まえがき

　これは複素多様体と複素構造の変形について一年半にわたる予定の講義のＩ（最初の半年分）である．複素構造の変形の理論は種々の複素多様体の例に見られる現象を説明しようとしてつくられたので，例が最も重要である．このＩでは主として複素多様体の例を構成する種々の方法について述べた．

　ノートを作られた諏訪立雄君に感謝する．

　1968 年 5 月

小平邦彦

目　次

第一章　複素多様体の定義；コンパクト複素多様体の例を構成する種々の方法 1
§1. 正則函数と正則写像 1
§2. 複素多様体（Complex manifolds） 4
§3. コンパクト複素多様体の例を構成する（記述する）方法 9
§4. コンパクト複素多様体の複素解析族 19

第二章　層とコホモロジー 34
§5. 函数芽 34
§6. コホモロジー群 37
§7. 完全列（exact sequences） 43
§8. Fine sheaf 47
§9. de Rham の定理と Dolbeault の定理 49
§10. ベクトルバンドル 58
§11. 無限小変形 61

複素多様体と複素構造の変形 I

予備知識としては函数論，位相幾何および微分幾何それぞれの初歩のみを仮定する．

第一章．複素多様体の定義；コンパクト複素多様体の例を構成する種々の方法

§1. 正則函数と正則写像

次の記号を用いる．

$\mathbb{R}$：実数体,

$\mathbb{R}^n$：n 次元 Euclid 空間,

$\mathbb{C}$：複素数体,

$\mathbb{C}^n$：複素 n 変数の空間

$$= \{z \mid z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)\} \qquad z_\nu = x_\nu + iy_\nu$$
$$x_\nu, y_\nu \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}.$$

W を $\mathbb{C}^n$ の領域（i.e. 連結開集合），$f(z)$ を W 上の複素数値函数とする．

定義． W の各点 a の近傍で

$$f(z) = \sum_{k_i=0}^{\infty} c_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(z_1 - a_1)^{k_1}(z_2 - a_2)^{k_2} \ldots (z_n - a_n)^{k_n}$$

と収束巾級数で表わされるとき，$f(z)$ は正則（holomorphic）であるという．

注意． $\mathcal{P}(z) = \sum c_{k_1\ldots k_n}(z_1-a_1)^{k_1} \ldots (z_n-a_n)^{k_n}$ で, $\mathcal{P}(w)$ が収束するならば, $\mathcal{P}(z)$ は $|z_\nu - a_\nu| < |w_\nu - a_\nu|$ のとき絶対収束する．

証明． $a = 0$ として一般性を失なわない．仮定から $\left|c_{k_1\ldots k_n} w_1^{k_1} \ldots w_n^{k_n}\right| \le C < \infty$ なる C が存在する．従って $|z_\nu| < |w_\nu|$ ならば

$$\begin{aligned}\sum\left|c_{k_1\ldots k_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}\right| &\le \sum \frac{c\left|z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}\right|}{\left|w_1^{k_1} \ldots w_n^{k_n}\right|} \\ &\le C \sum \left|\frac{z_1}{w_1}\right|^{k_1} \sum \left|\frac{z_2}{w_2}\right|^{k_2} \cdots \sum \left|\frac{z_n}{w_n}\right|^{k_n} \\ &\le C \frac{1}{\left(1 - \left|\frac{z_1}{w_1}\right|\right)\left(1 - \left|\frac{z_2}{w_2}\right|\right) \ldots \left(1 - \left|\frac{z_n}{w_n}\right|\right)} < \infty.\end{aligned}$$

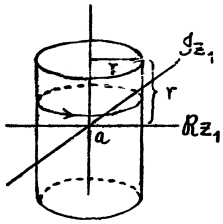
□

定義． $|z| = \max_\nu |z_\nu|$.

定義． $\{z \mid |z_\nu - a_\nu| < r_\nu, \nu = 1, 2, \ldots, n\}$ を多重円板（polydisk, polycylinder）という．

定理 1． $f(z)$ が W で連続で各変数 z_ν の正則函数（$z_\lambda (\lambda \neq \nu)$ はとめる）ならば，$f(z)$ は n 変数 $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ の正則函数である．

証明. a を W の任意の点とし r を $\{z \mid |z_\nu - a_\nu| \leq r\} \subset W$ になるようにとる．z_1 平面上で Cauchy の積分公式を使うと，



$$f(z_1, z_2 \ldots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w_1 - a_1| = r} \frac{f(w_1, z_2, \ldots, z_n) dw_1}{w_1 - z_1}$$

以下くり返し Cauchy の積分公式を用いれば，f が連続だから

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|w_\nu - a_\nu| = r} \int \cdots \int \frac{f(w) dw_1 dw_2 \ldots dw_n}{(w_1 - z_1)(w_2 - z_2) \ldots (w_n - z_n)}.$$

一方 $\dfrac{1}{w_\nu - z_\nu} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_\nu - a_\nu)^k}{(w_\nu - a_\nu)^{k+1}}$ だから，一変数のときと同様にして

$$f(z) = \sum C_{k_1 \ldots k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \ldots (z_n - a_n)^{k_n}$$

ただし

$$c_{k_1 \ldots k_n} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\int \cdots \int \frac{f(w) dw_1 \ldots dw_n}{(w_1 - a_1)^{k_1 + 1} (w_2 - a_2)^{k_2 + 1} \ldots (w_n - a_n)^{k_n + 1}} \qquad \square$$

W 上の函数 $f(z)$ は実変数 x_ν, y_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ の函数とも考えられる：

$$f(z) = F(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) \qquad z_\nu = x_\nu + i y_\nu$$

以下 $f(z)$ は $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ について連続的可微分と仮定する．

定義．

$$\frac{\partial f}{\partial z_\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} - i \frac{\partial f}{\partial y_\nu}\right)$$

$$\bar{z}_\nu = x_\nu - i y_\nu$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + i \frac{\partial f}{\partial y_\nu}\right).$$

注意． 形式的に $z = x + iy$ と $\bar{z} = x - iy$ を独立変数とみると，$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$，$y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ であるから

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial y}$$

となり，上の定義と一致する．

$f(z)$ を実部と虚部に分けて $f = u + iv$ とすると，

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x + iv_x + iu_y - v_y) = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(u_y + v_x).$$

従って $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ であるためには

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \ \text{（Cauchy-Riemann の方程式）} \end{cases}$$

が必要十分．$f(z)$ が正則ならば $\partial f/\partial \bar{z}_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ であるが，定理 1 を考慮に入れると逆に

定理 2. $f(z)$ が連続的可微分で $\partial f/\partial \bar{z}_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ ならば $f(z)$ は正則.

次に合成函数を考える．

$$f(w) = f(w_1, \ldots, w_m),\ g_\lambda(z) = g_\lambda(z_1, \ldots, z_n)$$

$(\lambda = 1, \ldots, m)$ とすると，

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\nu} = f(g_1(z), \ldots, g_m(z)) = \sum_{\lambda=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial w_\lambda} \frac{\partial g_\lambda}{\partial \bar{z}_\nu} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}_\lambda} \frac{\partial \bar{g}_\lambda}{\partial \bar{z}_\nu} \right).$$

定理 3. $f(w)$ が $W \subset \mathbb{C}^m$ で正則，$g_\lambda(z)$ が $U \subset \mathbb{C}^n$ で正則かつ $z \in U$ に対し $(g_1(z), \ldots, g_m(z)) \in W$ ならば $f(g_1(z), \ldots, g_m(z))$ は z の正則函数.

証明. 仮定から $\partial g_\lambda/\partial \bar{z}_\nu = 0$, $\partial f/\partial \bar{w}_\lambda = 0$. 従って

$$\frac{\partial f(g(z))}{\partial \bar{z}_\nu} = \sum_{\lambda=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial w_\lambda} \frac{\partial g_\lambda}{\partial \bar{z}_\nu} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}_\lambda} \frac{\partial \bar{g}_\lambda}{\partial \bar{z}_\nu} \right) = 0.$$

定理 2 によって $f(g(z))$ は正則. □

$\mathbb{C}^n$ の領域 U から $\mathbb{C}^m$ への写像 f は

$$f : z = (z_1, \ldots, z_n) \mapsto w = (w_1, \ldots, w_m) = (f_1(z), \ldots, f_m(z))$$

と表わせるが

定義. 各 $f_\lambda(z)$ $(\lambda = 1, \ldots, m)$ が正則函数のとき f を正則写像とよぶ．定理 3 より，

定理 3′. $g : U \to V$，$f : V \to W$ が共に正則ならば $(f \circ g)(z) = f(g(z))$ は正則.

正則写像

$$f : (z_1, \ldots, z_n) \mapsto f(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z))$$

を考え，$z_\nu = x_\nu + iy_\nu$，$f_\lambda(z) = u_\lambda + iv_\lambda$ とする．

$$\det\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial z_\nu}\right) = \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(z_1,\dots,z_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}, \dots, & \dfrac{\partial f_n}{\partial z_1} \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z_n}, \dots, & \dfrac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{vmatrix}$$

を f のJacobianという．

$$\frac{\partial(u_1,v_1,u_2,v_2,\dots,u_n,v_n)}{\partial(x_1,y_1,x_2,y_2,\dots,x_n,y_n)} = \left|\det\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial z_\nu}\right)\right|^2$$

であることは容易に確かめられる．

定理 4．（逆写像定理）f が $\mathbb{C}^n$ の領域 W から $\mathbb{C}^n$ への正則写像で，$\det(\partial f_\lambda/\partial z_\nu)_{z=a} \neq 0$ ならば，a の W の中の近傍 U が存在して，$f : U \to f(U)$ が 1 対 1，$f(U)$ は開集合かつ f^{-1} は正則である．

証明. $f : (x_1,y_1,\dots,x_n,y_n) \mapsto (u_1,v_1,\dots,u_n,v_n)$ と考えると

$$\frac{\partial(u_1,v_1,\dots,u_n,v_n)}{\partial(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)} = \left|\det\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial z_\nu}\right)\right|^2 \neq 0$$

だから微積分を用いれば近傍 U が存在し，$f : U \to f(U)$ は 1 対 1，$f(U)$ は開集合．$\varphi = f^{-1}$ とし，

$$f : z \mapsto w = (w_1,\dots,w_n) = f(z)$$
$$\varphi : w \mapsto z = \varphi(w) = (\varphi_1(w),\dots,\varphi_n(w))$$

とすると，$z = \varphi(f(z))$ より $z_\lambda = \varphi_\lambda(f(z))$．従って

$$0 = \frac{\partial z_\lambda}{\partial \bar{z}_\nu} = \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial w_\beta}\frac{\partial f_\beta(z)}{\partial \bar{z}_\nu} + \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \bar{w}_\beta}\frac{\partial \overline{f_\beta(z)}}{\partial \bar{z}_\nu} \right)$$

$\frac{\partial f_\beta(z)}{\partial \bar{z}_\nu} = 0$ だから $\sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \bar{w}_\beta}\frac{\partial \overline{f_\beta(z)}}{\partial \bar{z}_\nu} = 0$ であるが，$\partial\overline{f_\beta(z)}/\partial\bar{z}_\nu = (\overline{\partial f_\beta(z)/\partial z_\nu})$，$\det(\partial f_\beta/\partial z_\nu) \neq 0$ より $\partial\varphi_\lambda/\partial\overline{w}_\beta = 0$．定理 2 によって $\varphi = f^{-1}$ は正則．□

定義．f が 1 対 1 で，f と f^{-1} が正則のとき f を双正則写像（biholomorphic map）とよぶ．

§2. 複素多様体（Complex manifolds）

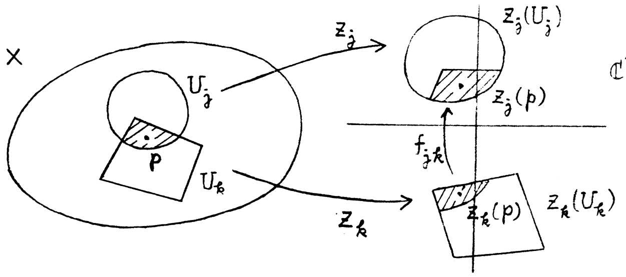
X を（連結）パラコンパクト Hausdorff 空間とする．

定義． X の開集合 U から $\mathbb{C}^n$ の開集合の上への位相写像 z を局所（複素）座標（local complex coordinate）とよぶ．$p \in U$ に対し，$z(p) = (z_1(p), \dots, z_n(p))$ を p の局所座標という．

定義． 局所座標 $z_j : U_j \to \mathbb{C}^n$ の集まり $\{z_j \mid j \in I\}$（I は添数集合）が次の条件を満たすとき $\{z_j \mid j \in I\}$ を局所複素座標系（system of local complex coordinates）とよぶ．

i）$X = \cup_{j \in I} U_j$,

ii）$U_j \cap U_k \neq \phi$ のとき $f_{jk} = z_j \circ z_k^{-1} : z_k(p) \mapsto z_i(p)$ が双正則である．



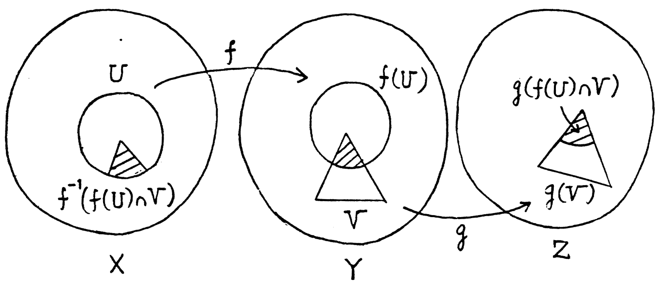
定義． 二つの局所座標系 $\{w_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ と $\{z_j \mid j \in J\}$ が与えられたとき，$w_\lambda \circ z_j^{-1}$ がすべて双正則ならば $\{w_\lambda\}$ と $\{z_j\}$ は同値であるという．

定義． X 上の局所座標系の一つの同値類を X の上の複素構造（complex structure）とよぶ．

注意． 上に定義した complex structure は pseudo-group structure の特別なものである．以下しばらく pseudo-group structure について述べる．

定義． X，Y は位相空間，U は X の，V は Y の開集合とする．U から V の上への位相写像 f を X から Y への局所位相写像（local homeomorphism）とよび，U を f の定義域（domain）V を f の値域（range）という．

定義． $f : X \to Y$，$g : Y \to Z$ を二つの局所位相写像とする．$f(U) \cap V = \mathrm{range}\, f \cap \mathrm{domain}\, g \neq \phi$ ならば，$x \in f^{-1}(f(U) \cap V)$ に対して，$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ と定義して，$g \circ f$ を g と f の結合（composition）とよぶ．このとき，$\mathrm{domain}\, g \circ f = f^{-1}(f(U) \cap V)$，$\mathrm{range}\, g \circ f = g(f(U) \cap V)$ である．



定義． W を X の開集合とするとき，f の W への制限 $f \mid W$ を

$$(f \mid W)(x) = f(x), \quad x \in W \cap \mathrm{domain} f$$

により定義する．

$X = Y$ のとき，f を X の局所位相写像とよぶ．

ϑ を位相空間とする．（実際に使うのは ϑ が $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ の開集合の場合）

定義． ϑ の局所位相写像から成るpseudo-groupとは次の条件を満たす ϑ の位相写像の集り Γ：

i）$f \in \Gamma$ ならば $f^{-1} \in \Gamma$,

ii）$f \in \Gamma$，$g \in \Gamma$ で，$g \circ f$ が定義されるならば $g \circ f \in \Gamma$,

iii）$f \in \Gamma$，W は ϑ の開集合，$W \cap \mathrm{domain} f \neq \phi$ ならば $f \mid W \in \Gamma$,

iv）恒等写像 $1 : x \mapsto x$ は Γ に含まれる，

v）f が ϑ の局所位相写像で，$\vartheta = \cup_j U_j$ かつ $f \mid U_j \in \Gamma$ ならば $f \in \Gamma$.

例．

1）$\Gamma_h = \mathbb{C}^n$ のすべての局所双正則写像．

2）$\Gamma_d = \mathbb{R}^n$ のすべての局所微分同型写像．

3）$f : x = (x_1, \ldots, x_{2n}) \mapsto f(x) = (f_1(x), \ldots, f_{2n}(x))$ を $\mathbb{R}^{2n}$ の局所微分同型写像とするとき，

$$\sum_{\lambda,\nu=1}^{2n} \epsilon_{\lambda\nu} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}, \quad (\epsilon_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

ならば，f を局所正準変換（local canonical transformation）という．

（上の条件は
$df_1 \wedge df_2 + df_3 \wedge df_4 + \cdots + df_{2n-1} \wedge df_{2n}$
$= dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$
と同じ．）

$\Gamma_C = \mathbb{R}^{2n}$ のすべての局所正準変換の集合．

4）$\Gamma_a = \mathbb{R}^n$ のすべての局所アフィン変換 f の集合.

$$x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$
$$f_\lambda(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu} x_\nu + b_\lambda,\ a_{\lambda\nu}, b_\lambda \text{は定数.}$$

次に，ϑ と Γ が与えられたとし，X をパラコンパクト（連結）Hausdorff 空間とする.

定義. 次の条件を満たす局所位相写像 $z_j : X \to \vartheta$ の集合 $\{z_j \mid j \in I\}$ を X 上の局所 Γ-座標系（system of local Γ-coordinates）という：

i）$X = \cup_{j \in I}$ domain z_j,

ii）$z_j \circ z_k^{-1}$ が定義されるならば $z_j \circ z_k^{-1} \in \Gamma$.

定義. 二つの局所 Γ-座標系 $\{z_j \mid j \in I\}$ と $\{w_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は，$z_j \circ w_\lambda^{-1} \in \Gamma$ なるとき Γ-同値であるという.

定義. X 上の局所 Γ-座標系の一つの Γ-同値類を X 上のΓ-構造（Γ-structure）という.

定義. X と X 上の一つの Γ-structure をまとめて, Γ-多様体（Γ-manifold）という.

例.

1）Γ_h-structure ＝複素構造（complex structure）

2）Γ_d-structure ＝可微分構造（differentiable structure）

3）Γ_c-structure ＝正準構造（canonical structure）

$$\text{古典力学の正準方程式} \quad \begin{cases} \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \quad \text{は}\Gamma_C - \text{不変.}$$

相空間（(p_i, q_i) 空間）は canonical structure をもつ.

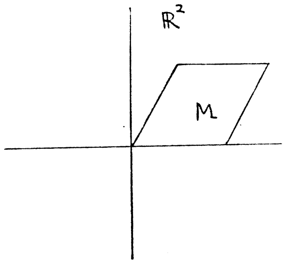
また，可微分多様体 M の接バンドル $T(M)$ は Γ_C-manifold である.

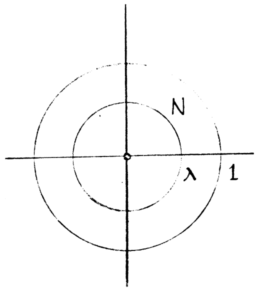
4）Γ_a-structure ＝ flat affine structure.

Γ-manifolds の一般論を作ることが問題となるが，例がうまく作れないこともあって，ほとんど何も出てこない.

M^n を n 次元向きづけ可能コンパクト Γ_a-manifold とするとき.

$n = 2$ のときは，Bengicri が初等的方法により M^2 が torus に限ることを示した．$n \geqslant 3$ となると何もわからない．なお，M を普通の方法で作る 2 次元 torus とし，$N = \mathbb{R}^2/\{\lambda^n\}$（ただし λ は $\mathbb{R}^2$ の自己同型 $\lambda : (x^1, x^2) \mapsto (\lambda x^1, \lambda x^2)$ $(0 < \lambda < 1)$）として作った torus とすると，M と N は Γ_a-同値でないようである.（次図参照）.





また，M^n が complete Γ_a-manifold ならば M^n の普遍被覆多様体 $\tilde{M}^n = \mathbb{R}^n$ で，$M^n = \mathbb{R}^n/G$，G は一次変換の作る群となるのではないかと思われる．これを使うと M^n の Euler 数 $\chi(M^n) = 0$．そこで

予想．M^n が向きづけ可能な Γ_a-manifold ならば $\chi(M^n) = 0$．

さて，M を複素多様体とすると，M 上に局所座標系 $\{z_j \mid j \in I\}$（$z_j \circ z_k^{-1}$ は $\mathbb{C}^n$ の局所双正則写像）がある．n を M の複素次元という．このとき M の位相的次元は $2n$ である．

定義．f を M の開集合 U 上の函数とする．$f \circ z_j^{-1}$ がすべて正則［あるいは可微分］のとき f は正則［可微分］であるという．

注意．位相空間 X 上に二つの pseudo-group structure Γ_1，Γ_2 が与えられたとする．もし $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ ならば，Γ_1-座標系は Γ_2-座標系であり Γ_1-同値ならば Γ_2-同値でもあるから，X 上の Γ_1-構造 M_1 は X 上の Γ_2-構造 M_2 を一意的に定める．このとき M_2 を M_1 の下にある Γ_2-構造（underlying Γ_2-structure）という．特に $\Gamma_h \subset \Gamma_d$ であるから複素構造は可微分構造を定め，複素多様体は可微分多様体でもある．

M，N を二つの複素多様体とし，$\{z_j \mid j \in I\}$，$\{w_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ をそれぞれの局所座標系とする．f が M の開集合 U から N への写像であるとき．

定義．$w_\lambda \circ f \circ z_j^{-1}$ がすべて正則ならば f を正則写像という．

このように，複素構造に対しては正則写像があるが，一般の Γ-構造がうまく行かぬのは函数がないことも一つの原因である．

S を複素多様体 M の部分集合とする．

定義．S の各点 s に対して，s の近傍 U_s と U_s 上の有限個の正則函数 $f_1^{(s)}(p), \ldots, f_{m_s}^{(s)}(p)$ があって

$$S \subset U_s = \left\{p \mid f_1^{(s)}(p) = f_2^{(s)}(p) = \cdots = f_{m_s}^{(s)}(p) = 0\right\}$$

なるとき，S を M の複素解析的集合（complex analytic sub-variety（subset））とよぶ．また $f_1(p) = f_2(p) = \cdots = f_m(p) = 0$ を S の局所方程式（local equation）という．特に各点 $s \in S$ で局所方程式を

$$\operatorname{rank}\,(\partial f_\lambda(p)/\partial z_j^\nu(p)) = r \quad (r \text{ は } s \text{ によらぬ})$$

なるように選べるとき，S を M の複素部分多様体（complex（analytic）submanifold）という．このとき S が n-r 次元の複素多様体になることは明らか．

定理 5.（解析接続の一意性）$f(p)$ と $g(p)$ を複素多様体 M の領域（連結開集合）W 上の正則函数とする．W の開集合 U $(\neq \phi)$ 上で $f(p) = g(p)$ ならば W 全体で $f(p) = g(p)$.

