^*(w_\lambda^*)$ に注意して，

$$(*) \qquad \mathfrak{f}_\lambda = \mathfrak{f}_\lambda^*(w_\lambda^*) \qquad ([\mathfrak{f}_\lambda : \mathfrak{f}_\lambda^*] = m_\lambda \text{ であった})．$$

次に $S_\lambda = S_\lambda(w,z) = \prod_{\nu \neq \lambda} R_\nu(w,z)$ $s_\lambda = \mu_\lambda^* S_\lambda$ $(\in \vartheta_\lambda)$ と置く．与えられた $\xi \in \mathfrak{f}$ を $\xi = \sum_{\lambda=1}^r \xi_\lambda$ $(\xi_\lambda \in \mathfrak{f}_\lambda)$ と書く．$s_\lambda \neq 0$ に注意して $\eta_\lambda = s_\lambda^{-1} \xi_\lambda$ $(\in \mathfrak{f}_\lambda)$ と置くと，$(*)$ より

$$\eta_\lambda = F_{\lambda 0}^* \cdot (w_\lambda^*)^{m_\lambda - 1} + \cdots + F_{\lambda m_\lambda - 1}^*$$

（但し，$F_{\lambda k}^* = F_{\lambda k}(z_\lambda^*)$ $(\in \mathfrak{f}_k^*)$ は $z_\lambda^*$ の有理型函数）

と書ける．$F_{\lambda k}(z) \in \mathbb{C}(\{z\})$ に注意して

$$F_\lambda(w,z) = F_{\lambda 0}(z) w^{m_\lambda - 1} + \cdots + F_{\lambda m_\lambda - 1}(z)$$

と置くと，$\eta_\lambda = \tilde{\mu}_\lambda^* F_\lambda$（但し $\tilde{\mu}^* : \mathcal{R} \to \mathfrak{f}_\lambda$ は $\tilde{\mu}^*$ の成分）．

次に $F(w,z) = \sum_{\lambda=1}^r S_\lambda(w,z) F_\lambda(w,z)$ と置く．この時

$$F(w,z) = F_0(z) w^{m-1} + \cdots$$

一方 $\mu^* F = \sum_{\lambda=1}^r s_\lambda \eta_\lambda = \sum_{\lambda=1}^r \xi_\lambda = \xi$ である．

（ロ）$F$ の一意性：$F = 0$ 又は $F$ が $w$ の $m-1$ 次式で $\tilde{\mu}^* F = 0$（勿論 $F \in \mathcal{R}$）ならば $F = 0$ である事を示そう．$R_\lambda(w, z) = \prod_{k=0}^{m_\lambda - 1}(w - P_\lambda(\varepsilon_\lambda^k z_\lambda^{\frac{1}{m_\lambda}})) = w^{m_\lambda} + A_{\lambda 1}(z) w^{m_\lambda - 1} + \cdots + A_{\lambda m_\lambda}(z)$ ($\varepsilon_\lambda = \exp(\frac{2\pi i}{m_\lambda})$) は既約で，$R_\lambda(P_\lambda(t_\lambda), t_\lambda^{m_\lambda}) = 0$　一方 $F(P_\lambda(t_\lambda), t_\lambda^{m_\lambda}) = 0$．従って $F(w, z) \equiv 0(R_\lambda)$，故に $F(w, z) \equiv 0(R)$．しかし $R = \prod_{\lambda=1}^r R_\lambda = w^m + A_1(z) w^{m-1} + \cdots + A_m(z)$ ($A_k(z) \in z^k \mathbb{C}\{z\}$) は $w$ の $m$ 次式故 $F(w, \lambda) = 0$.

定義 (1.5.2)　$\eta = \sum_{\lambda=1}^r \eta_\lambda \in \mathfrak{k}$　$\eta_\lambda = \eta_\lambda(t_\lambda) \in \mathfrak{k}_\lambda$ が与えられた時

$$\rho(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\lambda=1}^{r} \oint \eta_\lambda(t_\lambda) \sigma_\lambda(t_\lambda) dt_\lambda$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{但し，} \oint \text{は十分小さい円 “}|t_\lambda| = \text{一定” 上の積分.} \\ \sigma_\lambda = \sigma_\lambda(t_\lambda) \text{ に関しては (1.3.1)} \end{array} \right).$$

定義 (1.5.3)　$B_h(w, z) = w^h + A_1(z) w^{h-1} + \cdots + A_h(z)$（但し，$R(w, z) = w^m + A_1(z) w^{m-1} + \cdots + A_m(z)$ であった）.

定義 (1.5.4)　$R(\zeta, z) = 0$ ならば

$$\frac{R(w, z)}{w - \zeta} = w^{m-1} + B_1(\zeta, z) w^{m-2} + B_2(\zeta, z) w^{m-3} + \cdots + B_{m-1}(\zeta, z)$$

証明）　上式の右辺 $= Q(w, z; \zeta)$ と置くと，

$$\begin{aligned}
Q &= w^{m-1} + (\zeta + A_1) w^{m-2} + (\zeta^2 + A_1 \zeta + A_2) w^{m-3} + \cdots + (\zeta^{m-1} + A_1 \zeta^{m-2} + \cdots + A_{m-1}) \\
(w - \zeta) Q &= w^m + (\zeta + A_1) w^{m-1} + (\zeta^2 + A_1 \zeta + A_2) w^{m-2} + \cdots \\
&\quad + (\zeta^{m-1} + A_1 \zeta^{m-2} + \cdots + A_{m-1}) w \\
&\quad - \zeta w^{m-1} - (\zeta^2 + A_1 \zeta) w^{m-2} - \cdots - (\zeta^m + A_1 \zeta^{m-1} + \cdots + A_{m-1} \zeta) \\
&= w^m + A_1 w^{m-1} + \cdots + A_n(z) = R(w, z)
\end{aligned}$$

何者，$-(\zeta^m + A_1 \zeta^{m-1} + \cdots + A_{m-1} \zeta) = A_m$ は $R(\zeta, z) = 0$ より．

補題 (1.5.5)　(1.5.1) の $F$ は次の公式で与えられる．

$$\begin{cases}
F(w, z) = F_0(z) w^{m-1} + F_1(z) w^{m-2} + \cdots + F_{m-1}(z) \\
F_h(z) = \sum_n F_{hn} z^n \\
F_{hn} = \rho(\xi \cdot \tilde{\mu}^* (z^{-n-1} B_h)) \qquad \text{（例えば (1.5.2)）.} \\
\qquad = \frac{1}{2\pi i} \sum_\lambda \oint \frac{\xi_\lambda(t_\lambda) B_h(P_\lambda(t_\lambda), t_\lambda^{m_\lambda}) m_\lambda}{\partial_w R(P_\lambda(t_\lambda), t_\lambda^{m_\lambda}) t_\lambda^{\eta m_\lambda + 1}} dt_\lambda
\end{cases}$$

証明） $R(w,z)=\prod_{\lambda=1}^{r}\prod_{k=0}^{m_\lambda-1}(w-\zeta_{\lambda k})$ $\zeta_{\lambda k}=P_\lambda(\varepsilon_\lambda^k z_\lambda^{\frac{1}{m_\lambda}})$，故ラグランジュの補間公式により，

$$F(w,z)=\sum_\lambda\sum_k\frac{R(w,z)}{w-\zeta_{\lambda k}}\frac{F(\zeta_{\lambda k},z)}{\partial_w R(\zeta_{\lambda k},z)}$$

しかし (1.5.4) より

$$\frac{R(w,z)}{w-\zeta_{\lambda k}}=w^{m-1}+B_1(\zeta_{\lambda k},z)w^{m-2}+\cdots+B_h(\zeta_{\lambda k},z)w^{m-h-1}+\cdots$$

従って，$F_h(z)=\sum_\lambda\sum_k B_h(\zeta_{\lambda k},z)\frac{F(\zeta_{\lambda k},z)}{\partial_w R(\zeta_{\lambda k},z)}$

一方 $\xi_\lambda(t_\lambda)=\mu_\lambda^*F=F(P_\lambda(t_\lambda),t_\lambda^{m_\lambda})$ 故 $F(\zeta_{\lambda k},z)=\xi_\lambda(\varepsilon_\lambda^k z^{\frac{1}{m_\lambda}})$ 従って $F_h(z)=\sum_\lambda\sum_k B_h(\zeta_{\lambda k},z)\frac{\xi_\lambda(\varepsilon_\lambda^k z^{\frac{1}{m_\lambda}})}{\partial_w R(\zeta_{\lambda k},z)}$.

今，$\frac{B_h(P_\lambda(t_\lambda),t_\lambda^{m_\lambda})\xi_\lambda(t_\lambda)}{\partial_w R(P_\lambda(t_\lambda),t_\lambda^{m_\lambda})}=\sum_{\nu=\nu_0}^{+\infty}\gamma_\nu^{(\lambda)}t_\lambda^\nu$ と置くと，

$$\sum_k B_h(\zeta_{\lambda k},z)=\frac{\xi_\lambda(\varepsilon_\lambda^k z^{\frac{1}{m_\lambda}})}{\partial_w R(\zeta_{\lambda k},z)}=\sum_\nu\gamma_\nu^{(\lambda)}\sum_{k=0}^{m_\lambda-1}\varepsilon_\lambda^{k\nu}z^{\frac{\nu}{m_\lambda}}=\sum_n\gamma_{nm_\lambda}^{(\lambda)}m_\lambda z^n$$

何者，

$$\sum_{k=0}^{m_\lambda-1}\varepsilon_\lambda^{k\nu}=\begin{cases}m_\lambda & \nu\equiv 0(m_\lambda)\\ 0 & \nu\not\equiv 0(m_\lambda)\end{cases}\qquad（但し\ \varepsilon_\lambda=e^{\frac{2\pi i}{m_\lambda}}）$$

従って，$F_h(z)=\sum_n F_{hn}z^n=\sum_\lambda\sum_n\gamma_{nm_\lambda}^{(\nu)}m_\lambda z^n$

而して，

$$\begin{aligned}F_{hn}&=\sum_\lambda\gamma_{nm_\lambda}^{(\lambda)}m_\lambda\\&=\sum_\lambda\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{B_h(P_\lambda(t_\lambda),t_\lambda^{m_\lambda})\xi_\lambda(t_\lambda)m_\lambda}{\partial_w R(P_\lambda(t_\lambda),t_\lambda^{m_\lambda})t_\lambda^{nm_\lambda+1}}dt_\lambda\end{aligned}$$

<u>定理 (1.6)</u> $\xi\in\mathfrak{f}$ が $\mu^*O_x$ に含まれる為の必要十分条件は

$$総の\ \varphi\in\mu^*O_x\ に対し\ \rho(\xi\cdot\varphi)=0$$

となる事である．

証明） （イ）十分である事：総の $\varphi\in\mu^*O_x$ に対し $\rho(\xi\cdot\varphi)=0$ をとる．(1.5.5) より $\xi=\tilde\mu^*F$ $F_{hn}=\rho(\xi\cdot\tilde\mu^*(z^{-n-1}B_h))$（但し $F\in\mathcal{R}$）で与えられるが，$F\in O_x=\mathbb{C}\{w,z\}$ を示せば良い．即ち $n\leqq -1$ に対し $F_{hn}=0$ を示せば良い．しかし $n\leqq -1$ に対し，$z^{-n-1}B_h(w,z)\in O_x$ 従って $\tilde\mu^*(z^{-n-1}B_h)\in\tilde\mu^*O_x\subset\vartheta$，而して仮定より

$$F_{hn}=\rho(\xi\cdot\tilde\mu^*(z^{-n-1}B_h))=0$$

（ロ）必要である事：(1.5.5) の形の $F \in \mathcal{R}$ で $\xi = \tilde{\mu}^*F$ と書けるが，今，$\xi \in \tilde{\mu}^*\mathcal{O}_x$ と仮定しよう．従ってある $\Phi \in \mathcal{O}_x$ に対し $\xi = \tilde{\mu}^*\Phi$．この時，先ず $F \in \mathcal{O}_x$ である事を示そう．$F = F_0(z)w^{m-1} + \cdots + F_{m-1}(z)$ $(F_h(z) \in \mathbb{C}(\{z\}))$ と書けていた．$F \notin \mathcal{O}_x$ として矛盾を出す．即ち，或 $F_h(z) \notin \mathbb{C}\{z\}$ とする．$F_h(z) = F_{h,-a_h}z^{-a_h} + \cdots$ $(F_{h,-a_h} \neq 0)$ と書き $\max\{a_0, a_1, \dots, a_h, \dots\} = b$ とすると

$$\begin{cases} z^bF(w,z) = G(w,z) \in \mathbb{C}\{w,z\} \\ G(w,0) \neq 0 \end{cases}$$

さて，$\tilde{\mu}^*\Phi = \tilde{\mu}^*F$ 故 $\tilde{\mu}^*(G - z^b\Phi) = \tilde{\mu}^*(z^bF - z^b\Phi) = 0$ 従って，$G - z^b\Phi \equiv 0(R)$ 即ち，$G(w,z) - z^b\Phi(w,z) = Q(w,z)R(w,z)$ $(Q(w,z) \in \mathbb{C}\{w,z\})$ と書ける．$R = w^m + \cdots + A_h(z)w^{m-h} + \cdots$ $(A_h(z) \in z^h\mathbb{C}\{z\})$ に注意して，

$$G(w,0) = Q(w,0)w^m$$

ところが，$G(w,0)$ は次数 $\leqq m-1$ の $w$ の多項式，又 $Q(w,0) \neq 0$ これは矛盾である．従って $F \in \mathcal{O}_x$ が分った．即ち (1.5.5) より $n \leqq -1$ に対し

$$F_{hn} = \rho(\xi \cdot z^{-n-1}B_h) = 0 \qquad (n \leqq -1)$$

特に，$F_{0,-1} = \rho(\xi) = 0$．而して，任意の $\eta \in \mu^*\mathcal{O}_x$ に対し $\rho(\eta) = 0$ が示された．さて，任意の $\varphi \in \mu^*\mathcal{O}_x$ に対し $\rho(\xi \cdot \varphi) = 0$ を示すのだが，$\xi \in \mu^*\mathcal{O}_x$ と仮定したから $\xi \cdot \varphi \in \mu^*\mathcal{O}_x$ 従って $\rho(\xi \cdot \varphi) = 0$.

<u>(1.7)</u>　定理 (1.4) の証明を与える．

$\mathfrak{f}$ の任意の部分加群 $m$ に対し，$\mathfrak{f}$ の部分加群 $m'$ を定義する．

$$m' = \{\xi \in \mathfrak{f} \mid \text{総の } \eta \in m \text{ に対し } \rho(\xi \cdot \eta) = 0\}$$

$\vartheta = \bigoplus_{\lambda=1}^r \vartheta_\lambda \quad \sigma_\lambda(t_\lambda) = t_\lambda^{-c_\lambda}(a_{\lambda_0} + a_{\lambda_1}t_\lambda + \cdots)$ $(a_{\lambda_0} \neq 0)$ であった．

（イ）$\vartheta' = \bigoplus_{\lambda=1}^r t_\lambda^{c_\lambda}\vartheta_\lambda$ 従って $\vartheta' \subset \vartheta$

何者，$\rho(\xi \cdot \eta) = \sum_\lambda \frac{1}{2\pi i}\oint \xi_\lambda(t_\lambda)\eta_\lambda(t_\lambda)\sigma_\lambda(t_\lambda)dt_\lambda$ 故，$\eta \in \vartheta$ の時，

$$\rho(\xi \cdot \eta) = 0 \Leftrightarrow \text{総の } \eta_\lambda \in \mathbb{C}\{t_\lambda\} \text{ に対し } \xi_\lambda(t_\lambda) \equiv 0(t_\lambda^{c_\lambda}).$$

だからである．

偖，$\xi, \eta \in \vartheta$ ならば，$\rho(\xi \cdot \eta)$ は $\vartheta'$ を法として定まるので，$\rho(\xi \cdot \eta)$ を $\vartheta/\vartheta'$ 上の双一次函数と考える．すると双対性より，

（ロ）$\vartheta'' = \vartheta$

一般に $\vartheta' \subset m \subset \vartheta$ とすると，（ロ）より

（ニ）$\vartheta' \subset m' \subset \vartheta$ $\dim(m/\vartheta') = \dim(\vartheta/m')$

倍，(1.6) より $(\mu^*\mathcal{O}_x)' = \mu^*\mathcal{O}_x$ 従って，$\mu^*\mathcal{O}_x \subset \vartheta$ に注意して，$\vartheta' \subset (\mu^*\mathcal{O}_x)' = \mu^*\mathcal{O}_x$．これは，(1.4) の（イ）を示している．従って $\vartheta' \subset \mu^*\mathcal{O}_x \subset \vartheta$ に関して（ニ）より

$$\dim[\mu^*\mathcal{O}_x/\vartheta'] = \dim[\vartheta/\mu^*\mathcal{O}_x] = \frac{1}{2}\dim[\vartheta/\vartheta']$$

一方（イ）より $\dim[\vartheta/\vartheta'] = \sum_{\lambda=1}^{r} c_\lambda$．従って (1.4)（ロ）示された．

<u>(1.8)</u>　特異点 $x \in C$ に対し (1.7) の記号を用いて，

$$\vartheta' = \vartheta'_x \qquad \vartheta = \vartheta_x$$

と書く．$\mu^*\mathcal{O}_x \cong (\mathcal{O}_C)_x$ であった ((1.2) の (ハ))．この同型写像を $\tau_x$ と書く．単純点 $x \in C$ に対し上の記号を用いると，$\vartheta'_x = \mu^*\mathcal{O}_x = \vartheta_x = \vartheta$ であり，勿論 $\tau_x : \mu^*\mathcal{O}_x \cong (\mathcal{O}_C)_x$ である．

<u>定義 (1.8.1)</u>　各点 $x \in C$ でのファイバーが

$$\mathcal{O}'_x = \tau_x(\vartheta'_x)(\subseteqq (\mathcal{O}_C)_x) \qquad \text{（但し } \vartheta'_x \subseteqq \mu^*\mathcal{O}_x \text{ であった）.}$$

により定められる $\mathcal{O}_C$ の部分層を $\mathcal{O}'$ とする．$\mathcal{M} = \mathcal{O}_C/\mathcal{O}'$ と定義する．

従って $0 \to \mathcal{O}' \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{M} \to 0$

<u>(1.8.2)</u>　$x \in C$ に対し $\mu_x \cong \mu^*\mathcal{O}_x/\vartheta'_x$ は有限次元ベクトル空間である．実際

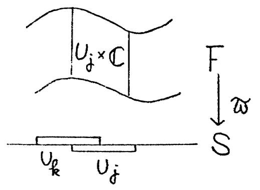
$$\dim \mathcal{M}_x = \begin{cases} 0 & \cdots x : \text{単純点} \\ \frac{1}{2}c_x \ (c_x = \sum_{\wp_\lambda \in \mu^{-1}(x)} c_\lambda) & \cdots x : \text{特異点} \end{cases}$$

<u>(1.9)</u>　$F$ を $S$ 上の複素直線バンドルとする．即ち $F$ は次の（イ）（ロ）（ハ）で定まる．

（イ）正則写像 $\varpi : F \to S$ が与えられている（全写）.

（ロ）ある被覆 $S = \bigcup_j U_j$ に対し

$$\varpi^{-1}(U_j) = U_j \times \mathbb{C}$$




（ハ）$U_j \times \mathbb{C}$，$U_k \times \mathbb{C}$ の貼り合せは次の条件による．

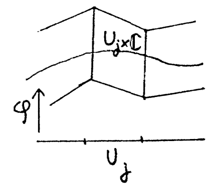
$z \in U_j \cap U_k$，$(z, \zeta_j) \in U_j \times \mathbb{C}$，$(z, \zeta_k) \in U_k \times \mathbb{C}$ に対し

$$(z, \zeta_j) = (z, \zeta_k) \Leftrightarrow \zeta_j = f_{jk}(z)\zeta_k$$

ここで，$f_{jk}(z)$ は，$U_j \cap U_k$ 上 $\neq 0$ の正則函数で，$U_i \cap U_j \cap U_k$ 上 $f_{ik} = f_{ij}f_{jk}$ が成立する．$\zeta_j$ は $U_j$ 上 $(z, \zeta_j)$ のファイバー座標と呼ばれる．

<u>(1.9.1)</u>　$\mathcal{O}^*$ により，$\mathcal{O}$ の部分層で $\Gamma(U, \mathcal{O}^*)$ が $\Gamma(U, \mathcal{O})$ の可逆元より成る乗法群の層を表わす．上述の 1-双対輪体 $\{f_{jk}\}$ は $H'(S, \mathcal{O}^*)$ の元，即ち $F$ を定める．明らかに $H'(S, \mathcal{O}^*)$ は $F_1 \otimes F_2$ に関して群を成すが，便宜上 $H'(S, \mathcal{O}^*)$ を加法群と考えて，$F_1 \otimes F_2 = F_1 + F_2$ と書く．

(1.9.2) $S$ 上 $F$ の正則切断 $\varphi$ は




$$\begin{cases} \varphi : z \to \varphi(z) = (z, \varphi_j(z))(U_j\text{上}) \\ U_j \cap U_k\text{上}\varphi_j(z) = f_{jk}(z)\varphi_k(z) \end{cases}$$

を満たすものである．従って $\varphi$ は各 $U_j$ 上の正則函数 $\varphi_j(z)$ の集まり $\{\varphi_j(z)\}$ で $\varphi_j(z) = f_{jk}(z)\varphi_k(z)$ なるものである．

定義 (1.9.3) 各 $U_j$ 上の有理型函数 $\varphi_j(z)$ の集まり $\varphi = \{\varphi_j(z)\}$ で，$U_j \cap U_k$ 上 $\varphi_j(z) = f_{jk}(z)\varphi_k(z)$ なるものを $F$ の有理型切断と呼ぶ．

(1.10) $F$，$C$ を $S$ 上の直線バンドル，曲線とする．次の層（イ）（ロ）（ハ）を定義する．

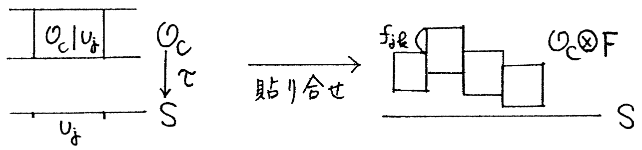
（イ）$\mathcal{O}(F) = F$ の正則切断の芽の層（$S$ 上の層）

（ロ）$\mathcal{O}(F - C) = \{\varphi \in \mathcal{O}(F) \mid z \in C$ に対し $\varphi(z) = (z, 0)\}$

（ハ）$\mathcal{O}(F)_C = \mathcal{O}(F)/\mathcal{O}(F - C)$：$C$ への制限

従って $\mathcal{O}(F)_C = \mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(F) = \mathcal{O}_C \otimes F$

実際




$(\mathcal{O}_C \mid U_j = \tau^{-1}(U_j))$

$\mathcal{O}_C \otimes F = \bigcup_j \mathcal{O}_C \mid U_j$ は次の条件で貼り合せられる．

$$\begin{cases} z \in U_j \cap U_k \qquad \varphi_j \in (\mathcal{O}_C \mid U_j)_z \qquad \varphi_k \in (\mathcal{O}_C \mid U_k)_z\text{に対し} \\ \varphi_j = \varphi_k \Leftrightarrow \varphi_j = f_{jk}\varphi_k \end{cases}$$

(1.11) $\mathcal{O}'(F) = \mathcal{O}' \otimes F$（(1.8.1)）．

従って次の完全列（イ）（ロ）が存在する．

（イ）$0 \to \mathcal{O}'(F) \to \mathcal{O}(F)_C \to \mathcal{M} \to 0$

（ロ）$0 \to \mathcal{O}(F - C) \to \mathcal{O}(F) \to \mathcal{O}(F)_C \to 0$

何者，（イ）に関して，(1.8.1) より $0 \to \mathcal{O}' \otimes F \to \mathcal{O}_C \otimes F \to \mathcal{M} \otimes F \to 0$（完全列），更に，$C$ 上の層 $\mathcal{M}$ は $C$ の特異点にだけに，0 でないファイバーがある故 $\mathcal{M} \otimes F \simeq \mathcal{M}$．（ロ）は明らか．

定義 (1.12) $\mu : \tilde{C} \to C \subset S$ を曲線 $C$ の特異点除去，$F$ を $S$ 上の直線バンドルとする．この時 $\mu^*F$ により $\mu$ により $F$ から引き起こされた $\tilde{C}$ 上の直線バンドルを表わす．$\mathcal{O}(\mu^*F)$ により $\mu^*F$ の正則切断の芽の成す $\tilde{C}$ 上の層を表わす．

定義 (1.13) $\tilde{C}$ 上の次の因子 $\mathfrak{C}$ を $C$ の導手と呼ぶ.

$$\mathfrak{C} = \sum_{x\in \mathrm{Sing}(C)} \sum_{\wp_\lambda \in \mu^{-1}(x)} c_\lambda \wp_\lambda \qquad (\text{記号は } (1.2.2)).$$

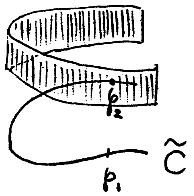
この時次の定義を行なう.

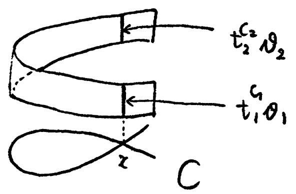
$$\mathcal{O}(\mu^* F - \mathfrak{C}) = \{\eta \in \mathcal{O}(\mu^* F) \mid \eta \equiv 0(\mathfrak{C})\}$$

補題 (1.13.1) $\mu_*(\mathcal{O}(\mu^* F - \mathfrak{C})) \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}'(F)$

証明) 自然な $\mu$-準同型 $\tau : \mathcal{O}'(F) \to \mathcal{O}(\mu^* F - \mathfrak{C})$ は $\tau : \varphi(w, z) \to (\mu^*\varphi)(t)$ により与えられる. あとは $C$ 上各点のファイバーで同型が引き起こされる事を見ればよい. $C$ の単純点では明らかである. 特異点 $x \in C$ で考える. (1.2) の記号を用いる. $\mu^{-1}(x) = \{\wp_1, \ldots, \wp_\lambda, \ldots, \wp_r\}$ であった. 従って $\mu_*(\mathcal{O}(\mu^* F - \mathfrak{C}))_x \cong \bigoplus_{\lambda=1}^r \mathcal{O}(\mu^* F - \mathfrak{C})_{\wp_\lambda}$.

一方 (1.13)(1.7)(1.8) より $\mathcal{O}(\mu^* F - \mathfrak{C})_{\wp_\lambda} \cong t_\lambda^{c_\lambda} \vartheta_\lambda\, \mathcal{O}'(F)_x \cong \mathcal{O}'_x \cong \bigoplus t_\lambda^{c_\lambda} \vartheta_\lambda$. 従って写像 $\mu$ を考えてみれば, $\tau_x : \mathcal{O}'(F)_x \xrightarrow{\sim} \mu_*(\mathcal{O}(\mu^* F - \mathfrak{C}))_x$ である.




定理 (1.14) 次の完全列が成り立つ.

$$0 \to \mu_*(\mathcal{O}(\mu^* F - \mathfrak{C})) \to \mathcal{O}(F_C) \to \mathcal{M} \to 0$$
$$0 \to \mathcal{O}(F - C) \to \mathcal{O}(F) \to \mathcal{O}(F)_C \to 0$$

証明) 前者は (1.11)(1.13.1). 後者は明らか.

$\mathcal{O}(F_C) = \mathcal{O}(F)_C$ に注意しておく.