証明. $A = \{p \in W \mid f(p) = g(p)\}$ とし，E を A の内部とすれば，これは W の空でない開集合．E の境界点 q をとり，$z_j(p) = (z_j^1(p), \ldots, z_j^n(p))$ を q を中心とする局所座標 $(z_j(q) = (0, 0, \ldots, 0))$ とする．q の近傍で

$$f(p) = \sum a_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \ldots z_n^{\nu_n}$$
$$g(p) = \sum b_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \ldots z_n^{\nu_n}$$

と展開すると，

$$\begin{aligned} a_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} &= \lim_{E \ni p \to q} \frac{1}{\nu_1!\nu_2!\ldots\nu_n!} \left(\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n} f}{\partial z_1^{\nu_1} \partial z_2^{\nu_2} \ldots \partial z_n^{\nu_n}} \right)(p) \\ &= \lim_{E \ni p \to q} \frac{1}{\nu_1!\nu_2!\ldots\nu_n!} \left(\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n} g}{\partial z_1^{\nu_1} \partial z_2^{\nu_2} \ldots \partial z_n^{\nu_n}} \right)(p) \\ &= b_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}. \end{aligned}$$

従って q の近傍で $f(p) = g(p)$ となり $q \in E$．故に E は W の閉集合でもある．W は連結だったから $E = W$. □

§3. コンパクト複素多様体の例を構成する（記述する）方法

複素多様体 M を構成するには，位相空間 X 上に座標系 $\{z_j\}$ を $f_{jk} = z_j \circ z_k^{-1}$ が双正則になるように定めればよい．

A）$\mathbb{C}^n$ の領域 M.

B）射影空間 $\mathbb{P}^n$.

$\mathbb{P}^n = \{\zeta \mid \zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)\}, (\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$：同時座標．ただし $\zeta_\lambda \in \mathbb{C}$, $(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$，かつ $(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ であるためには，$c \in \mathbb{C} - 0$ があって $\eta_\lambda = c\zeta_\lambda$ $(\lambda = 0, \ldots, n)$ であることが必要十分．

$U_j = \{\zeta \mid \zeta_j \neq 0\}$ とすると，$\mathbb{P}^n = \cup_{j=0}^n$．そこで，$U_j$ 上の局所座標 z_j を

$$\begin{aligned} z_j : \zeta \mapsto z_j(\zeta) &= (z_j^0(\zeta), \ldots, z_j^{j-1}(\zeta), z_j^{j+1}(\zeta), \ldots, z_j^n(\zeta)) \\ &= (\zeta_0/\zeta_j, \ldots, \zeta_{j-1}/\zeta_j, \zeta_{j+1}/\zeta_j, \ldots, \zeta_n/\zeta_j) \end{aligned}$$

により定義すると，$z_j(U_j) = \mathbb{C}^n$ で

$$\begin{cases} z_j^\lambda(\zeta) = \zeta_\lambda/\zeta_j = (\zeta_\lambda/\zeta_k)/(\zeta_j/\zeta_k) = z_k^\lambda(\zeta)/z_k^j(\zeta) \\ z_j^k(\zeta) = 1/z_k^j(\zeta). \end{cases}$$

だから，

$$f_{jk} = z_j \circ z_k^{-1} : \left(z_k^0, z_k^1, \ldots, z_k^{k-1}, z_k^{k+1}, \ldots, z_k^n\right)$$
$$\mapsto \left(\frac{z_k^0}{z_k^j}, \frac{z_k^1}{z_k^j}, \ldots, \frac{1}{z_k^j}, \ldots, \frac{z_k^n}{z_k^j}\right)$$

であり，双正則．

次に与えられた複素多様体から他の複素多様体を構成する方法を二，三述べる．

1）与えられた複素多様体の部分多様体

例．$\mathbb{P}^n$ の部分多様体．

$f_\lambda(\zeta) = f_\lambda(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ を同次多項式とするとき

$$M = \{\zeta | f_\lambda(\zeta) = 0, \lambda = 1, 2 \ldots, r\}$$

をalgebraic variety*1（projective variety）という．特に $\mathrm{rank}(\partial f_\lambda/\partial \zeta_\nu)$ が $\zeta \in M$ によらなければ，M は $\mathbb{P}^n$ の複素部分多様体（連結とは限らない）となるが，これをalgebraic manifoldという．

代数的多様体の例：

$$M \subset \mathbb{P}^3, M = \left\{\zeta \left| \begin{array}{r} \zeta_1\zeta_2 - \zeta_0\zeta_3 = 0 \\ \zeta_0\zeta_2 - \zeta_1^2 = 0 \\ \zeta_2^2 - \zeta_1\zeta_3 = 0 \end{array} \right.\right\}$$

とする．$\mathbb{P}^1 = \{t \mid t = (t_0, t_1)\}$ から M への写像を $t \mapsto \zeta = (t_0^3, t_0^2 t_1, t_0 t_1^2, t_1^3)$ により定義すると，これは M の上への双正則写像で，

$$M = \mathbb{P}^1.$$

2）与えられた複素多様体 M の商空間（quotient space）

定義． M から M の上への双正則写像を M の解析的自己同型（analytic automorphism）とよぶ．

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(M) = M \text{ の解析的自己同型全部の集合}$$

とすると，$f, g \in \mathcal{G}$ ならば $f \circ g \in \mathcal{G}$ であり，$\mathcal{G}$ は演算 $f \circ g$ について群をなす．G を $\mathcal{G}$ の部分群とするとき，$p \in M$ に対し，$G(p) = \{g(p) \mid g \in G\}$ を軌道（orbit）という．$G(p) \cap G(q) = \phi$ ならば $G(p) = G(q)$ である．各軌道 $\hat{p} = G(p)$ を点と考え，$\hat{p}$ 全部の集合を $\hat{M} = M/G$ で表わす．M から $\hat{M}$ へは，$\varpi : p \mapsto \hat{p} = G(p)$ なる全射が存在するが，$\hat{M}$

*1 日本語では variety も多様体と訳すが，ここでは多様体というときは non-singular variety（=manifold）に限ることにする．また，$\mathbb{P}^n$ の任意の複素解析的集合（complex analytic subvariety）は代数的，すなわち，いくつかの同次多項式の共通零点となる（Chow の定理）．

の部分集合 $\hat{U}$ は $\varpi^{-1}(\hat{U})$ が M の開集合のとき $\hat{M}$ の開集合と定めることにより，$\hat{M}$ は位相空間となる．

例．

i）$M = \mathbb{C}^{n+1} - (0, 0, \ldots, 0)$.

$G = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - 0$，$g \in G = \mathbb{C}^*$ に対し

$$p = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \mapsto g(p) = (gz_0, gz_1, \ldots, gz_n)$$

とすると，$\hat{M} = M/G = \mathbb{P}^n$.

ii）$M = \mathbb{C}$，$G = \mathbb{C}^*$．$g \in G$ に対し

$$g : z \mapsto g(z) = gz$$

とすると，$G(0) = \{0\}$．$G(z) = \mathbb{C}^* = G(1)\ z \neq 0$，だから $\hat{M} = M/G = \{\hat{0}, \hat{1}\}$．$\hat{M}$ の部分集合としては ϕ，$\{\hat{0}\}$，$\{\hat{1}\}$，$\{\hat{0}, \hat{1}\}$ があるが，ϖ による逆像はそれぞれ，ϕ，$\{0\}$，$\mathbb{C}^*$，M だから，$\hat{M}$ の開集合は ϕ，$\{\hat{1}\}$，$\{\hat{0}, \hat{1}\}$ の三つ．$\hat{0}$ を含む開集合は $\hat{M}$ のみであるから $\hat{M}$ は Hausdorff ではない．

iii）$M = \mathbb{C}^{n+1}$，$G = \mathbb{C}^*$.

$\hat{M} = M/G = \mathbb{P}^n \cup \hat{0}$ であるが，$\hat{U}$ を $\hat{0}$ を含む開集合とすると，$\varpi^{-1}(U) = \mathbb{C}^{n+1}$．従って $\hat{U} = \hat{M}$ だからこれも Hausdorff でない．

定義．任意のコンパクト部分集合 $K_1, K_2 \subset M$ について，

$$\{g \mid g(K_1) \cap K_2 \neq \phi,\ g \in G\}$$

が有限集合のとき G は M で真に不連続（properly discontinuous）であるという．

定義．各 $g \in G$，$g \neq 1$ が不動点（fixed point）を持たないとき，G は不動点を持たないという．

定理 6．G が真に不連続で不動点を持たないときは $\hat{M} = M/G$ は複素多様体になる．

証明． まず, 各点 $q \in M$ は, すべての $g \in G$, $g \neq 1$ に対し $g(U) \cap U = \phi$ なる近傍 U を持つ．なぜなら，もしそうでないとすると，q に収束する近傍の列 $U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_m \supset \cdots \ni q$ と，$g_m \in G$, $g_m \neq 1$ が存在して $g_m(U_m) \cap U_m \neq \phi$．そこで $S_m = \{g \mid g(U_m) \cap U_m \neq \phi,\ g \neq 1\}$ とすると，$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_m \supset S_{m+1} \supset \cdots$．一方 G は真に不連続だから S_m は有限集合．従ってある k があって，$S_k = S_{k+1} = S_{k+2} = \cdots$．$S_k$ は空ではないから $g \in S_k$ をとると $g \neq 1$ かつすべての m に対し $g(U_m) \cap U_m \neq \phi$．これから $g(q) = q$ で，q は g の不動点．これは仮定に反する．

上のことから $M = \cup_j U_j$，すべての $g \neq 1$ に対し $g(U_j) \cap U_j = \phi$ としてよく，$\varpi : U_j \to \hat{U}_j = \varpi(U_j)$ は位相写像．$z_j : p \mapsto z_j(p)$ を U_j で定義された局所座標とするとき，$\hat{U}_j$ 上の

局所座標 $\hat{z}_j$ を $\hat{z}_j(\hat{p}) = z_j(p)$，$p \in \varpi^{-1}(\hat{p}) \cup U_j$ と定義すれば，$\{\hat{z}_j\}$ は $\hat{M}$ 上の複素座標系をなし $\hat{M}$ は複素多様体． □

定理 6 のとき，$\varpi : M \to \hat{M} = M/G$ は正則かつ局所双正則で，M は $\hat{M}$ の被覆多様体（covering manifold）．

例．i）複素トーラス

$M = \mathbb{C}^n$．$\omega_j = (\omega_j^1, \dots, \omega_j^n) \in \mathbb{C}^n$（$j = 1, 2, \dots, 2n$），$\omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_{2n}$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立とする．

$$G = \left\{g \mid g : z \mapsto z + \sum n_j \omega_j, n_j \in \mathbb{Z}\right\}$$

とすれば $\hat{M} = M/G = \mathbb{C}^n/G$ はコンパクト複素多様体，これを複素トーラス（complex torus）とよぶ．

注意． $\mathcal{G}(\mathbb{C}^n)$ について．

$\mathcal{G}(\mathbb{C}) = \{g \mid g : z \mapsto \alpha z + \beta, \alpha \neq 0\}$ であるが $\mathcal{G}(\mathbb{C}^n)$ $(n \geqslant 2)$ についてはよくわからない．例えば $n = 3$ のとき

$$g : (z_1, z_2, z_3) \mapsto (w_1, w_2, w_3)$$

を $w_1 = z_1$，$w_2 = z_2 + f_2(z_1)$，$w_3 = z_3 + f_3(z_1, z_2)$（ただし $f_2(z_1)$，$f_3(z_1, z_2)$ は任意の正則函数）により定義すると g は双正則 $(g \in \mathcal{G}(\mathbb{C}^3))$ で，

$$g^{-1} : (w_1, w_2, w_3) \mapsto (z_1, z_2, z_3)$$

$z_1 = w_1$，$z_2 = w_2 - f_2(w_1)$，$z_3 = w_3 - f_3(w_1, w_2 - f_2(w_1))$．$\mathcal{G}(\mathbb{C}^3)$ は任意函数による g を含む．

問題．（難かしい）

$G \subset \mathcal{G}(\mathbb{C}^n)$ で，真に不連続，不動点なし，かつ $\mathbb{C}^n/G$ がコンパクトなるものを全部求む．いいかえると，$\mathbb{C}^n$ を被覆多様体とするコンパクト複素多様体をすべて求む．

$n = 1$　M はトーラス．

$n \geq 2$　？

$$\mathcal{U}(\mathbb{C}^n) = \left\{ g \;\middle|\; \begin{array}{l} g \in \mathcal{G}(\mathbb{C}^n), g = (g_1(z), \dots, g_n(z)) \\ \qquad \left|\dfrac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)}\right| = 1 \end{array} \right\}$$

とし，$G \subset \mathcal{U}(\mathbb{C}^n)$ なる条件をつけると，$n = 2$ のときは，$t_0 \in \mathcal{U}(\mathbb{C}^2)$ があって，すべての $g \in G$ に対し $t_0^{-1} g t_0$ は定数係数のアフィン変換になる．この証明は難かしく，$n \geqslant 3$ には拡張できない．[*2]

[*2] K. Kodaira，“On the structure of compact complex analytic surfaces,（以後 “Str.”で引用する）I，II，III，IV”，Amer. J. Math.，86 (1964)，pp. 751–798，88 (1966)，pp. 682–721，89 (1967)，to appear．の II p. 721 参照．

$\mathbb{C}^2/G$ がトーラスにならない G の例.[*3]

$G \subset \mathcal{U}(\mathbb{C}^2)$ は次の四つの元 g_j（$j = 1, 2, 3, 4$）で生成される群：

$$g_j : (z_1, z_2) \mapsto (w_1, w_2) = (z_1 + \bar{\alpha}_j z_2 + \beta_j z_2 + \alpha_j)$$

ただし，α_j，β_j は次の条件を満たす定数

$$\begin{aligned}&\alpha_1 = \alpha_2 = 0,\\ &\bar{\alpha}_3\alpha_4 - \bar{\alpha}_4\alpha_3 = m\beta_2 \neq 0 \qquad m \text{ は正整数},\\ &\mathrm{Re}\,\beta_1 \neq 0, \quad \beta_3, \beta_4 \text{ は任意}.\end{aligned}$$

この変換は

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha}_j & \beta_j \\ 0 & 1 & \alpha_j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とも書け，$g_3 g_4 = g_2^m g_4 g_3$ で，G は Abel 群ではない．$\hat{M} = \mathbb{C}^2/G$ はコンパクト複素多様体で，その基本群 $\pi_1(\tilde{M}) \cong G$，従って $\tilde{M}$ はトーラスではない．

ii）Hopf 多様体

1 次元トーラス $T = \mathbb{C}/G$，$G = \{g \mid g : z \mapsto z + m\omega + n\}$（$\mathcal{I}_m\omega > 0$）を考える．$\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}^*$ の上への写像 $z \mapsto w = e^{2\pi i z}$ により $z + m\omega + n \mapsto e^{2\pi i(z+m\omega+n)} = \alpha^m w$，（$\alpha = e^{2\pi i\omega}$）$0 < |\alpha| < 1$ となるから，

$$G^* = \{g^* \mid g^* : w \mapsto \alpha^m w, m \in \mathbb{Z}\}$$

とすれば $T = \mathbb{C}^*/G^*$ とも表わせる．これを高次元に拡張して，$M = \mathbb{C}^n - (0, 0, \ldots, 0)$，$G = \{g^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$，ただし g は次のような M の自己同型：

$$g : (z_1, z_2, \ldots, z_n) \mapsto (\alpha_1 z_1, \alpha_2 z_2, \ldots, \alpha_n z_n) \qquad 0 < |\alpha_\nu| < 1.$$

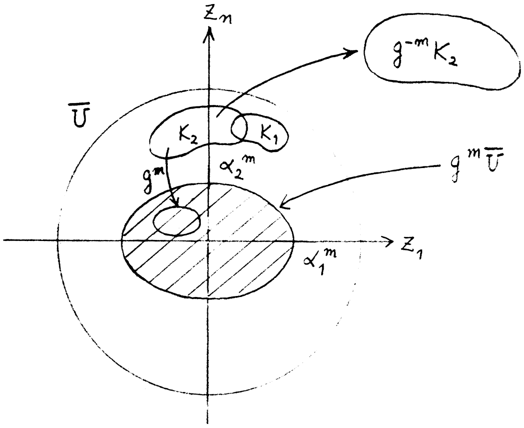
$\hat{M} = M/G$ をHopf 多様体という（Hopf，1949）．これはトーラス以外の代数的でないコンパクト複素多様体の最初の例である．

$\bar{U} = \{z \mid \sum_{r=1}^n |z_r|^2 \leq 1\}$ とすると，

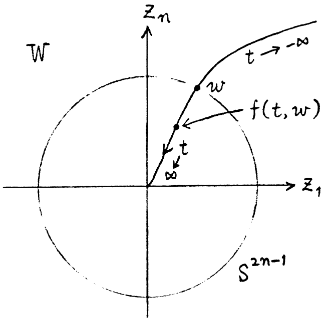
$$\begin{aligned} g^m \bar{U} &= \{w \mid w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \\ &\qquad = (\alpha_1^m z_1, \alpha_2^m z_2, \ldots, \alpha_n^m z_n), z \in \bar{U}\} \\ &= \left\{ w \,\middle|\, \sum_{\nu=1}^n (|w_\nu|^2/|\alpha_\nu|^{2n}) \leq 1 \right\} \qquad \text{（楕円）}. \end{aligned}$$

$|\alpha_\nu| < 1$ であるから $g^m \bar{U} \to 0$（$m \to +\infty$）．従って M のコンパクト集合 K_1, K_2 に対し，$\{m \mid g^m(K_2) \cap K_1 \neq \phi\}$ は有限集合で，G は M で真に不連続．

[*3] Str. I，pp. 785–788 参照.



$\hat{M} = M/G$ はコンパクト複素多様体となるが，可微分多様体としては $\hat{M}$ は $S^1 \times S^{2n-1}$（S^k は k 次元球面）に微分同型である．以下このことの証明を記す．



$S^{2n-1} = \{w \mid \sum_{\nu=1}^{n} |w_\nu|^2 = 1\}$，$\alpha_\nu = e^{\beta_\nu} = e^{-r_\nu + i\theta_\nu}$，$r_\nu > 0$，とし，$\mathbb{R} \times S^{2n-1}$ から M の上への写像 f を

$$f : (t, w) \mapsto z = (e^{t\beta_1} w_1, \ldots, e^{t\beta_\nu} w_\nu, \ldots, e^{t\beta_n} w_n)$$

により定義すると，f は 1 対 1 かつ f, f^{-1} は C^∞-可微分で，$\mathbb{R} \times S^{2n-1} = M$（微分同型）$e^{\beta_\nu} e^{t\beta_\nu} w_\nu = e^{(t+1)\beta_\nu} w_\nu$ であるから，$z = f(t, w)$ に対し $gz = f(t + 1, w)$．従って，

$$M/G = (\mathbb{R}/\Gamma) \times S^{2n-1} \qquad \text{（微分同型）}.$$

（ただし $\Gamma = \{\gamma^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$，$\gamma : t \mapsto t + 1$）となるが，$\mathbb{R}/\Gamma = S^1$ だから，

$$M/G = S^1 \times S^{2n-1}.$$

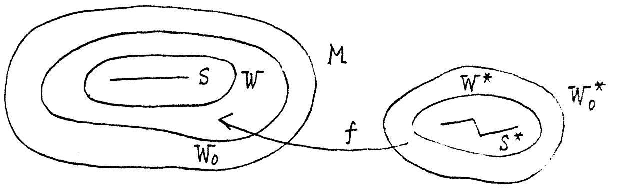
iii）手術（surgeries）

複素多様体 M とコンパクト部分多様体（あるいは subvariety）$S \subset M$ が与えられたとき，S を他の多様体（または variety）S^* で置きかえて新しい多様体 $M^* = (M - S) \cup S^*$ を作りたい．複素多様体のときは，解析接続の一意性があるために，可微分多様体のときのように自由に切りはりできない．

仮定．$S \subset M$ はコンパクト部分多様体（または subvariety）．W, W_0 を M の開集合，W_0^* は複素多様体で，W^* を W_0^* の開集合，S^* を W_0^* の部分多様体（または variety）で，

$$S \subset W \subset \bar{W} \subset W_0 \subset M$$
$$S^* \subset W^* \subset \bar{W}^* \subset W^*,$$

を満たすものとする．f は $W_0^* - S^*$ から $W_0 - S$ の上への双正則写像で $f(W^* - S^*) = W - S$ なるものとする．

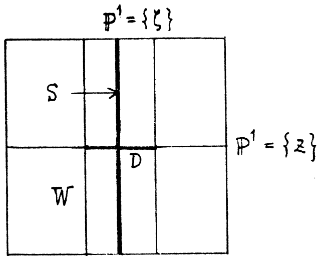


以上の仮定の下で，$M^* = (M - S) \cup S^*$ を作ることができる．すなわち $Z^* \in W^* - S^*$ と $f(z^*) \in W - S$ を同一視して $M^* = W^* \cup (M - S)$ とすればよい．なお W_0 をとったのは f で W^* と W の境界が逆になるおそれがあるためであるが，応用上普通 W_0 は考える必要がない．

例．

i）$M = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$,

$\mathbb{P}^1 = \{\zeta \mid \zeta = (\zeta_0, \zeta_1)\} = \{\zeta \mid \zeta = \zeta_1/\zeta_0\} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.（Riemann 球）．



$S = 0 \times \mathbb{P}^1$，$W = D \times \mathbb{P}^1$，$D = \{z \mid |z| < 1\}$ とする．$W^* = D \times \mathbb{P}^{1*}$，$S^* = 0 \times \mathbb{P}^{1*} \subset W^*$ とし，$W - S$ から $W^* - S^*$ の上への写像 f を $(z, \zeta) \mapsto (z, \zeta^*) = (z, z\zeta)$ により定義すれば，f は双正則．そこで，S と S^* を置きかえて，

$$M^* = W^* \cup (M - S) = (M - S) \cup S^*$$

が作れる．

M^* と M は同位相でない．

証明．　位相だけ考えると $M = S^2 \times S^2$ で，$C_1 = 0 \times S^2$，$C_2 = S^2 \times 0$ とすれば $\{C_1, C_2\}$ は $H_2(M, \mathbb{Z})$ の基底．M 上の任意のサイクル C をとると $C \sim m_1 C_1 + m_2 C_2$（$m_i \in \mathbb{Z}$）と書けるから，C の自己交点数は

$$I(C, C) = 2 m_1 m_2 I(C_1, C_2) \equiv 0(2).$$

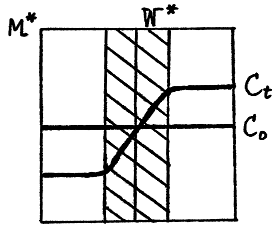
一方 M^* をみると，

$$\begin{aligned} C_t &= \{(z, \zeta) \mid \zeta = t\} \qquad (M^* - S^* = M - S \text{ で}) \\ &= \{(z, \zeta^*) \mid \zeta^* = z\zeta = zt\} \qquad (W^* \text{で}) \end{aligned}$$

とすると，$C_t \sim C_0$ であるから，

$$I(C_0, C_0) = I(C_0, C_t) = 1.$$

従って M と M^* とは同位相でない．



ii）σ-操作（σ-process, quadric transformation）（Hopf）．

M を 2 次元複素多様体，$S = \{p\}$，$p \in M$．(z_1, z_2) を p を中心とする局所座標，$W = \{z \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < \varepsilon\}$ とする．