定理 (1.15) 次の完全列が成り立つ.

$$\begin{aligned}
0 &\to H^0(S, \mathcal{O}(F - C)) \to H^0(S, \mathcal{O}(F)) \to H^0(C, \mathcal{O}(F)_C) \\
&\to H^1(S, \mathcal{O}(F - C)) \to H^1(S, \mathcal{O}(F)) \to H^1(C, \mathcal{O}(F)_C) \\
&\to H^2(S, \mathcal{O}(F - C)) \to H^2(S, \mathcal{O}(F)) \to 0 \\
0 &\to H^0(\tilde{C}, \mathcal{O}(\mu^* F - \mathfrak{C})) \to H^0(C, \mathcal{O}(F_C)) \to H^0(C, \mu) \\
&\to H^1(\tilde{C}, \mathcal{O}(\mu^* F - \mathfrak{C})) \to H^1(C, \mathcal{O}(F_C)) \to 0
\end{aligned}$$

更に $\dim H^0(C,\mu) = \frac{1}{2}\sum_{x\in \mathrm{Sing}(c)} c_x$ $(c_x = \sum_{\wp_\lambda \in \mu^{-1}(x)} c_\lambda)$

証明） (1.14) より．又，(1.13.1) より $H^\nu(\tilde{C}, \mathcal{O}(\mu^* F - \mathfrak{C})) \cong H^\nu(C, \mathcal{O}'(F))$ に注意する．最後は (1.8.2) より．

## §2. 因子と一次系についての記号

(2.1) $C$ を $S$ 上の既約曲線とする．これより直線バンドル $[C]$ を定義しよう．先ず任意の $x \in C$ に対し，$x$ の $S$ での近傍 $U$ を十分小さくとれば $C \cap U = \{(w,z) \mid R(w,z) = 0\}$ と書ける．但し，$(w,z)$ は中心 $x$ の $S$ の局所座標であり，$R(z) = R(z_1,z_2) = z_2^m + A_1(z_1)z_2^{m-1} + \cdots + A_m(z_1)$ は正則函数で $R(z) = 0$ は極小方程式である（(1.2)）．即ち $y \in C \cap U$ $\Phi \in \mathcal{O}_y$ に対し，$y$ の近傍の任意の $z \in C$ で $\Phi(z) = 0$ ならば $\mathcal{O}_y$ で $\Phi \equiv 0(R)$ が成立する．

$S = \bigcup_j U_j$ を $U_j$ 上 $C$ の極小方程式が $R_j(z) = 0$ である様な開被覆とする．この時 $f_{jk}(z) = \frac{R_j(z)}{R_k(z)}$ は $U_j \cap U_k$ 上 $\neq 0$ の正則函数である．勿論 $U_i \cap U_j \cap U_k$ 上 $f_{ik} = f_{ij}f_{jk}$ で，$\{f_{jk}\}$ は一つの直線バンドル $F$ を決定する．

定義 (2.1.1) $F = [C]$ と書く．

さて，$U_j \cap U_k$ 上 $R_j = f_{jk}R_k$ であるので，$\varphi : z \to \varphi(z) = (z, R_j(z))$ は $F$ の正則切断であり，$C = \{z \in S \mid \varphi(z) = (z,0)\}$ である．

定義 (2.1.2) $C = (\varphi)$ と書き $\varphi$ の因子と言う．

(2.2) 上の議論を因子 $D = \sum_{\nu=1}^r m_\nu C_\nu$ に拡張する（但し $m_\nu \in \mathbb{Z}$ $C_\nu$ は $S$ 上の既約曲線）．

定義 (2.2.1) $[D] = \sum_{\nu=1}^r m_\nu [C_\nu]$

実際 $S = \bigcup_j U_j$ を $U_j$ 上 $C_\nu$ の極小方程式が $R_{\nu j} = 0$ である様な開被覆とし，$f_{jk} = \prod_{\nu=1}^r (\frac{R_{\nu j}(z)}{R_{\nu k}(z)})^{m_\nu}$ と置く時 $[D]$ は $\{f_{jk}\}$ で定まる．そして，$\varphi : z \to \varphi(z) = (z, \prod_{\nu=1}^r R_{\nu j}(z)^{m_\nu})$ は $F$ の有理型切断であり $D = (\varphi)$ と書き，$\varphi$ の因子と呼ぶ．逆に，任意の $F$ の有理型切断 $\varphi$（恒等的に 0 ではない）が与えられると，$[D] = F$，$D = (\varphi)$ なる因子 $D$ が一意的に定まる事は直ぐ分る．

定義 (2.2.2) $[D] = 0$（但し，0 は自明な直線バンドルを表わす．即ち $f_{jk}(z) = 1$）の時，$D$ は『0 に一次同値』であると言い，$D \approx 0$ と書く．

(2.2.3) $D \approx 0$ である為の必要十分条件は，$S$ 上の有理型函数 $f$ が存在して，$D = (f)$ となる事である．

証明） $[D]$ の有理型切断 $\varphi(z) = (z, \varphi_j(z))$ が存在して $D = (\varphi)$ と書ける．$D \approx 0$ とすると，$[D] = 0$ 従って $U_j \cap U_k$ 上 $\varphi_j(z) = \varphi_k(z)$，即ち各 $U_j$ 上 $f(z) = \varphi_j(z)$ となる $S$ 上有理型函数 $f(z)$ が存在する．$D = (f)$ である．逆は明らか．

(2.3)　$F$ を $S$ 上の直線バンドルとする．この時 $H^0(S, \mathcal{O}(F))$ は $F$ の正則切断全体の集合である．

定義 (2.3.1)　$|F| = \{(\varphi) \mid \varphi \in H^0(S, \mathcal{O}(F)), \varphi \neq 0\}$ を $F$ の定める完備一次系と言う．（但し，$\varphi \neq 0$ は $\varphi$ が恒等的に 0 ではない事を示す）．任意の $D \in |F|$ に対し $D \geqq 0$（次の注意）である．

注意 (2.3.2)　$D = \sum m_\nu C_\nu$ に関し

$$\begin{cases} m_\nu > 0 \text{ なる時 } D \text{ は正であると言い } D > 0 \text{ と書く} \\ m_\nu \geqq 0 \text{ なる時 } D \text{ は非負（実際的）であると言い，} D \geqq 0 \text{ と書く} \end{cases}$$

定義 (2.3.3)　因子 $X$ に対し $|X| = |[X]|$

命題 (2.3.4)　$|X| = \{D \mid D \approx X, D \geqq 0\}$

証明）　明らか．

定義 (2.4)　$D$ を $S$ 上の因子，$F$ を $S$ 上の直線バンドルとする．層 $\mathcal{O}(F - D)$ を定義する．

イ）$D > 0$ の時．

$D = (\varphi)$ なる $F$ の有理型切断 $\varphi(z) = (z, \varphi_j(z))$ をとると，$\mathcal{O}(F - D)$ は $\mathcal{O}(F)$ の次の条件で定まる部分層である（明らかに，$\varphi$ のとり方に依らない）．

$x \in S$ でのファイバーが

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(F - D)_x &= \{\psi \in \mathcal{O}(F)_x \mid \psi/\varphi_j \in \mathcal{O}_x\} \\ &= \{\psi \in \mathcal{O}(F)_x \mid \psi \equiv 0(D)\} \end{aligned}$$

ロ）一般の場合．

$D = (\varphi)$ なる $F$ の有理型切断 $\varphi(z) = (z, \varphi_j(z))$ をとる．$\mathcal{O}(F - D)$ は，$F$ の有理型切断 $\psi(z) = (z, \psi_j(z))$ で，次の条件を満たすもの全体の層．

$$\text{各点 } x \in S \text{ で} \psi_j/\varphi_j \in \mathcal{O}_x$$

注意：上記に於て切断 $\varphi(z) = (z, \varphi_j(z))$ 等の記法は，適宜ある被覆 $S = \bigcup_j U_j$ に付随して考え，(2.1) の記述に従う．以下同様．

命題 (2.4.1)　$\mathcal{O}(F - D) \cong \mathcal{O}(F - [D])$（自然な同型）

証明）　(2.4) ロ）の記号を用いる．$S$ の任意の開部分集合上の切断に関し自然な同型がある事を見る．以下任意の開部分集合上考える．$\mathcal{O}(F - D)$ の任意の切断 $\psi : z \to (z, \psi_j(z))$ に対し，$\eta_j = \frac{\psi_j}{\varphi_j}$ と置くと，$\eta : z \to (z, \eta_j(z))$ は $\mathcal{O}(F - [D]) = \mathcal{O}(F \otimes [D]^{-1})$ の切断である．何者，$\psi_j = f_{jk}\psi_k$ で $\psi_j/\varphi_j$ は $U_j$ 上正則，$\eta_j/\eta_k = (\psi_j/\psi_k) \cdot (\varphi_k/\varphi_j) = f_{jk} \cdot g_{jk}^{-1}$（$= h_{jk}$ と置

く）（但し，$g_{jk} = \varphi_j/\varphi_k$ と置く．$[D]$ は $\{g_{jk}\}$ で定まる）である．従って $\{h_{jk}\}$ は $F \otimes [D]^{-1}$ を与え，$\eta_j = h_{jk}\eta_k$ であるので $\eta$ は $F \otimes [D]^{-1}$ の正則切断を与える．写像：$\psi \to \eta$ が同型を与える事は明らか．

## §3. 交わりの数，添加公式

<u>(3.1)</u>　$(S, \mathcal{O})$ を特異点のない代数曲面，$\mathcal{O}^*$ を 0 にならない正則函数の芽の乗法群の層 ((1.9.1))．次の完全列がある．

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O} \xrightarrow{\tau} \mathcal{O}^* \to 0 \qquad (\text{但し}, \tau : f \to e^{2\pi\sqrt{-1}f})$$

従って，

$$\begin{array}{ccc} \to H^1(S, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{c} & H^2(S, \mathbb{Z}) \to \cdots \\ \Cup & & \Cup \\ F & \rightsquigarrow & C(F) \end{array}$$

実際，直線バンドル $F$ に対し $c(F)$ は，$F$ のチャーン類である．この対応を具体的に見ると，

被覆 $S = \bigcup_j U_j$ に対し，$F$ が 1-双対輪体 $\{f_{jk}\}$ で定義され（但し，$U_j \cap U_k$ 上 $f_{jk} = f_{jk}(z)$ は $\neq 0$ 且正則），$H^2(S, \mathbb{Z}) \ni c(F) = \{c_{ijk}\}$ $(c_{ijk} \in \mathbb{Z})$ とする時，容易に分る様に，

$$c_{ijk} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\{\log f_{ij}(z) + \log f_{jk}(z) + \log f_{ki}(z)\}$$

で与えられる．

<u>(3.2)</u>　$F, G (\in H^1(S, \mathcal{O}^*))$ を直線バンドル，$C$，$D$ を $S$ 上の因子とする．$c(F) \cdot c(G) \in H^4(S, \mathbb{Z})$ の基本 4-輪体 $S$ 上の値 $(c(F)c(G))[S] \in \mathbb{Z}$ をも，$c(F) \cdot c(G)$ と書く事にする．

<u>定義 (3.2.1)</u>

$$\begin{aligned} F \cdot G &= c(F) \cdot c(G) \\ C \cdot D &= c([C]) \cdot c([D]) \\ F \cdot D &= c(F) \cdot c([D]) \end{aligned}$$

<u>命題 (3.3)</u>　$(R, \mathcal{O}_R)$ を完閉（コンパクト）リーマン面とする．$\mathcal{O}_R^*$ は前と同様に定義される．従って，

$$\begin{array}{ccc} \to H^1(R, \mathcal{O}_R^*) & \xrightarrow{c} & H^2(R, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \to \cdots \\ \Cup & & \Cup \\ \mathfrak{f} & \rightsquigarrow & c(\mathfrak{f}) \end{array}$$

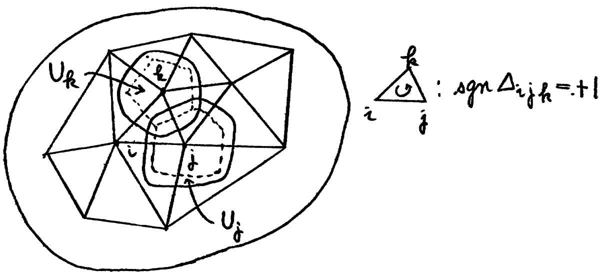
が存在する．（$\mathfrak{f}$ は $R$ 上直線バンドル）．

今，$\vartheta = \sum_\nu m_\nu \wp_\nu$ $(m_\nu \in \mathbb{Z}, \wp_\nu \in R)$ を $R$ 上因子とすると，

$$c([\vartheta]) = \sum_\nu m_\nu (= \deg \vartheta)$$

が成立する．

証明） 適当な被覆 $R = \bigcup_j U_j$ をとって，$c([\vartheta]) = \{c_{ijk}\} \in H^2(R, \mathbb{Z})$（代表 $\{c_{ijk}\} \in Z^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ の略記．但し，$\mathcal{U} = (U_j)$）とする．勿論 $\{c_{ijk}\} \in H^2(R, \mathbb{R})$ と考えられる．ド・ラームの定理により $\{c_{ijk}\}$ には，$R$ 上 2-型式 $\xi$ が対応する．以下 $\xi$ を求めてみる．先ず 1-双対鎖 $\{\mu_{jk}\}$（但し $\mu_{jk}$ は $U_i \cap U_k$ 上 $C^\infty$-函数）が存在して $c_{ijk} = \mu_{ij} + \mu_{jk} + \mu_{ki}$ と書け，$d\mu_{ij} + d\mu_{jk} + d\mu_{ki} = 0$ が成立する．$\{d\mu_{jk}\}$ はある 0-双対鎖 $\{\sigma_j\}$ の双対境界である（但し $\sigma_i$ は $U_i$ 上 $C^\infty$-1-型式）．即ち，$d\mu_{ij} = \sigma_j - \sigma_i$ 従って，$U_i \cap U_j$ 上 $d\sigma_i = d\sigma_j$．即ち $\xi = d\sigma_i = d\sigma_j = \cdots$ は $R$ 上の 2-型式である．$c([\vartheta]) = \{c_{ijk}\} \leftarrow \xi$ が求めるもの（一意的でないが，意味は明らか）．又 $H^2(R, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 故 $\{c_{ijk}\} \leftrightarrow c \in \mathbb{Z}$ の対応がある．この $c$ を求める為に（1）$R$ の単体分割（2）双対胞体分割を行なう．

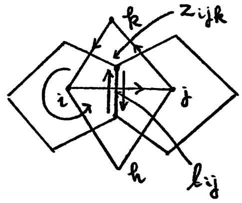



$$c = \sum_{(*)} \operatorname{sgn} \Delta_{ijk} \cdot c_{ijk} \qquad ((*)：総の単体についての和)$$

で与えられる．更に次が成立する．

<u>(3.3.1)</u> $-\int_R \xi = c$

証明）

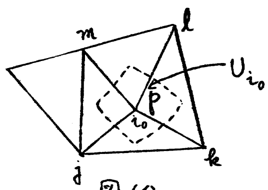



$$\begin{aligned}
\int_R \xi &= \sum_i \int_{⬠ i} \xi = \sum_i \int_{⬠ i} d\sigma_i \\
&\underset{(*)}{=} \sum_i \int_{\partial ⬠} \sigma_i = \sum_{i,j} \int_{\ell_{ij}} (\sigma_i - \sigma_j) \\
&= -\sum_{i,j} \int_{\ell_{ij}} d\mu_{ij} = -\sum_{ij} [\mu_{ij}(z_{ijk}) - \mu_{ij}(z_{ijh})]
\end{aligned}$$

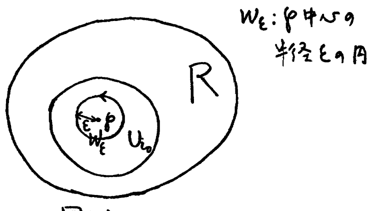
$$= -\sum_{z_{ijk}}[\mu_{ij}(z_{ijk}) + \mu_{jk}(z_{ijk}) + \mu_{ki}(z_{ijk})] \underset{(**)}{=} -\sum_{z_{ijk}} c_{ijk}$$
$$= -c$$

（但し，$(*)$：グリーンの定理 $(**)$：$\mu_{ij} + \mu_{jk} + \mu_{ki} = c_{ijk}$）.

さて，$c([\vartheta]) = \deg\vartheta(\deg\vartheta = \sum m_\nu)$ を示す為に，$\wp \in R$ に対し $c([\wp]) = 1$ を示せば良い．



図(イ)



図(ロ)

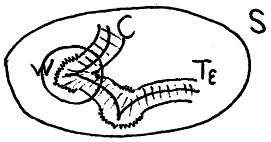
$R = U_{i_0} \cup U_j \cup U_k \cup \cdots$ を十分細かくとり，$\vartheta = \wp$ を定める方程式を各 $U_j$ 上 $f_j(z) = 0$ とする．即ち，$j \neq i_0$ に対し $f_j(z) = 1$，$f_{i_0}(z)$ は，$\wp$ で 1 位の零をもち $z \neq \wp$ に対し $f_{i_0}(z) \neq 0$ である．$f_{jk} = \frac{f_j}{f_k}$ と置くと，$[\wp]$ は $\{f_{jk}\}$ で定まる．$c([\wp]) = \{c_{ijk}\}$ とする．今迄の議論により $c_{ijk} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}(\log f_{ij} + \log f_{jk} + \log f_{ki})$，$U_i \cap U_k$ 上の $C^\infty$-函数 $\mu_{ik}$，$U_j$ 上の $C^\infty$-1-型式 $\sigma_i$ が存在して，$c_{ijk} = \mu_{ij} + \mu_{jk} + \mu_{ki}$（$U_i \cap U_j \cap U_k$ 上），$d\mu_{ij} = \sigma_j - \sigma_i$（$U_i \cap U_j$ 上），$\xi = d\sigma_i$（$U_i$ 上）が成立する．$c([\wp]) = -\int_R \xi$ であった．$\gamma_{ij} = \mu_{ij} - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\log f_{ij}$ とおくと $\gamma_{ij} + \gamma_{jk} + \gamma_{ki} = 0$ で，$U_i$ 上 $C^\infty$-函数 $\tau_i$ が存在して，$U_i \cap U_j$ 上 $\gamma_{ij} = \tau_j - \tau_i$ と書ける．従って，$\omega = \sigma_i + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}d\log f_i - d\tau_i = \sigma_j + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}d\log f_j - d\tau_j$ は $R$ 上の 1-型式である．明らかに，$\omega$ は $R - \wp$ 上 $C^\infty$ である．$\xi = d\sigma_i = d\omega$ である．図（ロ）をみて，$\int_R \xi = \int_{R-\wp}\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{R-W_\varepsilon} d\omega = \lim_{\varepsilon\to 0}\oint \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}d\log f_{i_0} = -1$ が得られる．従って，$d([\wp]) = -\int_R \xi = 1$.

命題 (3.4)　$D$ を $S$ 上の因子とする．$c([D])$ と $D$ は双対関係（因子 $D$ は $S$ 上の 2-輪体である事に注意する）．即ち，任意の $a \in H^2(S, \mathbb{Z})$ に対し

$$c([D]) \cdot a = a(D)$$

証明）　被覆 $S = \bigcup_j U_j$ を適当にとって，$f_j(z) = 0$ を $C$ の $U_j$ に於る極小方程式とする．$U_j \cap U_k$ 上 $f_{jk} = \frac{f_j}{f_k}$ と置くと，$[C] = \{f_{jk}\}$ である．$c([C]) = \{c_{ijk}\}$ とすると，$c_{ijk} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}(\log f_{ij} + \log_{ik} + \log f_{ki})$ であり，ド・ラームの定理により $c_{ijk}$ を 2 型式 $\xi$ で表わす事ができる．以下 (3.3) を平行して，そこと同様な記号を用いると，$\xi = d\sigma_i = d\sigma_j = \cdots$，$\omega = \sigma_i + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}d\log f_i - d\tau_i$ と置いて，$\xi = d\omega$ である（$\sigma_i$ は $U_i$ 上 $C^\infty$-1-型式，$\tau_i$ は $U_i$ 上 $C^\infty$-函数）．従って，$c([C]) \leftrightsquigarrow \xi$ の対応が得られる（一意的ではない．完全型式を法としての $\xi$ の類が対応する）．同様に $d\eta = 0$ なる 2-型式 $\eta$ が存在して，$a \leftrightsquigarrow \eta$．ド・ラームの

定理より $c([C])\cdot a \leftarrow \xi\wedge\eta$ で，$c([C])\cdot a = \int_S \xi\wedge\eta$，$a(C) = -\int_C \eta$ が成立する．従って，$c([C])\cdot a = a(C)$ を示す為には，$\int_S \xi\wedge\eta = -\int_C \eta$ を示せば良い．

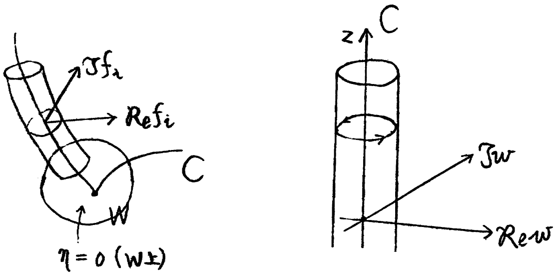



$T_\varepsilon \supset C$ は C の管状近傍

$\eta$ は $C$ の各特異点では 0 なる様に選べる（実際上図で，特異点の近傍 $W$ を十分小さくとって，そこで，$\eta$ より完全型式を無視すれば良い）．$\omega$ は $S-C$ 上で $C^\infty$ である．従って

$$\int_S \xi\wedge\eta = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S-T_\varepsilon}\xi\wedge\eta = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S-T_\varepsilon} d(\omega\wedge\eta)$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial T_\varepsilon}\omega\wedge\eta \underset{(*)}{=} -\lim_{\varepsilon\to 0}\int \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{df_i}{f_i}\wedge\eta \underset{(**)}{=} -\int_C \eta$$

但し，$(*)$：上述の $\omega$ の式を代入する．$(**)$：以下の計算．




$C$ の特異点では $\eta = 0$ なので，単純点のところで考える．そこでの $S$ の局所座標を $(w,z)$ とすると，$C: f_i(z) = 0$ 故 $w = f_i$ ととれる．$\eta = Adw\wedge dz + Bd\bar{w}\wedge d\bar{z} + Cdw\wedge d\bar{z} + Ddz\wedge d\bar{z} + Ed\bar{w}\wedge dz + Fdw\wedge d\bar{w}$ と書くと，$\frac{dw}{w}\wedge\eta = \frac{dw}{w}\wedge Ddz\wedge d\bar{z} + (\#)dw\wedge d\bar{w}$ しかし，$\varepsilon$ を固定して $w = \varepsilon e^{i\theta}$ とおくと，$dw = \varepsilon i e^{i\theta}d\theta \quad d\bar{w} = -\varepsilon i e^{-i\theta}d\theta$ 　従って $dw\wedge d\bar{w} = 0$．而して，

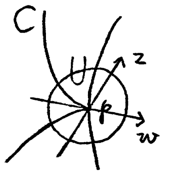
$$\int \frac{df_i}{f_i}\wedge\eta = 2\pi\sqrt{-1}\int_C Ddz\wedge d\bar{z} = 2\pi\sqrt{-1}\int_C \eta.$$

<u>(3.5)</u>　$C, F$ を $S$ 上の既約曲線，直線バンドルとし，$\mu: \tilde{C}\to C\subset S$ を $C$ の特異点除去とする．$\tilde{F} = \mu^* F$ は $\tilde{C}$ 上に引き起こされた直線バンドルを表わす．$S$ 上の 2 つの直線バンドル $F, G$ に対し $c(F)\cdot c(G) = c(G)\cdot c(F)$ が成立する．

<u>命題 (3.5.1)</u>　$F\cdot C = c(\tilde{F})$

証明）　(3.4) を用いる．$F\cdot C = c(F)\cdot c([C]) = c([C])c(F) = c(F)(C) = c(\tilde{F})$

(3.6)　$B, C$ を $S$ 上の既約曲線で $B \neq C$ とする．$C \cap B$ は有限個の点より成る．$\wp \in C \cap B$ に対し交わりの数 $I_\wp(B, C)$ を定義しよう．




$\wp$ の近傍での $B$ の極小方程式を $R(w, z) = 0$　$\mu : \tilde{C} \to C$ を特異点除去　$\mu^{-1}(\wp) = \{\wp_1, \ldots \wp_\lambda, \ldots \wp_r\}$ とする．

$\wp_\lambda$ の近傍では $\mu : t_\lambda \to (w, z) = (P_\lambda(t_\lambda), t_\lambda^{m_\lambda})$ と考えてよい ((1.2)，$t_\lambda$ を適当に選ぶ)．$R(P_\lambda(t_\lambda), t_\lambda^{m_\lambda}) = t_\lambda^{n_\lambda}(a_{\lambda_0} + a_{\lambda_1} t_\lambda + \cdots)$ $(a_{\lambda_0} \neq 0)$ とする．$n_\lambda$ が $\wp_\lambda$ で定まる事は明らか．

定義 (3.6.1)　$I_\wp(B, C) = \sum_{\wp_\lambda \in \mu^{-1}(\wp)} n_\lambda$.

ここで $I_\wp(B, C) = I_\wp(C, B)$ である事に注意する．

命題 (3.7)　$S$ 上既約曲線 $B, C$ に対し

$$B \cdot C = \sum_{\wp \in B \cap C} I_\wp(B, C)$$

証明）　適当な被覆 $S = \bigcup U_j$ に対し $F = [B]$ が，$\{f_{jk}\} = \{\frac{R_j}{R_k}\}$ で定義されるとする．被覆 $\tilde{C} = \bigcup \tilde{U}_\lambda$ を $\mu(\tilde{U}_\lambda) \subset U_j = U_{j(\lambda)}$ なる様にとる．$\tilde{U}_\lambda$ 上 $\tilde{R}_\lambda(t) = R_{j(x)}(\mu(t))$，$\tilde{U}_\lambda \cap \tilde{U}_\lambda$ 上 $\tilde{f}_{\lambda\nu}(t) = f_{j(\lambda)j(\nu)}(\mu(t))$ と定義する．従って $\tilde{f}_{\lambda\nu}(t) = \frac{\tilde{R}_\lambda(t)}{\tilde{R}_\nu(t)}$ で，$\tilde{F}$ は $\{\tilde{f}_{\lambda\nu}\}$ で定義される．$\tilde{\varphi} = \{\tilde{R}_\lambda\}$ は $\tilde{F}$ の正則切断であり，$\vartheta = (\tilde{\varphi})$ とすると $\tilde{F} = [\vartheta]$ である．従って (3.5.1), (3.3) より $B \cdot C = F \cdot C = c(\tilde{F}) = \deg \vartheta$．しかし $\deg \vartheta = \sum n_\lambda = \sum_{\wp \in B \cap C} I_\wp(B, C)$（何者，例えば $\tilde{U}_\lambda$ を中心 $\wp_\lambda$ の座標近傍である様にとっておけば $\tilde{R}_\lambda(t) = R(P_\lambda(t_\lambda), t_\lambda^{m_\lambda}) = t_\lambda^{n_\lambda}(a_{\lambda_0} + a_{\lambda_1} t_\lambda + \cdots)$, $a_{\lambda_0} \neq 0$ となるからである）．

(3.8)　$S$ の標準直線バンドル $K$ の定義．座標近傍 $U_j$ の局所座標を $(z_j^1, z_j^2) = (w_j, z_j)$ とし，$S = \bigcup_j U_j$ とする．$\varphi = \{\varphi_j(z) dz_j^1 \wedge dz_j^2\}$ が有理型微分型式であるとは,

イ）$\varphi_j(z)$ は $U_j$ 上の有理型函数

ロ）$U_j \cap U_k$ 上 $\varphi_j dz_j^1 \wedge dz_j^2 = \varphi_k dz_k^1 \wedge dz_k^2$

が満たされる時を言う．

定義 (3.8.1)　$D = (\varphi) = (\varphi_j)$ を標準因子と言う．これは勿論一次同値を除いて定まる．

定義 (3.8.2)　$K = [D]$ を $S$ の標準直線バンドルと言う．今，$J_{jk}(z) = \det \frac{\partial(z_k^1, z_k^2)}{\partial(z_j^1, z_j^2)}$ と置くと，$U_j \cap U_k$ 上 $\varphi_j = J_{jk} \varphi_k$ 故，$\varphi$ は 1-双対輪体 $\{J_{jk}\}$ の定める直線バンドルの有理型切断である．従って $K$ は $\{J_{jk}\}$ で定まると言っても良い．

定義 (3.8.3)　$c_1 = -c(K)$ を $S$ の "1 次元チャーン類" と言う．

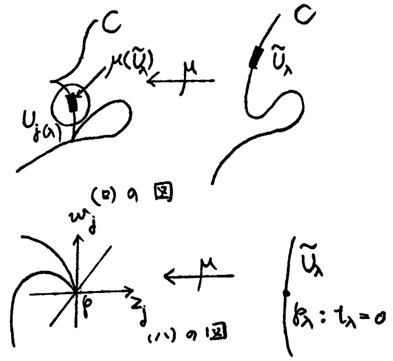
定義 (3.8.4)　(3.5) の記号で，$\tilde{C}$ はリーマン面である．$\tilde{U}_\lambda$ の局所座標を $t_\lambda$ とし，$\tilde{C} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{U}_\lambda$ とする．$\tilde{C}$ の標準バンドル $\mathfrak{R}$ は 1-双対輪体 $\{\mathfrak{R}_{\lambda\nu}\} = \{\frac{dt_\lambda}{dt_\nu}\}$ で定まる．$\tilde{C}$ の種数を

$\pi(\tilde{C})$ で表わす時，$c(\mathfrak{K}) = 2\pi(\tilde{C}) - 2$ はリーマン・ロッホの定理より出る．

<u>添加公式 (3.9)</u>　$C$ を既約曲線，$\mu : \tilde{C} \to C \subset S$ を特異点除去，$K, \mathfrak{K}$ を $S, \tilde{C}$ の標準バンドル，$\mathfrak{C}$ を $C$ の導手とする．この時，次の公式が成立する．

$$\mathfrak{K} = \mu^*[C] + \mu^* K - [\mathfrak{C}]$$

証明）




$S = \bigcup_j U_j$　　$\tilde{C} = \bigcup_\lambda \tilde{U}_\lambda$ 及び $U_j, \tilde{U}_\lambda$ 上の局所座標 $(w_j, z_j)$，$t_\lambda$ を次の（イ）（ロ）（ハ）の様に選ぶ．

（イ）$\mu(\tilde{U}_\lambda) \subset U_j$ $(j = j(\lambda))$

（ロ）$\mu(\tilde{U}_\lambda) \cap \mathfrak{r} = \phi$ ならば $U_{j(\lambda)} \cap \mathfrak{r} = \phi$（但し $\mathfrak{r} = \mathrm{Sing}(C)$）この時 $\tilde{U}_\lambda$ 上 $\mu : t_\lambda \to (w_j, z_j) = (0, t_\lambda)$ とする．従って $C$ の $U_j$ に於る極小方程式は

$$R_j(w_j, z_j) = w_j = 0$$

（ハ）$\mu(\tilde{U}_\lambda) \ni \wp$ $(\wp \in \mathfrak{r})$ の時，$\wp_\lambda : t_\lambda = 0$，$\wp = \mu(0) = (0, 0)$ とし，$\tilde{U}_\lambda$ 上 $\mu$ が次の形をしている．

$$\mu : t_\lambda \to (w_j : z_j) = (P_\lambda(t_\lambda), t_\lambda^{m_\lambda})$$