$W \times \mathbb{P}^1 = \{(z, \zeta) \mid (z, \zeta) = (z_1, z_2, \zeta_0, \zeta_1)\}$ の部分多様体 W^* を，

$$W^* = \{(z, \zeta) \mid z_1\zeta_1 - z_2\zeta_0 = 0\}$$

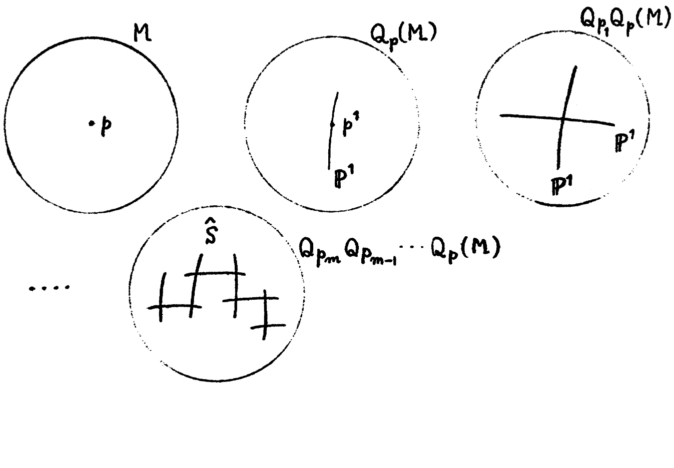
により定義する．f を $W \times \mathbb{P}^1$ から W への射影 $((z, \zeta) \mapsto z)$ の W^* への制限とすると，f は全射で，$z = (z_1, z_2) \neq (0, 0)$ ならば $f^{-1}(z) = (z, \zeta)$ は一意的に定まり，$S^* = f^{-1}(0) = 0 \times \mathbb{P}^1 \subset W^*$ とすれば，

$$f : W^* - S^* \to W - S$$

は双正則．従って $M^* = (M - p) \cup W^* = (M - p) \cup S^*$ が作れる．

以上をまとめると，任意の 2 次元複素多様体 M と，M の任意の点 p に対し，p を $S^* = \mathbb{P}^1$ で置きかえて新しい多様体 $M^* = (M - p) \cup \mathbb{P}^1$ を作ることができる．このとき正則写像 $f : M^* \to M$ が存在して，$f(S^*) = p$，かつ $f : M^* - S^* \to M - p$ は双正則．

定義．f^{-1} を，p を中心とするquadric transformation（σ-process）とよび $Q_p = f^{-1}$，$M^* = Q_p(M)$ と書く．



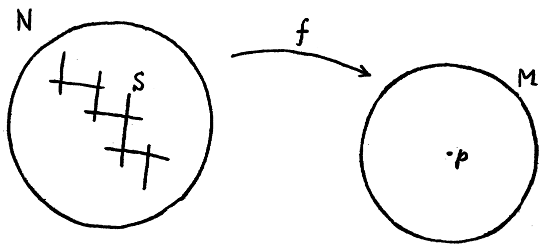
$$\begin{array}{l} \hat{M} = Q_{p_m} Q_{p_{m-1}} \dots Q_p(M) \\ \big\downarrow \quad f = Q_p^{-1} Q_{p_1}^{-1} \dots Q_{p_{m-1}}^{-1} Q_{p_m}^{-1} \\ M \end{array}$$

$f : \hat{M} \to M$ は正則で，$f(\hat{S}) = p$．$f : \hat{M} - \hat{S} \to M - p$ は双正則．

定理（**H. Hopf**）[*4]．

M, N を二つの 2 次元複素多様体，f を N から M への正則写像，S を N の 1 次元連結コンパクト解析的集合（analytic subvariety）とするとき，$f(S) = p \in M$ で，$f : N - S \to M - p$ が双正則ならば

$$N = Q_{p_m} Q_{p_{m-1}} \dots Q_{p_1} Q_p(M)$$
$$f = Q_p^{-1} Q_{p_1}^{-1} \dots Q_{p_m}^{-1} \qquad \text{である．}$$



σ-操作は，M が n 次元複素多様体のときも同様にできる：

p を M の 1 点とし，$z = (z_1, \dots, z_n)$ を p を中心とする局所座標 $W = \{z \mid |z_\alpha| < \varepsilon\}$ とする．$W \times \mathbb{P}^{n-1} = \{(z, \zeta) \mid (z, \zeta) = (z_1, \dots, z_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n)\}$ の部分多様体 W^* を

$$W^* = \left\{ (z, \zeta) \mid z_\lambda \zeta_\nu - z_\nu \zeta_\lambda = 0, \quad \begin{array}{l} \lambda = 1, 2, \dots, n \\ \nu = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\}$$

により定義し，$S^* = 0 \times \mathbb{P}^{n-1}$ とする．$(z, \zeta) \mapsto z$ により $W^* - S^*$ から $W - 0$ の上への写像 f を得るが，これは双正則．従って

$$M^* = (M - p) \cup W^* = (M - p) \cup S^*$$

が作れる．

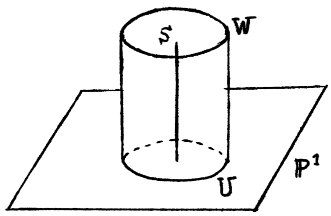
定義．$M^* = Q_p(M)$ と書く．Q_p を quadric transformation という．

iii）$M = \mathbb{P}^1 \times T$

$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$（Riemann 球面）

$T = \mathbb{C}/G$，$G = \{k + hi \mid k, h \in \mathbb{Z}\}$

[*4] H. Hopf，"Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten"，Comment. Math. Helv. 29 (1955)，pp. 132–156，Satz III.



$\zeta \in \mathbb{C}$ の標準的全射による $T = \mathbb{C}/G$ 内での像を $[\zeta]$ とかく．

$S = 0 \times T$

$W = U \times T$

$U = \{z \mid |z| < 1\}$

とする．もう一つの円板 $V = \{w \mid |w| < 1\}$ をとり，

$$W^* = (V \times T)/\mathcal{Z}$$

とする，ただし，$\mathcal{Z} = \{g^n \mid n = 0, 1, \ldots, m-1\}$ で，g は

$$g : V \times T \to V \times T$$
$$g : (W, [\zeta]) \mapsto \left(e^{\frac{2\pi i}{m}} w, \left[\zeta - \frac{1}{m}\right]\right)$$

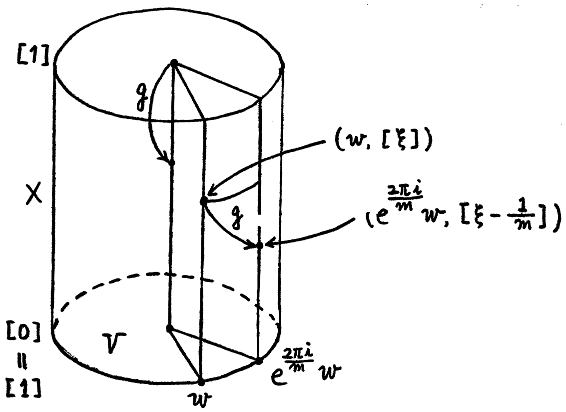
で定義される $V \times T$ の自己同型．$\mathcal{Z}$ は不動点を持たず，W^* は複素多様体．$(w, [\zeta]) \in V \times T$ の $W^* = V \times T/\mathcal{Z}$ 内での像を $((w, [\zeta]))$ と書く．W^* の構造を見るために，$[\zeta] \in T$ を実部，虚部に分けて $[\zeta] = [\xi + i\eta]$ と書き，

$$T = (\mathbb{R} \times \mathbb{R})/G = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} = X \times Y$$

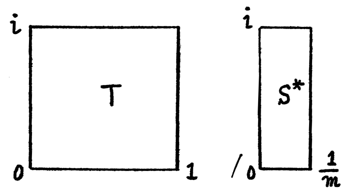
と分けると

$$g : (w, [\xi] + i[\eta]) \mapsto \left(e^{\frac{2\pi i}{m}} w, \left[\xi - \frac{1}{m}\right] + i[\eta]\right)$$

であるから，$W^* = (V \times X/\mathcal{Z}) \times Y$，ただし $\mathcal{Z} = \{g^n\}$，$g : (w, [\xi]) \mapsto (e^{\frac{2\pi i}{m}} w, [\xi - \frac{1}{m}])$ となる．



$S^* = (0 \times T)/\mathcal{Z}$ とし，$W^* - S^*$ から $W - S$ の上への写像 f を

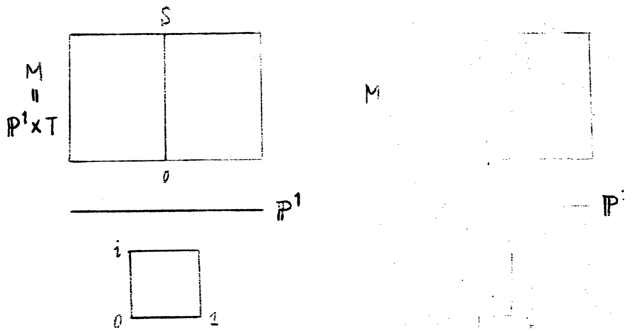


$$
\begin{array}{ccc}
f : W^* - S^* & \to & W - S \\
\Psi & & \Psi \\
((w, [\zeta])) & \mapsto & (z, [\zeta']) = \left(w^m, \left[\zeta + \frac{1}{2\pi i}\log w\right]\right)
\end{array}
$$

によって定義すると，f は well-defined で双正則．
従って $((w, [\zeta])) \in W^*$（$w \neq 0$）と $(w^m, [\zeta + \frac{1}{2\pi i}\log w]) \in M - S$ を同一視することにより

$$M^* = (M - S) \cup W^* = (M - S)$$

が構成できる．

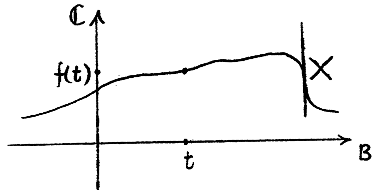


M と M^* の基本群を計算すると，

$$
\begin{cases}
\pi_1(M) = \pi_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\
\pi_1(M^*) = \mathbb{Z}.
\end{cases}
$$

§4. コンパクト複素多様体の複素解析族

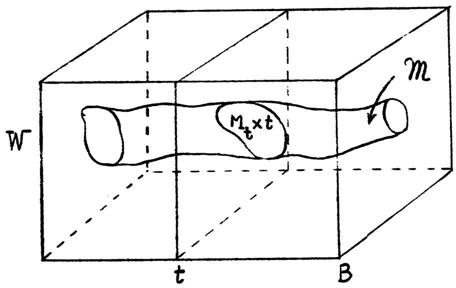
コンパクト複素多様体 M の定義は多くの場合任意定数を含む．例えば代数的多様体 $M = \{z \mid z \in \mathbb{P}^n, f(z) = 0\}$ は f の係数に依り，1 次元トーラス $T_w = \mathbb{C}/G$，$G = \{k + hw\}$ は周期 w に依る．そこで，コンパクト複素多様体 M_t がパラメタ $t \in B$（B は連結複素多様体）に依るとき，M_t を t の函数と考える．普通の複素数値函数 $f(t)$，$t \in B \subset \mathbb{C}$ については，f のグラフ $\mathcal{M} = \{(f(t), t) \mid t \in B\}$ とすると，f が正則であるためには，$\mathcal{M}$ が $\mathbb{C} \times B$ の複素部分多様体で，$\mathcal{M}$ の各点 $p = (f(t), t)$ における接空間 $T_p(\mathcal{M})$ が $\mathbb{C} \times t$ に transversal であることが必要十分であった．



そこで，M_t が t の正則函数であるということをどう定義すれば良いかを考える．

（1）$M_t \subset W$，（$W : t$ によらない複素多様体）となっているとき．

$$\mathcal{M} = \bigcup_{t \in B} M_t \times t \subset W \times B.$$

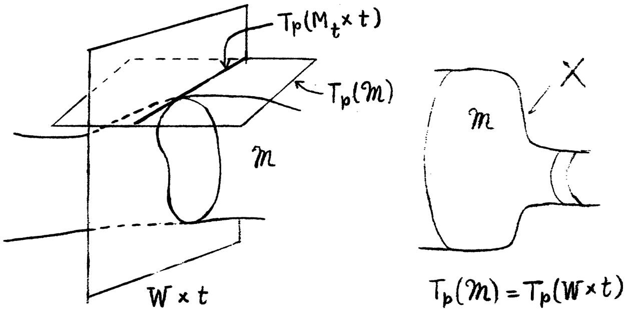


定義．次の条件が成り立つとき M_t は t の正則函数であるといい，$\{M_t \mid t \in B\}$ を W のコンパクト部分多様体の複素解析族（complex analytic family）とよぶ．

条件 i）$\mathcal{M}$ は $W \times B$ の複素部分多様体，

ii）各点 $p \in \mathcal{M}$ において

$$T_p(\mathcal{M}) \cap T_p(W \times t) = T_p(M_t \times t) \qquad (transversal)$$



$\varpi : \mathcal{M} \to B$ を射影 $(w, t) \mapsto t$ とすれば ϖ は正則で，$\varpi^{-1}(t) = M_t \times t = M_t$．

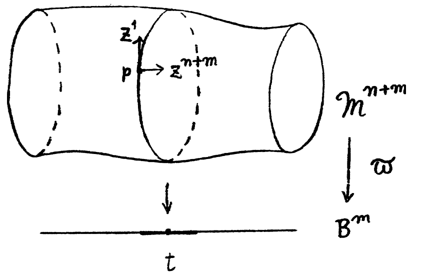
（2）一般の場合．

次の条件が成り立つとき M_t^n は t に正則に依るといい，$\{M_t \mid t \in B\}$ は複素解析族であるという．

i）複素多様体 $\mathcal{M}$ と正則写像 $\varpi : \mathcal{M} \to B^m$ が存在して，$\varpi^{-1}(t) = M_t$,

ii）各点 p について，p における局所座標を $(z^1, z^2, \ldots, z^n, z^{n+1}, \ldots, z^{n+m})$，$B$ 上の $\varpi(p)$ における局所座標を $(t^1, \ldots, t^m)$ とすれば,

$$\varpi \text{ の Jacobian の rank} = \frac{\partial(t^1, \ldots, t^m)}{\partial(z^1, \ldots, z^{n+m})} \text{ の rank} = m.$$



定義. 連結複素多様体 $\mathcal{M}$，B と正則写像 $\varpi : \mathcal{M} \to B$（全射）が与えられて次の条件を満たすとき $(\mathcal{M}, B, \varpi)$ をコンパクト複素多様体の複素解析族とよぶ：

i）ϖ が proper，すなわち任意のコンパクト部分集合 $K \subset B$ の逆像 $\varpi^{-1}(K)$ はコンパクト，（特に $\varpi^{-1}(t)$ はコンパクト）

ii）$M_t = \varpi^{-1}(t)$ は $\mathcal{M}$ のコンパクト複素部分多様体,

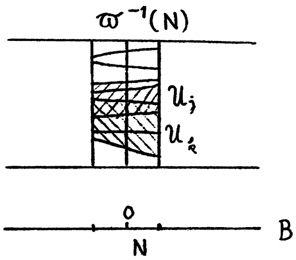
iii）ϖ の Jacobian の rank $= m = \dim B$.

このとき，$(\mathcal{M}, B, \varpi)$ は $M_t = \varpi^{-1}(t)$ の族 $\{M_t \mid t \in B\}$ を表わすと考え，M_t は t に正則に依るという．$M_s = \varpi^{-1}(s)$ は $M_t = \varpi^{-1}(t)$ の変形（deformation）であるという．

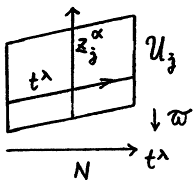
$(\mathcal{M}, B, \varpi)$ を複素解析族，b を B の任意の点，$(t^1, \ldots, t^m)$ を b の十分小さい近傍 N 上の局所座標とすると，近傍 $\mathcal{U}_j \subset \varpi^{-1}(N)$ と，$\mathcal{U}_j$ 上の局所座標 $(z_j^1, \ldots, z_j^n, z_j^{n+1}, \ldots, z_j^{n+m})$ を次の様に選べる：

$$\text{i)} \quad \bigcup_j \mathcal{U}_j = \varpi^{-1}(N),$$

$$\text{ii)} \quad \varpi : (z_j^1, \ldots, z_j^n, z_j^{n+1}, \ldots, z_j^{n+m}) \mapsto (t^1, \ldots, t^m) = (z_j^{n+1}, \ldots, z_j^{n+m}).$$



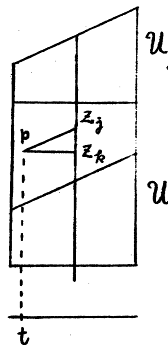
t^λ は N 上の函数であるが，$p \in \varpi^{-1}(N)$ に対し，$t^\lambda(p) = t^\lambda(\varpi(p))$ として $\varpi^{-1}(N)$ 上の函数と考える．



$p \in \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k$ の j-座標を $(z_j^1, \dots, z_j^n, t^1, \dots, t^m)$，$k$-座標を $(z_k^1, \dots, z_k^n, t^1, \dots, t^m)$ とすると

$$\begin{aligned} z_j^\alpha &= f_{jk}^\alpha(z_k^1, \dots, z_k^n, t^1, \dots, t^m) \\ &= f_{jk}^\alpha(z_k, t) \qquad \text{(座標変換の公式)}. \end{aligned}$$

$(\mathcal{M}, B, \varpi)$ をコンパクト複素多様体の複素解析族とする．



定理 4.1. B の点 b に対し，十分小さい b の近傍 N と，$\varpi^{-1}(N)$ から $M_b(= \varpi^{-1}(b)) \times N$ の上への微分同型 f が存在して右の図式が可換．すなわち，$p \in \varpi^{-1}(N)$ に対し，$f(p) = (z, t) \in M_b \times N$ とすれば $\varpi(p) = t$.

$$\begin{tikzcd} \varpi^{-1}(N) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varpi"'] & & M_b \times N \arrow[dl, "\text{射影}"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

従って，$\mathcal{M}$，B を可微分多様体，ϖ を可微分写像と考えたとき，$\varpi^{-1}(N) = M_b \times N$ で ϖ は射影.

証明. N を b の十分小さい近傍とし，$(t_1, \dots, t_m)$ を N 上の可微分局所座標とする．$\varpi^{-1}(N) = \bigcup_{j=1}^J \mathcal{U}_j$ で，$\mathcal{U}_j$ 上の可微分局所座標 $(x_j, t) = (x_j^1, \dots, x_j^n, t_1, \dots, t_m)$ を $\varpi : (x_j^1, \dots, x_j^n, t_1, \dots, t_m) \mapsto (t_1, \dots, t_m)$ なるようにとる．($n : M_t$ の位相的次元).

$$\begin{aligned} &(x_j, t) \text{ と } (x_k, t) \text{ が同じ点を表わす} \\ &\Leftrightarrow x_j^\alpha = f_{jk}^\alpha(x_k, t) \qquad \alpha = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

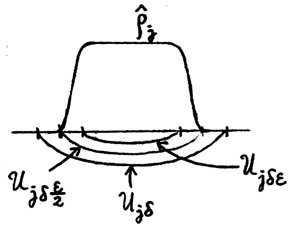
とし，$|x_j| = \max_\alpha |x_j^\alpha|$, $|t| = \max_\nu |t_\nu|$ とする．$\mathcal{U}_j = \{(x_j, t) \mid |x_j| < 1, |t| < 1\}$, $N = \{t \mid |t| < 1\}$

と考えてよい．

$$
\begin{aligned}
N_\delta &= \{t \mid |t| < 1-\delta\} \\
\mathcal{U}_{j\delta} &= \{(x_j, t) \mid |x_j| < 1, |t| < 1-\delta\} \\
\mathcal{U}_{j\delta\varepsilon} &= \{(x_j, t) \mid |x_j| < 1-\varepsilon, |t| < 1-\delta\}
\end{aligned}
$$

とする．ε が十分小さければ，$\bigcup_j \mathcal{U}_{j\delta\varepsilon} = \varpi^{-1}(N_\delta)$.

　次に，$\varpi^{-1}(N_\delta)$ 上の C^∞-可微分函数 $\hat\rho_j(p)$ を



$\hat{\text{i}}$）　$1 \geqslant \hat\rho_j(p) \geqslant 0$

$\hat{\text{ii}}$）　$\hat\rho_j(p) = 1, \quad p \in \mathcal{U}_{j\delta\varepsilon}$

$\hat{\text{iii}}$）　$\hat\rho_j(p) = 0, \quad p \notin \mathcal{U}_{j\delta\frac{\varepsilon}{2}}$

なるものとし，

$$\rho_j(p) = \frac{\hat\rho_j(p)}{\sum_j \hat\rho_j(p)}$$

とすれば，$\rho_j(p)$ は C^∞-可微分で次の四つの条件を満たす：

　i）$\rho_j(p) \geqslant 0$

　ii）$\rho_j(p) > 0,\ \ p \in \mathcal{U}_{j\delta\varepsilon}$

　iii）$\rho_j(p) = 0,\ \ p \notin \mathcal{U}_{j\delta\frac{\varepsilon}{2}}$

　iv）$\sum \rho_j(p) = 1$．（単位の分割）

　以下，$m = \dim N$ に関する帰納法で証明する．

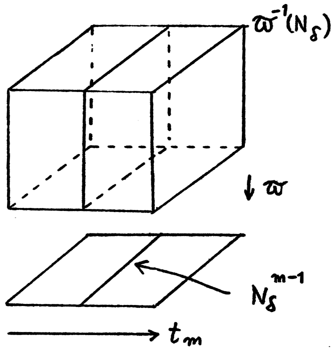
$$N_\delta^{m-1} = \{t \mid t = (t_1, \ldots, t_{m-1}, 0), |t_j| < 1-\delta\}$$

とするとき，

$$
\begin{aligned}
&\varpi^{-1}(N_\delta) = \varpi^{-1}(N_\delta^{m-1}) \times I_m, \\
&I_m = \{t_m \mid |t_m| < 1-\delta\}
\end{aligned}
$$

をいえばよい．

　$\mathcal{U}_{j\delta}$ 上のベクトル場 $\partial/\partial t_m$ を $(\partial/\partial t_m)_j$ とかく．$p \in \mathcal{U}_{j\delta} \cap \mathcal{U}_{k\delta}$ における $(\partial/\partial t_m)_j$ を (x_k^α, t_ν) で表わすと，



$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t_m}\right)_j &= \sum_\nu \frac{\partial t_\nu}{\partial t_m}\left(\frac{\partial}{\partial t_\nu}\right)_k \\
&\quad + \sum_\alpha \frac{\partial x_k^\alpha}{\partial t_m}\frac{\partial}{\partial x_k^\alpha} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t_m}\right)_k + \sum_\alpha \frac{\partial f_{kj}^\alpha}{\partial t_m}(x_j, t)\frac{\partial}{\partial x_k^\alpha}.
\end{aligned}
$$

$\rho_j \cdot (\frac{\partial}{\partial t_m})_j$ は，$\mathcal{U}_{j\delta\frac{\varepsilon}{2}}$ の外で $\rho_j \cdot (\frac{\partial}{\partial t_m})_j = 0$ として，$\varpi^{-1}(N_\delta)$ に拡張できるから，

$$v = \sum_j \rho_j \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_m}\right)_j$$

とすれば，v は $\varpi^{-1}(N_\delta)$ 上の C^∞-可微分ベクトル場．$p \in \mathcal{U}_{k\delta}$ において，v を (x_k^α, t) で表わすと，

$$v = \sum_j \rho_j \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_m}\right)_k + \sum_\alpha g_k^\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x_k^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial t_m}\right)_k + \sum_\alpha g_k^\alpha \frac{\partial}{\partial x_k^\alpha}$$

ただし，

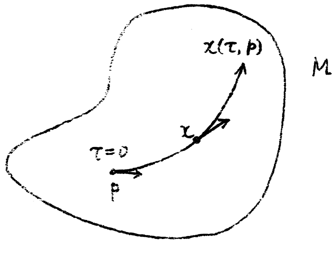
$$g_k^\alpha = \sum_j \rho_j \cdot \frac{\partial f_{kj}^\alpha}{\partial t_m} \text{は} \mathcal{U}_{k\delta} \text{ 上の } C^\infty\text{-可微分函数.}$$

$$v = \frac{\partial}{\partial t_m} + \sum_\alpha g_k^\alpha \frac{\partial}{\partial x_k^\alpha} \overset{\varpi}{\mapsto} \frac{\partial}{\partial t_m}$$

一般に M が可微分多様体で，v が C^∞-可微分ベクトル場で各点で $v \neq 0$ とする．局所座標 $(x_j^1, \dots, x_j^n)$ をとり，

$$v = \sum v_j^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}$$

とすると，$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = v_j^\alpha(x)$，$\alpha = 1, 2, \dots, n$ は与えられた初期条件：$x(0) = p$ の下で一意的に定まった解 $x(\tau, p)$ をもつ．



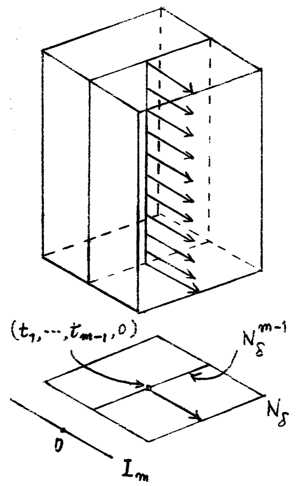
上のことを用いると

$$\begin{cases} \frac{dx_k^\alpha}{d\tau} = g_k^\alpha(x_k, t) \\ \frac{dt_\nu}{d\tau} = 0, \qquad \nu = 1, 2, \dots, m-1 \\ \frac{dt_m}{d\tau} = 1. \end{cases}$$

は解

$$\begin{cases} x_k^\alpha(\tau, p), \qquad x_k^\alpha(0, p) = x_k^\alpha(p), \\ t_\nu = \text{定数}, \\ t_m = \tau. \end{cases}$$

を持ち，$(x_k, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m)_\tau = (x_k(\tau, p), t_1, \ldots, t_{m-1}, \tau)$. そこで，$f : \varpi^{-1}(N_\delta^{n-1}) \times I_m \to \varpi^{-1}(N_\delta)$ を $(p, t_1, \ldots, t_{m-1}, 0) \times \tau \overset{f}{\mapsto} (x_k(\tau, p), t_1, \ldots, t_{m-1}, \tau)$ と定義すれば，f は微分同型.



系. M_2 が M_1 の変形ならば，M_2 と M_1 は微分同型である．すなわち，M_1 と M_2 は同じ下部可微分多様体 X をもつ.

問題.

(1) コンパクト可微分多様体 X が与えられたとき，X 上のすべての複素構造を求む.

(2) コンパクト複素多様体 M が与えられたとき，M のすべての変形を求む.

(3) M が与えられたとき，M に十分近い変形をすべて求む.
$((\mathcal{M}, B, \varpi)$ で $\varpi^{-1}(b) = M$ なるものを考えたとき，M_t，$t \in N$ を求む．ただし N は十分小さい b の近傍)

一般に (1) は非常に難しい．(2) も (1) にくらべそれ程やさしくならないが (3) になるとかなり良く分る.

(1) の答えが知られている X

X 上に複素構造が存在しないもの

S^{2n}，$n \neq 1$，$n \neq 3$ は複素構造はない.

$$\left(\begin{array}{l} S^2 : \text{Riemann 球.} \\ S^6 \text{上に複素構造が存在するかどうかは未解決.} \end{array}\right.$$

X 上複素構造が少なくとも一つある場合

$n \geqslant 2$ で答えが分っている X

$X = 4$ 次元トーラス $= S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$

X 上の複素構造は複素トーラス $\mathbb{C}^2/G$.

$X = S^1 \times S^3$.[*5]

X を $\mathbb{P}^2$（2 次元射影空間）の下部可微分多様体としたとき，X 上に $\mathbb{P}^2$ 以外の複素構造が存在するかは未解決.

（2）の答えが分かっている例.

$\mathbb{P}^2$ のすべての変形は $\mathbb{P}^2$.

$\mathbb{P}^n (n \geqslant 3)$ の変形は分らない.

複素トーラス T^n（n：任意）の変形は複素トーラス.

$n = 2$ のときは他にもいくつかある.

（3）の答えは変形の理論から分る場合がある.

複素解析族の例.

i）1 次元トーラス $T_t = \mathbb{C}/G$，$G = \{m + nt \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$，（$\mathcal{I}_m t > 0$）とすると，

$$\mathcal{M} = \bigcup_{t \in H} T_t \text{が複素解析族をつくる.}$$
$$(H = \{t \mid \mathcal{I}_m t > 0\})$$
$$\begin{array}{cccc} g : & \mathbb{C} \times H & \to & \mathbb{C} \times H \\ & \Cup & & \Cup \\ & (z, t) & \mapsto & (z + m + nt, t), \end{array}$$

$\hat{G} = \{g\}$ とすると，$\hat{G}$ は $\mathbb{C} \times H$ の真に不連続，不動点なしの解析自己同型群．ϖ を

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \times H/\hat{G} \arrow[dr, "\varpi"'] & & \mathbb{C} \times H \arrow[ll] \arrow[dl, "射影"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

が可換になるようにきめると，$\varpi^{-1}(t) = T_t$ で，$(\mathcal{M}, H, \varpi)$ は T_t，$0 \in H$ から成る複素解析族．T_t と T_s が解析的に同値（等角的に同値）であるための必要十分条件は，

$$s = \frac{at + b}{ct + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1,$$
$$\mathcal{G} = \left\{ u \mid u : t \mapsto \frac{at + b}{ct + d} \right\} \quad \text{モジュラー群,}$$
$$J : H \to H/\mathcal{G} \quad \text{楕円モジュラー函数}$$

とすると T_t と $J(t)$ は一対一に対応する.

[*5] $X = S^1 \times S^3$ 上の複素構造は Hopf 曲面．他に $X = S^1 \times S^1 \times S^2$ も分っている．$X = S^2 \times S^2$ は分らない.

ii）Hopf 曲面の族.

$$W = \mathbb{C}^2 - (0,0), \qquad G_t = \{g_t^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$
$$g_t : (z_1, z_2) \mapsto (\alpha z_1 + t z_2, \alpha z_2) \quad 0 < |\alpha| < 1, t \in \mathbb{C}.$$

$M_t = W/G_t$ とすると，$\mathcal{M} = \bigcup_{t\in\mathbb{C}} M_t$ は複素解析族である：
g を $W \times \mathbb{C}$ の解析自己同型

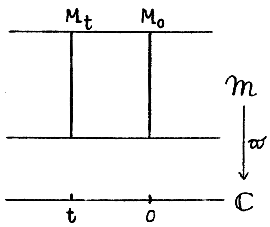
$$g : (z_1, z_2, t) \mapsto (\alpha z_1 + t z_2, \alpha z_2, t)$$

とし，$\mathcal{G} = \{g_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ とすれば，$\mathcal{G}$ は真に不連続で不動点なし．従って $\mathcal{M} = W \times \mathbb{C}/\mathcal{G}$ は複素多様体．ϖ を

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} = W \times \mathbb{C}/\mathcal{G} \arrow[dr, "\varpi"'] & & W \times \mathbb{C} \arrow[ll] \arrow[dl, "射影"] \\
& \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

が可換になるようにきめると，$\varpi^{-1}(t) = W/G_t{\times}t = M_t$.

$$\mathcal{M}^* = \mathcal{M} - M_0 = \varpi^{-1}(\mathbb{C}^*), \qquad (\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - 0)$$



とすると，実は $\mathcal{M}^* = M_1 \times \mathbb{C}^*$ であることが次のようにして確かめられる．g を

$$g : \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & t \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

と表わしておく．$t \neq 0$ ならば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & t \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

であるから，$W \times \mathbb{C}^*$ の新しい座標 (w_1, w_2, t) を $(w_1, w_2, t) = (z_1, t z_2, t)$ により決めると，

$$g : (w_1, w_2, t) \mapsto (\alpha w_1 + w_2, \alpha w_2, t).$$

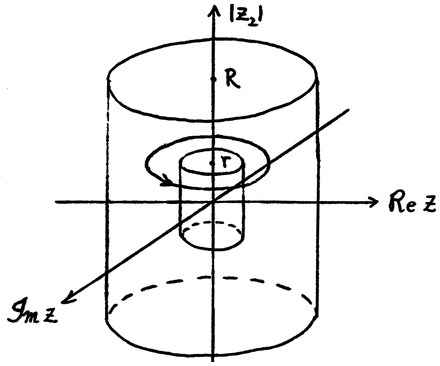
従って $\mathcal{M}^* = W \times \mathbb{C}^*/\mathcal{G} = M_1 \times \mathbb{C}^*$.

上のことから，$t \neq 0$ ならば $M_t = M_1$ であるが，さらに $M_0 \neq M_1$ である．このことの証明のためにまず，

Hartogs の定理.

$D_r = \{(z_1, z_2) \mid |z_1| < r, |z_2| < r\}$ とする．$R > r > 0$ のとき，$f(z_1, z_2)$ が $D_R - D_r$ で正則な函数とすると，f を D_R で正則な函数 $F = F(z_1, z_2)$ に拡張できる.

証明.



$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta, z_2)}{\zeta - z_1} d\zeta \quad (r < \rho < R)$$

とすれば，$F(z_1, z_2)$ は，$|z_2| < R$, $|z_1| < \rho$ で正則，かつ Cauchy の定理により，$|z_2| > r$ ならば $F(z_1, z_2) = f(z_1, z_2)$．従って解析接続の一意性から，$F$ は f の拡張.

次に，M_0 と M_t $(t \neq 0)$ が解析的同値と仮定して，h を M_0 から M_t の上への双正則写像とする．$M_t = W/G_t$ で，$W = \mathbb{C}^2 - (0, 0)$ は単連結だから，h は双正則写像 $f : W \to W$ を定める．

$f^{-1}G_t f = G_0$ で，$G_t = \{g_t^n\}$，$G_0 = \{g_0^n\}$ だから，

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_0 & \xrightarrow{h} & M_t \end{array}$$

$$f^{-1}g_t f = \begin{cases} g_0 & \text{または} \\ g_0^{-1} & \end{cases}$$

f を，$f : (z_1, z_2) \mapsto (z_1', z_2') = (f_1(z_1, z_2), f_2(z_1, z_2))$ の形に
表わすと，各 $f_\nu(z_1, z_2)$ は $W = \mathbb{C}^2 - (0, 0)$ で正則．従って Hartogs の定理より $f_\nu(z_1, z_2)$ は $\mathbb{C}^2$ で正則な函数 $F_\nu(z_1, z_2)$ に拡張できる．従って，f は正則写像 $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ に拡張され，f^{-1} は正則写像 $\Phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ に拡張される．解析接続の一意性から $\Phi = F^{-1}$ で，F は双正則かつ $F(0, 0) = (0, 0)$．$F^{-1}g_t F = g_0$ または g_0^{-1} であるが，$|\alpha| < 1$ より $g_t^n(z) \to (0, 0)$ $(n \to \infty)$ 従って $(F^{-1}g_t F)^n(z) = F^{-1}g_t^n F(z) \to (0, 0)$ となり $F^{-1}g_t F = g_0^{-1}$ ということはない．$g_t F = F g_0$ より

$$\begin{aligned} \alpha F_1(z_1, z_2) + tF_2(z_1, z_2) &= F_1(\alpha z_1, \alpha z_2) \\ \alpha F_2(z_1, z_2) &= F_2(\alpha z_1, \alpha z_2) \end{aligned}$$

となるが，$F_\nu(z_1, z_2) = F_{\nu 1}z_1 + F_{\nu 2}z_2 + F_{\nu 3}z_1^2 + \ldots$ と展開して，z_1, z_2 の一次の項をくらべると，

$$\begin{pmatrix} \alpha & t \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

F が双正則だから $\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \neq 0$ で $t \neq 0$ だから，これは矛盾である．

結局,

$$M_t = \begin{cases} M_1 & t \neq 0 \\ \not\parallel & \\ M_0 & t = 0 \end{cases} \qquad \text{となる.}^{*6}$$

iii) $\mathbb{P}^1 = \{\zeta \mid \zeta = (\zeta_0, \zeta_1)\} = \{\zeta \mid \zeta = \zeta_1/\zeta_0\} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

$U_1 = \mathbb{C}$, $U_2 = \mathbb{C}$ とする. m を負でない整数とするとき, $M^{(m)}$ を次の様にして構成する:

$$M^{(m)} = U_1 \times \mathbb{P}^1 \cup U_2 \times \mathbb{P}^1$$

ただし, $(z_1, \zeta_1) \in U_1 \times \mathbb{P}^1$ と $(z_2, \zeta_2) \in U_2 \times \mathbb{P}^1$ は

$$\begin{cases} \zeta_1 = z_2^m \zeta_2, \\ z_1 z_2 = 1, \end{cases}$$

のとき, またそのときに限り同一視する. $M^{(m)}$ から $\mathbb{P}^1 = U_1 \cup U_2$ への写像 π を

$$\pi : \begin{cases} (z_1, \zeta_1) \mapsto z_1 \\ (z_2, \zeta_2) \mapsto z_2 \end{cases}$$

により定義すれば, これは正則写像で, $M^{(m)}$ は $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^1$-バンドルと考えられる[*7]. 次に, $M_t^{(m)}$ を

$$M_t^{(m)} = U_1 \times \mathbb{P}^1 \cup U_2 \times \mathbb{P}^1$$

ただし, $(z_1, \zeta_1) \in U_1 \times \mathbb{P}^1$ と $(z_2, \zeta_2) \in U_2 \times \mathbb{P}^1$ は

$$\begin{cases} \zeta_1 = z_2^m \zeta_2 + t z_2^h, & h \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant h \leqslant \frac{m}{2}, \\ z_1 z_2 = 1, \end{cases}$$

のとき同一視するとして構成すると,

$$\mathcal{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{C}} M_t^{(m)} \text{は複素解析族.}$$

証明. $\mathcal{M} = U_1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C} \cup U_2 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$ で, $(z_1, \zeta_1, t) \in U_1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$ と, $(z_2, \zeta_2, t) \in U_2 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$ を

$$\begin{cases} \zeta_1 = z_2^m \zeta_2 + t z_2^h, \\ z_1 z_2 = 1, \end{cases}$$

---

*6 M_0 は楕円曲面であるが, M_1 は楕円曲面でない.(Str. II p. 696 参照).

*7 $M^{(0)} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $M^{(1)}$ は p. 15 の M^* に解析的に同値である. 従って $M^{(0)}$ と $M^{(1)}$ は同位相でない.

のとき同一視したもの．（$M^{(m)}_0 = M^{(m)}$）．

$M^{(m)}$ を Hirzebruch 多様体という．[*8]

命題． $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} - M^{(m)}_0 = M^{(m-2h)} \times \mathbb{C}^*$.

証明． $U_\nu \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^*$ 上の新しい座標 (z_ν, ζ^*_ν, t) を次の様に定める：

$$\zeta^*_1 = \frac{z_1^h \zeta_1 - t}{t\zeta_1}, \qquad \zeta^*_2 = \frac{\zeta_2}{t z_2^{m-h}\zeta_2 + t^2}$$

そうすると，

$$\begin{aligned}\zeta^*_1 &= \frac{z_1^h(z_2^m\zeta_2 + t z_2^h) - t}{t(z_2^m\zeta_2 + t z_2^h)} = \frac{z_2^{m-h}\zeta_2}{t z_2^m \zeta_2 + t^2 z_2^h} \\ &= z_2^{m-2h}\frac{\zeta_2}{t z_2^{m-h}\zeta_2 + t^2} = z_2^{m-2h}\zeta^*_2.\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}(z_1, \zeta^*_1, t) &= (z_2, \zeta^*_2, t) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \zeta^*_1 = z_2^{m-2h}\zeta^*_2, \\ z_1 z_2 = 1. \end{cases}\end{aligned}$$

以上から

$$(*) \qquad M^{(m)}_t = \begin{cases} M^{(m-2h)} & t \neq 0 \\ M^{(m)} & t = 0. \end{cases}$$

$\circ$ $m \neq \ell$ ならば $M^{(m)} \neq M^{(\ell)}$ である．

証． $M^{(m)}$ の上の一次独立な正則ベクトル場の数を計算する．

まず，$U \times \mathbb{P}^1 = \{(z, \zeta)\}$ の上の正則ベクトル場を

$$\theta = \alpha(z,\zeta)\frac{\partial}{\partial z} + \beta(z,\zeta)\frac{\partial}{\partial \zeta}$$

とする．$U \times \mathbb{P}^1 = U \times W_1 \cup U \times W_2$，（$(z,\zeta) \in U \times W_1$ と $(z,\eta) \in U \times W_2$ は $\zeta\eta = 1$ のとき同一視する）と見ると，

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial \eta}{\partial \zeta}\frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{1}{\zeta^2}\frac{\partial}{\partial \eta} = -\eta^2\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

[*8] F. Hirzebruch，“Über eine Klasse von einfach zusammen-hängenden komplexen Mannigfaltigkeiten”，Math. Ann. 124 (1951)，pp. 77–86．なお，K. Kodaira，“On stability of compact submanifolds of complex manifolds”，Amer. J. Math. 85 (1963)，pp. 79–94，p. 86 も参照．

そこで，θ を η で書くと，

$$\theta = \alpha\left(z, \frac{1}{\eta}\right)\frac{\partial}{\partial z} + \beta\left(z, \frac{1}{\eta}\right)\left(-\eta^2\frac{\partial}{\partial \eta}\right).$$

$\alpha(z,\zeta)$ は ζ について $\mathbb{P}^1$ 全体で正則だから

$$\alpha(z,\zeta) = \alpha(z).$$

また，$\beta(z,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\zeta^n$ と展開すると

$$-\eta^2\beta\left(z, \frac{1}{\eta}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\frac{\eta^2}{\eta^n}$$

これが $\eta = 0$ の近傍で正則でなければならないから，

$$\beta(z,\zeta) = \sum_{n=0}^{2}\beta_n(z)\zeta^n.$$

次に，θ を $M^{(m)} = U_1\times\mathbb{P}^1 \cup U_2\times\mathbb{P}^1$ 上の正則ベクトル場とし，$U_\nu\times\mathbb{P}^1 = \{(z_\nu,\zeta_\nu)\}$ 上で

$$\theta = \alpha_\nu(z_\nu)\frac{\partial}{\partial z_\nu} + \sum_{k=0}^{2}\beta_{\nu k}(z_\nu)\zeta_\nu^k\frac{\partial}{\partial \zeta_\nu}$$

と表わし，これが $U_1\times\mathbb{P}^1 \cap U_2\times\mathbb{P}^1$ で一致する条件を求める．$\zeta_1 = z_2^m\zeta_2$，$z_1z_2 = 1$ より

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_2} &= \frac{\partial z_1}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial \zeta_1} = -z_1^2\frac{\partial}{\partial z_1} + mz_2^{m-1}\zeta_2\frac{\partial}{\partial \zeta_1}\\ &= -z_1^2\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{m}{z_1^{m-1}}z_1^m\zeta_1\frac{\partial}{\partial \zeta_1} = -z_1^2\frac{\partial}{\partial z_1} + mz_1\zeta_1\frac{\partial}{\partial \zeta_1},\\ \frac{\partial}{\partial \zeta_2} &= \frac{\partial \zeta_1}{\partial \zeta_2}\frac{\partial}{\partial \zeta_1} = z_2^m\frac{\partial}{\partial \zeta_1}.\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}&\alpha_1(z_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{k=0}^{2}\beta_{1k}(z_1)\zeta_1^k\frac{\partial}{\partial \zeta_1}\\ &\quad = \alpha_2\left(\frac{1}{z_1}\right)\left(-z_1^2\frac{\partial}{\partial z_1} + mz_1\zeta_1\frac{\partial}{\partial \zeta_1}\right) + \sum_{h=0}^{2}\beta_{2h}\left(\frac{1}{z_1}\right)z_1^{m(h-1)}\zeta_1^h\frac{\partial}{\partial \zeta_1}.\end{aligned}$$

これから

$$\begin{cases}\alpha_1(z_1) = -z_1^2\alpha_2(\frac{1}{z_1}) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1)\\ \beta_{10}(z_1) = \frac{1}{z_1^m}\beta_{20}(\frac{1}{z_1}) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)\\ \beta_{11}(z_1) = mz_1\alpha_2(\frac{1}{z_1}) + \beta_{21}(\frac{1}{z_1}) \;\ldots\; (3)\\ \beta_{12}(z_1) = z_1^m\beta_{22}(\frac{1}{z_1}) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (4)\end{cases}$$

(1) より

$$\alpha_1(z_1) = \alpha_{10} + \alpha_{11}z_1 + \alpha_{12}z_1^2$$
$$\alpha_2(z_2) = -\alpha_{10}z_2^2 - \alpha_{11}z_2 - \alpha_{12}$$

従って，ここに独立なパラメーターが三つ (3 次元). (2) より $m \neq 0$ ならば $\beta_{10} = \beta_{20} = 0$, $m = 0$ ならば $\beta_{10}(z_1) = \beta_{20}(z_2) = \beta_{10} = \beta_{20}$ (定数)，従って $m = 0$ ならばパラメータが一つある. (3) より 1 次元，(4) より $\beta_{22}(z_2) = \sum_{\ell=0}^{m} \beta_{22\ell} z_2^{\ell}$ だから $m + 1$ 次元. 以上をまとめると，

$$\dim\{M^{(m)}\text{上の正則ベクトル場}\} = \begin{cases} 3 + 1 + m + 1 = m + 5 & (m > 0), \\ 3 + 1 + 1 + 1 = 6 & (m = 0), \end{cases}$$

故に $m \neq \ell$ ならば $M^{(m)} \neq M^{(\ell)}$.[*9]

(*) より $M^{(2n)}$ は $M^{(0)} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の変形，$M^{(2n+1)}$ は $M^{(1)}$ の変形である. 次にパラメータ空間の次元を上げることを考える. $t = (t_1, \ldots, t_{m-1}) \in \mathbb{C}^{m-1}$ に対し，$M_t = M_{(t_1,\ldots,t_{m-1})}$ を次の様に構成する：$M_t = U_1 \times \mathbb{P}^1 \cup U_2 \times \mathbb{P}^1$ で，$(z_1, \zeta_1) \in U_1 \times \mathbb{P}^1$ と $(z_2, \zeta_2) \in U_2 \times \mathbb{P}^1$ は，

$$\begin{cases} \zeta_1 = z_2^m \zeta_2 + t_1 z_2 + t_2 z_2^2 + \cdots + t_{m-1} z_2^{m-1}, \\ z_1 = 1/z_2 \end{cases}$$

のとき同一視する. そうすると，

$$\mathcal{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{C}^{m-1}} M_t\text{は複素解析族で，}$$
$$M_{(0,0,\ldots,0,t_k,0,\ldots,0)} = M^{(m-2k)}$$

である.[*10]

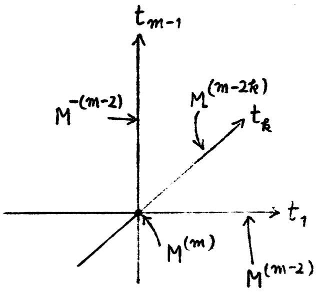
[*9] 一次独立な正則ベクトル場の数では $M^{(0)}$ と $M^{(1)}$ の区別はつかないが，両者は位相すら異なる. 脚註*7 p. 29 を参照.