$C$ の $U_j$ に於る極小方程式を $R_j(w_j, z_j) = 0$ と書く．(1.2.2) の記号で $\sigma_\lambda dt_\lambda = \frac{d(t_\lambda^{m_\lambda})}{\partial w_j R_j(P_\lambda(t_\lambda), t_\lambda^{m_\lambda})}$（但し，$\partial w_j R_j = \frac{\partial R_j}{\partial w_j}$）$\sigma_\lambda = \frac{1}{t_\lambda^{c_\lambda}}(a_0 + a_1 t_1 + \cdots)$ $(a_0 \neq 0)$ であった．特に $\mu(\tilde{U}_\lambda) \cap \mathfrak{r} = \phi$ なる $\tilde{U}_\lambda$ の上で（$\mu(\tilde{U}_\lambda) \subset U_j$ とする），$\partial w_j R_j = \frac{\partial w_j}{\partial w_j} = 1$ 従って $\sigma_\lambda dt_\lambda = \frac{dt_\lambda}{1} = dt_\lambda$ 而して $\sigma_\lambda = 1$　　$c_\lambda = 0$．即ち，$\mathfrak{C} = \sum_\nu c_\nu \wp_\nu$ である故 $\sigma_\nu^{-1} = 0$ が $\mathfrak{C}$ の局所方程式である．従って，$[\mathfrak{C}]$ は，1-双対輪体 $\{\frac{\sigma_\lambda^{-1}}{\sigma_\nu^{-1}}\}$ で定まる．(3.7) (3.8.1) の記号で (明らかな記法を用いて)，$[C] = \{f_{jk}\}$，$K = \{J_{jk}\}$，$\mu^*[C] = \{\tilde{f}_{\lambda\nu}\}$ $\mu^* K = \{\tilde{J}_{\lambda\nu}\}$．但し $f_{jk} = \frac{R_j}{R_k}$，$\tilde{f}_{\lambda\nu}(t) = f_{j(\lambda)j(\nu)}(\mu(t))$，$\tilde{J}_{\lambda\nu}(t) = J_{j(\lambda)j(\nu)}(\mu(t))$．$g_{jk}(z)$ を次の（ニ）により定める．

（ニ）$dR_j \wedge dz_j = g_{jk}(z) dR_k \wedge dz_k$
この時 $dR_j = \partial w_j R_j dw_j + \partial z_j R_j dz_j$ 故（ニ）に代入して，$\partial w_j R_j dw_j \wedge dz_j = g_{jk} \partial w_k R_k dw_k \wedge dz_k$．従って，

（ホ）$\partial w_j R_j = g_{jk} J_{jk} \partial w_k R_k$．一方 $R_j = f_{jk} R_k$ 故 $dR_j(z) = f_{jk}(z) dR_k(z) + R_k(z) df_{jk}$ 従って $z \in C$ に対し $dR_j(z) = f_{jk}(z) dR_k(z)$ これと（ニ）より $z \in C$ に対し $f_{jk} dz_j = g_{jk} dz_k$ が成立する．$\mu^*$ を施して，

（ヘ）$\tilde{f}_{\lambda\nu}(t) d(t_\lambda^{m_\lambda}) = g_{j(\lambda) j(\lambda)}(\mu(t)) d(t_\nu^{m_\nu})$
（ホ）（ヘ）より $\tilde{f}_{\lambda\nu}(t) \frac{d(t_\lambda^{m_\lambda})}{\partial w_{j(\lambda)} R_j(P_\lambda(t_\lambda), t_\lambda^{m_\lambda})} = \frac{1}{\tilde{J}_{\lambda\nu}} \frac{d(t_\nu^{m_\nu})}{\partial w_k R_k(P_\nu, t_\nu^{m_\nu})}$ 従って $\tilde{f}_{\lambda\nu} \sigma_\lambda dt_\lambda = \frac{1}{\tilde{J}_{\lambda\nu}} \sigma_\nu dt_\nu$，故に $\mathfrak{R}_{\lambda\nu} = \frac{dt_\nu}{dt_\lambda} = \tilde{f}_{\lambda\nu} \cdot \tilde{J}_{\lambda\nu} \cdot (\frac{\sigma_\lambda}{\sigma_\nu})$．対応する直線バンドルをとって，

$$\mathfrak{R} = \mu^*[C] + \mu^* K - [\mathfrak{C}]$$

<u>系 (3.10)</u>　(3.9) の記号の下で

$$\pi(\tilde{C}) = \frac{1}{2}(C^2 + KC) + 1 - \frac{1}{2} \deg \mathfrak{C}$$

特に $C$ が特異点を持たない時，

$$\pi(C) = \frac{1}{2}(C^2 + KC) + 1$$

証明）　$c(\mu^* F) = FC$　　$c(\mu^*[C]) = C \cdot C = C^2$　　$c([\vartheta]) = \deg \vartheta$ であった（(3.3) (3.5.1)）．
リーマン・ロッホの定理より $c(\mathfrak{R}) = 2\pi(\tilde{C}) - 2$　　(3.9) より $c(\mathfrak{R}) = C^2 + KC - \deg \mathfrak{C}$．

<u>定義 (3.11)</u>　$S$ 上の因子 $D$，直線バンドル $F$ に対し

$$\pi(D) = \frac{1}{2}(D^2 + KD) + 1$$
$$\pi(F) = \frac{1}{2}(F^2 + KF) + 1$$

これらを，$D, F$ の『仮想種数』と呼ぶ．

<u>命題 (3.12)</u>　$S$ 上既約曲線 $C$ に対し

$$\pi(C) = \pi(\tilde{C}) + \frac{1}{2} \deg \mathfrak{C}$$

従って次のイ）ロ）ハ）が成立する．

イ）$\pi(C) > \pi(\tilde{C}) \Leftrightarrow C \neq \tilde{C}$
ロ）$\pi(C) = \pi(\tilde{C}) \Leftrightarrow C = \tilde{C}$
ハ）$\pi(C) = 0 \Leftrightarrow C$：特異点のない有理曲線

## §4. リーマン・ロッホの定理

記号 (4.0)　$S$ 上の代数層（解析層）$\Xi$，直線バンドル $F$，因子 $D$ に対し次の記号を用いる．

$$\chi(S,\Xi) = \sum_{\nu}(-1)^{\nu}\dim H^{\nu}(S,\Xi)$$
$$\chi(S,F) = \chi(S,\mathcal{O}(F))$$
$$\chi(S,D) = \chi(S,\mathcal{O}([D]))$$

定義 (4.1)　（イ）$q = \dim H^1(S,\mathcal{O})$：$S$ の『不正則数』$q = \frac{1}{2}b_1$（$b_1$：$S$ の 1 次元ベッチ数）が成立する．

（ロ）$p_g = \dim H^2(S,\mathcal{O})$：$S$ の『幾何種数』

（ハ）$p_a = p_g - q$：$S$ の『算術種数』

注意 (4.1.1)　"不正則数"の名称に関して（？）：$\mathbb{P}^3$ に於て $M$ : $f(z_0,z_1,z_2,z_3) = 0$ で定義されるとし，$S = \tilde{M}$ を非特異モデルとする．この時大抵 $q(S) = p_g - p_a = 0$ である．実際 $M$ : $f(z_0,\ldots z_3) = 0$ に対し $f \leftrightarrow (a_1,a_2,\ldots a_N) \in \mathbb{C}^N$（係数の対応）と考える時，$\{f \mid b_1(S) > 0\}$ の測度は 0 である．（$b_1 = 2q$ であった．）

リーマン・ロッホの定理 (4.2)

$$\chi(S,D) = \frac{1}{2}(D^2 - KD) + \chi(S,\mathcal{O})$$

即ち $\chi(S,D) = \frac{1}{2}(D^2 - KD) + p_a + 1$（後者の式は $\dim H^0(S,\mathcal{O}) = 1$ 及び (4.1) より．）

証明）$\psi(F) = \chi(S,F) - \frac{1}{2}(F^2 - KF)$ と置く．$\psi(F - [C]) = \psi(F)$ が示されれば，$D = \sum m_i C_i$ と書けるので，$\psi([D]) = \psi(0) = \chi(S,\mathcal{O}) = p_a + 1$ となり証明が終る．従って次の補題を示せばよい．

補題 (4.2.1)　$\psi(F - [C]) = \psi(F)$

証明）　次の完全列（イ）（ロ）が存在する（(1.14)），

（イ）$0 \to \mathcal{O}(F - [C]) \to \mathcal{O}(F) \to \mathcal{O}(F)_C \to 0$

（ロ）$0 \to \mu_*(\mathcal{O}(\mu^*F - [\mathfrak{C}])) \to \mathcal{O}(F)_C \to \mathcal{M} \to 0$

列（イ）より $\chi(S,F) - \chi(S,F - [C]) = \chi(C,\mathcal{O}(F)_C)$　列（ロ）より $\chi(C,\mathcal{O}(F)_C) = \chi(\tilde{C},\mu^*F - [\mathfrak{C}]) + \dim H^0(C,\mathcal{M})$ しかし (1.15) より $\dim H^0(C,\mathcal{M}) = \frac{1}{2}\deg\mathfrak{C}$，曲線リーマン・ロッホの公式より $\chi(\tilde{C},\mu^*F - [\mathfrak{C}]) = c(\mu^*F - [\mathfrak{C}]) - \pi(\tilde{C}) + 1 = F\cdot C - \deg\mathfrak{C} - \pi(\tilde{C}) + 1$ 従って (3.12) を用いて $\chi(S,F) - \chi(S,F - [C]) = F\cdot C - \pi(C) + 1$．一方 $\frac{1}{2}(F^2 - K\cdot F) - \frac{1}{2}((F-C)^2 - K\cdot(F-C)) = F\cdot C - \frac{1}{2}(C^2 + K\cdot C) = F\cdot C - \pi(C) + 1$（(3.11)）．従って $\psi(*)$ の定義に代入して $\psi(F) - \psi(F - [C]) = 0$　（終）

リーマン・ロッホ・ヒルツェブルフの公式 (4.3)

$$\chi(S,D) = \frac{1}{2}(D^2 - KD) + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)$$

（但し $c_\nu : S$ の $\nu$ 次元チャーン類 $c_2$ は $S$ のオイラー数に等しい）．これは (4.2) に注意して，次の公式を示せばよい．

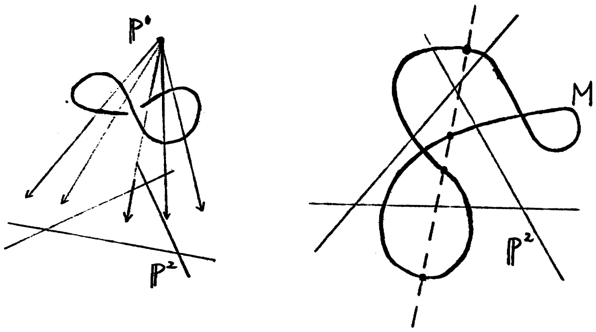
ネーターの公式 (4.4)　$p_a + 1 = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)$

証明）（Enriques [2]）定理 (4.6) を示せば十分であるが，その為に (4.5) で準備を行なう．

(4.5)　生成射影について．

（I）非特異曲線 $C \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ の射影．

線型部分多様体 $\mathbb{P}^0, \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ を一般の位置にとる．$\mathbb{P}^0$ を中心とする射影 $\lambda : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2$ による $C$ の像を $M$ とうる．




この時 $M$ の特異点は通常 2 重点のみで，その個数を $d$ とする．$M$ の既約方程式の次数を，$M$ の次数と呼び，それを $n$ とする．実際 $n$ は，$M$ と $\mathbb{P}^2$ に於る一般の直線との交点の個数（即ち，$M$ の生成超平面截面の点の個数）に等しい．この時 $\pi(C) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d$ に良く知られている．

（II）非特異曲面 $S \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ の射影

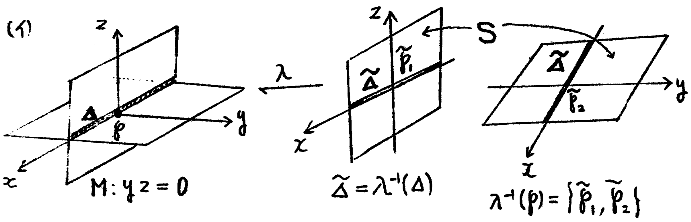
線型部分多様体 $\mathbb{P}^3, \mathbb{P}^{N-4} \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ を一般の位置にとる．$\mathbb{P}^{N-4}$ を中心とする射影 $\lambda : \mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^3$ による $S$ の像を $M$ とする．$M$ は $S$ の 1 つのモデルである．$\Delta = \mathrm{Sing}(M)$ を調べてみる．$\wp \in \Delta$ の周りの $\mathbb{P}^3$ の局所座標 $(x, y, z)$ を適当に選ぶと，$\wp$ の近傍での $M$ の方程式は次の 3 つに限られる．

（イ）$yz = 0$　（$\wp$：2 重点）

（ロ）$xyz = 0$　（$\wp$：3 重点）

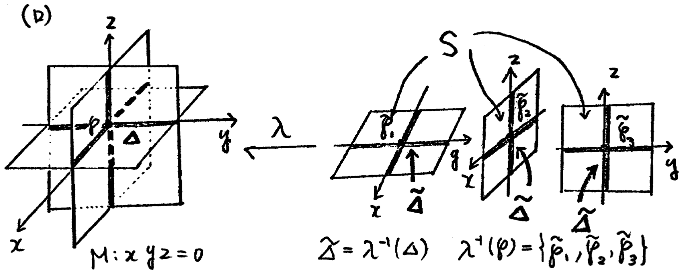
（ハ）$xy^2 - z^2 = 0$　（$\wp$：尖点）

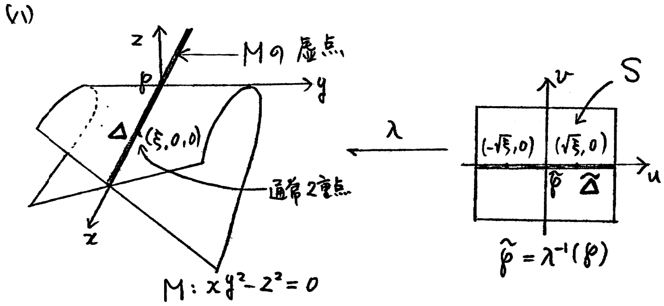
以下この 3 通りの場合を調べてみる．$\lambda^{-1}(\Delta) = \tilde{\Delta}$，$\lambda^{-1}(\wp) = \{\tilde{\wp}_1, \ldots\}$ の記号を用いる．




$S$ の上の局所座標を $(u, v)$ とすると，

$$\tilde{\wp}_1 \text{の近傍で} \quad \lambda : (u, v) \to (x, y, z) = (u, 0, v)$$
$$\tilde{\wp}_2 \text{の近傍で} \quad \lambda : (u, v) \to (x, y, z) = (u, v, 0)$$

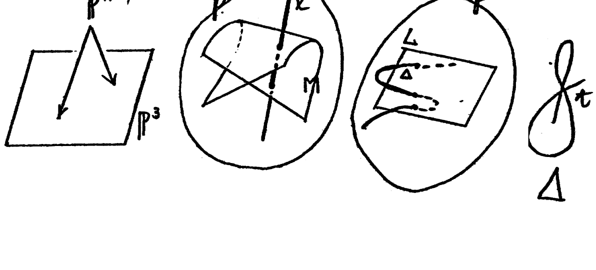



$S$ 上の局所座標を $(u, v)$ とすると

$$\tilde{\wp} \text{の近傍で} \quad \lambda = (u, v) \to (x, y, z) = (u^2, v, uv)$$

容易に分る様に $M$ の尖点は $\Delta$ の単純点である．



ここで

- $n : M$ の次数（即ち $M$ を定義する既約方程式の次数）
- $m : \Delta$ の次数（$\Delta$ は 2 重曲線である）実際 $\ell, L$ を各々，一般の直線，平面とする時

$$n = \mathrm{Card}(M \cap \ell) \qquad m = \mathrm{Card}(\Delta \cap L)$$

- $t : M$ の 3 重点の数（上述（イ）（ロ）（ハ）の考察より $\Delta$ の特異点は $M$ の 3 重点しか現われない）．
- $\Delta = \bigcup_{\nu=1}^{\rho} \Delta_\nu$ を $\Delta$ の既約曲線への分解とし，$\hat{\Delta}_\nu$ を $\Delta_\nu$ の非特異モデルとする．
- この時 $\pi(\Delta) = \sum_\nu \{\pi(\hat{\Delta}_\nu) - 1\} + 1 + 2t$

$$\left(\begin{array}{l}\text{但し } \mathcal{O} : \mathbb{P}^3 \text{ 上正則函数の層，} \mathcal{O}_\Delta \mathcal{O} \text{ の } \Delta \text{ への制限とする時，} \\ \chi(\Delta, \mathcal{O}_\Delta) = \dim H^0(\Delta, \mathcal{O}_\Delta) - \dim H^1(\Delta, \mathcal{O}_\Delta) = 1 - \pi(\Delta)\end{array}\right.$$

<u>定理 (4.6)</u>　（Enriques [2]）(4.5)（II）の記号を用いる．

$$\begin{aligned} p_a &= \binom{n-1}{3} - (n-4)m + \pi(\Delta) - 1 \\ c_1^2 &= n(n-4)^2 - (5n-24)m + 4\pi(\Delta) - 4 + t \\ c_2 &= n(n^2 - 4n + 6) - (7n - 24)m + 8\pi(\Delta) - 8 - t \end{aligned}$$

（但し $p_a : S$ の算術種数 $c_1, c_2 : S$ のチャーン類）

証明）　(4.12) で $p_a$ の計算をするが，その為に (4.8)(4.9) を準備する．$c_1^2, c_2$ の計算は (4.13) で行なわれる．

<u>系 (4.7)</u>　$c_1^2 + c_2 = 12(p_a + 1)$

<u>添加公式 (4.8)</u>　射影 $S \xrightarrow{\lambda} M \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ に於て，$S, \mathbb{P}^3$ 上の標準バンドルを $K, \mathbb{K}$ とする時，

$$K = \lambda^* \mathbb{K} + \lambda^*[M] - [\tilde{\Delta}]$$

（但し $\Delta = \mathrm{Sing}(M)$，$\tilde{\Delta} = \lambda^{-1}(\Delta)$，$[\tilde{\Delta}]$：導手）

証明）　1 次元低い場合（(3.9)）と同様である．局所的に

$$\begin{aligned} &\lambda : (u, v) \to (x, y, z) = (\mu_1(u, v), \mu_2(u, v), \mu_3(u, v)) \\ &R(x, y, z) = 0 : M \text{ の極小局所方程式} \\ &\sigma = \frac{d\mu_1(u, v) \wedge d\mu_2(u, v)}{\frac{\partial R}{\partial z}(\mu_1(u, v), \mu_2(u, v), \mu_2(u, v))} \end{aligned}$$

とおく時　導手 $[\tilde{\Delta}] = -(\sigma)$ で与えられる．特に尖点の近傍で計算してみると

$$R = xy^2 - z^2 = 0$$
$$\lambda : (u, v) \to (x, y, z) = (u^2, v, uv)$$
$$\sigma = \frac{du^2 \wedge dv}{-2z} = -\frac{1}{2}\frac{2udu \wedge dv}{uv} = -\frac{1}{v}du \wedge dv$$

従って $[\tilde{\Delta}] = -(\sigma) = (v) = -(\frac{1}{v})$ （終）

以下 (4.13) まで $\lambda, S, M, \Delta, n, m, t, \ldots$ 等は (4.5)（II）に従う．

(4.9)　$p_g, p_a$ の計算の為の準備．

$\mathbb{P}^3$ の平面 $L : a_0\zeta_0 + a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2 + a_3\zeta_3 = 0$ とし $\mathbb{E} = [L]$ とおく．従って $M \approx nL$（1 次同値）即ち $[M] = n\mathbb{E}$ である．一方 $\mathbb{P}^3$ の標準バンドルは $\mathbb{K} = -4\mathbb{E}$ である（実際 $\mathbb{P}^N$ の標準バンドルは $O_{\mathbb{P}^N}(-N-1)$ である）．従って (4.8) より，

(4.9.1)　$K = (n-4)\lambda^*\mathbb{E} - [\tilde{\Delta}]$

$\mathbb{P}^3$ 上任意の直線バンドル $\mathbb{F}$ に対し，$O_{\mathbb{P}^3}(F)$，$O_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F} - \Delta)$，$O_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F} - M)$ が $S$ 上の場合 ((1.10)) と同様に定義される．更に次の定義を行なう．

$$O_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F})_\Delta = O_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F})/O_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F} - \Delta)$$
$$O_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F} - \Delta)_M = O_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F} - \Delta)/O_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F} - M)$$

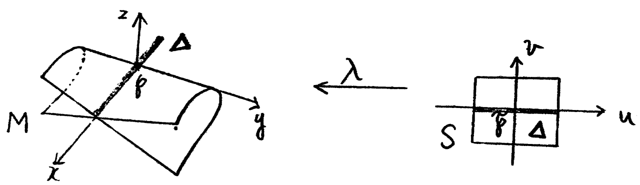
従って次の完全列 (4.9.2) (4.9.3) が得られる．

(4.9.2)　$0 \to O_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F} - M) \to O_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F} - \Delta) \to O_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F} - \Delta)_M \to 0$

(4.9.3)　$0 \to O_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F} - \Delta) \to O_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F}) \to O_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F})_\Delta \to 0$

(4.9.4)　$\lambda_*(O_{\mathbb{P}^3}(\lambda^*\mathbb{F} - \tilde{\Delta})) \overset{\sim}{\leftarrow} O_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F} - \Delta)_M$

証明）　自然な $\lambda$-準同型 $\rho : O_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F} - \Delta)_M \to O_{\mathbb{P}^3}(\lambda^*\mathbb{F} - \tilde{\Delta})$ は $\rho : \varphi(x, y, z) \to (\lambda^*\varphi)(u, v)$ により与えられる．あとは $M$ 上各点のファイバーでの同型を見れば良いが，$\wp \in \Delta$ で調べれば十分である．ここでは $\wp$ が尖点である場合を示しておく（他の特異点の場合は各自に任せる）．$(\lambda^*\varphi)(u, v) = \varphi(u^2, v, uv)$ である．（以下 (4.5)（II）（ハ）の図に従う）．




（イ）$\rho$ は全射である：何者，$\psi(u, v) \in O_{\mathbb{P}^3}(\lambda^*\mathbb{F} - \tilde{\Delta})_{\tilde{\wp}}$ が与えられたとする．$\psi$ は $\tilde{\Delta}$ 上 0 であるから $\psi(u, 0) = 0$（$\tilde{\wp}$ の近傍で $\tilde{\Delta} : v = 0$）．従って $\psi(u, v) = \omega(u, v)v$ と書け

る（但し $\omega(u,v)$ は正則函数）．即ち $\lambda:(u,v)\to(x,y,z)=(u^2,v,uv)$ に注意すれば，ある $\varphi(x,y,z)\in\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F})_{\wp}$ が存在して $\psi(u,v)=\varphi(u^2,v,uv)=(\lambda^*\varphi)(u,v)$ と書ける．しかし，$\varphi(x,0,0)=\psi(u,0)=0$（$\tilde{\wp}$ の近傍で $\Delta:y=z=0$），故 $\varphi(x,y,z)\in(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F}-\Delta)_M)_{\wp}$ である．

（ロ）$\rho$ は単射である事は，$\varphi \bmod (xy^2-z^2)$ が $\lambda^*\varphi$ で一意的に定まることより明らか．

<u>注意 (4.9.5)</u>　(4.9.4) は $\tilde{C}\xrightarrow{\mu}C\hookrightarrow S$ に於て完全列　$0\to\mu_*(\mathcal{O}(\mu^*F-\mathfrak{C}))\to\mathcal{O}(F)_C\xrightarrow{K}\mathcal{M}\to 0$（(1.14)）の存在　即ち同型 $\mu_*(\mathcal{O}(\mu^*F-\mathfrak{C}))\xleftarrow{\sim}\mathrm{Ker}(\mathcal{O}(F)_C\to\mathcal{M})$ の 1 次元高い場合への拡張である．実際 $\mathrm{Ker}(K)=\mathcal{O}(F-\mathrm{Sing}(C))_C$ である

<u>記号 (4.10)</u>　$\mathcal{L}_k(-\Delta)=\left\{f\,\middle|\,\begin{array}{l}f=f(\zeta)\text{ は }k\text{ 次の同次多項式で}\\ \xi\in\Delta\text{ に対し }f(\xi)=0\end{array}\right\}$

<u>(4.11)</u>　$p_g=\dim\mathcal{L}_{n-4}(-\Delta)$

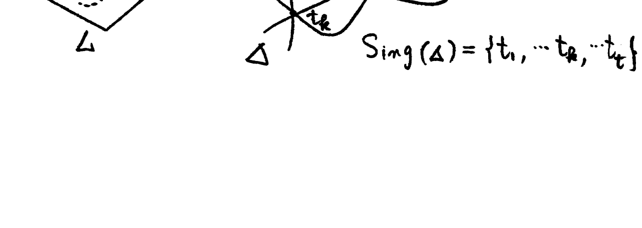
証明）　$\mathbb{F}=(n-4)\mathbb{E}$ とおく．次の $(*)$ でセール双対定理を用いて，$p_g=\dim H^2(S,\mathcal{O})\underset{(*)}{=}\dim H^0(S,\mathcal{O}(K))\underset{(4.9.1)}{=}\dim H^0(S,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\lambda^*\mathbb{F}-[\tilde{\Delta}]))\underset{(4.9.4)}{=}\dim H^0(M,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F}-\Delta)_M)$．一方, $[M]=n\mathbb{E}$ 故 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F}-M)=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4\mathbb{E})$．しかし $H^\nu(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k\mathbb{E}))=0\ (\nu=1,2)$, $H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4\mathbb{E}))=0$ に注意して，(4.9.2) より $H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F}-\Delta))\xrightarrow{\sim}H^0(M,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F}-\Delta)_M)$ を得る．従って $p_g=\dim H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F}-\Delta))=\dim\mathcal{L}_{n-4}(-\Delta)$（何者，$\mathbb{F}=(n-4)[L]$）．

<u>(4.12)</u>　$p_a=\binom{n-1}{3}-(n-4)m+\pi(\Delta)-1$

証明）　$\mathbb{F}=(n-4)\mathbb{E}$ とおく．$p_a+1=\chi(S,\mathcal{O})\underset{(*)}{=}\chi(S,\mathcal{O}(K))\underset{(4.9.1)}{=}\chi(S,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\lambda^*\mathbb{F}-\tilde{\Delta}))\underset{(4.9.4)}{=}\chi(M,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F}-\Delta)_M)\underset{(4.9.2)}{=}\chi(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F}-\Delta))-\chi(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{K}))$（但し $(*)$ でセール双対定理を用いた．最後の式は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F}-M)=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{K})$ より）．しかし同じくセール双対定理より $\chi(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{K}))=-\chi(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})=-1$．従って上の式より続けて $p_a+1\underset{(4.9.3)}{=}\chi(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F}))-\chi(\Delta,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F})_\Delta)+1$．しかし，$\chi(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F}))=\dim H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}((n-4)\mathbb{E})=\dim\mathcal{L}_{n-4}=\binom{n-1}{3}$ 故次の (4.12.1) を示せば (4.12) の証明は終る．

<u>補題 (4.12.1)</u>　$\chi(\Delta,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F})_\Delta)=(n-4)m-\pi(\Delta)+1$（但し $\Delta=\bigcup_j\Delta_j$（既約分解）の非特異モデルを $\hat{\Delta}=\coprod_j\hat{\Delta}_j$ とする時，$\pi(\Delta)-1=\sum_j(\pi(\hat{\Delta}_j)-1)+2t$）

証明）



$$\begin{cases} L:\mathbb{P}^3\text{の一般の平面} \qquad \text{とすると} \\ \mathbb{E}=[L] \quad \mathbb{F}=(n-4)\mathbb{E} \qquad \text{であった} \\ \mathrm{Sing}(\Delta)=\{t_1,\dots t_k,\dots t_t\}\ \text{（これは総，}\Delta\text{ の 3 重点である (4.5)II）.} \\ \hat{\mu}:\hat{\Delta}\to\Delta\subset M\subset\mathbb{P}^3\text{を特異点除去} \\ \hat{\mu}^{-1}(t_k)=\{\hat{t}_{k_1},\hat{t}_{k_2},\hat{t}_{k_3}\} \end{cases}$$

とおく．この時，$\Delta$ の導手 $=\sum_{k=1}^{t}\sum_{\nu=1}^{3}\hat{t}_{k_\nu}$ である．次の（イ）は，$\bigoplus_{\nu=1}^{3}\mathcal{O}_{\hat{\Delta}}(-\hat{t}_{k_\nu})_{\hat{t}_{k_\nu}}\cong\mathcal{O}_\Delta(-t_k)_{t_k}$ の同型より（ロ）は定義より明らか（但し $\mathbb{F}_\Delta$ は $\mathbb{F}$ の $\Delta$ への制限で，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F}-\sum_k t_k)_\Delta=\{\varphi\in\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F})_\Delta\mid\varphi(t_k)=0\ (k=1,2,\dots)\}$）．