[*10] $M^{(m)}$ 上の正則ベクトル場の芽の層 (後出) を Θ とすると，

$$\dim H^1(M^{(m)}, \Theta) = \begin{cases} m - 1, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \end{cases}$$
$$\dim H^2(M^{(m)}, \Theta) = 0$$

で，複素解析族 $\mathcal{M}$ は $t = (0, 0, \ldots, 0)$ (原点) で effectively parametrized かつ complete (後出) である.

$$\begin{pmatrix} 2k \geqslant m \text{ ならば} \\ M^{(m-2k)} = M^{-m+2k} \end{pmatrix}$$



$M_t = M^{(m_t)}$ とするとき，

問題．一般の t に対し m_t を求めよ．

第二章．層とコホモロジー

この章では層とコホモロジーについて必要な最小限のことを述べる．目標は，複素解析族 $(\mathcal{M}, B, \varpi)$ が与えられたとき，$M_t = \varpi^{-1}(t)$ を t の函数と考えて，$\partial M_t/\partial t$ を定義すること．

§5. 函数芽

M を複素多様体または可微分多様体とし，f を M 上の局所的な正則（または可微分）函数, すなわち M のある開集合 U で定義された函数 $f = f(z)$ とする．$U = \mathrm{domain}\, f = D(f)$ と書く．

p を M の点，f, g を M 上の局所正則（または可微分）函数とし，$D(f) \ni p$，$D(g) \ni p$ とする．

定義．十分小さい p の近傍 W で $f(z) = g(z)$ $(z \in W)$ のとき $f \underset{p}{\sim} g$（f と g は p で同値）という．

明らかに $\underset{p}{\sim}$ は同値関係.

定義．$\underset{p}{\sim}$ に関する同値類を p における正則（または可微分）函数芽（germ of holomorphic (or differentiable) function）とよぶ.

f の同値類を f_p で表わすことにすると，$f_p = g_p$ ということは，十分小さい p の近傍 W があって，$z \in W$ に対し $f(z) = g(z)$ ということに他ならない.

定義．$\alpha f_p + \beta g_p = (\alpha f + \beta g)_p$，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$f_p g_p = (fg)_p$.

定義．$\mathcal{O}_p = p$ における正則函数芽の全体,

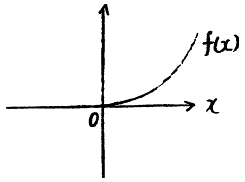
$\mathcal{D}_p =$ 〃 可微分 〃

$\mathcal{O}_p$，$\mathcal{D}_p$ は共に環かつ $\mathbb{C}$-加群である.

$\mathcal{O}_p$ について考えると，局所座標を $(z_1, \ldots, z_n)$ とし，正則函数 f, g を

$$f(z) = \sum_{k_\nu=0}^{\infty} f_{k_1 k_2 \ldots k_n} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n},$$
$$g(z) = \sum_{k_\nu=0}^{\infty} g_{k_1 k_2 \ldots k_n} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n},$$

と展開すると，$f_p = g_p$ であるためには $f_{k_1 k_2 \ldots k_n} = g_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ であることが必要十分．従って $\mathcal{O}_p = p$ における収束巾級数環.



$\mathcal{D}_p$ の構造は良くわからない．例えば $M = \mathbb{R}$ とし，

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

とすると，f は C^∞-可微分で $(d^k f/dx^k)(0) = 0$ であるが $f_p \neq 0_p$ $(p = 0)$.

定義. $\mathcal{O} = \bigcup_{p\in M} \mathcal{O}_p$，$\mathcal{D} = \bigcup_{p\in M} \mathcal{D}_p$.

$\mathcal{O}$（または $\mathcal{D}$）の位相の定義. $\varphi \in \mathcal{O}$ の近傍を次の様に決める．$\varphi \in \mathcal{O}_p$ とし，$\varphi = f_p$ なる任意の f と，任意の p の近傍 $U \subset D(f)$ について $\mathcal{U}(\varphi; f, U) = \{f_q \mid q \in U\}$ を φ の近傍と定義する．$\mathcal{O}$（または $\mathcal{D}$）の位相を近傍系 $\{\mathcal{U}(\varphi; f, U)\}$ で定める．

定義. $\varpi : \mathcal{O}$（または $\mathcal{D}$）$\to M$ を，$\varpi(\mathcal{O}_p) = p$（$\varpi(\mathcal{D}_p) = p$）で定める．

$\psi \in \mathcal{U}(\varphi; f, U)$ とすると，$\varpi(\psi) = \varpi(f_q) = q \in U$ だから ϖ は連続.

$\mathcal{O}$（または $\mathcal{D}$）をM 上の正則（可微分）函数芽の層（sheaf over M of germs of holomorphic (differentiable) functions）という．

例．$M = \mathbb{C}$.

$\varphi \in \mathcal{O}_p \subset \mathcal{O}$ は収束巾級数：$\varphi = \sum_{k=0}^\infty f_k(z-p)^k$ で，収束半径 $r = r(\varphi) = 1/\overline{\lim}_{k\to\infty} |f_k|^{\frac{1}{k}} > 0$. 従って φ は $f(z) = \sum_{k=0}^\infty f_k(z-p)^k$，$D(f) = \{z \mid |z-p| < r(\varphi)\}$ を定め，$\varphi = (p, f_1, f_2, f_3, \ldots) \in \mathbb{C}^\infty$ は無限次ベクトル．$\mathcal{O}$ の位相を定める近傍 $\mathcal{U}\{\varphi, \varepsilon\} = \{f_q \mid |q-p| < \varepsilon\}$，$(\varepsilon \leqslant r(\varphi))$ の元 ψ は $\psi = f_q$ と書け，

$$\psi = \sum_{k=0}^\infty g_k(z-q)^k = \sum_{h=0}^\infty f_h(z-q+q-p)^h,$$

$$(z-q+q-p)^h = \sum \binom{h}{k}(z-q)^k(q-p)^{h-k},$$

だから

$$g_k = \sum_{h=k}^\infty \binom{h}{k} f_h(q-p)^{h-k}, \qquad (|q-p| < \varepsilon).$$

従って $\mathcal{U}\{\varphi, \varepsilon\} = \{\psi\}$，$\psi = (q, g_1, g_2, \ldots)$ で，$\psi \in \mathcal{U}\{\varphi, \varepsilon\}$ は φ と $q = \varpi(\psi)$ で一意的に定まり，ϖ は局所位相写像（local homeomorphism）．

$\mathcal{O}$（または $\mathcal{D}$）の性質を挙げると

（1）ϖ は局所位相写像,

（2）$\mathcal{O}_p$（または $\mathcal{D}_p$）は $\mathbb{C}$-加群,

（3）$\alpha\varphi + \beta\psi$ は φ と ψ の連続函数.

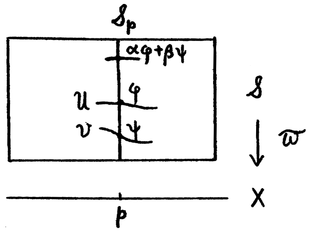
そこで,

層の定義．X はパラコンパクト Hausdorff 空間とする．次の性質をもつ位相空間 $\mathcal{S}$ を X 上の<u>層</u>（<u>sheaf</u>）とよぶ．

（1）$\varpi : \mathcal{S} \to X$（全射）が定義されて，$\varpi$ は局所位相写像である，

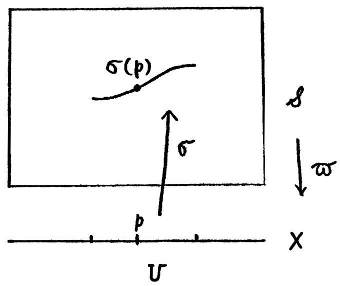
（2）各点 $p \in X$ の逆像 $\mathcal{S}_p = \varpi^{-1}(p)$ は R-加群．ただし $R = \mathbb{C}$，$\mathbb{R}$ または $\mathbb{Z}$,

（3）$\alpha\varphi + \beta\psi$，$(\varphi, \psi \in \mathcal{S}, \varpi(\varphi) = \varpi(\psi), \alpha, \beta \in R\}$ は φ と ψ の連続函数．

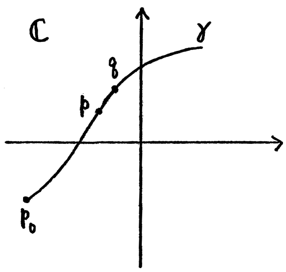


$\varpi^{-1}(p) = \mathcal{S}_p$ を p 上の<u>茎</u>（<u>stalk</u>）という．

定義．X の部分集合 U から $\mathcal{S}$ への連続写像 σ が $\varpi\sigma(p) = p$ なるとき σ を U 上の $\mathcal{S}$ の<u>切断</u>（<u>section</u>）と呼ぶ．



例．$\mathbb{C}$ 上の $\mathcal{O}$

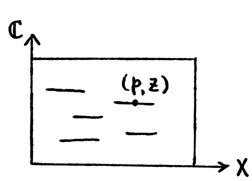


σ を γ 上の $\mathcal{O}$ の切断とすると，各点 $p \in \gamma$ に対し $\sigma(p) \in \mathcal{O}_p$ で，$\sigma(p)$ は p の近傍の収束巾級数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (z-p)^k$$

を定める．$|q - p| < \varepsilon$ に対し，$\sigma(q) = f_q$ で，$\sigma(q)$ は $\sigma(p)$ の解析接続（analytic continuation）．

例．X 上の局所定数関数の芽の層．



$$\mathcal{S} = X \times \mathbb{C}.$$

$$\mathcal{U} = ((p, z), \varepsilon) = \{(q, z) \mid |q - p| < \varepsilon\}$$

とする．

定義．$\mathcal{S}$ を X 上の層, U を X の部分集合とするとき, $\Gamma(U, \mathcal{S}) = \{\sigma \mid \sigma$ は U 上の $\mathcal{S}$ の切断 $\}$

とする．$\Gamma(U,\mathcal{S})$ は R-加群である．（$\sigma,\tau\in\Gamma(U,\mathcal{S})$ について，$\alpha\sigma+\beta\tau : p\mapsto\alpha\sigma(p)+\beta\tau(p)$ $(p\in U)$ と定義）．

特に，$\mathcal{S}=\mathcal{O}$（または $\mathcal{D}$）で f が U 上の正則（または可微分）函数のときは $\sigma : p\mapsto f_p$ は $\mathcal{S}$ の U 上の切断である．

定理 5.1．$\mathcal{S}=\mathcal{O}$（または $\mathcal{D}$）のとき，任意の $\sigma\in\Gamma(U,\mathcal{S})$ は U 上の正則（または可微分）函数 f で $\sigma(p)=f_p$ なるものを一意的に定める．すなわち $\Gamma(U,\mathcal{S})=\{U$ 上の正則（または可微分）函数$\}$.

証明. $\sigma : p\mapsto\sigma(p)$ とすると，$\sigma(p)=g_p^{(p)}$（ただし，$g^{(p)}=g^{(p)}(z)$ は p の近傍で定義された正則（または可微分）函数）と書けるから，f を

$$f(z)=g^{(z)}(z)$$

で定義する．$\sigma(p)$ の近傍 $\mathcal{U}(\sigma(p),g^{(p)},U)$，$p\in U\subset D(g^{(p)})$ を考えると，$z\in U$ に対し，$\sigma(z)\in\mathcal{U}(\sigma(p),g^{(p)},U)$．従って $\sigma(z)=g_z^{(p)}=g_z^{(z)}$ だから，z の近傍 W が存在して，すべての $y\in W$ に対し $g^{(p)}(y)=g^{(z)}(y)$．故に $f(z)=g^{(z)}(z)=g^{(p)}(z)$ は正則（または可微分）函数. □

§6. コホモロジー群

X をパラコンパクト Hausdorff 空間，$\mathcal{S}$ を X 上の層とする．X の開集合 U に対し，$\Gamma(U,\mathcal{S})=U$ 上の $\mathcal{S}$ の切断全体の R-加群とし，$\sigma\in\Gamma(U,\mathcal{S})$，$V\subset U$ のとき，$\gamma_V\sigma$ を

$$\gamma_V\sigma : x\mapsto\sigma(x),\qquad (x\in V)$$

により定めると，$\gamma_V\sigma\in\Gamma(V,\mathcal{S})$ である．$\gamma_V\sigma$ を σ の V への制限という．

$$\gamma_V : \gamma(U,\mathcal{S})\to\Gamma(V,\mathcal{S})$$

は R-準同型写像である．

コホモロジー群（cohomology group）の定義（Čech）.

X の局所有限な開被覆 $\mathcal{U}=\{U_j \mid j\in J\}$ を定め，$\mathcal{U}$ 上のq-cochainを次のように定義する：

$$C^0=\{\sigma_j \mid j\in J\},\qquad \sigma_j\in\Gamma(U_j,\mathcal{S})\qquad \text{(0-cochain)},$$
$$C^1=\{\sigma_{ij} \mid i,j\in J\},\qquad \sigma_{ij}\in\Gamma(U_i\cap U_j,\mathcal{S}),\qquad U_i\cap U_j\neq\phi.$$
$$\sigma_{ij}=-\sigma_{ji}\qquad \text{(1-cochain)},$$
$$C^2=\{\sigma_{ijk} \mid i,j,k\in J, U_i\cap U_j\cap U_k\neq\phi\},$$
$$\sigma_{ijk}\in\Gamma(U_i\cap U_j\cap U_k,\mathcal{S}),\qquad \sigma_{ijk}\text{ は } i,j,k \text{ について交代的}\qquad \text{(2-cochain)}.$$

一般に

$$C^q = \{\sigma_{i_0 i_1 \dots i_q} \mid i_\nu \in J, U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_q} \neq \phi\},$$
$$\sigma_{i_0 i_1 \dots i_q} \in \Gamma(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q}, \mathcal{S})$$
$$\sigma_{i_0 i_1 \dots i_\lambda i_{\lambda+1} \dots i_q} = -\sigma_{i_0 i_1 \dots i_{\lambda+1} i_\lambda \dots i_q}.$$

次にcoboundaryを次のように定義する.

$$\delta c^0 = \{\tau_{ik}\}, \qquad \tau_{ik} = \gamma_{U_i \cap U_k}\sigma_k - \gamma_{U_i \cap U_k}\sigma_i = \sigma_k - \sigma_i,$$

ここで，約束として

$$\sigma_\nu \in \Gamma(W_\nu, \mathcal{S}), \qquad \nu = 1, 2, \dots, n \text{ のとき}$$
$$a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + \cdots + a_n\sigma_n = a_1 r\sigma_1 + a_2 r\sigma_2 + \cdots + a_n r\sigma_n$$

$(r = r_{W_1 \cap W_2 \cap \dots W_n}, a_i \in R)$ とする.

$$\delta c^1 = \delta\{\sigma_{ik}\} = \{\tau_{ijk}\},$$
$$\tau_{ijk} = \sigma_{jk} - \sigma_{ik} + \sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{jk} + \sigma_{ki}.$$

一般に,

$$\delta c^q = \delta\{\sigma_{i_0 i_1 \dots i_q}\} = \{\tau_{i_0 i_1 \dots i_{q+1}}\},$$
$$\tau_{i_0 i_1 \dots i_{q+1}} = \sum_{\nu=0}^{q+1} (-1)^\nu \sigma_{i_0 \dots i_{\nu-1} i_{\nu+1} \dots i_{q+1}}.$$

そうすると,

$$\boxed{\delta\delta c^q = 0}$$

であることは容易に確かめられる.

定義. $C^q(\mathcal{U}) = \{\sigma^q\} = q$-cochain 全部の集り.

$$a\sigma^q + b\tau^q = \omega^q = \{\omega^q_{i_0 i_1 \dots i_q}\},$$
$$\omega^q_{i_0 i_1 \dots i_q} = a\sigma^q_{i_0 i_1 \dots i_q} + b\tau^q_{i_0 i_1 \dots i_q}$$

と定めると，$C^q(\mathcal{U})$ は R-加群で,

$$\delta : C^q(\mathcal{U}) \to C^{q+1}(\mathcal{U})$$

は R-準同型写像.

定義. $\delta c^q = 0$ のとき，σ^q をq-cocycleという. $Z^q(\mathcal{U}) = \{\sigma^q \mid \delta\sigma^q = 0\}$ とする.

$$\delta^2 = 0 \text{ より} \delta C^{q-1}(\mathcal{U}) \subset Z^q(\mathcal{U}).$$

定義. $H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) = Z^q(\mathcal{U})/\delta C^{q-1}(\mathcal{U})$,

$H^0(\mathcal{U},\mathcal{S}) = Z^0(\mathcal{U})$.

X の他の被覆 $\mathcal{V} = \{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の各 V_λ がある U_j に含まれるとき $\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ の細分（refinement）といい，$\mathcal{V} > \mathcal{U}$ と書く．このとき，各 V_λ について，$U_j \supset V_\lambda$ なる U_j を一つ定めて $U_j = U_{s(\lambda)}$ とかくと，写像 $s : \Lambda \to J$ を得る．s を定めて，

$$\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} : C^q(\mathcal{U}) \to C^q(\mathcal{V})$$

を次の通りに定義する：

$$C^1 = \{\sigma_{ij}\} \mapsto \Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}\sigma^1 = \{\tau_{\lambda\nu}\}, \qquad \tau_{\lambda\nu} = r\sigma_{s(\lambda)s(\nu)}$$
$$r = r_{V_\lambda \cap V_\nu}.$$

一般に，

$$C^q = \{\sigma_{i_0 i_1 \dots i_q}\} \mapsto \Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} c^q = \{\tau_{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_q}\}$$
$$\tau_{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_q} = r_{V_0\cap V_1\cap\dots\cap V_q}\sigma_{s(\lambda_0)s(\lambda_1)\dots s(\lambda_q)}.$$

そうすると，$\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}$ は R-準同型写像で，

$$\delta\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} = \Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}\delta$$

だから，$\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} Z^q(\mathcal{U}) \subset Z^q(\mathcal{V})$，$\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}\delta C^{q-1}(\mathcal{U}) \subset \delta C^{q-1}(\mathcal{V})$．従って $\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}$ は準同型写像

$$\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} : H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \to H^q(\mathcal{V},\mathcal{S})$$

を定める．このとき

補題. $\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} : H^q(\mathcal{U},\mathcal{S}) \to H^q(\mathcal{V},\mathcal{S})$ は s の選び方に関係しない．

証明. $q = 2$ のときを調べれば様子がわかる．

$$s : \Lambda \to J, \qquad V_\lambda \subset U_{s(\lambda)},$$
$$t : \Lambda \to J, \qquad V_\lambda \subset U_{t(\lambda)},$$

とし，簡単のために $s(\lambda_p) = j_p$，$t(\lambda_p) = k_p$ とおく，$c^2 = \{\gamma_{i_0 i_1 i_2}\}$ に対し，

$$\overset{(s)}{\Pi}{}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} c^2 = \overset{(s)}{\Pi}{}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}\{\gamma_{i_0 i_1 i_2}\} = \{\sigma_{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}\}, \qquad \sigma_{\lambda_0\lambda_1\lambda_2} = r\gamma_{j_0 j_1 j_2}$$
$$\overset{(t)}{\Pi}{}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} c^2 = \overset{(t)}{\Pi}{}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}\{\gamma_{i_0 i_1 i_2}\} = \{\sigma'_{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}\}, \qquad \sigma'_{\lambda_0\lambda_1\lambda_2} = r\gamma_{k_0 k_1 k_2}.$$

$c^2 \in Z^2(\mathcal{U})$ だから $\delta c^2 = 0$ であるが証明すべきことは，

$$\{\sigma'_{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}\} - \{\sigma_{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}\} = \delta\{t_{\lambda\nu}\}$$

すなわち，$\sigma'_{\lambda_0\lambda_1\lambda_2} - \sigma_{\lambda_0\lambda_1\lambda_2} = \tau_{\lambda_1\lambda_2} - \tau_{\lambda_0\lambda_2} + \tau_{\lambda_0\lambda_1}$ なる $\{t_{\lambda\nu}\}$ が存在すること．

$\delta c^2 = 0$ より

$$0 = (\delta\{\gamma_{i_0 i_1 i_2}\})_{i_0 i_1 i_2 i_3} = \gamma_{i_1 i_2 i_3} - \gamma_{i_0 i_2 i_3} + \gamma_{i_0 i_1 i_3} - \gamma_{i_0 i_1 i_2}.$$

この最後の項を $\beta_{i_0 i_1 i_2 i_3}$ とおくと，

$$\begin{cases} 0 = \beta_{j_0 k_0 k_1 k_2} = \gamma_{k_0 k_1 k_2} - \gamma_{j_0 k_1 k_2} + \gamma_{j_0 k_0 k_2} - \gamma_{j_0 k_0 k_1}, \\ 0 = -\beta_{j_0 j_1 k_1 k_2} = -\gamma_{j_1 k_1 k_2} + \gamma_{j_0 k_1 k_2} - \gamma_{j_0 j_1 k_2} + \gamma_{j_0 j_1 k_1}, \\ 0 = \beta_{j_0 j_1 j_2 k_2} = \gamma_{j_1 j_2 k_2} - \gamma_{j_0 j_2 k_2} + \gamma_{j_0 j_1 k_2} - \gamma_{j_0 j_1 j_2}. \end{cases}$$

この三式を加え合わせて整理すると，

$$\gamma_{k_0 k_1 k_2} - \gamma_{j_0 j_1 j_2} = \gamma_{j_1 k_1 k_2} - \gamma_{j_1 j_2 k_2} + \gamma_{j_0 j_2 k_2} - \gamma_{j_0 k_0 k_2} + \gamma_{j_0 k_0 k_1} - \gamma_{j_0 j_1 k_1}.$$

そこで，$\tau_{\lambda\nu}$ を次のように定める

$$\tau_{\lambda\nu} = r(\gamma_{s(\lambda)t(\lambda)t(\nu)} - \gamma_{s(\lambda)s(\nu)t(\nu)}).$$

そうすると，

$$\sigma'_{\lambda_0\lambda_1\lambda_2} - \sigma_{\lambda_0\lambda_1\lambda_2} = \tau_{\lambda_1\lambda_2} - \tau_{\lambda_0\lambda_2} + \tau_{\lambda_0\lambda_1} = (\delta\{\tau_{\lambda\nu}\})_{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}.$$

一般の q のときは，$c^q = \{\gamma_{i_0 i_1 \ldots i_q}\}$，$\delta c^q = 0$ に対し

$$\overset{(s)}{\Pi}{}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} c^q = \{\sigma_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_q}\}, \qquad \sigma_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_q} = r\gamma_{j_0\ldots j_q}, \qquad j_p = s(\lambda_p),$$
$$\overset{(t)}{\Pi}{}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} c^q = \{\sigma'_{\lambda_0\ldots\lambda_q}\}, \qquad \sigma'_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_q} = r\gamma_{k_0\ldots k_q}, \qquad k_p = t(\lambda_p),$$