（イ）$\hat{\mu}_*(\mathcal{O}_{\hat{\Delta}}(\hat{\mu}^*\mathbb{F}_\Delta-\sum_{k=1}^{t}\sum_{\nu=1}^{3}\hat{t}_{k_\nu}))\overset{\sim}{\leftarrow}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F}-\sum_{k=1}^{t}t_k)_\Delta$

（ロ）$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F}-\sum_{k=1}^{t}t_k)_\Delta\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F})_\Delta\to T\to 0$（完全列）

（但し $\Delta$ 上の層 $T$ に関し，$\mathrm{Supp}(T)=\mathrm{Sing}(\Delta)=\bigcup_{k=1}^{t}t_k\ \dim H^0(\Delta,T)=t$ 従って $\chi(\Delta,T)=t.$）従って，

（ハ）$\chi(\Delta,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F})_\Delta)=\chi(\hat{\Delta},\mathcal{O}_{\hat{\Delta}}(\hat{\mu}^*\mathbb{F}_\Delta-\sum_{k=1}^{t}\sum_{\nu=1}^{3}\hat{t}_{k_\nu}))+t.$

偖，$\vartheta=L\cdot\Delta$（従って $\deg\vartheta=m$）とおくと，$\mathbb{F}_\Delta=(n-4)[\vartheta]$ である．同様に $\vartheta_j=L\cdot\Delta_j$ とおき $\hat{\vartheta}=\hat{\mu}^*\vartheta\ \hat{\vartheta}_j=\hat{\mu}^*\vartheta_j$ と書くと，明らかに $\hat{\vartheta}=\sum_j\hat{\vartheta}_j$ である．次に導手 $\varrho=\sum_{k=1}^{t}\sum_{\nu=1}^{3}\hat{t}_{k_\nu}$ を各 $\hat{\Delta}_j$ に応じて分配して，$\sum_j\varrho_j$ と書く（$\hat{\Delta}=\coprod_j\hat{\Delta}_j$ に対し，$\varrho_j$ は $\hat{\Delta}_j$ 上の因子）．明らかに $\deg\varrho=3t$．$\hat{\Delta}=\coprod_j\hat{\Delta}_j$ 及び，$\hat{\mu}^*\mathbb{F}_\Delta=(n-4)[\hat{\vartheta}]=\sum_j(n-4)[\hat{\vartheta}_j]$ に注意して次の（ニ）を得る．

（ニ）$\mathcal{O}_{\hat{\Delta}}(\hat{\mu}^*\mathbb{F}_\Delta-\sum_{k=1}^{t}\sum_{\nu=1}^{3}\hat{t}_{k_\nu})=\bigoplus_j\mathcal{O}_{\hat{\Delta}_j}((n-4)\hat{\vartheta}_j-\varrho_j)$

曲線に関するリーマン・ロッホの定理より，

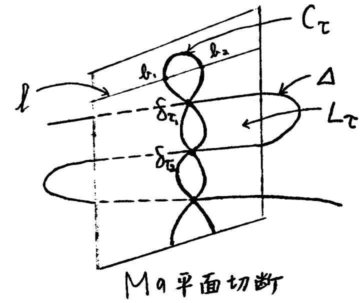
（ホ）$\chi(\hat{\Delta}_j,\mathcal{O}_{\hat{\Delta}_j}((n-4)\hat{\vartheta}_j-\varrho_j))=(n-4)\deg\hat{\vartheta}_j-\deg\varrho_j-\pi(\hat{\Delta}_j)+1$

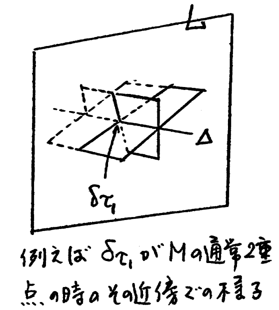
以上（ハ）（ニ）（ホ）より

$$\begin{aligned}\chi(\Delta,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\mathbb{F})_\Delta)&=\sum_j\chi(\hat{\Delta}_j,\mathcal{O}_{\hat{\Delta}_j}((n-4)\hat{\vartheta}_j-\varrho_j))+t\\&=(n-4)\deg\hat{\vartheta}-\deg\varrho-\sum_j(\pi(\hat{\Delta}_j)-1)+t\\&=(n-4)m-\pi(\Delta)+1\end{aligned}$$

(4.13) あと，チャーン数 $c_1^2,c_2$ を計算するのだが，その為に暫（I)，(II)，(III）と分けて準備する．(IV）に於て $c_1^2,c_2$ の $c_1^2,c_2$ の計算が行なわれる（(オ)（ワ)）．事態は，射影 $\lambda:S\to M\hookrightarrow\mathbb{P}^3$ である．$(w,x,y,z)$ を一般の位置での $\mathbb{P}^3$ の同次座標系とし，$M$ の既約方程式を $f(w,x,y,z)=0$ とする．今 $f$ の次数が $n$ である．

(I) $M$ の平面切断（$c_2(S)$ の公式を求める）．




$$\begin{cases} L_\tau : w - \tau z = 0 & (\tau \in \mathbb{P}^1) \\ L_\infty : z = 0 \end{cases}$$

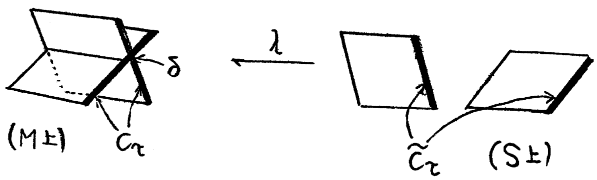
$$\begin{cases} C_\tau = L_\tau \cap M \\ \ell : w = z = 0 & (\text{勿論 } \ell \subset L_\tau) \end{cases}$$

とおく．

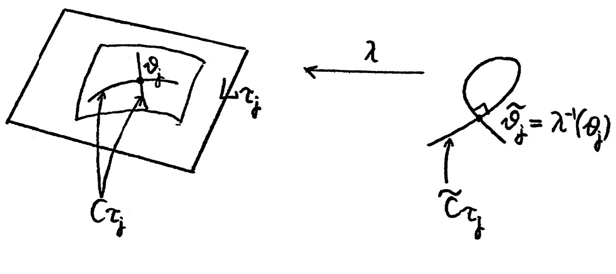
一般の $\tau$ について

$$\begin{cases} L_\tau \cap \Delta = \delta_{\tau,1} + \delta_{\tau,2} + \cdots + \delta_{\tau,m} & (m : \Delta \text{ の次数}) \\ \ell \cap M = b_1 + b_2 + \cdots + b_n & (n : M \text{ の次数}) \end{cases}$$

が成立する．




$c_\tau$ の $S$ 上の（固有）像を $\tilde{C}_\tau$ とする．即ち $\tilde{C}_\tau = \lambda^{-1}[C_\tau]$．$\tilde{C}_\tau$ は一般の $\tau$ について非特異である．一方，有限個の $\tau_1, \ldots \tau_j, \ldots \tau_C$ $(\in \mathbb{P}^1)$ があって，$L_{\tau_j}$ は，$M$ の一点 $\vartheta_j$ で $M$ に接する．即ち $C$ は $\ell$ を通る $M$ の接平面の数である．$C$ は $M$ の類数と呼ばれる．

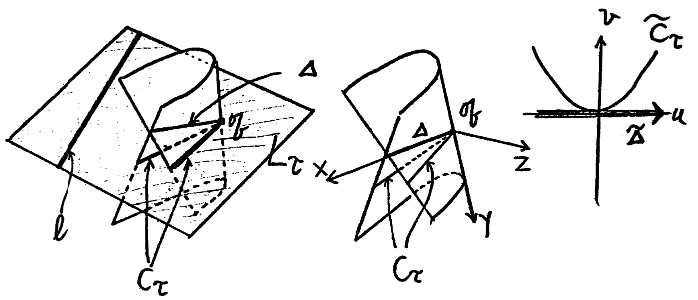



$(w, x, y, z)$ は一般の位置にとった座標であるので，$\vartheta_j \notin \Delta$．実際 $\tilde{\vartheta}_j = \lambda^{-1}(\vartheta_j)$ は $\tilde{C}_{\tau_j}$ の

通常 2 重点である．

<u>(4.13.1)</u>　$\tau \neq \tau_j$ $(1 \leqslant j \leqslant C)$ ならば $\tilde{C}_\tau$ は非特異である．

証明）　$L_\tau$ が $M$ の尖点 $\mathfrak{q}$ を通る場合について $\lambda^{-1}(\mathfrak{q})$ の点の近傍での $\tilde{C}_\tau$ の様子を調べてみる（実際 $\tau \neq \tau_j$ であるので，$\mathrm{Sing}(C_\tau) \subsetneqq L_\tau \cap \Delta$ である．従って $\mathrm{Sing}(\tilde{C}_\tau)$ を調べるには，$\lambda^{-1}(L_\tau \cap \Delta)$ の $\tilde{C}_\tau$ での近傍を見れば良いが，$L_\tau$ が $M$ の尖点以外の他の 2 種類の特異点の 1 つ $\wp$ を通る時，$\lambda^{-1}(\wp)$ の近傍で $\tilde{C}_\tau$ が非特異である事は殆ど明らかである）．




$\mathfrak{q}$ の周りの局所座標を $(X, Y, Z)$，$\tilde{\mathfrak{q}} = \lambda^{-1}(\mathfrak{q})$ の周りの局所座標を $(u, v)$ とすると，局所的に

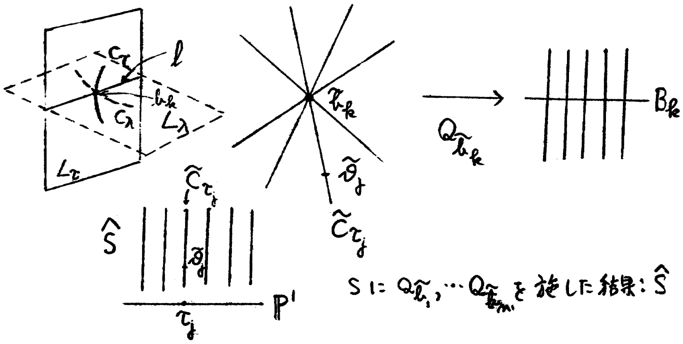
$$\begin{cases} \lambda : (u, v) \to (X, Y, Z) = (u^2, v, uv) \\ M : XY^2 - Z^2 = 0 \\ L_\tau : AX + BY + CZ = 0 \\ \tilde{C}_\tau : Au^2 + Bv + Cuv = 0 \end{cases}$$

と書ける．$(w, x, y, z)$ は一般の位置での同次座標であるので，$\mathfrak{q} = (0, 0, 0)$ で $A \neq 0$，$B \neq 0$，$C \neq 0$，更に $\tilde{\mathfrak{q}} = (0, 0)$ の近傍で $B + Cu \neq 0$ と考えてよい．しかし $\tilde{C}_\tau : (B + Cu)v + Au^2 = 0$ であるので，$\tilde{\mathfrak{q}} = (0, 0)$ は $\tilde{C}_\tau$ の単純点である．従って $\tau \neq \tau_j$ $(1 \leqslant j \leqslant C)$ ならば $\tilde{C}_\tau$ は非特異である事が分る．

<u>定義 (4.13.2)</u>　一般の $\tau$ に対し $g = \pi(\tilde{C}_\tau)$ とおく．この時 $C_\tau$ は，次数 $n$ で，$m$ 個の 2 重点をもつ $L_\tau$ 上の平面曲線であるので，次の（イ）が成立する．

（イ）$2g - 2 = n(n-3) - 2m$

さて $S = \bigcup_{\tau \in \mathbb{P}^1} \tilde{C}_\tau$　　$C_\tau \cap C_\lambda = b_1 + \cdots + b_n$（$= \ell \cap M$ 既出）であるが，更に $\tilde{C}_\tau \cap \tilde{C}_\lambda = \tilde{b}_1 + \cdots + \tilde{b}_n$ と書け，$\tilde{b}_k$ で $\tilde{C}_\tau$ と $\tilde{C}_\lambda$ は正規交叉している．



偖，$\{\tilde{b}_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ が，系 $\{\tilde{C}_\tau\}_{\tau\in\mathbb{P}^1}$ の底点になっているので，その系よりファイバー空間を作る為，中心 $\tilde{b}_k$ の 2 次変換 $Q_{\tilde{b}_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ を順次 $S$ に施して $\hat{S}$ を得る．即ち $\hat{S} = Q_{\tilde{b}_1}Q_{\tilde{b}_2}\dots Q_{\tilde{b}_n}(S)$ とする．この時，

$$c_2(\hat{S}) = \chi(\mathbb{P}^1)\cdot\chi(\tilde{C}_\tau) + \sum_{j=1}^{C}(\chi(\tilde{C}_{\tau_j}) - \chi(\tilde{C}_\tau))$$

（但し $\chi(V)$ は $V$ のオイラー数を表わす）．

併し，$\tilde{\vartheta}_j$ は $\tilde{C}_{\tau_j}$ $(1\leqslant j\leqslant c)$ の唯一の通常 2 重点であるので，$\chi(\tilde{C}_{\tau_j}) - \chi(\tilde{C}_\tau) = 1$．従って

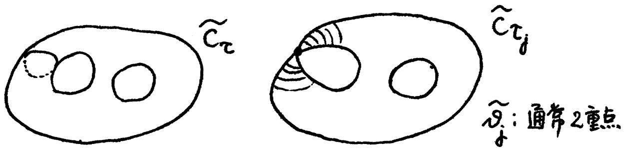
$$c_2(\hat{S}) = 2(2-2g) + c \text{ が成立する．}$$

一方 2 次変換によりオイラー数は 1 つづつ殖えるので，

$$c_2(S) = c_2(\hat{S}) - n$$

従って次の（ロ）を得る．

（ロ）$c_2(S) = 4 - 4g + c - n$




（II）極曲線：

$$M : f = f(w,x,y,z) = 0 \text{ であった．}$$
$$M_x : \partial_x f = 0 \quad \text{とする}$$

（但し $\partial_x f = \frac{\partial}{\partial x} f(w,x,y,z)$：$(n-1)$ 次）

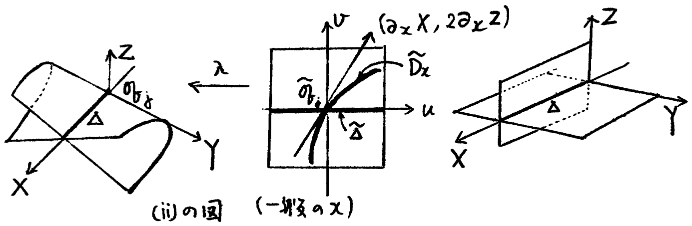
$P \in \Delta$ ならば $\partial_x f(P) = 0$ であるので，ある曲線 $Dx$ が存在して $Mx \cap M = \Delta \cup Dx$ と書ける．

定義 (4.13.3)　$Dx$ を $M$ の極曲線と呼ぶ.

俖，$(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ を $\mathbb{P}^3$ のある定まった座標系とし，$\zeta_\nu = a_{\nu 0}w + a_{\nu 1}x + a_{\nu 2}y + a_{\nu 3}z$ と書き，$a_{\nu k}$ を助変数と見る．$\partial_x f = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial \zeta_\nu}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \zeta_\nu} = \sum_{\nu=0}^{3} a_{\nu 1}\frac{\partial f}{\partial \zeta_\nu}$ は $a_{\nu 1}$ について 1 次であるので，$\{D_x\}$ は 1 次系を成す.

(4.13.4)　$\{D_x\}$ の底点は $M$ の尖点 $\mathfrak{q}_j$ 全体と一致する.

証明）　(i) 明らかに，$\wp \notin \Delta$ は $\{D_x\}$ の底点でない．以下 $\Delta$ の点を考える.




$(X, Y, Z) = (u^2, u, uv) \underset{\lambda}{\leftarrow} (u, v)$　　(iii) の図

(ii) 各尖点 $\mathfrak{q}_j$ を考える．$\mathfrak{q}_j$ は $\{D_x\}$ の底点である．何者；$\mathfrak{q}_j$ で $w \neq 0$ として，$w = 1$ とおいて $(x; y, z)$ を $\mathbb{P}^3$ の非同次座標と考えると，$f(1, x, y, z) = XY^2 - Z^2$．従って，$\partial_x f = (\partial_x X)\cdot Y^2 + (2\partial_x Y)\cdot XY - (2\partial_x Z)\cdot Z$．而して，$\lambda^*(\partial_x f)(u, v) = \partial_x X \cdot v^2 + 2\partial_x Y \cdot u^2 v - 2\partial_x Z \cdot uv = v(\partial_x X \cdot v + 2\partial_x Y \cdot u^2 - 2\partial_x Z \cdot u)$　従って $\tilde{\Delta} = \lambda^{-1}[\Delta] : v = 0$, $\tilde{D}_x = \lambda^{-1}[D_x] : \partial_x X \cdot v + 2\partial_x Y \cdot u^2 - 2\partial_x Z \cdot u = 0$　即ち各 $\tilde{D}_x$ は $\tilde{\mathfrak{q}}_j = (0, 0)$ を通る．従って任意の $x$ に対し $\mathfrak{q}_j \in D_x$．更に $\mathfrak{q}_j$ は一般の $D_x$ の単純点である事も注意しておく．（一般の $x$ に対し，$\mathfrak{q}_j$ で $\partial_x X \neq 0$, $\partial_x Y \neq 0$, $\partial_x Z \neq 0$ であるので，その時の $\tilde{D}_x$ の図は上述の如し）

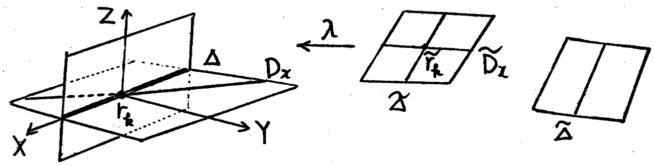
(iii) $\wp \in \Delta$ 且 $\wp \neq \mathfrak{q}_j$ ならば一般の $x$ に対し $\wp \notin D_x$　何者；$\wp$ が 2 重点の時，(ii) の場合と同じ様な座標をとって，$f(1, x, y, z) = Y \cdot Z$　従って $\partial_x f = (\partial_x Y)\cdot Z + (\partial_x Z)\cdot Y$．一般の $x$ をとる時，$\wp$ の近傍で $\partial_x Y \neq 0$, $\partial_x Z \neq 0$．従って，$\partial_x f = 0$ を考える時 $Z = 0 \Leftrightarrow Y = 0$ 即ち $\wp$ の近傍では $M_x \cap M = \Delta$ となり，$D_x$ は $\wp$ を通らない．$\wp$ が 3 重点の時も，$f = XYZ$ と書けて，同様な議論が成立する．以上 (i) (ii) (iii) より $\{D_x\}$ の底点は尖点全体 $\{\varrho_j\}$ と一致する.　(終)

従って，$\{D_x\}$ は $\tilde{\mathfrak{q}}_j$ 以外に底点を持たぬ．一方一般の $x$ に対し，$\tilde{\mathfrak{q}}_j$ は $D_x$ の単純点である事は見てあるので，ベルチニの定理より $\tilde{D}_x$ は非特異点である.

俖，$L$ を $\mathbb{P}^3$ の平面とし，$\mathbb{E} = [L]$ とおく．従って定義より $[M_x] = (n-1)\mathbb{E}$．一方 $M_x \cap M = \Delta \cup D_x$ であるので，次の（ハ）を得る.

（ハ）$[\tilde{\Delta} + \tilde{D}_x] = (n-1)\tilde{\mathbb{E}}$（但し $\tilde{\mathbb{E}} = \lambda^* \mathbb{E}$）

次に一般の $x$ を固定して，$D_x$ と $\Delta$ の交点を調べる．上述より $D_x \cap \Delta$ が $M$ の尖点 $\mathfrak{q}_1, \ldots \mathfrak{q}_\gamma$ 総を含む事は分っている．$\Delta$ の一般の点のところで，$f(1,x,y,z) = YZ$, $f_x = Y_x Z + Z_x Y = 0$ 即ち，$(\partial_x f)_{Z=0} = Z_x Y \quad (\partial_x f)_{Y=0} = Y_x Z$.




この時 $P \in D_x \cap \Delta \subset M_x \cap M$ では $Z_x(P) = 0 \quad Y_x(P) \neq 0$ 又は $Z_x(P) \neq 0$, $Y_x(P) = 0$ である．例えば前者の場合，$P$ の近傍は $Y = 0$ 上では $\Delta$, $Z = 0$ 上では $\Delta + D_x$ である．従って $Z_x Y_x = 0$ と $\Delta$ の交点を $r_1, \ldots r_\sigma$ とすれば，$D_x \cap \Delta = \mathfrak{q}_1 + \cdots + \mathfrak{q}_\gamma + r_1 + \ldots r_\sigma$ $\tilde{D}_x \cap \tilde{\Delta} = \tilde{\mathfrak{q}}_1 + \cdots + \tilde{\mathfrak{q}}_\gamma + \tilde{r}_1 + \cdots + \tilde{r}_\sigma$ と書ける（後者は前者より）．$\tilde{r}_k$ は $\tilde{D}_x$ の単純点である（ベルチニ定理）．従って

（ニ）$\tilde{D}_x \cdot \tilde{\Delta} = \gamma + \sigma$

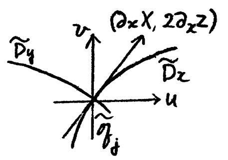
(III) 第 2 次極曲線：

$M_{xx} : \partial_x^2 f = 0$ とする．$M_{xx}$ は $(n-2)$ 次である．

先ず (i) 尖点 $\mathfrak{q}_j \in \Delta$ では $f = f(1,x,y,z) = XY^2 - Z^2$ 故座標 $(w,x,y,z)$ を一般にとってある時 $f_{xx}(\mathfrak{q}_j) = -2Z_x^2 \neq 0$ 即ち $M_{xx} \not\ni \mathfrak{q}_j$ (ii) 3 重点 $t_i \in \Delta$ では，$f = XYZ$ 故 $\partial_x^2 f = \partial_x X \cdot \partial_x Y \cdot Z + \partial_x Y \cdot \partial_x Z \cdot X + \partial_x Z \cdot \partial_x X \cdot Y + \partial_x^2 X \cdot Y \cdot Z + \cdots$ で，$t_i$ で $\partial_x X \cdot \partial_x Y \cdot \partial_x Z \neq 0$. 従って $M_{xx}$ と，$\Delta$ は $t_i$ で正規交叉をする．(iii) $\Delta$ の一般の点 $P$ では，$f = YZ$ 従って $f_{xx} = Y_x Z_x + Y_{xx} Z + Z_{xx} Y$ で，$P \in M_{xx} \cap \Delta$ の為には，$f_{xx}(P) = Y_x(P) Z_x = 0$ 即ち $P = r_i$ である事が必要十分である．一方 $r_i$ で，$D_x$ と $\Delta$ は正規交叉である故 $Z_{xx}(r_i) \neq 0$ で，$M_{xx}$ と $\Delta$ は $r_i$ で正規交叉をする．従って次が分った．

$$M_{xx} \cap \Delta = r_i + \cdots + r_\sigma + t_1 + \cdots + t_t$$

各点 $r_i$ 又は $t_i$ で $M_{xx}$ は単純点を持ち，$\Delta$ の各成分に正規交叉．




（ホ）$M_{xx} \cdot \Delta = \sigma + 3t$

(IV) 最後にもう一つ $D_y : \partial_y f = 0$ を考える．$D_x \cap D_y \cap \Delta = \bigcup \mathfrak{q}_i$ であるが，$\wp \in D_x \cap D_x$ 且 $\wp \notin \Delta$ なる点を考えてみよう．即ち $f_x(\wp) = f_y(\wp) = 0$ 且 $\wp \notin \Delta$ である．一般に $P$ に於る $M$ の接平面 $T_P(M)$ は

$$T_P(M) : f_w(P)_w + f_x(P)x + f_y(P)y + f_z(P)z = 0$$

であるので，$\wp \in D_x \cap D_x$ の所では，$T_\wp(M) = L_{\tau_j}$ である（但し $\tau_j = \frac{f_x(\wp)}{f_y(\wp)}$. $L_\tau : w - \tau z = 0$ であった）．従って $\wp = \vartheta_j$ である（(I) での記号，$\vartheta_j$ は $L_{\tau_j}$ が $M$ に接する点）．逆に

$\wp = \vartheta_j$ のとき $f_x(\vartheta_j) = f_y(\vartheta_j) = 0$ 故 $\vartheta_j \in D_x \cap D_y$．従って次が得られる．

$$\tilde{D}_x \cap \tilde{D}_y = \tilde{\mathrm{q}}_1 + \cdots + \tilde{\mathrm{q}}_\gamma + \tilde{\vartheta}_1 + \ldots \tilde{\vartheta}_c$$

（へ）$\tilde{D}_x^2 = \tilde{D}_x \cdot \tilde{D}_y = \gamma + c$
倚，$\mathbb{E} = [L_\tau]$　$\tilde{\mathbb{E}} = \lambda^*\mathbb{E} = [\tilde{C}_\tau]$　$\tilde{\mathbb{E}}^2 = \tilde{C}_\tau^2 = \tilde{C}_\tau \cdot \tilde{C}_{\tau'} = n$ $\tilde{\mathbb{E}}^2 + K \cdot \tilde{\mathbb{E}} = \tilde{C}_\tau^2 + K \cdot \tilde{C}_\tau = 2\pi(\tilde{C}_\tau) - 2 = 2g - 2$ であった．従って（イ）を用いて次を得る．
（ト）$\tilde{\mathbb{E}}^2 = n$
（チ）$K \cdot \tilde{\mathbb{E}} = n(n-4) - 2m.$
ここで，(4.9.1) と（ハ）より次が得られる．

$$[\tilde{\Delta}] = (n-4)\tilde{\mathbb{E}} - K$$
$$[\tilde{D}_x] = (n-1)\tilde{\mathbb{E}} - [\tilde{\Delta}] = 3\tilde{\mathbb{E}} + K$$

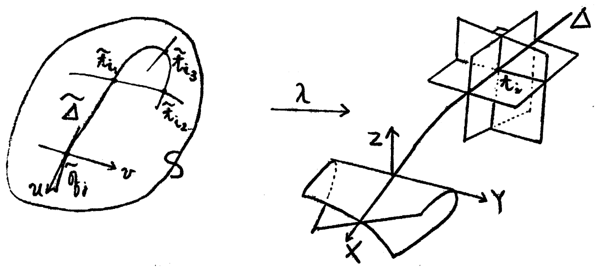
倚，（ニ），（チ）と上の式より

$$\gamma + \sigma = \tilde{D}_x \cdot \tilde{\Delta} = (3\mathbb{E} + K) \cdot ((n-4)\tilde{\mathbb{E}} - K) = 3n(n-4) + (n-7)K\tilde{\mathbb{E}} - K^2$$
$$= n(n^2 - 8n + 16) - (2n - 14)m - c_1^2$$

併し $\sigma = (n-2)m - 3t$（何者（ホ）に於て，$M_{xx}$，$\Delta$ の次数は $n-2$，$m$ である）故
（リ）$c_1^2 = n(n-4)^2 - (3n-16)m + 3t - \gamma$
次に（へ）（ト）（チ）より

$$\gamma + c = \tilde{D}_x^2 = (3\tilde{\mathbb{E}} + K)^2 = n(6n - 15) - 12m + c_1^2$$

従って（イ）（ロ）（リ）及び上の $\gamma + c$ の式より
（ヌ）$c_2 = n(n^2 - 4n + 6) - (3n - 8)m + 3t - 2\gamma$
あと求めるべきは $\gamma$ のみである．




$\hat{\tilde{\Delta}}$ を $\tilde{\Delta}$ の非特異モデルとする．各 $\tilde{t}_{i_\nu}$ は $\tilde{\Delta}$ の 2 重点であり総数は $3t$ である．一方 $\mathrm{Sing}(\tilde{\Delta}) = \bigcup_{i_\nu} \tilde{\mathrm{q}}_{i_\nu}$ であった．従って $\pi(\hat{\tilde{\Delta}}) = \pi(\tilde{\Delta}) - 3t$．一方 $\hat{\tilde{\Delta}} \to \hat{\Delta}$ は 2 葉被覆写像で，$\tilde{\mathrm{q}}_j$

$(=\hat{\mathrm{q}}_j)$ が分枝点である．従って $\hat{\hat{\Delta}}$ のオイラー標数は $\hat{\Delta} = \coprod \hat{\Delta}_j$ に注意して，

$$\begin{aligned} 2 - 2\pi(\hat{\hat{\Delta}}) &= 2(2 - 2\pi(\hat{\Delta})) - \gamma \\ &= 2\sum_j (2 - 2\pi(\hat{\Delta}_j)) - \gamma \end{aligned}$$