とするとき，

$$\tau_{\lambda_1\ldots\lambda_q} = r\gamma_{j_1 k_1 k_2 \ldots k_q} - r\gamma_{j_1 j_2 k_2 \ldots k_q} + r\gamma_{j_1 j_2 j_3 k_3 \ldots k_q} - \ldots$$

と定義すると，

$$\{\sigma'_{\lambda_0\ldots\lambda_q}\} - \{\sigma_{\lambda_0\ldots\lambda_q}\} = \delta\{\tau_{\nu_1\ldots\nu_q}\}.$$ □

上の補題により，$\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \to H^q(\mathcal{V}, \mathcal{S})$ は $\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ で一意的に定まる．さらにもう一つの被覆 $\mathcal{W}$（添字集合は M）があって，$\mathcal{W} > \mathcal{V} > \mathcal{U}$ とすると，写像 $t : M \to \Lambda$ と $s : \Lambda \to J$ があるが，$\overset{(t)}{\Pi}{}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} \overset{(s)}{\Pi}{}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} c^q = \overset{(st)}{\Pi}{}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}} c^q$ で，コホモロジー群にうつると，

$$\Pi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} \Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} = \Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}}.$$

局所有限な被覆の全体 $\{\mathcal{U}\}$ を考えると，次のような性質がある．

（1）$\{\mathcal{U}\}$ は $>$ について半順序（partially ordered），

(2) $\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ が与えられたとき，$\mathcal{W} > \mathcal{U}$，$\mathcal{W} > \mathcal{V}$ なる $\mathcal{W}$ が存在する．すなわち $\{\mathcal{U}\}$ は有向集合（directed set）である．

$$\left(\begin{array}{l}\mathcal{U} = \{U_j\},\ \mathcal{V} = \{V_\lambda\} \text{ に対し } \mathcal{W} = \{W_\mu\} \text{ を} \\ W_\mu = U_j \cap V_\lambda \text{ により定義すればよい．}\end{array}\right)$$

今までのことから，

$$\begin{cases}\text{各 } \mathcal{U} \text{ に対し } H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \text{ が定義でき，} \\ \mathcal{V} > \mathcal{U} \text{ ならば準同型写像} \\ \qquad \Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \to H^q(\mathcal{V}, \mathcal{S}) \\ \text{があり，さらに } \mathcal{W} > \mathcal{V} > \mathcal{U} \text{ ならば } \Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}} = \Pi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}\end{cases}$$

であった．そこで，

定義．$H^q(X, \mathcal{S}) = \lim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$（direct limit）と定める．

$\underline{\lim_{\mathcal{U}} \text{ の意味}}$（以下 $\mathcal{S}$ を略す．）

$g, h \in H^q(\mathcal{U})$ に対し，ある $\mathcal{W} > \mathcal{U}$ について $\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}} g = \Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}} h$ のとき $g \sim h$ と書くと $\sim$ は同値関係である．h の $\sim$ 同値類を $\bar{h}$ で表わし，$\bar{H}^q(\mathcal{U}) = \{\bar{h} \mid h \in H^q(\mathcal{U})\}$ とすると，準同型 $\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} : H^q(\mathcal{U}) \to H^q(\mathcal{V})$ は $\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} : \bar{H}^q(\mathcal{U}) \to \bar{H}^q(\mathcal{V})$ を定めるがこれは単射である．なぜなら，$\bar{g} \in \bar{H}^q(\mathcal{U})$ につき，$\overline{\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} g} = 0$ とすると被覆 $\mathcal{W}\ (> \mathcal{V})$ があって $\Pi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} g = 0$．従って $\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}} g = 0$ だから定義により $\bar{g} = 0$．上のことから $\mathcal{V} > \mathcal{U}$ ならば $\bar{H}^q(\mathcal{U}) \subset \bar{H}^q(\mathcal{V})$ と考えてよい．そこで，

$$\lim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}) = \bigcup_{\mathcal{U}} \bar{H}^q(\mathcal{U})$$

と定義する．

定義．$H^q(\mathcal{U})$ から $\bar{H}^q(\mathcal{U})$ の上への標準的全射を $\Pi^{\mathcal{U}}$ と書く：

$$\Pi^{\mathcal{U}} : H^q(\mathcal{U}) \to \bar{H}^q(\mathcal{U}) \subset H^q(X, \mathcal{S}).$$

定理 6.1．$H^0(X, \mathcal{S}) = \Gamma(X, \mathcal{S})$.

証明． $H^0 = \lim Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{S})$，$Z^0 = \{c^0 \mid \delta c^0 = 0\}$ であるが，$c^0 = \{\sigma_j\}$ とすれば $0 = \delta c^0 = \sigma_k - \sigma_j$，従って σ_j と σ_k は $U_j \cap U_k$ で一致し，c^0 は X 全体の上の切断と考えられる．

定理 6.2．$\Pi^{\mathcal{U}} : H^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \to H^1(X, \mathcal{S})$ は単射，すなわち $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}) = \bar{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{S})$.

証明． $h \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ に対し，$h \sim 0$ ならば $h = 0$ をいう．h を $\mathcal{U} = \{U_j\}$ 上の 1-cocycle $\sigma = \{\sigma_{jk}\}$ で表わしておく．$h \sim 0$ より，$\mathcal{U}$ の細分 $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}$ が存在して $\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} h = 0$．$\mathcal{W} = \{W_{j\lambda} \mid j \in I, \lambda \in \Lambda\}$，$W_{j\lambda} = V_\lambda \cap U_j$ とすると $\mathcal{W} > \mathcal{V} > \mathcal{U}$ であって，

$$(*) \qquad \Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}} h = \Pi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} h = 0.$$

$W_{j\lambda} \subset U_j$ だから $s : j\lambda \mapsto j$ ととる．$(*)$ より $\{\sigma_{j\lambda k\mu}\} = \Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}}\sigma = \delta\tau$ なる $\tau = \{\tau_{j\lambda}\} \in C^0(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ が存在する．$\sigma_{j\lambda k\mu} = r_{W_{j\lambda}\cap W_{k\mu}}\sigma_{jk} = \tau_{k\mu} - \tau_{j\lambda}$ および $\sigma_{jj} = 0$ より $\tau_{j\mu} - \tau_{j\lambda} = 0$. そこで $W_{j\lambda}$ 上で $\tau_j = \tau_{j\lambda}$ と定義すれば $\tau_j \in \Gamma(U_j, \mathcal{S})$ かつ $W_{j\lambda} \cap W_{k\mu}$ 上で $\sigma_{jk} = \tau_k - \tau_j$ だから $U_j \cap U_k$ で $\sigma_{jk} = \tau_k - \tau_j$，すなわち $\sigma = \delta\{\tau_j\}$ で $h = 0$.

例．$\mathbb{D} = \{(z_{1,2}) \mid |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ とし，$X = \mathbb{D} - (0, 0)$，$\mathcal{S} = \mathcal{O}$ は X 上の正則函数芽の層とすれば $\dim H^1(X, \mathcal{O}) = \infty$ である．

$X = U_1 \cap U_2$，$U_1 = \{(z_1, z_2) \mid 0 < |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$，$U_2 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1| < 1, 0 < |z_2| < 1\}$ と書ける．$\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ とすれば $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \subset H^1(X, \mathcal{O})$. $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})/\delta C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ であるが,

$$\begin{aligned} Z^1 &= \{\sigma_{12}\}, \qquad \sigma_{12} \in \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{O}) \\ \delta C^0 &= \{\tau_2 - \tau_1\}, \qquad \tau_\nu \in \Gamma(U_\nu, \mathcal{O}) \end{aligned}$$

で，$U_1 \cap U_2 = \{(z_1, z_2) \mid 0 < |z_1| < 1, 0 < |z_2| < 1\}$ だから,

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} c_{mn} z_1^m z_2^n \\ \tau_1 &= \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{0}^{\infty} c_{mn} z_1^m z_2^n, \qquad \tau_2 = \sum_{0}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} c_{mn} z_1^m z_2^n \end{aligned}$$

の形．従って $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \cong \{\sigma_{12} \mid \sigma_{12} = \sum_{-\infty}^{-1}\sum_{-\infty}^{-1} c_{mn} z_1^m z_2^n\}$ 故に $\dim H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = \infty$.

注意．$\dim H^1(\mathbb{D}, \mathcal{O}) = 0$.

定理 6.3．$\mathcal{S}$ を X 上の層とするとき, 各 $U_i \in \mathcal{U}$ について $H^1(U_i, \mathcal{S}) = 0$ ならば $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \cong H^1(X, \mathcal{S})$.

証明. $H^1(X, \mathcal{S}) = \bigcup_{\mathcal{U}} \bar{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{S})$，$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}) = \bar{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ で，$\mathcal{V} > \mathcal{U}$ ならば $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \subset H^1(\mathcal{V}, \mathcal{S})$ だったから，$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \supset H^1(\mathcal{V}, \mathcal{S})$ をいえばよい．$\mathcal{U} = \{U_j\}$，$\mathcal{V} = \{V_\lambda\}$，$\mathcal{W} = \{W_{j\lambda}\}$，$W_{j\lambda} = U_j \cap V_\lambda$ とすれば $H^1(\mathcal{W}, \mathcal{S}) \supset H^1(\mathcal{V}, \mathcal{S})$ であるから

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \supset H^1(\mathcal{W}, \mathcal{S})$$

をいえばよい．$h \in H^1(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ をとり，h を 1-cocycle $c^1 = \{\sigma_{i\lambda k\mu}\}$ ($\sigma_{i\lambda k\mu} \in \Gamma(W_{i\lambda} \cap W_{k\mu}, \mathcal{S})$) で表わす．$\sigma_{i\lambda j\mu} + \sigma_{j\mu k\nu} + \sigma_{k\nu i\lambda} = 0$ より,

$$\sigma_{i\lambda i\mu} + \sigma_{i\mu i\nu} + \sigma_{i\nu i\lambda} = 0.$$

従って i をきめると $\{\sigma_{i\lambda i\mu}\}$ は U_i 上の被覆 $\mathcal{W}_i = \{W_{i\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\} = \{U_i \cap W_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に関する 1-cocycle で，仮定により $H^1(\mathcal{W}_i, \mathcal{S}) \subset H^1(U_i, \mathcal{S}) = 0$. 故に $\{\sigma_{i\lambda i\mu}\} = \delta\{\tau_{i\lambda}\}$ ($\tau_{i\lambda} \in \Gamma(W_{i\lambda}, \mathcal{S})$) すなわち $\sigma_{i\lambda i\mu} = \tau_{i\mu} - \tau_{i\lambda}$. $\{\tau_{i\lambda} \mid i \in I, \lambda \in \Lambda\}$ を $\mathcal{W}$ 上の 0-cochain c^0 と

考え，$\hat{c}^1 = c^1 - \delta c^0$ とおく．$\hat{c}^1 = \{\omega_{i\lambda k\nu}\}$ とすれば，$\omega_{i\lambda k\nu} = \sigma_{i\lambda k\nu} - \tau_{k\nu} + \tau_{i\lambda}$ で，$\omega_{i\lambda i\nu} = \sigma_{i\lambda i\nu} - \tau_{i\nu} + \tau_{i\lambda} = 0$．従って，$\omega_{i\lambda j\mu} + \omega_{j\mu i\nu} = \omega_{i\lambda j\mu} + \omega_{j\mu i\nu} - \omega_{i\lambda i\nu} = \sigma_{i\lambda j\mu} + \sigma_{j\mu i\nu} + \sigma_{i\nu i\lambda} = 0$. 故に $U_i \cap U_j \cap V_\lambda \cap V_\mu \cap V_\nu \cap V_\beta$ 上で

$$\omega_{i\lambda j\mu} = \omega_{i\nu j\mu} = \omega_{i\nu j\beta}.$$

そこで $\omega_{ij} = \omega_{i\lambda j\mu}$ と定義すると $\omega_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{S})$ で $\hat{c}^1 = \Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}} b^1$，（$b^1 = \{\omega_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{S})$）．$h$ は c^1 で決まり，c^1 は $\hat{c}^1 = \Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}} b^1$ にコホモローグ，一方 b^1 は $\eta \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ を決めるから，

$$H^1(\mathcal{W}, \mathcal{S}) \subset H^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}). \qquad \square$$

§7. 完全列（exact sequences）

$\mathcal{S}$ を X 上の層（$\varpi : \mathcal{S} \to X$）とすると，

i）ϖ は局所位相写像,

ii）$\mathcal{S}_x = \varpi^{-1}(x)$ は R-加群（$x \in X$），

iii）加群演算は連続,

であった.

定義．$\mathcal{S}$ の部分集合 $\mathcal{S}'$ は次の条件が成立するとき部分層（subsheaf）とよばれる.

i）$\mathcal{S}'$ は開集合,

ii）$\varpi(\mathcal{S}') = X$,

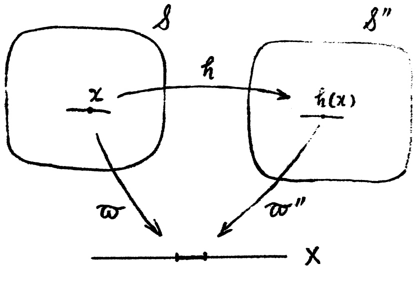
iii）$\mathcal{S}'_x = \varpi^{-1}(x) \cap \mathcal{S}'$ は $\mathcal{S}_x$ の R-部分加群.

定義．X 上の二つの層 $\mathcal{S}$ $(\varpi : \mathcal{S} \to X)$ と $\mathcal{S}''$ $(\varpi'' : \mathcal{S}'' \to X)$ が与えられたとき，連続写像 $h : \mathcal{S} \to \mathcal{S}''$ が次の条件を満たすとき h を準同型写像という：

i）$\varpi'' h = \varpi$（すなわち $h\mathcal{S}_x \subset \mathcal{S}''_x$），

ii）$h : \mathcal{S}_x \to \mathcal{S}''_x$ は R-準同型写像.

このとき，ϖ, ϖ'' が局所位相写像であるから，h も局所位相写像である.



次に，$\mathcal{S}'$ を $\mathcal{S}$ の部分層とし，$Q_x = \mathcal{S}_x / \mathcal{S}'_x$ とする．$\mathcal{S}_x$ から $\mathcal{S}_x / \mathcal{S}'_x$ の上への標準的全射を h_x とかく.

定義．$Q = \bigcup_{x \in X} Q_x$ とし，$\varpi'' : Q \to X$ は $q \in Q_x$ ならば $\varpi''(q) = x$，$h : \mathcal{S} \to Q$ を，$s \in \mathcal{S}_x$ ならば $h(s) = h_x(s)$，$U \subset Q$ は $h^{-1}(U)$ が開集合のとき開集合と定義する．このとき Q が層で $h : \mathcal{S} \to Q$ が準同型写像であることは明らか．$Q = \mathcal{S}/\mathcal{S}'$ を商層（quotient sheaf）と

よぶ.

定義. $h: \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ が準同型写像のとき $\ker h = \{s \mid h(s) = 0\}$ と定義する. これは $\mathcal{S}$ の部分層である.

層の列

$$\text{(S)} \qquad \mathcal{S}_t \xrightarrow{h_1} \mathcal{S}_2 \xrightarrow{h_2} \mathcal{S}_3 \xrightarrow{h_3} \dots \xrightarrow{h_{n-1}} \mathcal{S}_n \xrightarrow{h_n} \cdots \to \mathcal{S}_m$$

は $h_{n-1}(\mathcal{S}_{n-1}) = \ker h_n$ なるとき $\mathcal{S}_n$ で完全であるという. 各 $\mathcal{S}_n$, $2 \leqslant n \leqslant m-1$ で完全のとき (S) を<u>完全列</u> (<u>exact sequence</u>) とよぶ. 特に

$$0 \to \mathcal{S}' \xrightarrow{i} \mathcal{S} \xrightarrow{h} \mathcal{S}'' \to 0$$

が完全ということは, i が単射で h が全射かつ $i(\mathcal{S}') = \ker h$ ということに他ならない.

準同型写像 $h: \mathcal{S} \to \mathcal{S}''$ が与えられたとき, $\sigma \in \Gamma(U, \mathcal{S})$ に対し, $h\sigma : x \mapsto h(\sigma(x))$ と決めれば, $h\sigma \in \Gamma(U, \mathcal{S}'')$ となり, h は準同型写像 $h: \Gamma(U, \mathcal{S}) \to \Gamma(U, \mathcal{S}'')$ を定める. 次に被覆 $\mathcal{U} = \{U_j\}$ をとり, $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ から $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}'')$ への写像 h を, $c^q = \{\sigma_{i_0 \dots i_q}\} \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ に対し, $hc^q = \{h\sigma_{i_0 i_1 \dots i_q}\}$ と定める. そうすると $h\delta c^q = \delta h c^q$ より $h(Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})) \subset Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}'')$, $h(\delta C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})) \subset \delta C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{S}'')$ となるから, h は準同型写像

$$h: H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}) \to H^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}'')$$

を定める. さらに $\mathcal{U} < \mathcal{V}$ とすれば $h\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} = \Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} h$. 故に h は準同型写像

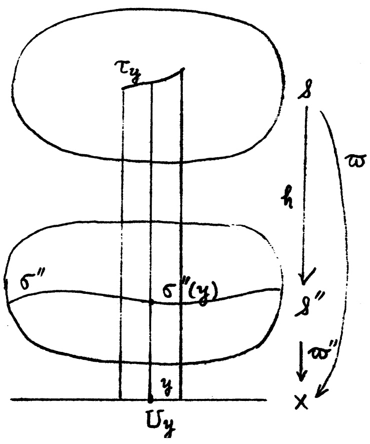
$$h: H^q(X, \mathcal{S}) \to H^q(X, \mathcal{S}'')$$

を定める.

定理 7.1. $0 \to \mathcal{S}' \xrightarrow{\iota} \mathcal{S} \xrightarrow{h} \mathcal{S}'' \to 0$ が完全ならば, 次の列が完全である.

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(X, \mathcal{S}') &\xrightarrow{\iota} H^0(X, \mathcal{S}) \xrightarrow{h} H^0(X, \mathcal{S}'') \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathcal{S}) \\ &\xrightarrow{\iota} H^1(X, \mathcal{S}) \xrightarrow{h} H^1(X, \mathcal{S}'') \xrightarrow{\delta^*} H^2(X, \mathcal{S}) \to \dots \\ &\cdots \to H^q(X, \mathcal{S}) \to H^q(X, \mathcal{S}'') \to H^{q+1}(X, \mathcal{S}') \to H^{q+1}(X, \mathcal{S}) \to \dots . \end{aligned}$$

証明. X を略し, $H^q(X, \mathcal{S}^{(\nu)}) = H^q(\mathcal{S}^{(\nu)})$ $(\mathcal{S}^{(\nu)} = \mathcal{S}', \mathcal{S}, \mathcal{S}'')$ と書く. $\iota : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$ は単射だから $\mathcal{S}' = \iota(\mathcal{S}')$ と考えられ, $H^0(X, \mathcal{S}') = \Gamma(X, \mathcal{S}') \subset \Gamma(X, \mathcal{S}) = H^0(X, \mathcal{S})$. 故に $0 \to H^0(\mathcal{S}') \xrightarrow{\iota} H^0(\mathcal{S})$ は完全. $\sigma \in H^0(\mathcal{S}) = \Gamma(\mathcal{S})$ とすると, $h\sigma \in \Gamma(\mathcal{S}'') = H^0(\mathcal{S}'')$ で, $h\sigma(x) = 0$ であるためには $\sigma(x) \in \mathcal{S}'$ が必要十分. 故に $H^0(\mathcal{S}') \xrightarrow{\iota} H^0(\mathcal{S}) \xrightarrow{h} H^0(\mathcal{S}'')$ は完全.



次に，$\sigma'' \in H^0(\mathcal{S}'')$ を考える．$h(\mathcal{S}) = \mathcal{S}''$ で，h, ϖ, ϖ'' は局所位相写像であるから，すべての $y \in X$ に対し，y の近傍 U_y と $\tau_y \in \Gamma(U_y, \mathcal{S})$ が存在して，$x \in U_y$ に対し $h\tau_y(x) = \sigma''(x)$，すなわち $h\tau_y = r_{U_y}\sigma''$．$X$ はパラコンパクトだったから，$\{U_y \mid y \in X\}$ の局所有限な細分 $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in I}$ がある．各 U_j はある U_{y_j} に含まれるから，$\tau_j = r_{U_j}\tau_{y_j}$ とすれば，$\tau_j \in \Gamma(U_j, \mathcal{S})$ で，$x \in U_j$ に対し $h\tau_j(x) = \sigma''(x)$．そこで，$c^0 = \{\tau_j \mid j \in I\} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ とすると，$hc^0 = \sigma''$ で，$\delta c^0 = \{\tau_{jk}\}$，$\tau_{jk} = \tau_k - \tau_j$．ところで $h\tau_{jk}(x) = h\tau_k(x) - h\tau_j(x) = \sigma''(x) - \sigma''(x) = 0$ より $\tau_{jk}(x) \in \mathcal{S}'$．従って $\tau_{jk} \in \Gamma(U_j \cap U_k, \mathcal{S}')$ で，$c^1 = \{\tau_{jk}\} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}')$ となるが $\delta c^1 = \delta\delta c^0 = 0$ より $c^1 = Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{S}')$．故に c^1 は $H^1(X, \mathcal{S}')$ の元を定めるが，これを $\delta^*\sigma''$ で表わす．一般に $c^q \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}^{(\nu)})$ のきめる $H^q(X, \mathcal{S}^{(\nu)})$ の元を $[c^q]^\nu$ と書くことにすると，$\delta^*\sigma'' = [\delta c^0]'$ となる．$\delta^*\sigma''$ が c^0 の選び方によらないことは，$\sigma'' = hc^0 = hb^0$ となったとすると $h(c^0 - b^0) = 0$ より $a^0 = c^0 - b^0 \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{S}')$．故に $[\delta b^0]' = [\delta c^0]' - [\delta a^0]' = [\delta c^0]'$ となることから分る．次に $H^0(X, \mathcal{S}) \xrightarrow{h} H^0(X, \mathcal{S}'') \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathcal{S}')$ が完全であることを証明する．$\sigma'' \in H^0(X, \mathcal{S}'')$ を考え，

(1) $\sigma'' = h\sigma$，$\sigma \in H^0(X, \mathcal{S})$ とする．σ を表わす c^0 をとれば $\delta c^0 = 0$．故に $\delta^*\sigma'' = [\delta c^0]' = 0$．

(2) $\delta^*\sigma'' = 0$ とする．$hc^0 = \sigma''$ なる c^0 をとると $[\delta c^0]' = 0$ より，$a^0 \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{S}')$ が存在して $\delta c^0 = \delta a^0$．$\delta(c^0 - a^0) = 0$ より $c^0 - a^0 \in \Gamma(X, \mathcal{S})$．そこで $\sigma = c^0 - a^0$ とおくと，$ha^0 = 0$ より $h\sigma = hc^0 - ha^0 = hc^0 = \sigma''$．以上から

$$0 \to H^0(\mathcal{S}') \to H^0(\mathcal{S}) \to H^0(\mathcal{S}'') \xrightarrow{\delta^*} H^1(\mathcal{S}')$$

が完全であることが証明できた．

次に一般の q に対し，$\delta^* : H^q(\mathcal{S}'') \to H^{q+1}(\mathcal{S}')$ を定義する．$\eta'' \in H^q(\mathcal{S}'')$ を考え，$\eta'' = [c^q]''$，$c^q \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}'')$ と表わす．

補題． $c^q \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}'')$ が与えられたとき，被覆 $\mathcal{V} > \mathcal{U}$ および $b^q \in C^q(\mathcal{V}, \mathcal{S})$ で $hb^q = \Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} c^q$ なるものが存在する．

証明． $q = 2$ のときを見れば様子が分る．$c^q = \{\sigma''_{ijk}\}$ とする．X の被覆 $\mathcal{W} = \{W_j\}$ を W_j の閉包 $\bar{W}_j$ が U_j に含まれるようにとる．各点 $y \in X$ の近傍 N_y を次のように選ぶ．

（1）$U_i \cap U_j \cap U_k \ni y$ ならば，$\tau_{ijk} \in \Gamma(N_y, \mathcal{S})$ で $h\tau_{ijk}(x) = \sigma''_{ijk}(x)$ $(x \in N_y)$ なるものがある，（$\mathcal{U} = \{U_j\}$ は局所有限だから，このことは可能.）

（2）N_y はある W_{iy} に含まれる.

（3）$N_y \cap \bar{W}_j \neq \phi$ ならば，$N_y \subset U_j$.

そして，$\mathcal{V} = \{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $\{N_y \mid y \in X\}$ の局所有限な細分とする.

$b^q = \{\beta_{\lambda\mu\nu}\} \in C^q(\mathcal{V}, \mathcal{S})$ を次のように定める：

各 V_λ はある $N_{y(\lambda)}$ に含まれるから，$V_\lambda \cap V_\mu \cap V_\nu \neq \phi$ ならば，$V_\lambda \subset N_{y(\lambda)} \subset W_i$，$V_\mu \subset W_j$，$V_\nu \subset W_k$，$(i = i_{y(\lambda)}, j = i_{y(\mu)}, k = i_{y(\nu)})$ より，$N_{y(\lambda)}$ は W_i, W_j, W_k と交わり，（3）から $N_{y(\lambda)} \subset U_i \cap U_j \cap U_k$.（1）から $\tau_{ijk} \in \Gamma(N_{y(\lambda)}, \mathcal{S})$ で，$h\tau_{ijk}(x) = \sigma''_{ijk}(x)$ $(x \in N_{y(\lambda)})$ なるものがある．そこで，$\beta_{\lambda\mu\nu} = r_{V_\lambda \cap V_\mu \cap V_\nu} \tau_{ijk}$，$b^q = \{\beta_{\lambda\mu\nu}\} \in C^q(\mathcal{V}, \mathcal{S})$ とすると，$h\beta_{\lambda\mu\nu} = rh\tau_{ijk} = r\sigma''_{ijk}$ であるから $hb^q = \Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} c^q$. □

上の補題から $\eta'' = [c^q]'' \in H^q(\mathcal{S}'')$ に対し，$b^q \in C^q(\mathcal{V}, \mathcal{S})$ で $hb^q = \Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} c^q$ となるものが存在するから，$\delta^* \eta'' = [\delta b^q]' \in H^{q+1}(\mathcal{S}')$ と定義する.

次に $H^q(\mathcal{S}) \xrightarrow{h} H^q(\mathcal{S}'') \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(\mathcal{S}')$ が完全であることを示す．$\eta'' = [c^q]'' \in H^q(\mathcal{S}'')$，$c^q \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{S}'')$ をとる.

（1）$\eta \in H^q(\mathcal{S})$ が存在して $\eta'' = h\eta$ とする．定義により $\delta^*\eta'' = [\delta b^q]'$，$b^q \in C^q(\mathcal{V}, \mathcal{S})$，$hb^q = \Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} c^q$．$\eta'' = h\eta$ より $\eta'' = [ht^q]''$，$t^q \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ 従って b^q として t^q をとることができ，$\delta^*\eta'' = [\delta t^q]' = 0$.

（2）$\delta^*\eta'' = 0$ とする．$[\delta b^q]' = 0$ より $\mathcal{W} > \mathcal{V}$ が存在して $\Pi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} \delta b^q = \delta a^q$，$a^q \in C^q(\mathcal{W}, \mathcal{S}')$．$\delta(\Pi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} b^q - a^q) = 0$ より $z^q = \Pi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} b^q - a^q \in Z^q(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ であるから $\eta = [z^q] \in H^q(\mathcal{S})$ と定義すれば $h\eta = [hz^q] = [\Pi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} hb^q] = [\Pi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}} c^q] = \eta''$.

$$\begin{cases} H^q(\mathcal{S}') \xrightarrow{\iota} H^q(\mathcal{S}) \xrightarrow{h} H^q(\mathcal{S}''), \\ H^q(\mathcal{S}'') \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(\mathcal{S}') \xrightarrow{\iota} H^{q+1}(\mathcal{S}), \end{cases}$$

が完全であることの証明は略.

定理 7.2.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{S}' & \longrightarrow & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S}'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \varphi'}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi''}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{T}' & \longrightarrow & \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{T}'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

が完全かつ可換であるとする．ただし，$\varphi^{(\nu)} : \mathcal{S}^{(\nu)} \to \mathcal{T}^{(\nu)}$ は準同型写像．このとき，

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(\mathcal{S}') & \longrightarrow & H^0(\mathcal{S}) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{S}'') & \longrightarrow & H^1(\mathcal{S}') & \longrightarrow & \dots \\
 & & {\scriptstyle\varphi'}\big\downarrow & & {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\varphi''}\big\downarrow & & {\scriptstyle\varphi'}\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^0(\mathcal{T}') & \longrightarrow & H^0(\mathcal{T}) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{T}'') & \longrightarrow & H^1(\mathcal{T}') & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & \longrightarrow & H^{q-1}(\mathcal{S}'') & \xrightarrow{\delta^*} & H^q(\mathcal{S}') & \longrightarrow & H^q(\mathcal{S}) & \longrightarrow & H^q(\mathcal{S}') & \longrightarrow & \dots \\
 & & {\scriptstyle\varphi''}\big\downarrow & & {\scriptstyle\varphi'}\big\downarrow & & {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\varphi''}\big\downarrow & & \\
\dots & \longrightarrow & H^{q-1}(\mathcal{T}'') & \xrightarrow{\delta^*} & H^q(\mathcal{T}') & \longrightarrow & H^q(\mathcal{T}) & \longrightarrow & H^q(\mathcal{T}'') & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

は完全かつ可換である．ただし，$\varphi^{(\nu)} : H^q(\mathcal{S}^{(\nu)}) \to H^q(\mathcal{T}^{(\nu)})$ は $\varphi^{(\nu)} : \mathcal{S}^{(\nu)} \to \mathcal{T}^{(\nu)}$ できまる準同型写像.

証明略.

§8. Fine sheaf

準同型写像 $h : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ の台（support）は $\operatorname{supp} h = \{x \mid h(\mathcal{S}_x) = 0\}$ $(\subset X)$ の閉包，により定義する．

定義．$\mathcal{S}$ を X 上の層とする．X の任意の局所有限な被覆 $\{U_j\}$ について，次の条件を満たす準同型写像 $h_j : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ の集り $\{h_j\}$ が存在するとき $\mathcal{S}$ はfine sheafとよばれる．

i）$\operatorname{supp} h_j \subset U_j$,

ii）すべての $s \in \mathcal{S}$ に対し $\sum_j h_j(s) = s$，すなわち $\sum_j h_j =$ 恒等写像.

例．$X = M$ は可微分多様体，$\mathcal{D}$ は M 上の可微分函数芽の層とすれば $\mathcal{D}$ は fine sheaf.

証明． $\{U_j\}$ が与えられたとき，単位の分割 $\sum \rho_j(x) = 1$ をとる．$\rho_j(x)$ は C^∞-可微分，$\operatorname{supp} \rho_j \subset U_j$，$0 \leqslant \rho_j(x) \leqslant 1$ を満たす．$h_j : f(x) \to \rho_j(x) f(x)$ と定めると，h_j は $\mathcal{D}$ から $\mathcal{D}$ への準同型写像で，$\sum h_j = 1$.

定理 8.1．$\mathcal{S}$ がfine sheafならば

$$H^q(X, \mathcal{S}) = 0 \qquad (q \geqslant 1).$$

証明. $q = 2$ のときをみれば様子が分る．すべての 2-cocycle $\{\sigma_{ijk}\}, \sigma_{ijk} \in \Gamma(U_i \cap U_j \cap U_k, \mathcal{S})$ は coboundary であることをいえばよい．$\mathcal{S}$ が fine sheaf だから準同型写像 $h_j : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ が存在して $\operatorname{supp} h_j \subset U_j$，$\sum_j h_j =$ 恒等写像．$x \notin \operatorname{supp} h_\ell$ に対しては $(h_\ell \sigma_{\ell jk})(x) = 0$ だから，

$$\tilde{\sigma}_{\ell jk}(x) = \begin{cases} h_\ell \sigma_{\ell jk}(x), & x \in U_\ell \cap U_j \cap U_k \\ 0, & x \in U_j \cap U_k - U_\ell \end{cases}$$

と定義すれば，$\tilde{\sigma}_{\ell jk} \in \Gamma(U_j \cap U_k, \mathcal{S})$．そこで，$\tau_{jk} = \sum_\ell \tilde{\sigma}_{\ell jk}$ とすれば，$0 = (\delta\sigma)_{\ell ijk} =$

$\sigma_{ijk} - \sigma_{\ell jk} + \sigma_{\ell ik} - \sigma_{\ell ij}$ より，

$$\begin{aligned}\sigma_{ijk} &= \sum_{\ell} h_\ell \sigma_{ijk} = \sum_{\ell} h_\ell \sigma_{\ell jk} - \sum_{\ell} h_\ell \sigma_{\ell ik} + \sum_{\ell} h_\ell \sigma_{\ell ij} \\ &= \tau_{jk} - \tau_{ik} + \tau_{ij}.\end{aligned}$$

故に $\{\sigma_{ijk}\}$ は coboundary. □

定義.

$$\text{(R)} \qquad 0 \to \mathcal{S} \xrightarrow{i} \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2 \to \cdots \to \mathcal{A}^{q-1} \xrightarrow{d} \mathcal{A}^q \to \dots$$

が完全で，各層 $\mathcal{A}^q$ $(q = 0, 1, 2, \dots)$ が fine sheaf ならば列 (R) を $\mathcal{S}$ の<u>fine resolution</u>という.

定理 8.2. (R) が $\mathcal{S}$ の fine resolution ならば

$$H^q(X, \mathcal{S}) \cong \frac{H^0(X, d\mathcal{A}^{q-1})}{dH^0(X, \mathcal{A}^{q-1})} \qquad (q \geqslant 1).$$

証明. $0 \to \operatorname{Ker} d \to \mathcal{A}^p \xrightarrow{d} d\mathcal{A}^p \to 0$ が完全で，$\operatorname{Ker} d = d\mathcal{A}^{p-1}$ であるから，

$$0 \to d\mathcal{A}^{p-1} \to \mathcal{A}^p \xrightarrow{d} d\mathcal{A}^p \to 0.$$

$\mathcal{A}^p$ が fine sheaf であるから定理 7.1 と 8.1 により，次の完全列を得る.

$$\begin{aligned}0 &\to H^0(d\mathcal{A}^{p-1}) \to H^0(\mathcal{A}^p) \xrightarrow{d} H^0(d\mathcal{A}^p) \xrightarrow{\delta^*} H^1(d\mathcal{A}^{p-1}) \\ &\to 0 \to H^1(d\mathcal{A}^p) \to H^2(d\mathcal{A}^{p-1}) \to 0 \to \cdots \to 0 \\ &\to H^{q-1}(d\mathcal{A}^p) \to H^q(d\mathcal{A}^{p-1}) \to 0 \to \dots.\end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned}&H^{q-1}(d\mathcal{A}^p) \cong H^q(d\mathcal{A}^{p-1}) \qquad (q \geqslant 2) \\ &H^0(d\mathcal{A}^p)/dH^0(\mathcal{A}^p) \cong H^1(d\mathcal{A}^{p-1}).\end{aligned}$$

一方完全列

$$0 \to \mathcal{S} \to \mathcal{A}^0 \to d\mathcal{A}^0 \to 0$$

より，上と同様にして

$$\begin{aligned}&H^{q-1}(d\mathcal{A}^0) \cong H^q(\mathcal{S}) \qquad (q \geqslant 2), \\ &H^0(d\mathcal{A}^0)/dH^0(\mathcal{A}^0) \cong H^1(\mathcal{S}).\end{aligned}$$

$q \geqslant 2$ ならば，$H^q(\mathcal{S}) \cong H^{q-1}(d\mathcal{A}^0) \cong H^{q-2}(d\mathcal{A}^1) \cong \cdots \cong H^1(d\mathcal{A}^{q-2}) \cong H^0(d\mathcal{A}^{q-1})/dH^0(\mathcal{A}^{q-1})$. □

§9. de Rham の定理と Dolbeault の定理

M を可微分多様体とする．M は座標近傍 U_j で覆われている $(M = \bigcup_j U_j)$ が，x_j : $p \mapsto (x_j^1(p), x_j^2(p), \ldots, x_j^n(p))$ を U_j 上の局所座標とする，x_j は単に $x \mapsto (x_j^1, \ldots, x_j^n)$（または $(x^1 x^2, \ldots, x^n)$）とも書く．M の開集合 W 上の可微分 p 次形式（p-form）φ とは，各 $W \cap U_j$ で

$$\varphi = \frac{1}{p!} \sum_{\alpha_\nu} \varphi_{j\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}(x) dx_j^{\alpha_1} \wedge dx_j^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx_j^{\alpha_p}$$

（$\varphi_{j\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}(x)$ は C^∞-可微分函数）

なる形に表わされて，$W \cap U_j \cap U_k$ では，

$$\frac{1}{p!} \sum \varphi_{j\alpha_1\ldots\alpha_p}(x) dx_j^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_j^{\alpha_p} = \frac{1}{p!} \sum \varphi_{k\alpha_1\ldots\alpha_p}(x) dx_k^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_k^{\alpha_p}.$$

ただし

$$dx_k^\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial x_k^\alpha}{\partial x_j^\beta} dx_j^\beta$$

となるもの．

$$dx_k^\alpha \wedge dx_k^\beta \wedge \cdots \wedge dx_k^\gamma = \frac{1}{p!} \sum_{\lambda,\mu,\ldots,\nu} \frac{\partial(x_k^\alpha, x_k^\beta, \ldots, x_k^\gamma)}{\partial(x_j^\lambda, x_j^\mu, \ldots, x_j^\nu)} dx_j^\lambda \wedge dx_j^\mu \wedge \cdots \wedge dx_j^\nu$$

であるから，$\varphi_{j\alpha_1\ldots\alpha_p}(x)$ が C^∞-可微分ということは，局所座標のとり方によらない．一般に p 次形式を，

$$\varphi = \frac{1}{p!} \sum \varphi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}(x) dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_p}$$

と表わす．

定義．0 次形式（函数）$f(x)$ については

$$df(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^\alpha} dx^\alpha.$$

p 次形式 φ については，

$$d\varphi = \frac{1}{p!} \sum d\varphi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \wedge dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_p}$$
$$= \frac{1}{p!} \sum \frac{\partial \varphi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_p}$$

と定義する．φ が p 次形式ならば $d\varphi$ は $p+1$ 次形式である．また $dd\varphi = 0$ であることは容易に確かめられる．

可微分函数から，可微分函数芽の層 $\mathcal{D}$ を作ったと同様にして，p 次形式から M 上の C^∞-可微分 p 次形式芽の層を作り，$\mathcal{A}^p$ で表わす．そうすると，$\mathcal{A}^0 = \mathcal{D}$ で，d は層の準同型写像 $d : \mathcal{A}^{p-1} \to \mathcal{A}^p$ をひき起す．単位の分割 $\sum \rho_i(x) = 1$ をとり，$h_j : \varphi(x) \mapsto \rho_j(x)\varphi(x)$ とすれば $\mathcal{A}^p$ が fine sheaf であることがわかる．

補題.

$$0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{i} \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2 \to \cdots \to \mathcal{A}^{p-1} \xrightarrow{d} \mathcal{A}^p \to \ldots \xrightarrow{d} \mathcal{A}^n \to 0$$

は完全.

証明. $dd\varphi = 0$ より $d\mathcal{A}^{p-1} \subset \operatorname{Ker} d$．逆は次の補題による．

Poincaré の補題.

$U = \{(x^1, \ldots, x^n) \mid |x^\alpha| < r\} \subset \mathbb{R}^n$，$\varphi$ は U 上の p 次形式 $(p \geqslant 1)$ とする．$d\varphi = 0$ ならば，U 上の $p-1$ 次形式 ψ が存在して $\varphi = d\psi$.

証明.（Gunning-Rossi）

$\varphi = \sum_{\alpha_\nu=1}^m \varphi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}(x)dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_p}$（$m$ は φ に現われる dx^{α_ν} の α_ν の最大値）とし m に関する帰納法で証明する．

（1）$m = p$ のとき，

$$\varphi = \varphi_{12\ldots p}(x^1, x^2, \ldots, x^n)dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^p.$$

$0 = d\varphi = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\varphi_{1\ldots p}dx^\alpha \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p$ より，$\alpha \geqslant p+1$ に対し $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\varphi_{1\ldots p}(x) = 0$．従って $\varphi_{1\ldots p}(x^1, \ldots, x^n) = \varphi_{1\ldots p}(x^1, \ldots, x^p)$．そこで，$\psi = \psi_{23\ldots p}(x)dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^p$，$\psi_{2,3,\ldots,p}(x) = \int_0^{x^1} \varphi_{1\ldots p}(\xi, x^2, \ldots, x^p)d\xi$ とおくと，

$$\begin{aligned} d\psi &= \varphi_{1\ldots p}(x)dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^p + \sum_{\alpha=2}^p \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}dx^\alpha \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^p \\ &= \varphi. \end{aligned}$$

（2）$m = k-1 \geqslant p$ のときの補題を仮定し，$m = k$ のときを考える．

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{p!}\sum_{\alpha_\nu=1}^k \varphi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}(x)dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_p} \\ &= \frac{1}{p!}\sum_{\alpha_\nu=1}^{k-1} \varphi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}(x)dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_p} \\ &\quad + \frac{1}{(p-1)!}\sum_{\alpha_\nu=1}^{k-1} \varphi_{k\alpha_1\ldots\alpha_p}(x)dx^k \wedge dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_p}. \end{aligned}$$

$0 = d\varphi = \frac{1}{p!}\sum \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(x)dx^\alpha \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_p}$ より，$\alpha \geqslant k+1$ に対し $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(x) = 0$．従って，$\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(x) = \varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(x^1, x^2, \ldots, x^k)$．そこで $\omega_{\alpha_2\ldots\alpha_p}(x^1, \ldots, x^k) = \int_0^{x^k} \varphi_{k\alpha_2\ldots\alpha_p}(x^1, \ldots, x^{k-1}, \xi)d\xi$ とし，$\omega = \frac{1}{(p-1)!}\sum_{\alpha_\nu=1}^{k-1} \omega_{\alpha_2\ldots\alpha_p}(x)dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_p}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
d\omega &= \frac{1}{(p-1)!}\sum_{\alpha_\nu=1}^{k-1} \frac{\partial\omega_{\alpha_2\ldots\alpha_p}(x)}{\partial x^{\alpha_1}} dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_p} \\
&\quad + \frac{1}{(p-1)!}\sum_{\alpha_\nu=1}^{k-1} \frac{\partial\omega_{\alpha_2\ldots\alpha_p}(x)}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_p} \\
&= \frac{1}{(p-1)!}\sum_{\alpha_\nu=1}^{k-1} \frac{\partial\omega_{\alpha_2\ldots\alpha_p}(x)}{\partial x^{\alpha_1}} dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_p} \\
&\quad + \frac{1}{(p-1)!}\sum_{\alpha_\nu=1}^{k-1} \varphi_{k\alpha_2\ldots\alpha_p}(x) dx^k \wedge dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_p}
\end{aligned}$$

となるから，

$$\begin{aligned}
\varphi' &= \varphi - d\omega \\
&= \frac{1}{p!}\sum_{\alpha_\nu=1}^{k-1}\left(\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(x) - p\frac{\partial\omega_{\alpha_2\ldots\alpha_p}(x)}{\partial x^{\alpha_1}}\right) dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_p}
\end{aligned}$$

とすれば，$d\varphi' = d\varphi - dd\omega = 0$．従って帰納法の仮定により ψ' が存在して $\varphi' = d\psi'$．故に $\varphi = d\psi' + d\omega = d\psi$，$\psi = \psi' + \omega$． □

結論．$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2 \to \cdots$ は層 $\mathbb{C}$ の fine resolution である．従って定理 8.2 から，

$$H^q(M, \mathbb{C}) \cong \frac{H^0(M, d\mathcal{A}^{q-1})}{dH^0(M, \mathcal{A}^{q-1})} \qquad (q \geqslant 1)$$

（de Rham の定理）．

ここで，

$H^0(M, \mathcal{A}^{q-1}) = \Gamma(M, \mathcal{A}^{q-1}) = M$ 上の C^∞-可微分 $q-1$ 次形式全体の線形空間，

$H^0(M, d\mathcal{A}^{q-1}) = \Gamma(M, d\mathcal{A}^{q-1}) = M$ 上の C^∞-可微分 q 次形式 φ で，$d\varphi = 0$ なるもの全体の線形空間．

次に複素多様体 M を考え，$(z_j^1, \ldots, z_j^n) = (z^1, \ldots, z^n)$ を局所座標とする．$z^\alpha = x^{2\alpha-1} + ix^{2\alpha}$ $(i = \sqrt{-1})$ とおき，M を可微分多様体と考えて可微分 r 次形式

$$\varphi = \frac{1}{r!}\sum \psi_{\lambda_1\ldots\lambda_r}(z)dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_r}$$

を考える．$dx^{2\alpha-1}=\frac{1}{2}(dz^\alpha+d\bar{z}^\alpha)$，$\alpha x^{2\alpha}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(dz^\alpha-d\bar{z}^\alpha)$ を代入すると，

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum_{p+q=r}\frac{1}{p!q!}\sum\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_q}(z)dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_p}\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_q}\\ &= \sum_{p+q=r}\varphi^{(p,q)}.\end{aligned}$$

ただし，

$$\varphi^{(p,q)}=\frac{1}{p!q!}\sum\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_q}(z)dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_p}\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_q}.$$

このような型の微分形式を (p,q) 型微分形式という．

C^∞-可微分函数 $f(z)$ に対しては

$$\frac{\partial f}{\partial z^\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^{2\alpha-1}}-\sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial x^{2\alpha}}\right),\qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^{2\alpha-1}}+\sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial x^{2\alpha}}\right)$$

と定義したから，

$$df=\sum_{\lambda=1}^{2n}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}dx^\lambda=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z^\alpha}dz^\alpha+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\alpha}d\bar{z}^\alpha$$

となる．そこで，

$$\partial f=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z^\alpha}dz^\alpha,\qquad \bar{\partial} f=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\alpha}d\bar{z}^\alpha$$

と定義する．$(df=\partial f+\bar{\partial}f)$.