従って，この式と $\pi(\hat{\hat{\Delta}}) = \pi(\tilde{\Delta}) - 3t$ より

$$-\gamma = 2\sum_j (2\pi(\hat{\Delta}_j) - 2) - 2\pi(\tilde{\Delta}) + 2 + 6t$$

しかし，$2\pi(\tilde{\Delta}) - 2 = (\tilde{\Delta} + K)\cdot\tilde{\Delta} = (n-4)\tilde{\mathbb{E}}\cdot\tilde{\Delta} = (n-4)2m \quad \pi(\Delta) - 1 = \sum_j(\pi(\hat{\Delta}_j) - 1) + 2t$ に注意して

（ル）$-\gamma = 4\pi(\Delta) - 4 - (2n-8)m - 2t$

従って（リ）（ヌ）に代入して

（オ）$c_1^2 = n(n-4)^2 - (5n-24)m + t + 4\pi(\Delta) - 4$

（ワ）$c_2 = n(n^2 - 4n + 6) - (7n-24)m - t + 8\pi(\Delta) - 8$

例 (4.14)　エンリケスの曲面

$\mathbb{P}^3$ の同次座標を $(z_0, z_1, z_2, z_3)$ として，

$$\begin{aligned} M : f(z_0, z_1, z_2, z_3) = a_0(z_0z_1z_2)^2 + a_1(z_1z_2z_3)^2 + a_2(z_2z_3z_0)^2 \\ + a_3(z_3z_0z_1)^2 + z_0z_1z_2z_3\psi(z_0, z_1, z_2, z_3) = 0 \end{aligned}$$

で定義されるとする．（但し $\psi$：一般の 2 次形式）

定義 (4.14.1)　一般の $M$ の非特異モデル $S$ をエンリケス曲面と呼ぶ．

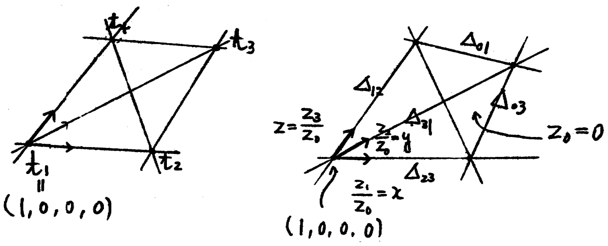
(4.14.2)　エンリケス曲面は $p_a = p_g = 0$ で，有理的でない曲面の最初の例である．

先ず一般の $M$ に対し $\Delta = \mathrm{Sing}(M)$ を求めてみる．$a_i$ と $\psi$ を動かして，1 次系 $\Lambda = \{M\}$ を得るが，ベルチニの定理より一般の $M$ は底点以外に特異点を持たない．

$\Delta_{\lambda\nu} : z_\lambda = z_\nu = 0$ とおく時，明らかに $\{M\}$ の底点全体は $\bigcup_{0\leqslant\lambda<\nu\leqslant 3}\Delta_{\lambda\nu}$ と一致する．以下の議論（i）（ii）より一般の $M$ をとる時 $\Delta = \bigcup_{0\leqslant\lambda<\nu\leqq 3}\Delta_{\lambda\nu}$ が示される．適当な座標変換 $(z_0, \ldots z_3) \to (c_0z_0, \ldots c_3z_3)$ により，

$$M : f = (z_0z_1z_2)^2 + (z_1z_2z_3)^2 + (z_2z_3z_0)^2 + (z_3z_0z_1)^2 + z_0z_1z_2z_3\psi = 0$$

（但し $\psi$：一般の 2 次形式）としてよい．




以下 $x = \frac{z_1}{z_0}$ $y = \frac{z_2}{z_0}$ $z = \frac{z_3}{z_0}$ とおく．

（i）$t_i = (0, \ldots 1, \ldots 0)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ は 3 重点である．

例えば $t_1 = (1, 0, 0, 0)$ の近傍で，特異点を調べてみる．$t_1$ の近傍で，

$$M : f = x^2y^2z^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 + xyz\psi(1, x, y, z) = 0 \qquad (\psi(1, 0, 0, 0) \neq 0)$$

$\alpha = \psi + xyz$ $(d(t_1) \neq 0)$ と置き新しい座標系 $(\xi, \eta, \zeta) = (\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha})$ を用いて，

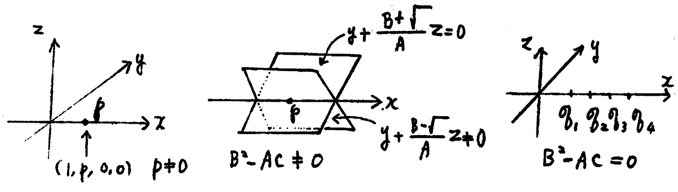
$$f = \alpha xyz + y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 = 0$$

従ってこの式に $\alpha^{-4}$ を掛けて，$t_1$ の近傍では

$$M : \xi\eta\zeta + \eta^2\zeta^2 + \zeta^2\xi^2 + \xi^2\eta^2 = 0$$

更に新しい座標系 $(X, Y, Z)$ を $(\xi, \eta, \zeta) = (\frac{X}{A}, \frac{Y}{A}, \frac{Z}{A})$ で定める（但し，$A = 1 + X^2 + Y^2 + Z^2 + XYZ$）．この時 $(X + YZ)(Y + ZX)(Z + XY) = AXYZ + Y^2Z^2 + Z^2X^2 + X^2Y^2$ に注意すれば変換 $(\xi, \eta, \zeta) = (\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\alpha})$ の時の変化に注意して $f(1, x, y, z) = (X + YZ)(Y + ZX)(Z + XY)$．この式より明らかに $t_1$ は 3 重点である．他の $t_i$ についても同様．従って 3 重点の数 $t = 4$.

（ii）$\Delta - \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ の各点は $M$ の 2 重点である．例えば $x$ 軸上の特異点を調べてみる．




$\wp = (1, p, 0, 0)$ $(p \neq 0)$ の近傍での $M$ の式 $f$ は，

$$\begin{aligned} f &= x^2y^2 + (yz + x\psi + x^2yz)yz + x^2z^2 \\ &= A\left(y + \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}Z\right)\left(y + \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}Z\right) \end{aligned}$$

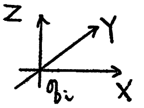
（但し $A = x^2$ $2B = yz + x\psi + x^2yz$ $C = x^2$ $\wp$ の近傍で $A \neq 0$ である）$B^2 - AC$ の値により次の 2 つの場合（イ）（ロ）に分れる．

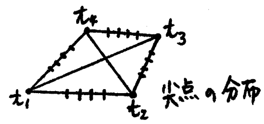
（イ）$(B^2-AC)(\wp)\neq 0$ ならば $\wp$ は通常 2 重点である．何者，この時 $\sqrt{B^2-AC}$ は正則で $\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A}\neq\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A}$

（ロ）$(B^2-AC)(\wp)=0$ なる $\wp$ は $x$ 軸上（但し $x\neq 0$）に 4 点（$\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2,\mathfrak{q}_3,\mathfrak{q}_4$ とする）あり，それらは尖点である．何者，$(B^2-AC)(1,x,0,0)=x^2(\psi(1,x,0,0)-x^2)$ で，$\psi(1,x,0,0)^2-x^2=0$ は $x$ の 4 次方程式で，零は 4 つ $\mathfrak{q}_1,\mathfrak{q}_2,\mathfrak{q}_3,\mathfrak{q}_4$ である．新しい座標 $(X,Y,Z)=(\frac{B^2-AC}{A^2},z,y+\frac{B}{A}z)$ をとると，$\mathfrak{q}_i$ が原点となり，

$$f=A(Z+\sqrt{X}Y)(Z-\sqrt{X}Y)=A(Z^2-XY^2)=0$$

従って $\mathfrak{q}_i$ は尖点である．而して，各軸で考えて尖点の数 $\gamma=4\times 6=24$ である．






（iii）以上で次の事が分る．

$M$ は通常特異点のみをもつ．（従って $M$ の非特異モデル $S$ に関して $p_a,p_g,c_1^2,c_2$ 等の計算は (4.6) の公式が使える．）

$$\begin{array}{ll}
t=4 & \text{（3 重点の個数）}\\
\gamma=24 & \text{（尖点の個数）}\\
n=6 & \text{（}M\text{ の次数）}\\
m=6 & \text{（}\Delta\text{ の次数）}\\
\pi(\Delta_{\lambda\nu})=0 & \text{従って，}\pi(\Delta)-1=\sum_{\lambda<\nu}(\pi(\Delta_{\lambda\nu})-1)+2t=2
\end{array}$$

以上の数値を (4.6)(4.11) に代入して

$$\begin{array}{llll}
p_a=0 & c_1^2=0 & c_2=12 & p_g=0\\
q=p_g-p_a=0 & b_1=2q=0 & b_2=10 &
\end{array}$$

これらの計算には，直接には $\gamma$ の値が必要でない．蛇足ながら $\gamma=2(n-4)m+2t-4\pi(\Delta)+4=24$ により $\gamma$ の値を確かめる事ができる．

例 (4.15)　$M$ の $\mathbb{P}^3$ での方程式を

$$M: f=Ag^2+2Bgh+Ch^2=0$$

$$\left(\begin{array}{l}
\text{但し } g,\ h,\ A,\ B,\ C \text{ は各々，次数 } r,\ s,\ n-2r,\ n-r-s,\ n-2s\\
\text{（但し } r\geqq s,\ n\geqq 2r,\ n\geqq r+s+1\text{）の一般の同次多項式とする．}\\
\text{従って } f \text{ の全体の次数は } n \text{ である．}
\end{array}\right)$$

$\Delta = \mathrm{Sing}(M)$ を調べる．(4.14) の場合と同様にベルチニの定理を用いる事により，

$$\Delta : g = h = 0$$

$\Delta$ は非特異既約曲線で $\pi(\Delta) - 1 = \frac{1}{2}rs(r + s - 4)$．$\wp \in \Delta$ を考える．$g$，$h$，$A$，$C$ は一般にとってあるので，$\wp$ で，$A$ と $C$ は同時に 0 とならない．今 $A(\wp) \neq 0$ とする．$\wp$ の近傍で

$$M : f = A\left(g + \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}h\right)\left(g + \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}h\right) = 0$$

(4.14) の場合と同様に

（イ）$(B^2 - AC)(\wp) \neq 0$ ならば $\wp$ は通常 2 重点

（ロ）$(B^2 - AC)(\wp) = 0$ ならば $\wp$ は尖点

一方 $\begin{cases} B^2 - AC \text{ の次数} & 2(n - r - s) \\ \Delta\text{の次数} & m = rs \end{cases}$ に注意して

$$\gamma = 2rs(n - r - s) \qquad t = 0$$

$M$ は通常特異点のみを持ち，その非特異モデル $S$ に関して (4.6)(4.11) により $p_a, c_1^2, c_2, p_q$ を求めてみる．

$$\begin{aligned} p_a &= \binom{n-1}{3} - (n-4)rs + \frac{1}{2}rs(r+s-4) \\ c_1^2 &= n(n-4)^2 - (5n-24)rs + 2rs(r+s-4) \\ c_2 &= n(n^2 - 4n + 6) - (7n - 24)rs + 4rs(r+s-4) \\ p_g &= \binom{n-1-r}{3} + \binom{n-1-s}{3} - \binom{n-r-s-1}{3} \end{aligned}$$

実際に上の式の計算を行なって $p_a = p_g$ が分る．

$$q = p_g - p_a = 0$$

蛇足ながら $p_g$ の計算を示しておく．((4.11) を用いる)

$$p_g = \dim \mathcal{L}_{n-4}(-\Delta) = \dim\{\varphi \mid \varphi \text{ は } n-4 \text{ 次で}\Delta\text{上}\varphi = 0\}$$

この $\varphi$ はネーターの定理よりある $\xi \in \mathcal{L}_{n-r-4}$，$\eta \in \mathcal{L}_{n-s-4}$ が存在して $\varphi = \xi g + \eta h$ と書ける．従って次の完全列が存在する

$$0 \to \mathcal{L}_{n-4-r-s} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{L}_{n-r-4} \oplus \mathcal{L}_{n-s-4} \xrightarrow{\beta} \mathcal{L}_{n-4}(-\Delta) \to 0$$

$$\left(\begin{aligned} \text{但し } \alpha &: \tau \to (\xi, \eta) = (h\tau, -g\tau) \\ \beta &: (\xi, \eta) \to \varphi = \xi g + \eta h \end{aligned}\right)$$

而して $\dim\mathcal{L}_{n-4}(-\Delta) = \dim\mathcal{L}_{n-r-4} + \dim\mathcal{L}_{n-s-4} - \dim\mathcal{L}_{n-4-r-s}$ あとは $\dim\mathcal{L}_n = \binom{n+3}{3}$ に注意すればよい.

問題 (4.16)　$M$ の式 $f$ が具体的に与えられた場合その非特異モデル $S$ に対し $q = \dim H^1(S,\mathcal{O})$　　$p_g = \dim H^2(S,\mathcal{O})$ の公式が (4.6)(4.11) で得られる.

次に $\Theta$ を，正則ベクトル場の芽の層とする時，$\dim H^\nu(S,\Theta)$ を表わす公式を求めよ.

## II 章　一般型代数曲面上の多重標準 1 次系

### §5. 記号

(5.0)　II 章を通じて次の記号を用いる．

- ∘ $S$：非特異代数曲面
- ∘ $K$：$S$ の標準バンドル又は標準因子
- ∘ $x, y, z$：$S$ 上の点
- ∘ $C, C_1, C_2, \ldots, \theta$：$S$ 上の既約曲線
- ∘ $X, Y, D$：$S$ 上の因子
- ∘ $m, n, h, i, j, k \in \mathbb{Z}$
- ∘ $D = \sum n_i C_i$ と書く時は $C_i$：既約曲線 $n_i \in \mathbb{Z}$.

$$D > 0 \Leftrightarrow n_i > 0 \text{ と約束する．}$$

- ∘ $F$：$S$ 上複素直線バンドル

　$\mathcal{O}(F)$：$S$ 上 $F$ の正則切断の芽の層

- ∘ $\mathcal{O}(F - C) = \{\varphi \in \mathcal{O}(F) \mid C \text{ 上} \varphi = 0\} \cong \mathcal{O}(F - [C])$
- ∘ $\mathcal{O}(F - x - y - \cdots - z) = \{\varphi \in \mathcal{O}(F) \mid \varphi(x) = \varphi(y) = \cdots = \varphi(z) = 0\}$

最後の記法を各点に重複度が含まれている場合に拡張する．

適当な開被覆 $S = \bigcup_j U_j$ をとり，$F = \{f_{jk}(z)\}$ とする．$S$ の開部分集合 $V$ 上の $\mathcal{O}(F)$ の正則切断 $\varphi$ は，$U_j \cap V$ 上 $\varphi : z \to (z, \varphi_j(z))$ であり，正則函数 $\{\varphi_j(z)\}$ が，$U_j \cap U_k \cap V$ 上 $\varphi_j(z) = f_{jk}(z)\varphi_k(z)$ を満たすものである．

今 $x \in S$ 中心の局所座標を $(z_1, z_2)$ として，

$$\varphi_j(z) = \sum_{m+n \geqq h} a_{mn} z_1^n z_2^m \qquad (\text{或る } a_{mn} \neq 0 \quad m + n = h)$$

となる時（今 $x \in U_j$ である）『$x$ は $\varphi$ の $h$ 次の零である』と言う．

次の定義を行なう．

∘ $$\mathcal{O}(F - \underbrace{hx - ky - \cdots}_{\text{有限個}}) = \left\{ \varphi \in \mathcal{O}(F) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi \text{ は } x, y, \ldots \text{ で次数} \geqq h, \\ \geqq k, \ldots \text{ の零を持つ} \end{array} \right\}$$

従って
$$\begin{cases} \mathcal{O}(F - hx - ky)_z = \mathcal{O}(F)_z & (z \neq x, \neq y) \\ \mathcal{O}(F)_x / \mathcal{O}(F - hx - ky)_x \cong \mathbb{C}^{\frac{1}{2}h(h+1)} & \end{cases}$$

定義 (5.0.1)　$\mathbb{C}_x^m$ は $(\mathbb{C}_x^m)_z = \begin{cases} \mathbb{C}^m & (z = x) \\ 0 & (z \neq x) \end{cases}$

なる層を表わす．従って

(5.0.2) $\mathcal{O}(F)/\mathcal{O}(F-hx-ky) \cong \mathbb{C}_x^{\frac{1}{2}h(h+1)} \oplus \mathbb{C}_y^{\frac{1}{2}h(k+1)}$

(5.0.3) $D=\sum n_iC_i>0$ とする．各 $U_j$ 上では，正則函数 $\psi_j$ に対し $D=(\psi_j)$ と書ける．この時 (2.4) より

$$\mathcal{O}(F-D)=\{\varphi\in\mathcal{O}(F)\mid\varphi_j/\psi_j \text{が正則}\}.$$

この様な $\varphi$ は『$D$ で割れる』と言う．

定義 (5.0.4) イ）$\mathcal{O}(F-D-hx-ky-\cdots)=\mathcal{O}(F-D)\cap(F-hx-ky-\cdots)=\{\varphi\in\mathcal{O}(F)\mid$ $\varphi$ は $D$ で割れて，$x,y,\ldots$ で次数 $\geqq h,\geqq k\ldots$ の零をもつ $\}$

ロ）$\mathcal{O}(F-hx-ky-\cdots)_C=\mathcal{O}(F-hx-ky-\cdots)/\mathcal{O}(F-C-hx-ky-\cdots)$ は $\mathcal{O}(F-hx-ky-\cdots)$ の $C$ への制限である．

定義 (5.0.5) $D=\sum n_iC_i>0$ に対し，$\psi\in H^0(S,\mathcal{O}([D])$ を適当に選ぶと（但し $\psi\neq 0$），$D=(\psi)$ と書ける．次の定義をする（$\psi$ に依らぬ）．

$$x\in D\Leftrightarrow\psi(x)=0\left(\Leftrightarrow x\in\bigcup_i C_i\right)$$

この時 $\psi$ の零点 $x$ の次数を『$x$ に於る $D$ の重複度』と言う．$x$ が $\psi$ の単純零点，重複零点であるに応じて，$x$ は $D$ の『単純点』,『重複点』であるに応じて，$x$ は $D$ の『単純点』,『重複点』であると言う．次は明らか．

命題 (5.0.6) $x\in D$ が $D$ の $m$ 重点の時，$h\geqq m$ ならば，

$$\mathcal{O}(F-D-hx-ky-\cdots)=\mathcal{O}(F-D-ky-\cdots)$$

定義 (5.1) $|F|=\{D=(\varphi)\mid\varphi\in H^0(S,\mathcal{O}(F)),\varphi\neq 0\}$ であったが，$x$ が総の $D\in|F|$ に含まれる時，$x$ を $|F|$ の底点と呼ぶ．

(5.1.1) $x$ が $|F|$ の底点である．

$$\Leftrightarrow \text{総の}\varphi\in H^0(S,\mathcal{O}(F)) \text{ に対し}\varphi(x)=0$$

## §6. 消滅定理

記号 (6.0) $h^+=\max\{h,0\}$

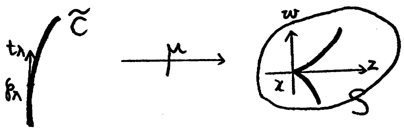
定理 (6.1) $x,y\in C$ に於る $C$ の重複度を，各 $m,n$ とする．もし $FC-C^2-KC>(h-m+1)^+m+(k-n+1)^+n$ ならば $H^1(C,\mathcal{O}(F-hx-ky)_C=0$ である．

証明）（イ）$C$ が非特異の場合：$m = n = 1$ である．

$\mathcal{O}(F-hx-ky)_C = \mathcal{O}_C(F_C-hx-ky)$. $\mathfrak{R}$ を $C$ 上の標準バンドルとすると, セール双対定理より, $H^1(C, \mathcal{O}_C(F_C-hx-ky) \cong H^0(C, \mathcal{O}_C(\mathfrak{R}-F_C+[hx]+[ky]))$. $\mathfrak{f} = \mathfrak{R}-F_C+[hx]+[ky]$ と置くと, $\mathfrak{R}$ に (3.9) を通用して $\mathfrak{f} = K_C+[C]_C-F_C+[hx]+[ky]$　従って $c(\mathfrak{f}) = KC+C^2-FC+h+k$. 一方 $h+k = (h-m+1)^+m+(k-n+1)^+_n$（仮定）故 $c(\mathfrak{f}) < 0$. 而して $H^0(C, \mathcal{O}_C(\mathfrak{f})) = 0$ 故に $H^1(C, \mathcal{O}(F-hx-ky)_C) = 0$

（ロ）一般の場合：$\mu : \tilde{C} \to C$ を特異点除去とし，$\mu^{-1}(x) = \{\wp_1, \dots \wp_\lambda, \dots \wp_r\}$ とする．中心 $\wp_\lambda$ の $\tilde{C}$ の局所座標 $t_\lambda$ を次の様にする（(1.2)）.

$$\mu : t_\lambda \to (P_\lambda(t_\lambda), t_\lambda^{m_\lambda}) \text{ (但し } P_\lambda(t_\lambda) \in t_\lambda^{m_\lambda}\mathbb{C}\{t_\lambda\})$$




$R(w,z) = \prod_{\lambda=1}^r R_\lambda(w,z)$, $\sigma_\lambda = t_\lambda^{-C_\lambda}(a_{\lambda_0}+a_{\lambda_1}t_\lambda+\cdots)$（但し $a_{\lambda_0} \neq 0$），導手 $\mathfrak{C} = \sum_{\text{特異点}}\sum_\lambda c_\lambda\wp_\lambda$ 等の記法は (1.2)(1.3.1) に依る．$\vartheta_x = \sum_{\lambda=1}^r(h-m+1)^+m_\lambda\wp_\lambda$ と置く．$m = \sum_{\lambda=1}^r m_\lambda$ に注意して，$\deg\vartheta_y = (h-m+1)^+m$. $y$ について同様に $\vartheta_y$ を作ると，$\deg\vartheta_y = (k-n+1)^+n$. $\mathfrak{f}' = \mu^*F-\mathfrak{f}-\vartheta_x-\vartheta_y$ と置くと，次の (6.1.1) より次の完全列が存在する．

$$\to H^1(\tilde{C}, \mathcal{O}(\mathfrak{f}')) \to H^1(C, \mathcal{O}(F-hx-ky)_C) \to 0$$

一方，$\mathfrak{R}$ を $\tilde{C}$ 上標準バンドルとする時，セール双対定理より $H^1(\tilde{C}, \mathcal{O}(\mathfrak{f}')) \cong H^0(\tilde{C}, \mathcal{O}(\mathfrak{R}-\mathfrak{f}'))$, (3.9) より $\mathfrak{R} = \mu^*[C]+\mu^*K-[\mathfrak{C}]$. 従って $c(\mathfrak{R}-\mathfrak{f}') = C^2+K\cdot C-F\cdot C+\deg\vartheta_x+\deg\vartheta_y = -(FC-C^2-KC)+(h-m+1)^+m+(k-n+1)^+n < 0$（仮定）．故に，$H^0(\tilde{C}, \mathcal{O}(\mathfrak{R}-\mathfrak{f}')) = H^1(\tilde{C}, \mathcal{O}(\mathfrak{f}')) = 0$ 上の完全列より $H^1(C, \mathcal{O}(F-hx-ky)_C) = 0$.　（終）

補題 (6.1.1)　$C$ 上次の完全列が存在する．

$$(*)\quad 0 \to \mu_*(\mathcal{O}(\mu^*F-\mathfrak{C}-\vartheta_x-\vartheta_y)) \to \mathcal{O}(F-hx-ky) \to \mathcal{M}'' \to 0$$

$$\text{但し } \mathcal{M}_2'' = \begin{cases} \text{有限次元ベクトル空間} & (z \in C \text{ が特異点の時}) \\ 0 & (z \in C \text{ が単純点の時}) \end{cases}$$

証明）自然な準同型 $\tau : \mu_*(\mathcal{O}(\mu^*F-\mathfrak{C}-\vartheta_x-\vartheta_y)) \to \mathcal{O}(F-hx-ky)_C$ の存在を見て，

$$\mathcal{M}'' = \mathrm{Coker}(\tau) \text{ と定義するのであるが，} \begin{cases} \mu(\wp) \neq x,y & \text{ならば } \mathcal{O}(\mu^*F-\mathfrak{C}-\vartheta_x-\vartheta_y)_\wp \\ & \quad = \mathcal{O}(\mu^*F-\mathfrak{C})_\wp \\ z \neq x,y & \text{ならば } \mathcal{O}(F-hx-ky)_z = \mathcal{O}(F)_z \end{cases} \text{ で}$$

ある故 $x, y$ を含まぬ開部分集合上での準同型 $\tau$ とそれによる $z(\neq x, y)$ での $(*)$ の完全性は，次の完全列 $(**)$（(1.14)）に依って示される（実際 $\mathcal{M}''_z = \mathcal{M}_z$ となり $\mathcal{M}''$ に関する条件も $z(\neq x, y)$ では満足される）．

$$(**) \quad 0 \to \mu_*(\mathcal{O}(\mu^* F - \mathfrak{C})) \to \mathcal{O}(F)_C \to \mathcal{M} \to 0$$

あとは，上の $x, y$ 以外で得られた $\tau$ が自然に全体の準同型に延長される事を見るのだが，先ず $x$ について $(**)$ より次の完全列 $(**)'$ を得る．

$$(**)' \quad 0 \to \bigoplus_{\lambda=1}^{r} \mathcal{O}(-\mathfrak{C})_{\wp_\lambda} \xrightarrow{\mu} (\mathcal{O}_C)_x \to \mathcal{M}_x \to 0$$

一方 $\bigoplus_{\lambda=1}^{r} \mathcal{O}(-\mathfrak{C} - \vartheta_x)_{\wp_\lambda} \subset \bigoplus_{\lambda=1}^{r} \mathcal{O}(-\mathfrak{C})_{\wp_\lambda}$，$(\mathcal{O}(-hx)_C)_x \subset (\mathcal{O}_C)_x$ であるので，次の $(**)$ を示せば証明が終わる．

$$(***) \quad \mu\left(\bigoplus_{\lambda=1}^{r} \mathcal{O}(-\mathfrak{C} - \vartheta_x)_{\wp_x}\right) \subseteqq (\mathcal{O}(-hx)_C)_x$$

何者 $(***)$ が示されると（$y$ でも同様な事が成立するのに注意し）上に得た $x, y$ 以外での $\tau$ が $\mu$ により全体に自然に拡張され，$\mathcal{M}''_x = \mathrm{Coker}(\bigoplus_{\lambda=1}^{r} \mathcal{O}(\mathfrak{C} - \vartheta_x)_{\wp_\lambda} \to (\mathcal{O}(-hx)_C)_x)$ 故 $\dim \mathcal{M}_x < \infty$ と $\vartheta_x$ の形に注意すれば $\dim \mathcal{M}''_x < \infty$ も分り次の完全列 $(*)'$ が成立するからである．

$$(*)' \quad 0 \to \bigoplus_{\lambda=1}^{r} \mathcal{O}(-\mathfrak{C} - \vartheta_x)_{\wp_\lambda} \xrightarrow{\mu} (\mathcal{O}(-hx)_C)_x \to \mathcal{M}''_x \to 0$$

偖，$(***)$ を示そう．$\mathcal{O}_{\tilde{C},\wp_\lambda} = \mathbb{C}\{t_\lambda\}$，$\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\mathfrak{C})_{\wp_\lambda} = t_\lambda^{C_\lambda}\mathbb{C}\{t_\lambda\}$，$\mathcal{O}_x = \mathbb{C}\{w, z\}$ であった．制限 $\mathcal{O}_x \to (\mathcal{O}_C)_x$ による $f \in \mathcal{O}_x$ の像を $f_C$ と書く．$\xi = \sum_{\lambda=1}^{r} \xi_\lambda(t_\lambda) \in \bigoplus_{\lambda=1}^{r} \mathcal{O}(-\mathfrak{C})_{\wp_\lambda}$ $(\xi_\lambda(t_\lambda) \in t_\lambda^{C_\lambda}\mathbb{C}\{t_\lambda\})$ が与えられた時，$\mu^*\xi = f_C$ なる $f \in \mathcal{O}_x$ は (1.5.5) により次の形で（その形では一意的）与えられる．

$$\begin{cases} f = \sum_{j=0}^{m-1} f_j(z) w^{m-1-j} \quad (f_j(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{jn} z^n) \\ \text{而も } f_{jn} \text{は次の公式で与えられる} \\ f_{jn} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{\lambda=1}^{r} \oint \xi_\lambda(t_\lambda) B_j(P_\lambda(t_\lambda), t_\lambda^{m_\lambda}) t_\lambda^{-(n+1)m_\lambda} \sigma_\lambda dt_\lambda \end{cases}$$

さて $(***)$ の為には，

$$\xi \in \bigoplus_{\lambda=1}^{r} \mathcal{O}(\mathfrak{C} - \vartheta_x)_{\wp_\lambda} \Rightarrow f \in \mathcal{O}(-hx)_x$$

即ち $\xi_\lambda(t_\lambda) \equiv 0(t_\lambda^{c_\lambda + d_\lambda}) \Rightarrow f_{jn} = 0(m - 1 - j + n \leqq h - 1)$（但し $d_\lambda = (h - m + 1)^+ m_\lambda$ 従って $\vartheta_x = \sum d_\lambda \wp_\lambda$）を示せばよい．今 $\xi_\lambda(t_\lambda) \equiv 0(t_\lambda^{c_\lambda + d_\lambda})$ $(1 \leqq \lambda \leqq r)$ と仮定しよう．$B_j(w, z) = w^j + A_1(z) w^{j-1} + \cdots + A_j(z)$，$A_k(z) \in z^k \mathbb{C}\{z\}$ 故 $B_j(P_\lambda(t_\lambda), t_\lambda^{m_\lambda}) \equiv 0(t_\lambda^{j m_\lambda})$．従って，

$\xi_\lambda(t_\lambda)B_j(P_\lambda(t_\lambda), t_\lambda^{m_\lambda})t_\lambda^{-(n+1)m} \quad \sigma_\lambda \equiv 0(t_\lambda^{d_\lambda+jm_\lambda-(n+1)m_\lambda})$. 一方 $m-1-j+n \leqq h-1$ の時 $d_\lambda$ の定義に注意して，

$$\begin{aligned} d_\lambda + jm_\lambda - (n+1)m_\lambda &\geqq (h-m+1)m_\lambda + jm_\lambda - (n+1)m_\lambda \\ &= \{h-1-(m-1-j+n)\}m_\lambda \geqq 0 \end{aligned}$$

従ってその様な $j, n$ に対し，$f_{jn}$ を与える式に戻って $f_{jn} = 0$.

(6.2)　直線バンドル $F$ に対し $\dim H^0(S, \mathcal{O}(F)) = n+1 \geqq 2$ とする（この時 $n = \dim|F|$ と書く）．$F$ に付随した有理写像 $\Phi_F : S \to \mathbb{P}^n$ を定義しよう．先ず $H^0(S, \mathcal{O}(F))$ の底 $\{\varphi_0, \ldots \varphi_\lambda, \ldots \varphi_n\}$ をとる．有限開被覆 $S = \bigcup_j U_j$ を適当に選んで $F = \{f_{jk}(z)\}$ とする時，$U_j$ 上の正則函数 $\varphi_{\lambda j}$ で，$U_j \cap U_k$ 上 $\varphi_{\lambda j}(z) = f_{jk}(z)\varphi_{\lambda k}(z)$ $(f_{jk}(z) \neq 0)$ なるものが存在して，$\varphi_\lambda(z) = \{\varphi_{\lambda j}(z)\}$ と考えてよい．従って $z \in U_j \cap U_k$ に対し，$\mathbb{P}^n$ の点の同次座標として，

$$(\varphi_{0j}(z), \ldots \varphi_{\lambda j}(z), \ldots \varphi_{nj}(z)) = (\varphi_{0k}(z), \ldots \varphi_{\lambda k}(z), \ldots \varphi_{nk}(z)).$$

従って有理写像 $\Phi_F : S \to \mathbb{P}^n$ を次で与える事にする．

$$\Phi_F : z \to \Phi_F(z) = (\varphi_0(z), \ldots, \varphi_\lambda(z), \ldots \varphi_n(z))$$

これは $\mathbb{P}^n$ の座標の射影変換を無視すれば $F$ により一意的に定まる．

(6.2.1)　$z \in S$ が $|F|$ の底点

$$\Leftrightarrow \varphi_0(z) = \varphi_1(z) = \cdots = \varphi_n(z) = 0 \qquad \text{(即ち } \Phi_F(z) \text{ が不定)}$$

(6.2.2)　$|F|$ が底点を持たぬ $\Rightarrow \Phi_F$ は正則写像.

定理 (6.3)　$F^2 > 0$ で或る整数 $m > 0$ について，$|mF|$ が底点を持たないならば，

$$H^1(S, \mathcal{O}(K+F)) = 0$$

証明）　仮定より $\Phi_{mF}$ は正則写像である．$\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n\}$ を $H^0(S, \mathcal{O}(mF))$ の底とする．先ず（イ）$\Phi_{mF}(S)$ が曲面である事を示そう．今 $\Phi_{mF}(S) \subset \mathbb{P}^n$ が曲線であると仮定する．$L$ を一般の位置にある $\mathbb{P}^n$ の超平面とし $L \cap \Phi_{mF}(S) = \bigcup_{k=1} \wp_k$ とする．$\wp_k$ で $L$ と $\Phi_{mF}(S)$ は正規交叉している．$L$ の方程式を $\sum_{i=0}^n a_i\zeta_i = 0$（但し $(\zeta_0, \ldots \zeta_n)$ は $\mathbb{P}^n$ の同次座標）とする．$\varphi = \sum_{\lambda=0}^n a_\lambda\varphi_\lambda$，$D = (\varphi)$ と置くと

$$\Phi_{mF}^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^m \wp_k\right) = \{z \in S \mid \varphi(z) = 0\} = D$$

$C_k = \Phi_{mF}^{-1}(\wp_k)$ とすると $D = \bigcup_{k=1}^m C_k$ である．$\varphi \in H^0(S, \mathcal{O}(mF))$ 故 $D \in |mF|$．同様に一般の位置にある別の超平面 $L'$ : $\sum_{\lambda=0}^n a'_\lambda \zeta_\lambda = 0$ をとり（但し $L' \cap L \cap \Phi_{mF}(S) = \Phi$），$\varphi' = \sum_{\lambda=0}^n a'_\lambda \varphi_\lambda$　$D' = (\varphi')$ と置くと $D' = \Phi_{mF}^{-1}(\cup \wp'_k)$（但し $L' \cap \Phi_{mF}(S) = \bigcup_{k=1}^m \wp'_k$）であり $D' \cap D = \phi$ が成立する．勿論 $D' \in |mF|$．従って $m^2F^2 = (mF)^2 = D \cdot D' = 0$ これは $F^2 > 0$ に反する．而して $\Phi_{mF}(S)$ は曲面である（何者 $\dim \Phi_{mF}(S) > 0$ は直ぐ分る）．次に（ロ）$H'(S, \mathcal{O}(K+F)) \cong \mathbb{H}^{2.1}(F)$ 故 $\mathbb{H}^{2.1}(F) = 0$ を示せば，証明が終わる（但し $\mathbb{H}^{2.1}(F)$ は $F$-係数の (2.1) 型調和型式の空間を表わす）．$S = \bigcup_j U_j$ を十分細かい被覆とし $F = \{f_{jk}(z)\}$ とする．任意の $u \in \mathbb{H}^{2.1}(F)$ は $U_j$ 上 $u = u_j = \sum_{\alpha=1}^2 u_{j12\bar\alpha} dz^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar z^\alpha$ と書け $U_j \cap U_k$ 上 $U_j = f_{jk} u_k$ を満たす．定義より $\square u = 0$．以下 $u = 0$ を示せば証明が終る．偖，$\varphi_\lambda(z) = \{\varphi_{\lambda j}(z)\}$ $(0 \leqq \lambda \leqq n)$ とすると $U_j \cap U_k$ 上 $\varphi_{\lambda j}(z) = f_{jk}^m \cdot \varphi_{jk}(z)$ が成立する．次の定義をする．

(6.3.1)　$a_j(z) = (\sum |\varphi_{\lambda j}(z)|^2)^{\frac{1}{n}} > 0$（$U_j$ 上）

(6.3.2)　$\gamma = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar\partial \log a_j(z)$（各 $U_j$ 上）

この時 $\gamma$ は $S$ 上定義された実解析的 (1.1) 型式である（何者，$U_j \cap U_k$ 上 $a_j(z) = |f_{jk}(z)|^2 a_k(z)$ である事に注意すれば，$U_j \cap U_k$ 上 $\partial\bar\partial \log a_j = \partial\bar\partial \log a_k$）．$\gamma$ を次の様に書く

(6.3.3)　$\gamma = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \gamma_{\alpha\bar\beta} dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta$

$S$ 上の任意のケーラー計量 $\sum_{\alpha,\beta=1}^2 g_{\alpha\bar\beta} dz^\alpha d\bar z^\beta$ を考えて，$\gamma_{\lambda\bar\nu} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 g_{\lambda\bar\beta} g_{\alpha\bar\nu} \gamma^{\bar\beta\alpha}$ によって $\gamma^{\bar\beta\alpha}$ を定義する．この時次が成立する（小平 [4]）．

$$(*) \qquad \int_S \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \gamma^{\bar\beta\alpha} \frac{1}{a_j} u_{j12\bar\alpha} \overline{u_{j12\bar\beta}} dz^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar z^1 \wedge d\bar z^2 \leqq 0$$

偖，$\mathbb{P}^n = \bigcup_{\lambda=0}^n \mathcal{U}_\lambda$ ($\mathcal{U}_\lambda = \{\zeta \in \mathbb{P}^n \mid \zeta_\lambda \neq 0\}$) とし，$A_\lambda = \frac{\sum_{\nu=0}^n |\zeta_\nu|}{|\zeta_\lambda|^2} = 1 + \sum_{\nu\neq\lambda} |\frac{\zeta_\nu}{\zeta_\lambda}|^2$ と置く時，$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar\partial \log A_\lambda$ は $\mathbb{P}^n$ のケーラー型式である．$\Phi_{mF} : S \to \Phi_{mF}(S) \subset \mathbb{P}^n$ は正則写像であった．定義より，$a_j^m = \Phi_{mF}^*(A_\lambda)$　従って $m\gamma = \Phi_{mF}^*(\omega)$．$\omega$ は正定値　故 $\gamma$ は半正定値である．一方 $\Phi_{mF}(S)$ は曲面故，ある $S$ の解析部分空間 $N \subsetneqq S$ が存在して，$\gamma$ は $S - N$ では正定値，$\Phi_{mF}$ は $S - N$ 上局所双正則となる．しかし $(*)$ より $\int_{S-N} \sum \gamma u \bar u dz \cdots \leqq 0$．$S - N$ 上 $\gamma > 0$ に注意して $S - N$ 上 $u = 0$．しかし $\square u = 0$ より $u$ は $C^\infty$．従って $S$ 上 $u = 0$ となる．

注意 (6.3.1)　Mumford [6] に（1）定理の標数 0 に対する代数的証明（2）標数 $p \neq 0$ の反例がある．

## §7. 組成列

仮定 (7.0)　以下最後まで $S$ を次のものとする．$S$：極小非特異一般型代数曲面

$$\text{即ち}\begin{cases}\text{イ）}\ S\ \text{は第 1 種例外曲線を含まぬ}\\ \text{ロ）}\ P_2=\dim|2K|+1>0\\ \text{ハ）}\ c_1^2=K^2>0\end{cases}$$

記号 (7.1)　$\xi=\sum r_iC_i$ ($r_i\in\mathbb{Q}$) を『準因子』と呼ぶ．準因子 $\xi=\sum r_iC_i$　$\eta=\sum s_jC_j$ に対し次の定義をする．

$$\xi\cdot\eta=\sum\sum r_is_iC_i\cdot i_j$$

以下 $\sim$ は有理係数のホモロジーを表わす．

補題 (7.2)　準因子 $\zeta=\sum r_iC_i$ に対し，

$$\zeta\nsim 0\quad\text{且}\quad K\cdot\zeta=0\Rightarrow\zeta^2<0$$

証明）　ド・ラームの定理より $H^2(S,\mathbb{R})\cong Z^2/dA^1$．（但し $Z^2=\{\varphi\mid\varphi:2\text{ 型式で }d\varphi=0\}$ $A^1=\{\eta\mid\eta:1\text{ 型式 }\}$）

$\varphi,\psi\in Z^2$ に対し $(\varphi,\psi)=\int_S\varphi\wedge\psi$ と定義すると，これは $Z^2/dA^1$ 上の対称双 1 次形式である（何者 $(\varphi,d\eta)=\int_S\varphi\wedge d\eta=\int_S d(\varphi\wedge\psi)=0$）．$Z^2/dA^1$ の底 $\{\beta_1,\dots\beta_i,\dots\beta_b\}$（但し $b$ は $S$ の 2 次元ベッチ数）を適当にとると

$$((\beta_i,\beta_k))=\begin{pmatrix}+1&&&&&0\\&\ddots&&&&\\&&+1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\0&&&&&-1\end{pmatrix}$$

となるが，ホッヂの指数定理より $+1$ の個数は $2p_g+1$ である．$p_g$ は 1 次独立な正則 2 型式の数であるが，それら $\psi_1,\dots\psi_{p_g}$ を $\int_S\psi_i\wedge\bar{\psi}_k=\delta_{ik}$ となる様にとる．この時 $\omega_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_i+\bar{\psi}_i)$　$\omega_{p_g+i}=\frac{1}{\sqrt{-2}}(\psi_i-\bar{\psi}_i)$ $(1\leqq i\leqq p_g)$ と置くと $(\omega_i,\omega_k)=\delta_{ik}$ となり $\omega_1,\dots\omega_{2p_g}$ は 1 次独立である．新たに $\beta_1,\dots\beta_{b-2p_g}$ をとって $Z^2/dA^1$ の底を次の様に完成する．

$$\begin{cases}Z^2/dA^1=\{\omega_1,\dots\omega_{2p_g}\}\oplus\{\beta_1,\dots\beta_{b-2p_g}\}\\ ((\beta_i,\beta_k))=\begin{pmatrix}+1&&&\\&-1&&\\&&\ddots&\\&&&-1\end{pmatrix}\end{cases}$$

一般に $X$ を因子とする時，そのチャーン類 $c([X])$ に対応して 2 型式 $\xi \in Z^2$ がとれた（ド・ラームの定理）．同様に因子 $Y$ に対し $\eta \in Z^2$ をとる．$X \cdot Y = \int_S \xi \wedge \eta$，2 型式 $\psi$ に対し $-\int_X \psi = \int_S \xi \wedge \psi$ であった．従って $\int_S \xi \wedge \omega_i = 0$（何者 $\int_X \psi_i = 0$）に注意して，$K$ に対応して $\beta$ をとる時 $K^2 > 0$ より $\beta^2 > 0$ を得る事から，上の選択に於て $\beta_1 = \beta$ とできる．さて仮定より $K \cdot \zeta = 0$ だから $\zeta \sim \sum_{i \geqq 2} a_i \beta_i$．$\zeta \nsim 0$ 故ある $a_j \neq 0$．従って $\zeta^2 = \sum_{i \geqq 2} a_i^2 \beta_i^2 < 0$（何者，$\beta_i^2 < 0\ (i \geqq 2)$）．

注意 (7.2.1)　Zariski [9] に (7.2) の代数的証明がある．

注意 (7.2.2)　$\zeta = \sum r_i C_i > 0$（即ち $r_i > 0$）ならば $\zeta \nsim 0$.

補題 (7.3)　既約曲線 $C$ に対し $KC \geqq 0$ である．特に

$$KC = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{イ）} C \text{ が非特異有理曲線即ち } \pi(C) = 0 \\ \text{ロ）} C^2 = -2 \end{cases}$$

証明）　$\dim |2K| = P_2 - 1 \geqq 0$ 故 $|2K| \ni {}^\exists D \geqq 0$ が存在する．$D = kc + \sum_{i=1}^{\ell} k_i C_i\ (k, k_i \geqq 0$ $C \neq C_i)$ と書く．従って $2K \cdot C = D \cdot C = kC^2 + \sum_{i=1}^{\ell} k_i C \cdot C_i$．$k, k_i \geqq 0$，$C \cdot C_i \geqq 0$ である故，もし $KC < 0$ とすると $k > 0$，$C^2 < 0$ となり，而して公式 $2\pi(C) - 2 = KC + C^2$ に注意すると，$KC = C^2 = -1$　$\pi(C) = 0$ でなければならぬ．即ち $C$ は第 1 種例外曲線となり仮定 (7.0) に反する．故に $KC \geqq 0$．後半，$(\Rightarrow) KC = 0$ とする．$C \nsim 0$（何者，$C \subset S \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ で考えて，$\mathbb{P}^n$ の超平面 $L$ に対し，$C \cdot L > 0$ である）に注意して，$2\pi(C) - 2 = KC + C^2 = C^2 < 0$．即ち，$\pi(C) = 0$ 且 $C^2 = -2 (\Leftarrow) 2\pi(C) - 2 = KC + C^2$ より．

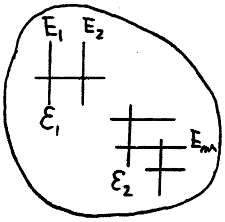
注意 (7.3.1)　Mumford [5]

注意 (7.4)　$K \cdot C = 0$ とすると，$K$ の $C$ への制限 $K_C$ は自明な直線バンドルである．故に $mK_C$ も自明である．従って $\varphi \in H^0(S, \mathcal{O}(mK))$ は $C$ 上では一定で，$\Phi_{mK}(C)$ は一点になる．この様な曲線は不都合であるので，次にそれについて調べてみる．

定理 (7.5)　$KC = 0$ なる既約曲線 $C$ の数は $b_2$ より少ない．（$b_2$ は $S$ の 2 次元ベッチ数）

証明）　$KC_i = 0\ (i = 1, 2, \ldots \ell)$ とする（但し，$i \neq k$ に対し $C_i \neq C_k$）．$C_i$ がホモロジーの意味で独立である事を示せばよい．実際 $\sum_{i=1}^{\ell} r_i C_i \sim 0$ とする（但し $r_i \in \mathbb{Q}$　$r_1, \ldots r_p \geqq 0$ $r_{p+1}, \ldots r_\ell \leqq 0$）．$D = \sum_{i=1}^{p} r_i C_i$ とおくと，$D \sim \sum_{j=p+1}^{\ell} (-r_j) C_j = \sum_{j=p+1}^{\ell} |r_j| C_j$．今 $K \cdot D = 0$ であるので (7.2) より，$D^2 \leqq 0$　一方 $D^2 = \sum r_i C_i \cdot \sum |r_j| C_j = \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq p \\ pH \leqq j \leqq \ell}} r_i |r_j| \cdot C_i \cdot C_j \geqq 0$．而して，$D^2 = 0$．故に再び (7.2) より $D \sim 0$．従って $S \subset \mathbb{P}^n$ とし，$L$ を $\mathbb{P}^n$ の超平面とすると，$0 = D \cdot L = \sum r_i L \cdot C_i$．ところが $L \cdot C_i > 0$ 故 $r_i = 0$ 同様に $r_j = 0$.

注意 (7.5.1)　(7.5) に於る $C$ を $C_1,\dots C_\ell$ とすると，$K \nsim \sum r_i C_i$ 即ち $K$ は $\{C_i\}$ とホモロジーの意味で独立である．何者，$K \sim \sum r_i C_i$ とすると，$K^2 = \sum r_i(C_i \cdot K) = 0$　これは $K^2 > 0$ に反する．




記号 (7.6)　$KC = 0$ なる $C$ を $E_1, E_2, \dots E_b$ $(b < b_2)$ とする．$\mathcal{E} = E_1 + E_2 + \cdots + E_b$ と置く．$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \cdots + \mathcal{E}_\lambda + \cdots + \mathcal{E}_\rho$ を $\mathcal{E}$ の，連結成分への分解とする．

仮定 (7.7)　以降 $e$ は $\dim |eK| \geqq 0$ なる正整数とする．$D \in |eK|$ をとり，$D = C_1 + C_2 + \cdots + C_i + \cdots + C_n$（$C_i$：既約曲線．しかし $C_i \neq C_k$ $(i \neq k)$ は仮定しない）と書く．順序を除けば $\{C_i\}$ は一意的に定まるが，順序を考えに入れて $D = C_1 + \cdots + C_i + \cdots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i$ を $D$ の『組成列』と呼ぶ．$D_i = C_1 + \cdots + C_i$ と置く．

$$\begin{cases} (\alpha) \quad K \cdot C_1 \geqq 1 \quad D_{i-1} \cdot C_i \geqq 1 \qquad (i = 2, 3, \dots n) \\ (\beta) \quad K \cdot C_1 \geqq 1 \quad D_{i-1} \cdot C_i \geqq 0 \quad K \cdot C_i + D_{i-1} \cdot C_i \geqq 1 \qquad (i = 1, 2, \dots n) \end{cases}$$

なる条件を考える．$(\alpha)$ 又は $(\beta)$ を満たす組成列がとれるかどうかを調べる ((7.9), (7.12))．$(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ は明らか（(7.3)）．以下 (7.10) まで $X, Y$ により因子を表わす．

補題 (7.8)　$D = X + Y \quad X > 0 \quad Y > 0 \Rightarrow X \cdot Y \geqq 1$

証明）$r = \frac{K \cdot X}{K^2}$　$\xi = X - rK$，$s = \frac{K \cdot Y}{K^2}$　$\eta = Y - sK$ と置くと，$X = rK + \xi$　$K \cdot \xi = 0$，$Y = sK + \eta$　$K \cdot \eta = 0$ と書ける．ここで $\xi, \eta$ は準因子であり，$K \cdot X \geqq 0$, $K \cdot Y \geqq 0$ 故 $r, s \geqq 0$ である．$D \in |eK|$ 故勿論 $D \sim eK$ で，$D = X + Y = (r+s)K + \xi + \eta$. 故に $eK^2 = K \cdot D = (r+s)K^2$ 従って $e = r + s$ 而して $\xi + \eta \sim 0$ である．従って $X \cdot Y = rsK^2 + \xi\eta = rsK^2 - \xi^2$．しかし (7.2) より $\xi^2 \leqq 0$．$r, s \geqq 0$ に注意して $X \cdot Y \geqq 0$ を得る．もし $X \cdot Y = 0$ とすると，$\xi^2 = 0$ 且 $rs = 0$．従って $\xi \sim 0$ 同様に $\eta \sim 0$（(7.2)）．即ち $X \sim rK$，$Y \sim sK$．しかし $rs = 0$ より $X \sim 0$ 又は $Y \sim 0$ を得る．これは，$X > 0$，$Y > 0$ に反する（(7.2.2)）．而して $X \cdot Y > 0$.

補題 (7.9)　条件 $(\alpha)$ を満たす $D$ の組成列

$$D = \sum_{i=1}^{n} C_i \text{が存在する．}$$

証明）$D \in |eK|$ 故 $K \cdot D = eK^2 \geqq e > 0$．$D = \sum_{i=1}^n \theta_i$（$\theta_i$：既約曲線）と書くと，$K \cdot D = \sum_{i=1}^n K \cdot \theta_i > 0$ 故少くとも 1 つの $K \cdot \theta_i > 0$．$C_1 = \theta_i$ と置くと $K \cdot C_1 \geqq 1$.

$D = C_1 + Y$ と書くと $Y \geqq 0$ だが，$Y = 0$ なら証明は終わりで，$Y > 0$ とすると (7.8) より $C_1 \cdot Y \geqq 1$．従って $Y = \sum_{j \neq i} \theta_j$ に対し，$C_1 \cdot \theta_j > 0$ なる $\theta_j$ がある．$C_2 = \theta_j$ と置くと $C_1 \cdot C_2 = D_1 \cdot C_2 \geqq 1$．あと帰納法を用いる．$C_1 = \theta_{\nu_1}$，$C_2 = \theta_{\nu_2}$，$\ldots C_{i-1} = \theta_{\nu_{i-1}}$ を

$$D_{j-1}C_j \geqq 1 \qquad (j = 2, 3, \ldots i-1) \qquad (\text{但し } D_{j-1} = C_1 + C_2 + \cdots + C_{j-1})$$

なる如く定めたとする．$D = D_{i-1} + Y'$ と書く時，$Y = 0$ なら証明終わり，$Y > 0$ なら，(7.8) より $D_{i-1} \cdot Y \geqq 1$　従って $D_{i-1} \cdot \theta_\lambda \geqq 1$ なる $\theta_\lambda < Y$ がある．$C_i = \theta_\lambda$ とおくと，$D_{i-1} \cdot C_i \geqq 1$．帰納法終.

注意 (7.9.1)　上の証明より，$(\alpha)$ を満たす $D = \sum_{i=1}^n C_i$ を求める時，$\theta < D$ で $K \cdot \theta \geqq 1$ なる $\theta$ が与えられた時，$C_1 = \theta$ としてよい.

補題 (7.10)　$K \cdot E_p = K \cdot E_q = E_p \cdot E_q = 0$ とする（(7.6)）．$D \in |eK|$ に対しもし $D = X + Y + E_p + E_q \quad X > 0 \quad Y > 0 \quad K \cdot X > 0$，$K \cdot Y > 0$ と書けるならば $X \cdot Y \geqq 0$ である．

証明）$r = \frac{K \cdot X}{K^2} \quad r_1 = \frac{E_p \cdot X}{E_p^2} = -\frac{E_p \cdot X}{2} \quad r_2 = \frac{E_q \cdot X}{E_q^2} = -\frac{E_q \cdot X}{2} \quad \xi = X - rK - r_1E_p - r_2E_q$ と置く（(7.3) より $E_p^2 = E_q^2 = -2$）．この時仮定を用いて $K \cdot \xi = E_p \cdot \xi = E_q \cdot \xi = 0$. 同様に $s = \frac{K \cdot Y}{K^2} \quad s_1 = -\frac{E_p \cdot Y}{2} \quad s_2 = -\frac{E_q \cdot Y}{2} \quad \eta = Y - sK - s_1E_p - s_2E_q$ と置くと，$K \cdot \eta = E_p \cdot \eta = E_q \cdot \eta = 0$ が成立する．

一方 $r+s = e \quad r_1+s_1+1 = r_2+s_2+1 = 0$（これらは, $K \cdot (X+Y) = K \cdot D - K \cdot E_p - KE_q = eK^2$ $E_p \cdot (X+Y) = E_p \cdot D - E_p^2 - E_p \cdot E_q = 2$ $E_q \cdot (X+Y) = 2$ より明らか）．従って

$$\begin{aligned} D &= X + Y + E_p + E_q = (r+s)K + (r_1+s_1+1)E_p + (r_2+s_2+1)E_q + \xi + \eta \\ &= eK + \xi + \eta \qquad \text{故に}\xi + \eta \sim 0. \end{aligned}$$

偖，$X \cdot Y = rsK^2 + r_1s_1E_p^2 + r_2s_2E_q^2 + \xi \cdot \eta$ であるが，$rK^2 = sK^2 = K \cdot X \geqq 1$ 故 $rsK^2 \geqq r, s$ に注意して，$rsK^2 \geqq \frac{1}{2}(r+s) = \frac{e}{2}$，又，$r_1s_1E_p^2 = -2r_1s_1 = 2s_1(s_1+1) = 2(s_1+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} \geqq -\frac{1}{2}$ 同様に $r_2s_2E_q^2 \geqq \frac{1}{2}$，最後に $\xi \cdot \eta = -\xi^2 \geqq 0$（何者，$\xi + \eta \sim 0$，一方 $K \cdot \xi = 0$ 故，(7.2) より $\xi^2 \leqq 0$）．従って

$$X \cdot Y \geqq \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \xi^2 \geqq \frac{e}{2} - 1 > -1 \qquad \text{即ち } X \cdot y \geqq 0.$$

注意 (7.11)　$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \cdots + \mathcal{E}_\lambda + \cdots + \mathcal{E}_\rho$（記号 (7.6)）に於て $D \in |eK|$ が $\mathcal{E}_\lambda$ と交われば $\mathcal{E}_\lambda < D$ である．何者，$\mathcal{E}_\lambda = \sum E_i$（従って $K \cdot E_i = 0$ $\pi(E_i) = 0 \quad E_i^2 = -2$）と書く時，$D \sim eK$ 故 $D \cdot E_i = eK \cdot E_i = 0$．しかし $D > 0$ であるので，$E_i < D$ でなければならぬ．一方 $\mathcal{E}_\lambda$ は連結であるので，$\mathcal{E}_\lambda < D$ となる．

補題 (7.12)　$D$ が $\mathcal{E}_\lambda, \mathcal{E}_\nu$ $(\lambda \neq \nu)$ と交わる時（これは (7.11) より $\mathcal{E}_\lambda < D$，$\mathcal{E}_\nu < D$ と同値）$(\beta)$ を満たす組成列 $D = \sum_{i=1}^n C_i$，$C_n < \mathcal{E}_\nu$　$C_{n-1} < \mathcal{E}_\lambda$ なるものが存在する．

証明）$E_p < \mathcal{E}_\lambda$　$E_q < \mathcal{E}_\nu$ をとる．$K \cdot D = eK^2 > 0$ に注意し，$K \cdot \theta > 0$　$\theta < D$ をとって $C_1 = \theta$ と置く．従って $K \cdot C_1 \geqq 1$．次に，$D$ の成分 $C_1, C_2, \ldots C_i$ $(i \geqq 2)$ を

$$\begin{cases} (\mathbb{P}_i) : D = C_1 + C_2 + \cdots + \cdots + C_{j-1} + C_j + \cdots + C_{i-1} + X_i + E_p + E_q, & X_i \geqq 0 \\ (\beta_i) : D_{j-1} \cdot C_j \geqq 0 \quad K \cdot C_j + D_{j-1} \cdot C_j \geqq 1 & (1 \leqq j \leqq i-1) \end{cases}$$

なる如く選んだとする（但し $D_{j-1} = C_1 + \cdots + C_{j-1}$）．$i = 2$ なら上の条件は $K \cdot C_1 \geqq 1$ である．一般に $K \cdot X_i \geqq 0$（(7.3)）であるが，或 $i_0 \geqq i$ が存在して $(\mathbb{P}_{i_0})$，$(\beta_{i_0})$，$K \cdot X_{i_0} = 0$ が成立する事を示そう．実際 $K \cdot X_i > 0$ とすると，$D = D_{i-1} + X_i + E_p + E_q$ と書いて $K \cdot D_{i-1} \geqq K \cdot C_1 \geqq 1$（(7.3)）．従って (7.10) より $D_{i-1} \cdot X_i \geqq 0$．次の 2 つの場合が考えられる．

$$\begin{cases} \text{（イ）} & D_{i-1} \cdot C > 0 \text{ なる } C < X \text{ がある．} \\ \text{（ロ）} & D_{i-1} \cdot C = 0 \text{ が総の } C < X_i \text{について成立する．} \end{cases}$$

（イ）の場合，$C_i = C$ $X_{i+1} = X_i - C$ と置くと，$D_{i-1} \cdot C_i \geqq 1$．（ロ）の場合，先ず $K \cdot X > 0$ より $K \cdot C > 0$ なる $C < X_i$ が存在するので，$C_i = C$ と置く．この時，（ロ）の仮定より $D_{i-1} \cdot C_i = 0$　$K \cdot C_i + D_{i-1} \cdot C_i \geqq 1$．何れの場合にせよ，$K \cdot X_i > 0$ の時，$(\mathbb{P}_{i+1})$，$(\beta_{i+1})$，$K \cdot X_{i+1} \geqq 0$ が成立する様にできる．明らかに $K \cdot X_i \geqq K \cdot X_{i+1}$ $(\geqq 0)$．この過程は $K \cdot X_{i_0} = 0$ となる迄続けられる故，或 $i_0 \geqq i$ $(\geqq 2)$ が存在して，

$$\begin{cases} (\mathbb{P}_{i_0}) & D = C_1 + \cdots + C_{i_0} + X_{i_0} + E_p + E_q, \qquad X_{i_0} \geqq 0 \\ (\beta_{i_0}) & D_{j-1} \cdot C_j \geqq 0 \quad K \cdot C_j + D_{j-1} \cdot C_j \geqq 1 \qquad (1 \leqq j \leqq i_0) \\ K \cdot X_{i_0} = 0 & \end{cases}$$

とできる．偖，(7.8) を用いて，(7.9) の証明と同様にして，$X_{i_0} + E_p + E_q$ の成分 $C_{i_0+1}, \ldots C_n$ を次の様に並べる．

$$\begin{cases} D = C_1 + \cdots + C_{i_0} + C_{i_0+1} + \cdots + C_\ell + \cdots + C_h + \cdots + C_n & (C_\ell = E_p \quad C_h = E_q) \\ (\alpha) : D_{j-1} \cdot C_j = (C_1 + \cdots + C_{j-1}) \cdot C_j \geqq 1 & (2 \leqq j \leqq n) \end{cases}$$

あとは，必要なら上の $D$ を並べ変え，番号を付け直して，

$$D_{j-1} \cdot C_j \geqq 1 \quad (2 \leqq j \leqq n) \qquad C_{n-1} < \mathcal{E}_\lambda \qquad C_n < \mathcal{E}_\nu$$

とできる事を見れば良い．先ず，若し $C_i \cdot C_{i+1} = 0$ $(i > i_0)$ ならば，$C_i$ と $C_{i+1}$ を入れ換えても条件 $(\alpha)$ が変らない事に注意する．何者，$(\alpha_i) : (C_1 + \cdots + C_{i-1}) \cdot C_i \geqq 1$ と置く時 $C_i \cdot C_{i+1} = 0$ 及び $(\alpha_i)$ より $(C_1 + \cdots + C_{i-1} + C_{i+1}) \cdot C_i \geqq 1$，$C_i \cdot C_{i+1} = 0$ 及び $(\alpha_{i+1})$ より $(C_1 + \cdots + C_{i-1}) \cdot C_{i+1} \geqq 1$，$(\alpha_{i+2})$ より $(C_1 + \cdots + C_{i-1} + C_{i+1} + C_i) \cdot C_{i+2} \geqq 1$．従って上の

組成列 $D = \sum C_i$ に於て，$C_i \cdot C_{i+1} = 0\ (i > i_0)$ の時，$C_i$ と $C_{i+1}$ を入れ換え，番号を付け直しても $(\alpha)$ が成立する．従って必要なら $C_{i_0}$ 以後を入れ換え，番号をつけ直して，

$$D = C_1 + \cdots + C_{i_0} + C_{i_0+1} + \underbrace{\cdots + E_p + \cdots + C_s}_{\mathcal{E}_\lambda} + \underbrace{\cdots + E_q + \cdots + C_n}_{\mathcal{E}_\lambda}$$

（$D$ に於ては，上の番号以外 $\mathcal{E}_\lambda, \mathcal{E}_\nu$ の成分はなし）

とできる．更に，再び上の注意を用いて，$C_s$ を $C_n$ の前の位置迄持ってきて，$C_s = C_{n-1}$ と番号を付け換えれば良い．

補題 (7.13)　$D \in |eK|$ と交わる $\mathcal{E}_\lambda$ を与えた時，組成列 $D = \sum_{i=1}^n C_i$ で $C_n < \mathcal{E}_\lambda$ 且 $(\beta)$ を満たすものが存在する．

証明）(7.12) と同様．

## §8. 結論

記号 (8.0)　$\dim |eK| \geqq 0$ なる正整数 $e$ を 1 つとって固定してあった（(7.7)）．$D \in |eK|$ をとり，組成列 $D = \sum_{i=1}^n C_i$ とする時，適宜 $m > e$ を 1 つとって固定し次の様に置く（以後終わり迄，この記法に従う）．

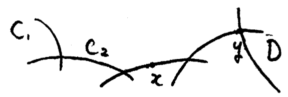
$$F_i = mK - [Z_i] \qquad （但し\ Z_i = C_i + \cdots + C_n）$$

注意：$D_i = C_i + \cdots + C_i$ であった（(7.7)）．

(8.1)　$F_{i+1} \cdot C_i - C_i^2 - K \cdot C_i = (m - e - 1)K \cdot C_i + D_{i-1} \cdot C_i$

証明）$F_{i+1} - [C_i] - K = (m-1)K - [C_i + Z_{i+1}] \sim (m-1-e)K + [D - Z_i] = (m-1-e)K + [D_{i-1}]$ より明らか．

(8.2)　整数 $h, k \geqq 0$ を任意にとる．$x, y \in D$（但し $D \in |eK|$）に対し，




$$\begin{cases} x \in D \text{ の重複度} \geqq h \\ y \in D \text{ の重複度} \geqq k \end{cases}$$

の時，$\Xi_i = \mathcal{O}(mK - Z_i - hx - ky)$ と置く（以後，$\Xi_i$ に関しては，適宜決められた $h, k, x, y$ に対し，上述の性質が満たされているとする）．特に，

$$\Xi_1 = \mathcal{O}(mK - D - hx - ky) = \mathcal{O}(mK - D) \cong \mathcal{O}((m-e)K)$$

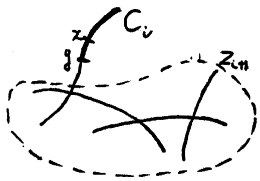
(8.2.1)　$\Xi_1 \subset \Xi_2 \subset \cdots \subset \Xi_i \subset \cdots \subset \Xi_{n+1}$（但し $\Xi_{n+1} = \mathcal{O}(mK - hx - ky)$ と置く）

仮定 (8.3)　上述の $h, k$ に対し整数 $h_i, k_i \geqq 0$ は次のものとする．

$$\Xi_{i+1}/\Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - h_i x - k_i y)_{C_i}$$

(8.3.1)　$h = k = 1$，$x, y \in C_i$，$x, y \notin Z_{i+1}$ の時 $h_i = k_i = 1$．
何者，この時 $\Xi_{i+1} = \mathcal{O}(mK - Z_{i+1} - x - y) \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - x - y)$
$\Xi_i = \mathcal{O}(mK - Z_{i+1} - C_i) \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - C_i - x - y)$

$$\begin{aligned}\Xi_{i+1}/\Xi_i &= \mathcal{O}(F_{i+1} - x - y)/\mathcal{O}(F_{i+1} - x - y - C_i)\\ &= \mathcal{O}(F_{i+1} - x - y)_{C_i}\end{aligned}$$




補題 (8.4)　$(m-e-1)K \cdot C_i + D_{i-1} \cdot C_i > \frac{1}{4}(h_i+1)^2 + \frac{1}{4}(k_i+1)^2$ ならば $\dim H^1(S, \mathcal{O}((m-e)K)) \geqq \dim H^1(S, \Xi_i)$ $(z \leqq i \leqq n+1)$

証明）$\alpha \geqq 0$ に対し $\frac{1}{4}(h_i+1)^2 > (h_i - \alpha + 1)^+ \alpha$（何者, $h_i - \alpha + 1 < 0$ なら明らか．$h_i - \alpha + 1 \geqq 0$ の時，$(h_i - \alpha + 1)^+ \alpha = -(\alpha - \frac{h_i+1}{2})^2 + \frac{1}{4}(h_i+1)^2 \leqq \frac{1}{4}(h_i+1)^2$ 故）．$k_i$ についても同様な式が成立する．この事と，仮定及び (8.1) に注意して，(6.1) より $H^1(C_i, \mathcal{O}(F_{i+1} - h_i x - k_i y)_{C_i}) = 0$ を得る．従って完全列

$$0 \to \Xi_i \to \Xi_{i+1} \to \mathcal{O}(F_{i+1} - h_i x - k_i y)_{C_i} \to 0$$

より次の完全列を得る．

$$\cdots \to H^1(S, \Xi_i) \to H^1(S, \Xi_{i+1}) \to 0$$

従って $\dim H^1(S, \Xi_i) \geqq \dim H^1(S, \Xi_{i+1})$．一方 $\Xi_1 = \mathcal{O}((m-e)K)$ であった（(8.2)）．

補題 (8.5)　（Zariski [9]）或 $m_0$ が存在して，$m \geqq m_0$ に対し $\dim H^1(S, \mathcal{O}((m-e)K)) = \dim H^1(S, \mathcal{O}(mK))$

証明）　$D \in |eK|$　　$D = \sum_{i=1}^{n} C_i$ を $(\alpha)$ なる如くとる（(7.7)，(7.9)）．$m \geqq e+2$ とすると $m - e - 1 \geqq 1$ 故 (7.3) 及び，$(\alpha)$ の条件より $(m-e-1)K \cdot C_i + D_{i-1} \cdot C_i \geqq 1$ が成立する．$h = k = 0$ とし，$\Xi_i = \mathcal{O}(mK - Z_i)$ と置くと，$h_i = k_i = 0$（$x, y \in D$ は任意で良い）．従って (8.4) の条件が満たされ $\dim H^1(S, \mathcal{O}((m-e)K)) \geqq \dim H^1(S, \mathcal{O}(mK))$．後者の式を $f(m)$ と置くと，$f(m) \geqq f(m+e) \geqq f(m+2e) \geqq \cdots \geqq f(m+ke) \geqq \cdots$ しかし $f(m)$ は正整数　故ある $\ell_0$ が存在して $\ell \geqq \ell_0$ に対し $f(m + \ell e) =$ 一定．従って問題の $m_0$ は存在する．

定理 (8.6)　$P_e \geqq 2$，$eK^2 \geqq 2$，$m \geqq e+2$，$m \geqq m_0$ の時
（イ）任意の $x \in S$ に対し次の完全列が存在する．

$$0 \to H^0(S, \mathcal{O}(mK - x)) \to H^0(S, \mathcal{O}(mK)) \to \mathbb{C} \to 0$$

（ロ）$|mK|$ は底点を持たず $\Phi_{mK}$ は正則写像となる．

証明）　先ず任意の $x \in S$ に対し次の完全列が存在する（(5.0.1)）．

$$0 \to \mathcal{O}(mK - x) \to \mathcal{O}(mK) \to \mathbb{C}_x \to 0$$

従って次の完全列を得る．

$$\begin{aligned}(*) \quad 0 \to H^0(S, \mathcal{O}(mK - x)) \to H^0(S, \mathcal{O}(mK)) &\xrightarrow{\tau} \mathbb{C} \\ \to H^1(S, \mathcal{O}(mK - x)) \xrightarrow{\lambda} H^1(S, \mathcal{O}(mK)) &\to 0\end{aligned}$$

（但し $\varphi \in H^0(S, \mathcal{O}(mK))$ に対し $\tau : \varphi \to \varphi(x)$）

（イ）を示せば $\tau$ が全射となり（ロ）は明らか．あと（イ）即ち $\tau$ が全射である事を示そう．$\dim |eK| \geqq 1$ 故，$x \in D$ なる $D \in |eK|$ がある．

I）$x \notin \mathcal{E}$　II）$x \in \mathcal{E}$ に分ける．

I）$x \notin \mathcal{E}$ の時：(7.9) より組成列 $D = \sum_{i=1}^n C_i$ を

$$(\alpha) \quad KC_1 \geqq 1 \quad D_{i-1} \cdot C_i \geqq 1 \qquad (i \geqq 2)$$

なる如くとるのだが，若し $D$ の成分 $\theta$ で，$x \notin \theta$ 且 $K \cdot \theta \geqq 1$ なるものがあれば，$C_1 = \theta$ ととって，上の組成列を構成する（(7.9.1)）．扨，上に決めた $D = C_1 + \cdots + C_\ell + C_{\ell+1} + \cdots + C_n$ に於て $x \in C_\ell \quad x \notin C_{\ell+1} + \cdots + C_n$ とする．この時 $K \cdot C_\ell \geqq 1 + \delta_{\ell 1}$ が成立する（何者，$C_\ell \not< \mathcal{E}$ 故 $K \cdot C_\ell \geqq 1$．一方 $\ell = 1$ の時 $x \in C_1 \quad x \notin C_2 + \cdots + C_n$ 故上述の組成列のとり方より $K \cdot C_i = 0$ $(2 \leqq i \leqq n)$ 而して $K \cdot C_1 = K \cdot D = eK^2 \geqq 2$）．次に (8.2) に於て，$h = 1$ $k = 0$ とし $\Xi_i = \mathcal{O}(mK - Z_i - x)$ と置くと，次が成立する．

$$(**) \quad \Xi_{i+1}/\Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - \delta_{i\ell} x)_{C_i} \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

これは，（い）$i \leqq \ell - 1$ の時 $\Xi_{i+1} \cong \mathcal{O}(F_{i+1}) \quad \Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - C_i)$ 故 $\Xi_{i+1}/\Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1})_{C_i}$，（ろ）$i = \ell$ の時 $\Xi_{\ell+1} \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - x) \quad \Xi_\ell \cong (F_{\ell+1} - x - C_\ell)$ 故 $\Xi_{\ell+1}/\Xi \cong \mathcal{O}(F_{\ell+1} - x)_{C_\ell}$．（は）$i \geqq \ell + 1$ の時 $\Xi_{i+1} \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - x) \quad \Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - x - C_i)$ 故 $\Xi_{i+1}/\Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - x)_{C_i} = \mathcal{O}(F_{i+1})_{C_i}$ 等より明らかである．扨，$(**)$ より $h_i = \delta_{i\ell} \quad k_i = 0$ を得る．$m - e - 1 \geqq 1$（仮定），$K \cdot C_\ell \geqq 1 + \delta_{\ell 1}$，$(\alpha)$ に注意して

$$(m - e - 1)K \cdot C_i + D_{i-1} \cdot C_i \geqq 1 + \delta_{i\ell} > \frac{1}{4}(1 + \delta_{i\ell})^2 + \frac{1}{4}$$

従って (8.4) より $\dim H^1(S, \mathcal{O}((m - e)K)) \geqq \dim H^1(S, \Xi_{n+1})$．しかし $m \geqq m_0$ 故 $\dim H^1(S, \mathcal{O}((m - e)K)) = \dim H^1(S, \mathcal{O}(mK))$，又 $\Xi_{n+1} = \mathcal{O}(mK - x)$（(8.2.1)）．而して，$\dim H^1(S, \mathcal{O}(mK)) \geqq \dim H^1(S, \mathcal{O}(mK - x))$．故に $(*)$ で $\lambda$ は同型写像　而して $\tau$ は全射である．I）の場合終．

II）$x \in \mathcal{E}$ の時：$x \in \mathcal{E}_\lambda$ とする．(7.13) より $D = \sum_{i=1}^n C_i$ を

$$C_n < \mathcal{E}_\lambda \qquad \text{且} \qquad (\beta) \quad K \cdot C_i + D_{i-1} \cdot C_i \geqq 1$$

なる如くとる．$C_n < \mathcal{E}_\lambda < \mathcal{E}$ 故 $K \cdot C_n = 0$　従って $K$ は $C_n$ で自明で $\mathcal{O}(mK)_{C_n} \cong \mathcal{O}_{C_n}$．而して，次の完全列がある．

$$0 \to \mathcal{O}(mK - C_n) \to \mathcal{O}(mK) \to \mathcal{O}_{C_n} \to 0$$

故に，$C_n \cong \mathbb{P}^1((7.3))$　$H^1(C_n, \mathcal{O}_{C_n}) = 0$ より次の完全列をもつ．

$$\begin{aligned}(***)\quad 0 &\to H^0(S, \mathcal{O}(mK - C_n)) \to H^0(S, \mathcal{O}(mK)) \xrightarrow{\tau'} H^0(C_n, \mathcal{O}_{C_n}) \\ &\to H^1(S, \mathcal{O}(mK - C_n)) \xrightarrow{\sigma} H^1(S, \mathcal{O}(mK)) \to 0\end{aligned}$$

(8.2) に於て $h = k = 0$ とし $\Xi_i = \mathcal{O}(mK - Z_i)$ と置く．従って $\Xi_{i+1}/\Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1})_{C_i}$ $h_i = k_i = 0$（(8.3)）．仮定より $m - e - 1 \geqq 1$．$(m - e - 1)K \cdot C_i + D_{i-1} \cdot C_i \geqq K \cdot C_i + D_{i-1} \cdot C_i \geqq 1 > \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ 故 (8.4) より $\dim H^1(S, \mathcal{O}((m - e)K)) \geqq \dim H^1(S, \Xi_n)$．併し $m \geqq m_0$．故 $\dim H^1(S, \mathcal{O}((m - e)K)) = \dim H^1(S, \mathcal{O}(mK))$，又 $\Xi_n = \mathcal{O}(mK - C_n)$．従って $\dim H^1(S, \mathcal{O}(mK)) \geqq \dim H^1(S, \mathcal{O}(mK - C_n))$．而して $(***)$ に於て $\sigma$ は同型写像となり $\tau'$ は全射である．$K$ は $C_n$ 上自明故 $\varphi \in H^0(S, \mathcal{O}(mK))$ をとる時 $\varphi$ は $C_n$ 上で一定値 $\varphi(C_n)$ をとる．実際 $\tau' : \varphi \to \varphi(C_n)$ である．更に $K$ は，$\mathcal{E}_\lambda$ 上自明であり $\varphi$ は $\mathcal{E}_\lambda$ 上一定値をとるので，$x \in \mathcal{E}_\lambda$ に注意して $\varphi(C_n) = \varphi(x)$ である．従って $(***)$ に戻って $\tau = \tau'$ が分り $\tau$ は全射である．

定理 (8.7)　$m \geqq 2$ に対し $H^1(S, \mathcal{O}(mK)) = 0$

証明）$e$ を十分大きくとると $P_e \geqq 2$（リーマン・ロッホの定理より），$eK^2 \geqq 2$ が成立する．$F = (m-1)K$ と置き，$n(m-1) \geqq e + 2 + m_0$ を満たす $n$ をとると，(8.6) より $|nF|$ は底点を持たない．一方 $F^2 = (m-1)^2K^2 > 0$ 故 (6.3) より $H^1(S, \mathcal{O}(K + F)) = H^1(S, \mathcal{O}(mK)) = 0$.

系 (8.8)　$P_m$ $(m \geqq 1)$ は $S$ の位相不変量である．

$$\text{実際}\begin{cases} P_m = \frac{1}{2}m(m-1)c_1^2 + p_g - q + 1 & (m \geqq 2) \\ P_1 = p_g \end{cases}$$

証明）(4.2)(8.7)

以上を纏めて

定理 (8.9)　$P_e \geqq 2$　$eK^2 \geqq 2$　$m \geqq e + 2$ ならば，$|mK|$ は底点を持たない．従って $\Phi_{mF}$ は正則写像である．

証明） (8.7) より，(8.5) に於て $m_0 = e+2$ ととれる．従って (8.6) での $m$ の条件は $m \geqq e+2$ で十分である．

——————————< ∘ >——————————

(8.10)　次に $\Phi_{mK}$ が 1 対 1 かどうかを見る．$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \cdots + \mathcal{E}_\lambda + \cdots + \mathcal{E}_r$（(7.6)）に対し，$K$ は $\mathcal{E}_\lambda$ 上自明故，任意の $\varphi \in H^0(S, \mathcal{O}(mK))$ は $\mathcal{E}_\lambda$ 上で一定値をとる．従って $\Phi_{mK}(\mathcal{E}_\lambda)$ は 1 点より成り，$\Phi_{mK}$ は到る所 1 対 1 にはできない．解答は (8.11).

定義 (8.10.1)　（イ）$x \neq y$ で，$x$ と $y$ が同じ $\mathcal{E}_\lambda$ には含まれない時，『$x \neq y \mod \mathcal{E}$（$x$ と $y$ は $\mathcal{E}$ を法として異なる）』と言う．

（ロ）正則写像 $\Phi : S \to \mathbb{P}^n$ が次の条件を満足する時，$\Phi$ は『1 対 1 $\mod \mathcal{E}$（$\mathcal{E}$ を法として 1 対 1)』であると言う．

$$\text{条件}\ :\Phi^{-1}(\Phi(z)) = \begin{cases} z & (z \notin \mathcal{E}) \\ \mathcal{E}_\lambda & (z \in \mathcal{E}_\lambda) \end{cases}$$

$$\left(\underset{\text{同値}}{\Leftrightarrow}\ x \neq y \mod \mathcal{E}\ \text{ならば}\ \Phi(x) \neq \Phi(y)\right)$$

注意 (8.10.2)　$x \neq y$ に対し $H^1(S, \mathcal{O}(mK - x - y)) = 0$ ならば，$\Phi_{mK}(x) \neq \Phi_{mK}(y)$ である．

証明）　次の完全列が存在する（(5.0)(5.0.1)）.

$$0 \to \mathcal{O}(mK - x - y) \to \mathcal{O}(mK) \to \mathbb{C}_x \oplus \mathbb{C}_y \to 0$$

従って仮定を用いて次の完全列を得る．

$$\cdots \to H^0(S, \mathcal{O}(mK)) \xrightarrow{\lambda} \mathbb{C}^2 \to 0$$

（但し $\varphi \in H^0(S, \mathcal{O}(mK))$ に対し $\lambda : \varphi \to (\varphi(x), \varphi(y))$）$\lambda$ は全射故 $(1.0) = (\varphi_0(x), \varphi_0(y))$, $(0.1) = (\varphi_1(x), \varphi_1(y))$ となる $\varphi_0, \varphi_1 \in H^0(S, \mathcal{O}(mK))$ が存在する．$H^0(S, \mathcal{O}(mK))$ の底を $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ として完成する．従って同型正則写像を無視して $\Phi_{mK} : z \to (\varphi_0(z), \varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots) \in \mathbb{P}^n$ である．この時 $\Phi_{mK}(x) = (1, 0, \ldots)$　$\Phi_{mK}(y) = (0, 1, \ldots)$ 従って $\Phi_{mK}(x) \neq \Phi_{mK}(y)$

定理 (8.11)　$P_e \geqq 3$，$eK^2 \geqq 2$，$m \geqq e+3$ の時，

（イ）$x \neq y \mod \mathcal{E}$ ならば $H^1(S, \mathcal{O}(mK - x - y)) = 0$

（ロ）$\Phi_{mK}$ は正則且 1 対 1 $\mod \mathcal{E}$ である．

証明）　（イ）が示されれば，（ロ）は (8.9)(8.10.2) より分る．あとは（イ）を証明する．(I）$x, y \notin \mathcal{E}$，II）$x, y \in \mathcal{E}$，III）$x \notin \mathcal{E}$，$y \in \mathcal{E}$ の 3 通りに分ける．(I）$x, y \notin \mathcal{E}$ の時：$\dim H^0(S, \mathcal{O}(eK)) = P_e \geqq 3$ 故 $x, y \in D$ なる $D \in |eK|$ が存在する（何者，$H^0(S, \mathcal{O}(eK))$

の底を $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{P_e-1}\}$ とし，$\varphi = \sum_{\nu=0}^{P_e-1} a_\nu \varphi_\nu$ と書く時，$\varphi(x) = \varphi(y) = 0$ を満たす解 $(a_0, a_1, a_2, \dots) \neq (0, \dots 0)$ が存在する．この様な $\varphi \in H^0(S, \mathcal{O}(eK))$ をとり $D = (\varphi)$ とすれば良い)．(7.9) より組成列 $D = \sum_{i=1}^n C_i$ で

$$(\alpha) \quad KC_1 \geqq 1 \quad D_{i-1}C_i \geqq 1 \qquad (i \geqq 2)$$

なるものをとる．特に $D$ の成分 $\theta$ で $x \notin \theta$ 且 $K \cdot \theta \geqq 1$ なるものがあれば，$C_1 = \theta$ ととって組成列を構成する事にする（(7.9.1)）．(8.2) で $h = k = 1$ とし $\Xi_i = \mathcal{O}(mK - z_i - x - y)$ と置く．$D = \sum_{i=1}^n C_i$ に関し $x \in C_\ell$，$x \notin Z_{\ell+1}$，$y \in C_j$，$y \notin Z_{j+1}$ とする．$\ell \leqq j$ と仮定してよい．

$$(*) \quad \Xi_{i+1}/\Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - \delta_{i\ell}x - \delta_{ij}y)_{C_i} \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

この事は（い）$i \leqq \ell - 1$ の時，$\Xi_{i+1} \cong \mathcal{O}(F_{i+1}) \quad \Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - C_i)$ 故 $\Xi_{i+1}/\Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1})_{C_i}$，（ろ）$i = \ell$ の時，$\Xi_{\ell+1} \cong \mathcal{O}(\mathcal{O}(F_{\ell+1} - x) \quad \Xi_\ell \cong \mathcal{O}(F_{\ell+1} - C_\ell)$ 故 $\Xi_{\ell+1}/\Xi_\ell \cong \mathcal{O}(F_{\ell+1} - x)_{C_\ell}$（何者 $x \in C_\ell$），（は）$\ell + 1 \leqq i \leqq j - 1$ の時，$\Xi_{i+1} \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - x) \quad \Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - x - C_i)$ 故 $\Xi_{i+1}/\Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - x)_{C_i} = \mathcal{O}(F_{i+1})_{C_i}$（何者 $x \notin C_i$），（に）$i = j$ の時 $\Xi_{j+1} \cong \mathcal{O}(F_{j+1} - y)$ $\Xi_j \cong \mathcal{O}(F_{j+1} - y - C_j)$ 故 $\Xi_{j+1}/\Xi_j \cong \mathcal{O}(F_{j+1} - y)_{C_j}$，（ほ）$i \geqq j + 1$ の時 $\Xi_{i+1} \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - x - y)$ $\Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - x - y - C_i)$ 故 $\Xi_{i+1}/\Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - x - y)_{C_i} = \mathcal{O}(F_{i+1})_{C_i}$（何者 $x, y \notin C_i$），等より分る．さて $(m - e - 1)KC_i + D_{i-1}C_i \geqq 2K \cdot C_i + D_{i-1} \cdot C_i = r_i$ と置く時，$C_\ell, C_j \not< \mathcal{E}$ 故 $KC_\ell \geqq 1$，$KC_j \geqq 1$ 特に上の組成列のとり方より (8.6) の場合と同様に $KC_\ell \geqq 1 + \delta_{\ell 1}$ が成立することに注意して $i = \ell = 1$ の時 $r_i \geqq 4$，$i = \ell \geqq 2$ 及び $i = j > \ell$ の時 $(\alpha)$ を考えて $r_i \geqq 3$，$i \neq j, \ell$ の時 $(\alpha)$ を考えて $r_i \geqq 1$ を得る．従って $(m - e - 1)KC_i + D_{i-1}C_i + D_{i-1}C_i \geqq 1 + \delta_{i\ell} + \delta_{ij}$．併し $(*)$ より $h_i = \delta_{i\ell} \quad k_i = \delta_{ij}$（(8.3)）故 $\frac{1}{4}(h_i + 1)^2 + \frac{1}{4}(k_i + 1)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\delta_{i\ell} + \frac{3}{4}\delta_{ij} < 1 + \delta_{i\ell} + \delta_{ij}$ 従って (8.4) より $\dim H^1(S, \mathcal{O}((m - e)K)) \geqq \dim H^1(S, \Xi_{n+1})$ 一方仮定より $m - e \geqq 3$ 故 (8.7) より $H^1(S, \mathcal{O}((m - e)K)) = 0$ 而して，$\Xi_{n+1} = \mathcal{O}(mK - x - y)$ に注意して（(8.2.1)），$H^1(S, \mathcal{O}(mK - x - y)) = 0$（II）$x, y \in \mathcal{E}$ の時：$x \in \mathcal{E}_\lambda$，$y \in \mathcal{E}_\nu$ とする．$x \neq y \mod \mathcal{E}$ 故 $\lambda \neq \nu$ である．$x, y \in D$ なる $D \in |eK|$ をとる（実際 $\dim |eK| \geqq 2$ より可能．例えば（I））．(7.12) より $D = \sum_{i=1}^n C_i$ を

$$C_{n-1} < \mathcal{E}_\lambda \quad C_n < \mathcal{E}_\nu \quad \text{且} \quad (\beta) \quad K \cdot C_i + D_{i-1} \cdot C_i \geqq 1 \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

なる如くとる．(8.2) で $h = k = 0$ とし $\Xi_i = \mathcal{O}(mK - Z_i)$ と置く．従って $\Xi_{i+1}/\Xi_i = \mathcal{O}(F_{i+1})_{C_i}$ $h_i = k_i = 0$（(8.3)）$1 \leqq i \leqq n$．一方 $(m - e - 1)K \cdot C_i + D_{i-1} \cdot C_i \geqq K \cdot C_i + D_{i-1} \cdot C_i \geqq 1 > \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ 故 (8.4) より $\dim H^1(S, \mathcal{O}((m - e)K)) \geqq \dim H^1(S, \Xi_{n-1})$．しかし $m - e \geqq 3$ 故 (8.7) より $H^1(S, \mathcal{O}((m - e)K)) = 0$ 従って $H^1(S, \Xi_{n-1}) = 0$ 一方 $K \cdot C_{n-1} = 0 \quad K \cdot C_n = 0$ 故 $K$ は $C_{n-1}$，$C_n$ 上自明で $\mathcal{O}(mK)_{C_{n-1}} \cong \mathcal{O}_{C_n} \quad \mathcal{O}(mK)_{C_n} \cong \mathcal{O}_{C_n}$ 従って次の完全列が存在する（$C_{n-1} \cap C_n = \phi$ に注意）．

$$0 \to \mathcal{O}(mK - C_{n-1} - C_n) \to \mathcal{O}(mK) \to \mathcal{O}_{C_{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{C_n} \to 0$$

従って $\Xi_{n-1} = \mathcal{O}(mK - C_{n-1} - C_n)$ に注意して次の完全列をもつ．

$$0 \to H^0(S, \mathcal{O}(mK - C_{n-1} - C_n)) \to H^0(S, \mathcal{O}(mK)) \xrightarrow{\lambda} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \to 0$$

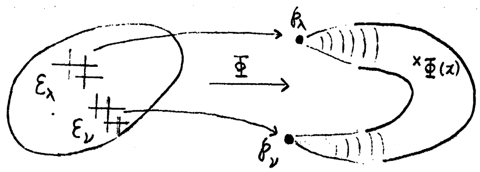
（但し $K$ は $\mathcal{E}_\lambda(> C_{n-1})$，$\mathcal{E}_\nu(> C_n)$ 上自明故 $\varphi \in H^0(S, \mathcal{O}(mK))$ は $\mathcal{E}_\lambda$，$\mathcal{E}_\nu$ 上一定値 $\varphi(C_{n-1})$，$\varphi(C_n)$ をとる．$\lambda : \varphi \to (\varphi(C_n), \varphi(C_{n-1}))$ である）．さて $x \in \mathcal{E}_\lambda$，$y \in \mathcal{E}_\nu$ 故 $\varphi(C_n) = \varphi(x)$ $\varphi(C_{n-1}) = \varphi(y)$，而して $\lambda : \varphi \to (\varphi(x), \varphi(y))$．一方次の完全列が存在する．

$$0 \to \mathcal{O}(mK - x - y) \to \mathcal{O}(mK) \to \mathbb{C}_x \oplus \mathbb{C}_y \to 0$$
$$0 \to H^0(S, \mathcal{O}(mK - x - y)) \to H^0(S, \mathcal{O}(mK)) \xrightarrow{\lambda} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$
$$\to H^1(S, \mathcal{O}(mK - x - y)) \xrightarrow{\tau} H^1(S, \mathcal{O}(mK)) \to 0$$

ここで，$\varphi \in H^0(S, \mathcal{O}(mK))$ に対し $\lambda' : \varphi \to (\varphi(x), \varphi(y))$ である．即ち $\lambda' = \lambda$ で，全射である．而して $\tau$ は同型写像となる．しかし (8.7) より $H^1(S, \mathcal{O}(mK)) = 0$ 故 $H^1(S, \mathcal{O}(mK - x - y)) = 0$（III）$x \notin \mathcal{E}$，$y \in \mathcal{E}$ の時：同様にやれば良い．

——————————< ◦ >——————————

(8.12)　次に $S - \mathcal{E}$ 上で $\Phi_{mK}$ が双正則かどうかを見る．




$S - \mathcal{E}$ 上で 1 対 1（但し (8.11) の条件下）が分っているから，各点 $x \in S - \mathcal{E}$ で $\Phi_{mK}$ の函数行列式の階数が 2 であるかどうかを見ればよい．

注意 (8.12.1)　$H^1(S, \mathcal{O}(mK - 2x)) = 0$ ならば，$\Phi_{mK}$ は $x$ の近傍で双正則である．

証明）　次の完全列が存在する（(5.0)，(5.0.1)，仮定）．

$$0 \to \mathcal{O}(mK - 2x) \to \mathcal{O}(mK) \to \mathbb{C}_x^3 \to 0$$
$$\cdots \to H^0(S, \mathcal{O}(mK)) \xrightarrow{\lambda} \mathbb{C}^3 \to 0$$

（但し $\psi \in H^0(S, \mathcal{O}(mK))$ に対し，$(z_1, z_2)$ を中心 $x$ の局所座標とし，$x$ の近傍で $\psi = \psi_0 + \psi_1 z_1 + \psi_2 z_2 + \psi_3 z_1^2 + \psi_4 z_1 z_2 + \psi_5 z_2^2 + \cdots$ と書く時 $\lambda : \psi \to (\psi_0, \psi_1, \psi_2)$ である）．$\lambda$ は全射故 $(\varphi_{00}, \varphi_{01}, \varphi_{02}) = (1, 0, 0)$，$(\varphi_{10}, \varphi_{11}, \varphi_{12}) = (0, 1, 0)$，$(\varphi_{20}, \varphi_{21}, \varphi_{22}) = (0, 0, 1)$ なる $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in H^0(S, \mathcal{O}(mK))$ が存在する．$H^0(S, \mathcal{O}(mK))$ の底を $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\}$ として完成し，$\Phi_{mK}(z) = (\varphi_0(z), \varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z), \ldots) = (1 + \cdots, z_1 + \cdots, z_2 + \cdots, \varphi_3(z), \sim)$ と考え

てよい．(但し $\cdots$ は，$z_1, z_2$ について次数 $\geqq 2$ の項)．従って，$\Phi_{mK}$ の函数行列式の $x$ での階数は 2 である．

<u>定理 (8.13)</u>　$P_e \geqq 4$，$eK^2 \geqq 2$，$m \geqq e+3$ の時，

（イ）$x \notin \mathcal{E}$ ならば $H^1(S, \mathcal{O}(mK-2x)) = 0$

（ロ）$\Phi_{mK}$ は正則且 $\mathcal{E}$ を法として双正則（即ち $S-\mathcal{E}$ 上双正則の事）従って勿論双有理である．

証明）　（イ）が示されれば（ロ）は (8.9)(8.12.1) より分る．あと（イ）を示そう．$\dim H^0(S, \mathcal{O}(eK)) = P_e \geqq 4$ 故 $\varphi \neq 0$ なる $\varphi \in H^0(S, \mathcal{O}(eK))$ で，$\varphi(x) = 0$，$(\frac{\partial\varphi}{\partial z_1})(x) = 0$，$(\frac{\partial\varphi}{\partial z_2})(x) = 0$ を満たすものが存在する (但し $(z_1, z_2)$ は中心 $x \in S$ の局所座標．例えば (8.11) の議論)．$D = (\varphi) \in |eK|$ と置く．$x$ は $D$ の重複点である．(7.9) より $D = \sum_{i=1}^n C_i$ を

$$(\alpha) \quad K \cdot C_1 \geqq 1 \quad D_{i-1} \cdot C_i \geqq 1 \qquad (2 \leqq i \leqq n)$$

なる如くとる．特にもし $D$ の成分 $\theta$ で $x \notin \theta$ 且 $K \cdot \theta \geqq 1$ なるものがあれば $C_1 = \theta$ をとって組成列を構成しておく事にする ((7.9.1))．(8.2) で $h = 2 \quad k = 0$ とし，$\Xi_i = \mathcal{O}(mK - Z_i - 2x)$ と置く．$D = \sum_{i=1}^n C_i$ に於て $x \in C_\ell \quad x \notin Z_{\ell+1}$ とする．この時 $K \cdot C_\ell \geqq 1 + \delta_{\ell 1}$（何者，(8.6) と同じ議論)．以下（I）$x$ が $C_\ell$ の重複点の時（II）$x$ が $C_\ell$ の単純点の時の 2 通りに分ける．(I) の場合：次が成立する．

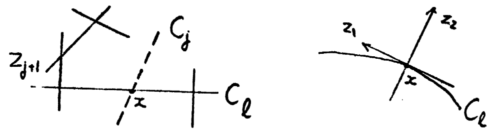
$$(*) \quad \Xi_{i+1}/\Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - 2\delta_{i\ell}x)_{C_i}$$

これは，(い) $i \leqq \ell - 1$ の時 $x$ は $Z_i$，$Z_{i+1}$ の重複点故，$\Xi_{i+1} \cong \mathcal{O}(F_{i+1}) \quad \Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - C_i)$ となり $\Xi_{i+1}/\Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1})_{C_i}$，(ろ) $i = \ell$ の時，$\Xi_{\ell+1} \cong \mathcal{O}(F_{\ell+1} - 2x) \quad \Xi_\ell \cong \mathcal{O}(F_{\ell+1} - 2x - C_\ell)$ 故 $\Xi_{\ell+1}/\Xi_\ell \cong \mathcal{O}(F_{\ell+1} - 2x)_{C_\ell}$（は）$i \geqq \ell + 1$ の時，$x \notin C_i$ に注意して $\Xi_{i+1}/\Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - 2x)_{C_i} = \mathcal{O}(F_{i+1})_{C_i}$ 等より得られる．偖，$(m-e-1)K \cdot C_i + D_{i-1} \cdot C_i \geqq 2K \cdot C_i + D_{i-1} \cdot C_i = r_i$ と置くと，$i = \ell = 1$ の時 $K \cdot C_\ell \geqq 1 + \delta_{\ell 1}$ より $r_i \geqq 4$，$i = \ell > 1$ の時 $KC_\ell \geqq 1$ 及び $(\alpha)$ を考えて $r_i \geqq 3$，$i \neq \ell$ の時 $(\alpha)$ より $r_i \geqq 1$．従って $(m-e-1)KC_i + D_{i-1} \cdot C_i \geqq 1 + 2\delta_{i\ell}$ が成立する．然るに $(*)$ より $h_i = \delta_{i\ell}k_i = 0$ ((8.3)) 故，$\frac{1}{4}(h_i+1)^2 + \frac{1}{4}(k_i+1)^2 = \frac{1}{2} + 2\delta_{i\ell} < 1 + 2\delta_{i\ell}$ に注意して (8.4) より $\dim H^1(S, \mathcal{O}((m-e)K)) \geqq \dim H^1(S, \Xi_{n+1})$．しかし (8.7) より $H^1(S, \mathcal{O}((m-e)K)) = 0$ 又 $\Xi_{n+1} = \mathcal{O}(mK - 2x)$ であるので $H^1(S, \mathcal{O}(mK - 2x)) = 0$（I）終わり．(II) の場合：$\ell$ の他に $x \in C_j \quad x \notin C_{j+1} + \cdots + C_{\ell-1}$ なる $j < \ell$ をとる（実際 $x$ は $C_\ell$ の単純点故 $x \in D$ の仮定より存在する)．

$$(**) \quad \Xi_{i+1}/\Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1} - (\delta_{ij} + 2\delta_{i\ell})x)_{C_i} \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

これは（い）$i \leqq j - 1$ の時 $x$ は $Z_{i+1}$，$Z_i$ の重複点故，$\Xi_{i+1} = \mathcal{O}(mK - Z_{i+1}) \quad \Xi_i = \mathcal{O}(mK - Z_{i+1} - C_i)$ 故 $\Xi_{i+1}/\Xi_i \cong \mathcal{O}(F_{i+1})_{C_i}$，（ろ）$i = j$ の時 $x$ は $Z_{j+1}$ の単純点で $\Xi_{j+1} \cong \mathcal{O}(F_{j+1} - x)$

が成立する．何者，$(\Xi_{j+1})_x \cong O(F_{j+1}-x)_x$ を示せば良いが，$x$ の近傍で $C_\ell : z_2 = 0$ と書ける様な中心 $x$ の局所座標を $(z_1, z_2)$ とすると，




$\varphi \in O(mK - Z_{j+1})_x \cong O(F_{j+1})_x$ が $\varphi \in O(mK - Z_{j+1} - 2x)_x$ である為には $\varphi(z_1, z_2) = z_2\psi(z_1, z_2) \quad \psi \in O(F_{j+1})_x$ と書け $\psi(0,0) = 0$ となる事，即ち $\psi \in O(F_{j+1} - x)_x$ となる事が，必要十分である．従って $\Xi_{j+1} = O(mK - Z_{j+1} - 2x) \cong O(F_{j+1} - x)$．一方 $x$ は $Z_j$ の重複点故 $\Xi_j \cong O(F_{j+1} - C_j) = O(F_{j+1} - x - C_j)$．従って $\Xi_{j+1}/\Xi_j \cong O(F_{j+1} - x)_{C_j}$．（は）$j < i < \ell$ の時 $\Xi_{i+1}/\Xi_i \cong O(F_{i+1})_{C_i}$（に）$i = \ell$ の時 $\Xi_{\ell+1}/\Xi_\ell \cong O(F_{\ell+1} - 2x)_{C_\ell}$（ほ）$i > h$ の時 $\Xi_{i+1}/\Xi_i \cong O(F_{i+1})_{C_i}$ 等より示される．偖，$(m-e-1)K \cdot C_i + D_{i-1} \cdot C_i \geqq 2K \cdot C_i + D_{i-1} \cdot C_i = r_i$ と置くと，$K \cdot C_j \geqq 1 \quad K \cdot C_\ell \geqq 1$（何者 $C_j, C_\ell \not< \mathcal{E}$）及び $(\alpha)$ を用いて，$i \neq j, \ell$ の時 $r_i \geqq 1 \quad i = j$ の時 $r_i \geqq 2 \quad i = \ell$ の時 $r_i \geqq 3$ が得られ，従って $(m-e-1)K \cdot C_i + D_{i-1} \cdot C_i \geqq 1 + \delta_{ij} + 2\delta_{i\ell}$．一方 $(**)$ より $h_i = \delta_{ij} + 2\delta_{i\ell} \quad k_i = 0$（(8.3)）故 $\frac{1}{4}(h_i+1)^2 + \frac{1}{4}(k_i+1)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\delta_{ij} + 2\delta_{i\ell} < 1 + \delta_{ij} + 2\delta_{i\ell}$ 従ってあとは同様に (8.4) と (8.7) を用いて $H^1(S, O(mK - 2x)) = 0$ が得られる．

——————————< ◦ >——————————

(8.14)　最後に (8.9)(8.11)(8.13) 等の条件を満たす成可く小さい $e$ を求める事を考えてみる．それは (8.16) で与えられるが，その為に次の補題が必要である．

補題 (8.15)　$K^2 = 1$ ならば $p_g < 2 \quad q \leqq 1$．

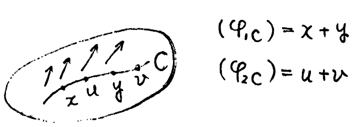
証明）（イ）$p_g \leqq 2$ を示す：$p_g \geqq 2$ と仮定する．$\dim|K| = p_g - 1 \geqq 1$ 故，生成要素 $D \in |K|$ を採り $D = C_1 + \cdots + C_n$ と書く．$n \geqq 1$ である．$1 = K^2 = K \cdot D = \sum_{i=1}^n K \cdot C_i$ 故 $K \cdot C_1 = 1$，$K \cdot C_i = 0\ (i \geqq 2)$ と仮定して良く，従って $i \geqq 2$ に対して $C_i < \mathcal{E}$ で，$\pi(C_i) = 0 \quad C_i^2 = -2$（(7.3)）．先ず $D$ が既約即ち $n = 1 \quad D = C_1$ である事を示そう．$X = \sum_{i=2}^n C_i\ (\geqq 0)$ と置くと $D = C_1 + X$ と書け，上の事実より $X$ は系 $|K|$ の固定成分であり $C_1^2 \geqq 0$ が成立する．しかし $2\pi(C_1) - 2 = C_1^2 + K \cdot C_1$ より $C_1^2 \geqq 1$ を得るが，$1 = K \cdot C_1 = D \cdot C_1 = C_1^2 + C_1 \cdot X$，$C_1 \cdot X \geqq 0$（(7.8)）を考慮して $C_1^2 = 1$，$C_1 \cdot X = 0$ 従って $X = 0$ を得る．即ち $D = C_1$．而して $|K|$ の生成要素は $C^2 = 1$ なる既約曲線 $C$ である．$C$ は特異点を持たない（何者，ベルチニの定理より $C$ は $|K|$ の底点以外には特異点を持たない，一方 $|K|$ の任意の底点 $\wp$ をとる時，他の生成要素 $C'\ (\neq C)$ に対し勿論 $\wp \in C'$ だが，$C \cdot C' = C^2 = 1$ 故 $\wp$ は $C$ の単

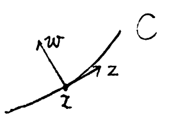
純点である）．更に $\pi(C) = \frac{1}{2}(K \cdot C + C^2) + 1 = 2$．$K = [C]$ に注意して次の完全列を得る．

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}(K) \to \mathcal{O}(K)_C \to 0$$
$$0 \to H^0(S, \mathcal{O}) \to H^0(S, \mathcal{O}(K)) \to H^0(C, \mathcal{O}(K_C)) \to \cdots$$

しかし $H^0(S, \mathcal{O}) \cong \mathbb{C}$，$\dim H^0(C, \mathcal{O}(K_C)) \leqq 1$ に注意して $p_g \dim H^0(S, \mathcal{O}(K)) \leqq 2$ を得る．従って $p_g = 2$

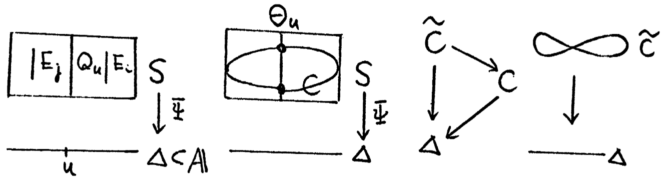
（ロ）$q \leqq 1$ を示す：$q = K^2 + p_g - P_2 + 1$ ((8.8))，$K^2 = 1$，$P^2 \geqq p_g$ より $q \leqq 2$．$q = 2$ としよう（これより矛盾を示す）．$\varphi_1, \varphi_2$ を $S$ 上正則 1-型式の空間の底とする．$d\varphi_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2)$ である．$\{\gamma_1, \dots \gamma_4\}$ を $S$ 上 1 次元輪体のベッチ基底とする（$b_1(S) = 2q = 4$）．$\omega_{j\nu} = \int_{\gamma_j} \varphi_\nu$（$1 \leqq j \leqq 4$，$1 \leqq \nu \leqq 2$），$\omega_j = (\omega_{j1}, \omega_{j2}) \in \mathbb{C}^2$，$\Omega = \{\sum m_j \omega_j \mid m_j \in \mathbb{Z}\}$，$\mathbb{A} = \mathbb{C}^2/\Omega$ と置き，$\Psi : S \to \mathbb{A}$ をアルバネーゼ写像とする．実際 $\Psi : z \to \Psi(z) = (\int_{\wp_0}^z \varphi_1, \int_{\wp_0}^z \varphi_2) (\mathrm{mod}\ \Omega)$．以下（1）$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \neq 0$（2）$\varphi_1 \wedge \varphi_2 = 0$ に分ける．（1）$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \neq 0$ の時：$\Psi(S) = \mathbb{A}$，$D = (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in |K|$ である．（イ）でやった様に，$K \cdot D = K^2 = 1$ より，$D = C + \sum_{i=2}^n E_i$（但し，$K \cdot C = 1$，$K \cdot E_i = 0$，$\pi(E) = 0$，$E_i^2 = -2$）と書ける．この時 $\Psi(E_i)$ は 1 点より成る．偖，$C$ への制限 $\varphi_{1C}, \varphi_{2C}$ は $\mathbb{C}$ 上 1 次独立である［何者，$(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ で，$(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2)_C = 0$ とすると，$z \in C$ に対し $a_1 \int^z \varphi_1 + a_2 \int^z \varphi_2 =$ 一定．故 $\Psi(C) \subset \mathbb{A}$ は楕円曲線である．$\Gamma \cap \Psi(C) = \phi$，$\Gamma \cap \Psi(E_i) = \phi$ なる曲線 $\Gamma$（即ち $\mathbb{C}^2$ 上では直線となる $\Psi(C)$ を平行移動して採れる）を採ると，勿論 $S \supset \Psi^{-1}(\Gamma)$ は $C + \sum E_i$ と交わらず $K \cdot \Psi^{-1}(\Gamma) = 0$ を得る．従って $\Psi^{-1}(\Gamma)$ の各既約成分 $\theta_j$ は $K \cdot \theta_j = 0$，$\pi(\theta_j) = 0$ を満たす．従って $\Psi(\theta_j) =$ 一点 で，$\Gamma = \bigcup_j \Psi(\theta_j)$ に反する］．一方 $C$ は非特異で，$\pi(C) = 2$，$D = C$ である［何者，$C$ の非特異モデルを $\tilde{C}$ とすると，上述の事実より $\tilde{C}$ 上 1 次独立正則 1-型式 $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ が存在する故 $\pi(\tilde{C}) \geqq 2$．一方 $2 \leqq 2\pi(\tilde{C}) - 2 \leqq 2\pi(C) - 2 = C^2 + KC = (D - \sum E_i) \cdot C + KC \leqq 2K \cdot C = 2$ 故 $\pi(C) = \pi(\tilde{C}) = 2$ 従って $C = \tilde{C}$，又 $C \cdot (\sum E_i) = 0$ も得られる故 (7.8) より $\sum E_i = 0$ 而して $D = C$］．従って $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = C$．偖，$z \notin C$ に対し $\varphi_1(z) \neq 0$ で $\varphi_{1C}$ は $C$ 上で 2 つの零をもつ（何者，$C$ は非特異で $\pi(C) = 2$）．$\varphi_{2C}$ についても同様で，$(\varphi_{1C}) = x + y$，$(\varphi_{2C}) = u + v$ とする．




正則 1-型式 $\varphi_1$ を共変ベクトル場と考える．$c_2$ は $S$ のオイラー数であるが，公式 $c_2 = I_x(\varphi_1) + I_y(\varphi_1)$ に注意する（但し $I_x(\varphi_1), I_y(\varphi_1)$ は共変ベクトル場 $\varphi_1$ の特異点 $x, y$ での代数的指数を表わす）．偖，中心 $x$ の $S$ の局所座標 $(w, z)$ を $dz = \varphi_2$，$\varphi_1 \wedge \varphi_2 = w dw \wedge dz$ となる様にとれるが（上図），この時 $(\varphi_1 - w dw) \wedge dz = 0$ 故 $\varphi_1 - w dw = f dz$ と書ける．しかし $d\varphi_1 = 0$ に注意して $df \wedge dz = 0$ 即ち $\frac{\partial f}{\partial w} = 0$．而して，$f$ は $z$ だけの正則函数で $f = f(z)$

と書ける．従って $\varphi_{1C} = f(z)dz = zg(z)dz\ (g(z) \neq 0)$，而して $\varphi_1 = wdz + gzdz\ (g \neq 0)$ 即ち $I_x(\varphi_1) = 1$．同様に $I_y(\varphi_1) = 1$．従って上の公式より $c_2 = 2$ を得る．偖，ネーターの公式 (4.4) は $c_1^2 + c_2 = 12(p_g - q + 1) \equiv 0(12)$ であったが，これは $c_1^2 = K^2 = 1 \quad c_2 = 2$ に矛盾する．(2) $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = 0$ の時：$\Psi$ の函数行列式の階数は到る所 1 で，$\Psi(S) = \Delta \subset \mathbb{A}$ は種数 2 の非特異曲線であり，一般の $u \in \Delta$ について $\theta_u = \Psi^{-1}(u)$ は既約非特異曲線である．$p_g \geqq 1$ である（何者，ネーターの公式 (4.4) に於て，$c_1^2 = K^2 = 1 \quad c_2 = 2 - 4q + b_2$ $q = 2$ を代入して $12p_g = 7 + b_2$ 従って $p_g \geqq 1$)．而して $\dim|K| = p_g - 1 \geqq 0$ より $|K| \ni D \geqq 0$ が存在するが $K^2 = D^2 = 1$ より $D > 0$ である．$D = \sum_{i=1}^n C_i$ と書く時 $1 = K^2 = K \cdot D = \sum_{i=1}^n K \cdot C_i$，$K \cdot C_i \geqq 0$ 故 $K \cdot C_1 = 1 \quad K \cdot C_i = 0\ (i \geqq 2)$ としてよい．そこで，$D = C + \sum_{i=1}^n E_i$ と書き直しておく（但し，$K \cdot C_1 = 1$，$K \cdot E_i = 0$，$\pi(E_i) = 0$，$E_i^2 = -2$．(7.3))．$\Psi(E_i)$ は 1 点 $(\in \Delta)$ である．而して $\theta_u \cap E_i = \phi$（何者，$\theta_u \cap E_i \neq \phi$ とすると $\theta_u = E_i$．これは $\theta_u^2 = 0$，$E_i^2 = -2$ に反する)．一方 $K\theta_u > 0$（何者，$\theta_u^2 = 0$ と (7.3)) であるが，$2\pi(\theta_u) - 2 = K \cdot \theta_u$ より $K \cdot \theta_u \geqq 2$ である．従って $C \cdot \theta_u = D \cdot \theta_u = K \cdot \theta_u \geqq 2$.




$\tilde{C}$ を $C$ の非特異モデルとする．勿論 $\tilde{C}$ は $\Delta$ の被覆面となる．その枚数を $m(\geqq 2)$，分岐点の数を $b$ とすると，$\chi(\tilde{C}) = m\chi(\Delta) - b$（但し $\chi(*)$ はオイラー標数）故 $2 - 2\pi(\tilde{C}) = m(2 - 2\pi(\Delta)) - b$．従って $2\pi(\tilde{C}) - 2 = m(2\pi(\Delta) - 2) + b \geqq 2m \geqq 4$（何者，$\pi(\Delta) = 2$)．一方 $2\pi(C) - 2 = K \cdot C + C^2 = K \cdot C + C \cdot (D - \sum_i E_i) \underset{(*)}{=} 2K \cdot C - \sum C \cdot E_i \underset{(**)}{\leqq} 2K \cdot C = 2$（何者，$(*)\ D \approx K$，$(**)\ CE_i \geqq 0$)．しかしこれは $\pi(\tilde{C}) \leqq \pi(C)$ に反する．以上 (1) (2) 共に矛盾が示された．即ち $q \leqq 1$ である．

定理 (8.16)　$P_2 \geqq 2$，$P_3 \geqq 4$

証明）(8.8) より $P_2 = K^2 + p_g - q + 1\ (K^2 = c_1^2) \quad P_3 = 3K^2 + p_g - q + 1 = 2K^2 + P_2$．仮定 (7.0) より $K^2 \geqq 1$ である故 $P_2 \geqq 2$ を示せば $P_3 \geqq 4$ は明らか．$P_2 \geqq 2$ を示そう．$p_g \geqq 2$，$p_g = 1$，$p_g = 0$ に分ける．（イ）$p_g \geqq 2$ の時：$P_2 \geqq P_1 = p_g$ より明らか．（ロ）$p_g = 1$ の時：ネーターの公式 (4.4) より $q \leqq 2$ を得る（但し $p_a = p_g - q \quad K^2 = c_1^2 \quad c_2 = b_2$)．従って (8.15) より $K^2 - q \geqq 0$ 而して $P_2 = p_g + 1 + K^2 - q \geqq 2$．（ハ）$p_g = 0$ の時：$q = 0$（エンリケス）従って $P_2 = K^2 + 1 \geqq 2$.

定理 (8.17)　（イ）$m \geqq 4$ ならば $\Phi_{mK}$ は正則写像であり（ロ）$m \geqq 6$ ならば $\Phi_{mK}$ は $\mathcal{E}$ を法として双正則（即ち $\mathcal{E}$ の外で双正則)，従って勿論双有理写像である．

証明） (8.16) に注意すれば，（イ）は (8.9) より（ロ）は (8.13) より明らか.

## 文献

[1] E. Brieskorn: Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen, Math. Ann., **166**(1966), 76–102.

[2] F. Enriques: Le Superficie Algebriche, Nicola Zanichelli, Bologna, 1949.

[3] D. Gorenstein: An arithmetic theory of adjoint plane curves, Trans. Amer. Math. Soc., **12**(1952), 414–436.

[4] K. Kodaira: On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **39**(1953), 1268–1273.

[5] D. Mumford: [9] の附録.

[6] D. Mumford: Pathologies III, Amer. J. of Math., **89**(1967), 94–104.

[7] M. Rosenlicht: Equivalence relations on algebraic curves, Ann. of Math., **56**(1952), 169–191.

[8] I. R. Šafarevič: Algebraic Surfaces, Proc. Steklov Inst. Math., **75**(1965), Amer. Math. Soc., 1967.

[9] O. Zariski: The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective division on an algebraic surface, Ann. of Math., **76**(1962), 560–615.