次に (p,q) 型微分形式

$$\varphi=\frac{1}{p!q!}\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_q}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_p}\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_q}$$

に対しては，

$$\begin{aligned}\partial\varphi &= \frac{1}{p!q!}\sum\partial\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_q}\wedge dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_p}\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_q},\\ \bar{\partial}\varphi &= \frac{1}{p!q!}\sum\bar{\partial}\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_q}\wedge dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_p}\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_q}\end{aligned}$$

と定義し，一般の微分形式には線型に拡張する．このとき，$d=\partial+\bar{\partial}$，$\partial\partial=0$，$\bar{\partial}\bar{\partial}=0$ で，$0=dd=(\partial+\bar{\partial})^2=\partial\bar{\partial}+\bar{\partial}\partial$ より

$$\partial\bar{\partial}=-\bar{\partial}\partial.$$

φ が (p,q) 型ならば $\partial\varphi$ は $(p+1,q)$ 型，$\bar{\partial}\varphi$ は $(p,q+1)$ 型である．また $\overline{\partial\varphi}=\bar{\partial}\bar{\varphi}$ である．(p,q) 型微分形式 $\varphi=\frac{1}{p!q!}\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_q}dz^{\alpha_1}\wedge\ldots dz^{\alpha_p}\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_q}$ については，

$\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\bar\beta_1\ldots\bar\beta_q}$ は，$(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$，$(\bar\beta_1,\ldots,\bar\beta_q)$ それぞれに関し交代的と考えてよく，そうすると $\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar\beta_1\ldots\bar\beta_q}$ は φ によって一意的に定まる．そして

$$\begin{aligned}
\bar\partial\varphi &= \frac{1}{p!q!}\sum\frac{\partial f_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar\beta_1\ldots\bar\beta_q}}{\partial\bar z^{\beta}}d\bar z^{\beta}\wedge dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_p}\wedge d\bar z^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z^{\beta_q}\\
&= \frac{1}{p!q!}\sum(-1)^p\frac{\partial f_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar\beta_1\ldots\bar\beta_q}}{\partial\bar z^{\beta}}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_p}\wedge d\bar z^{\beta}\wedge d\bar z^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z^{\beta_q}\\
&= \frac{1}{p!(q+1)!}\sum\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar\beta_0\bar\beta_1\ldots\bar\beta_q}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_p}\wedge d\bar z^{\beta_0}\wedge\cdots\wedge d\bar z^{\beta_q}.
\end{aligned}$$

ただし，

$$\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar\beta_0\bar\beta_1\ldots\bar\beta_q} = (-1)^p\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\frac{\partial}{\partial\bar z^{\beta_j}}\varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar\beta_0\ldots\bar\beta_{j-1}\bar\beta_{j+1}\ldots\bar\beta_q}$$

で，これは $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$，$(\bar\beta_0,\bar\beta_1,\ldots,\bar\beta_q)$ に関しそれぞれ交代的．

次に，可微分多様体の場合の Poincaré の補題に相当する Dolbeault の補題を証明する．

$z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ に対し，$|z|=\max_\alpha|z_\alpha|$ とおき，$U_r=\{z\mid|z|<r\}\subset\mathbb{C}^n$ とする．

Dolbeault の補題.

φ を U_r 上の C^∞-可微分 (p,q) 形式 $(q\geqslant 1)$ とする．もし $\bar\partial\varphi=0$ ならば U_r 上の C^∞-可微分 $(p,q-1)$ 形式 ψ が存在して $\varphi=\bar\partial\psi$.

証明.（Gunning-Rossi）まず，

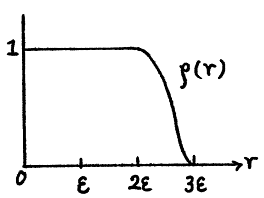
補題. $f(z)$ は，$\mathbb{C}$ の有界領域 U 上の C^∞-可微分函数で，$|f(z)|<K<\infty$ とする．

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\iint_U f(\zeta)\frac{d\zeta\cap d\bar\zeta}{\zeta-z}=-\frac{1}{\pi}\iint_U f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}$$
$$(\zeta=\xi+i\eta)$$

とおくと，$g(z)$ は U 上で C^∞-可微分かつ

$$\frac{\partial g(z)}{\partial\bar z}=f(z).$$

証明. $\rho(r)$ を C^∞-可微分函数で，



$$\rho(r)=\begin{cases}1, & 0\leqslant r\leqslant 2\varepsilon\\ 0, & r\geqslant 3\varepsilon\end{cases}$$

なるものとする（ε は十分小さい正の数）．U の任意の点 z_0 をとり，$f(\zeta)=f_1(\zeta)+f_2(\zeta)$ と分ける．ここで，$f_1(\zeta)=\rho(|\zeta-z_0|)f(\zeta)$，$f_2(\zeta)=(1-\rho(|\zeta-z_1|))f(\zeta)$．そうすると，$f_1,f_2$ は C^∞-可微分で，

$|\zeta - z_0| \geqslant 3\varepsilon$ のとき $f_1(\zeta) = 0$，$|\zeta - z_0| \leqslant 2\varepsilon$ のとき $f_2(\zeta) = 0$．これに対応して，$g = g_1 + g_2$ と分かれ，

$$g_2(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\substack{|\zeta - z_0| \geqslant 2\varepsilon \\ \zeta \in U}} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

より，$g_2(z)$ は $|z - z_0| < \varepsilon$ のとき z の正則函数．また $\zeta - z = w$ とおけば，

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\iint_U f_1(\zeta)\frac{d\zeta \cap d\bar{\zeta}}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} f_1(z)\frac{d\zeta \cap d\bar{\zeta}}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} f_1(z + w)\frac{dw \wedge d\bar{w}}{w} \end{aligned}$$

より，$g_1(z)$ は C^∞-可微分で，

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1(z)}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_1(z + w)\frac{dw \wedge d\bar{w}}{w} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} f_1(z + w)\frac{dw \wedge d\bar{w}}{w} \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} d\left(f_1(z + w)\frac{dw}{w}\right) \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\delta \to 0}\iint_{\Delta_\delta} d\left(f_1(z + w)\frac{dw}{w}\right) \end{aligned}$$

ここで，$\Delta_\delta = \{w \mid \delta < |w| < \rho, \rho \text{は十分大}\}$．Green-Stokes の定理により

$$\frac{\partial g_1(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\delta \to 0}\int_{C_\delta} f_1(z + w)\frac{dw}{w}$$

$(C_\delta = \{w \mid |w| = \delta\})$．$w = \delta e^{i\theta}$ とおくと，$dw/w = id\theta$ であるから

$$\frac{\partial g_1(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\pi}\lim_{\delta \to 0}\int_0^{2\pi} f_1(z + \delta e^{i\theta})d\theta = f_1(z).$$

従って z_0 の近傍では，$f_2 = 0$，$\frac{\partial g_2}{\partial \bar{z}} = 0$ より

$$\frac{\partial g(z)}{\partial \bar{z}} = f(z).$$

□

次に，U_r 上の φ が $\bar{\partial}\varphi = 0$ ならば任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$U_{r-\varepsilon}$ 上の ψ が存在して $\varphi = \bar{\partial}\psi$ であることをいう．φ は $(0, q)$ 型として一般性を失わず，

$$\varphi = \frac{1}{q!}\sum_{\beta_\lambda = 1}^{m} \varphi_{\beta_1 \ldots \beta_q} d\bar{z}_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{\beta_q}$$

とし，（m は φ に現われる dz_{β_λ} の β_λ の最大値）m に関する帰納法で示す．また，$V_r = \{z_k \mid |z_k| < r\} \subset \mathbb{C}$ とする．

（1）$m = q$ のとき，

$$\varphi = \varphi_{1\dots q}(z)d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_q = f(z)d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_q$$

（$f(z) = \varphi_{1\dots q}(z)$）となり，

$$0 = \bar{\partial}\varphi = \sum_{\beta=q+1}^{n} (\partial f/\partial \bar{z}_\beta)d\bar{z}_\beta \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_q$$

より，$\beta \geqslant q+1$ のとき $\partial f/\partial \bar{z}_\beta = 0$．従って $f(z_1, \dots, z_q, z_{q+1}, \dots, z_n)$ は $z_{q+1}, \dots, z_n$ については正則．f は z_1 については C^∞-可微分で，V_r で有界かどうかは分らないが，任意の $\varepsilon > 0$ について $V_{r-\varepsilon}$ では有界．そこで，

$$\psi = g(z)d\bar{z}_2 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_q, \qquad g(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint_{V_{r-\varepsilon}} \frac{f(\zeta, z_2, \dots, z_n)}{\zeta - z_1} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

とおくと，補題により $\partial g/\partial \bar{z}_1 = f(z_1, \dots, z_n)$ で $\beta > q$ ならば

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_\beta} = \iint_{V_{r-\varepsilon}} \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}_\beta} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z_1} = 0$$

だから，

$$\bar{\partial}\psi = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_\beta} d\bar{z}_\beta \wedge d\bar{z}_2 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_q = f d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_q = \varphi.$$

（2）$m = k-1$ のときを仮定し，$m = k$ のときを示す．

$\varphi = \frac{1}{q!}\sum_{\beta_\lambda=1}^{k} \varphi_{\beta_1\dots\beta_q}(z)d\bar{z}_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{\beta_q}$ に対し，

$$0 = \bar{\partial}\varphi = \frac{1}{q!}\sum_{\beta_\lambda=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \varphi_{\beta_1\dots\beta_q}(z)}{\partial \bar{z}_\beta} d\bar{z}_\beta \wedge d\bar{z}_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{\beta_q}.$$

従って，$\beta \geqslant k+1$ に対し，$\frac{\partial \varphi_{\beta_1\dots\beta_q}}{\partial \bar{z}_\beta} = 0$.

$$\varphi = \frac{1}{q!}\sum_{\beta_\lambda=1}^{k-1} \varphi_{\beta_1\dots\beta_q}(z)d\bar{z}_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{\beta_q} + \frac{1}{(q-1)!}\sum_{\beta_\lambda=1}^{k-1} \varphi_{k\beta_2\dots\beta_q} d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_{\beta_2} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{\beta_q}$$

と分けておく．

$$g_{\beta_2\dots\beta_q}(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint_{V_{r-\varepsilon}} \frac{\varphi_{k\beta_2\dots\beta_q}(z_1, \dots, z_{k-1}, \zeta, z_{k+1}, \dots, z_n)}{\zeta - z_k} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

とすると，$\frac{\partial g_{\beta_2\ldots\beta_q}}{\partial\bar{z}_k} = \varphi_{k\beta_2\ldots\beta_q}$ で，$\beta \geqslant k+1$ のとき $\frac{\partial g_{\beta_2\ldots\beta_q}}{\partial\bar{z}_\beta} = 0$．そこで，$\omega = \frac{1}{(q-1)!}\sum_{\beta_\lambda=1}^{k-1} g_{\beta_2\ldots\beta_q}(z)d\bar{z}_{\beta_2}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{\beta_q}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\omega &= \frac{1}{(q-1)!}\sum_{\beta_\lambda=1}^{k-1}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial g_{\beta_2\ldots\beta_q}(z)}{\partial\bar{z}_\beta}d\bar{z}_\beta\wedge d\bar{z}_{\beta_2}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{\beta_q}\\ &= \frac{1}{(q-1)!}\sum_{\beta_\lambda=1}^{k-1}\frac{\partial g_{\beta_2\ldots\beta_q}(z)}{\partial\bar{z}_{\beta_1}}d\bar{z}_{\beta_1}\wedge d\bar{z}_{\beta_2}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{\beta_q}\\ &\quad + \frac{1}{(q-1)!}\sum_{\beta_\lambda=1}^{k-1}\varphi_{k\beta_2\ldots\beta_q}d\bar{z}_k\wedge d\bar{z}_{\beta_2}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{\beta_q}\end{aligned}$$

となるから，

$$\varphi' = \varphi - \bar{\partial}\omega = \frac{1}{q!}\sum_{\beta_\lambda=1}^{k-1}\left(\varphi_{\beta_1\ldots\beta_q}(z) - q\frac{\partial g_{\beta_2\ldots\beta_q}(z)}{\partial\bar{z}_{\beta_1}}\right)d\bar{z}_{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{\beta_q}$$

は，$U_{r-\varepsilon}$ 上で定義された微分形式で，$\bar{\partial}\varphi' = 0$．帰納法の仮定から，$U_{r-2\varepsilon}$ 上で $\varphi' = \bar{\partial}\psi'$ なる ψ' が存在する．$\psi = \psi' + \omega$ とすれば，$U_{r-2\varepsilon}$ 上で，$\varphi = \bar{\partial}(\psi'+\omega) = \bar{\partial}\psi$．

以上により，$U^{(m)} = \{z \mid |z| < r - \frac{r}{m}\}$，$m = 2,3,4,\ldots$ とすれば，U_r 上で $\bar{\partial}\varphi = 0$ なる φ に対し，$U^{(m)}$ 上の ψ_m で $U^{(m)}$ 上で $\varphi = \bar{\partial}\psi_m$ なるものがあることが分った．以下，Dolbeault の補題の証明を完成させる．φ は，やはり $(0,q)$ 型として一般性を失なわない．

(1) $q \geqslant 2$ のとき．次のようにして，$\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_m,\ldots$ を，$z \in U^{(m)}$ に対しては $\psi_{m+1}(z) = \psi_m(z)$ なるようにとれる．

まず ψ_m を定める．$U^{(m)}$ 上 $\bar{\partial}(\psi_{m+1}-\psi_m) = \varphi - \varphi = 0$ より，$\psi_{m+1}-\psi_m = \bar{\partial}\omega$ が W で成りたつ．ただし $U^{(m-1)} \subset W \subset U^{(m)}$．$C^\infty$-可微分函数 $\rho(z)$ で，

$$\rho(z) = \begin{cases}1, & z \in U^{(m-1)}\\ 0, & z \notin W\end{cases}$$

なるものをとり

$$\psi^*_{m+1} = \begin{cases}\psi_{m+1} - \bar{\partial}(\rho\omega) & (W \text{ 上で})\\ \psi_{m+1} & (U^{(m+1)} - W \text{ 上で})\end{cases}$$

とおけば，$z \in U^{(m-1)}$ に対しては $\psi^*_{m+1}(z) = \psi_{m+1}(z) - \bar{\partial}\omega(z) = \psi_m(z)$ で，$\bar{\partial}\psi^*_{m+1} = \bar{\partial}\psi_{m+1} = \varphi$ であるから，ψ_{m+1} の代りに ψ^*_{m+1} をとれば $z \in U^{(m-1)}$ に対し $\psi_{m+1}(z) = \psi_m(z)$．

ψ_m を上のようにとっておけば，$\psi(z) = \lim_{m\to\infty}\psi_m(z)$ が存在して U_r 上 $\bar{\partial}\psi = \varphi$．

(2) $q = 1$ のとき．ψ_m は $(0,0)$ 型すなわち，函数であって，$\bar{\partial}(\psi_{m+1}-\psi_m) = \varphi - \varphi = 0$ より，$\psi_{m+1}-\psi_m$ は $U^{(m)}$ は正則．そこで，$U^{(m)}$ 上で

$$\psi_{m+1}(z) - \psi_m(z) = \sum_{k_\lambda=0}^{\infty} a_{k_1\ldots k_n} z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}$$

と展開しておき，十分大きい N をとり $P(z)=\sum_{k_\lambda=0}^{N} a_{k_1\dots k_n} z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}$ とおけば，$z\in U^{(m-1)}$ に対し，$|\psi_{m+1}(z)-\psi_m(z)-P(z)|<\frac{1}{2^m}$．そこで，$U^{(m+1)}$ 上，$\psi_{m+1}^*(z)=\psi_{m+1}(z)-P(z)$ とおけば，$\bar\partial\psi_{m+1}^*=\bar\partial\psi_{m+1}=\varphi$．以上により，$\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_m,\dots$ を，$z\in U^{(m-1)}$ に対しては $|\psi_{m+1}(z)-\psi_m(z)|<\frac{1}{2^m}$ なるようにとれる．従って任意の ℓ に対し，$U^{(\ell)}$ 上，

$$\psi(z)=\lim_{m\to\infty}\psi_m(z)=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=\ell+1}^{m}[\psi_n(z)-\psi_{n-1}(z)]+\psi_\ell(z)$$

が存在するから，U_r 上 $\psi(z)=\lim_{m\to\infty}\psi_m(z)$ が存在し，$z\in U_r$ はある $U^{(\ell)}$ に含まれ，$\sum_{n=\ell+1}^{\infty}(\psi_m(z)-\psi_{m-1}(z))$ は $U^{(\ell)}$ 上一様収束するから正則．故に，$\bar\partial\psi(z)=\bar\partial\psi_\ell(z)=\varphi(z)$．□

M を複素多様体，$\mathcal{A}^{p,q}$ を M 上の C^∞-可微分 (p,q) 形式の芽の層とすると，Dolbeault の補題により，$q\geqslant 1$ のとき

$$\mathcal{A}^{p,q-1}\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{A}^{p,q}\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{A}^{p,q+1}$$

は完全．また，$\mathcal{A}^{p,0}$ の元 $\varphi=\frac{1}{p!}\sum\varphi_{\alpha_1\dots\alpha_p}(z)dz_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz_{\alpha_p}$ に対しては，$\bar\partial\varphi=\frac{1}{p!}\sum_\beta\sum_{\alpha_\nu}\frac{\partial}{\partial\bar z_\beta}\varphi_{\alpha_1\dots\alpha_p}(z)d\bar z_\beta\wedge dz_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz_{\alpha_p}$ であるから $\bar\partial\varphi=0$ であるための条件は，

$\frac{\partial}{\partial\bar z_\beta}\varphi_{\alpha_1\dots\alpha_p}(z)=0$，すなわち $\varphi_{\alpha_1\dots\alpha_p}(z)$ が z の正則函数であること．

定義．$(p,0)$ 形式 $\varphi=\frac{1}{p!}\sum\varphi_{\alpha_1\dots\alpha_p}(z)dz_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz_{\alpha_p}$ で，各 $\varphi_{\alpha_1\dots\alpha_p}(z)$ が正則なものを正則 p 次形式（holomorphic p-form）とよぶ．（$p=0$ のときは正則函数）．

定義．$\Omega^p=M$ 上の正則 p 次形式の芽の層．（$\Omega^0=\mathcal{O}$ である．）

上に注意したことから，$0\to\Omega^p\to\mathcal{A}^{p,0}\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{A}^{p,1}$ は完全で，$\mathcal{A}^{p,q}$ は fine sheaf であるから

定理 9.1．

$$0\to\Omega^p\to\mathcal{A}^{p,0}\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{A}^{p,1}\xrightarrow{\bar\partial}\cdots\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{A}^{p,q}\to\cdots\to\mathcal{A}^{p,n}\to 0$$

は Ω^p の fine resolution である（$n=\dim M$）．とくに

$$0\to\mathcal{O}\to\mathcal{A}^{0,0}\to\mathcal{A}^{0,1}\to\cdots\to\mathcal{A}^{0,q}\to\cdots\mathcal{A}^{0,n}\to 0$$

は $\mathcal{O}$ の fine resolution.

定理 9.2．（Dolbeault）

$$H^q(M,\Omega^p)\cong\frac{H^0(M,\bar\partial\mathcal{A}^{p,q-1})}{\bar\partial H^0(M,\mathcal{A}^{p,q-1})}$$
$$H^q(M,\mathcal{O})\cong\frac{H^0(M,\bar\partial\mathcal{A}^{0,q-1})}{\bar\partial H^0(M,\mathcal{A}^{0,q-1})},\qquad(q\geqslant 1).$$

ここで，

$$H^0(M,\mathcal{A}^{p,q}) = M \text{ 上の } C^\infty\text{-可微分 } (p,q) \text{ 形式全体の作る線型空間}$$
$$\cup$$
$$H^0(M,\bar\partial\mathcal{A}^{p,q-1}) = \{\varphi\in H^0(M,\mathcal{A}^{p,q}) \mid \bar\partial\varphi = 0\}.$$

特に $M = U =$ 多重円板のときは Dolbeault の補題から $H^0(U,\bar\partial\mathcal{A}^{p,q-1}) = \bar\partial H^0(U,\mathcal{A}^{p,q-1})$．従って定理 9.2 の系として

$$H^q(U,\Omega^p) = 0 \qquad (q \geqslant 1).$$

§10. ベクトルバンドル

M を複素多様体とする．

定義． M 上の m 次元複素解析的（または可微分）ベクトルバンドル（holomorphic (differentiable) vector bundle）(F,ϖ) とは，複素（または可微分）多様体 F と正則（または可微分）写像 $\varpi : F\to M$ で次の条件をみたすものをいう．

1）ϖ：全射，

2）十分細かい被覆 $M = \bigcup_{j\in I} U_j$ について．$\varpi^{-1}(U_j) = U_j\times\mathbb{C}^m$ で，$\varpi : U_j\times\mathbb{C}^m\to U_j$ は射影，

3）$(z,\zeta_j)\in U_j\times\mathbb{C}^m$ と $(z,\zeta_k)\in U_k\times\mathbb{C}^m$ は，$\zeta_j = f_{jk}(z)\zeta_k$ のとき，かつその時に限り同じ点を表わす．ここで $f_{jk}(z) = (f^\lambda_{jk\nu}(z))_{\lambda,\nu=1,\dots,m}$ は $z\in U_j\cap U_k$ の行列値正則（または可微分）函数で，詳しく書くと，$\zeta_j = (\zeta^1_j,\dots,\zeta^\lambda_j,\dots,\zeta^m_j)$ のとき $\zeta^\lambda_j = \sum_{\nu=1}^m f^\lambda_{jk\nu}(z)\zeta^\nu_k$．$\det(f^\lambda_{jk\nu}(z))\neq 0$．

特に $m=1$ のとき，F を複素直線バンドル（complex line bundle）とよぶ．

以下 (F,ϖ) を単に F で表わすことが多い．$\varpi^{-1}(z)\cong\mathbb{C}^m$ はベクトル空間，これを z 上の F のファイバー（fiber）とよぶ．また，$\{f_{jk}(z)\}$ を変換函数系（system of transition functions）とよぶ．$z\in U_i\cap U_j\cap U_k$ に対しては，$f_{ik}(z) = f_{ij}(z)f_{jk}(z)$ である．

定義． M 上の二つのベクトルバンドル (F,ϖ) と (G,π) が，複素解析的に（または可微分）同値 $(F,\varpi)\sim(G,\pi)$ であるとは，F から G の上への双正則（または微分同型）写像 h が存在して

(1) $\pi h = \varpi$,

(2) $h : \varpi^{-1}(z)\to\pi^{-1}(z)$ は線型．

以下，F と G が同値のとき F と G とは同一視して考える．

∘ F と G とが同値となるための条件

M の被覆を一つきめて，F は $\{f_{jk}(z)\}$，G は $\{g_{jk}(z)\}$ で定義されているとする．F と G が同値であるとし，h を上の定義の写像とする．h を $\varpi^{-1}(U_j) = U_j\times\mathbb{C}^m$ から

$\pi^{-1}(U_j) = U_j \times \mathbb{C}^m$ の上への写像とみると，$h : (z, \zeta_j) \mapsto (z, \xi_j) = (z, h_j(z)\zeta_j)$（ただし，$h_j(z)$ は，行列値正則（または C^∞-可微分）函数で $\det h_j(z) \neq 0$）と書ける．$\zeta_j = f_{jk}(z)\zeta_k$ すなわち $(z, \zeta_j) = (z, \zeta_k)$ のときは $(z, h_j(z)\zeta_j) = (z, h_k(z)\zeta_k)$ より，$h_j(z)\zeta_j = g_{jk}(z)h_k(z)\zeta_k$，従って $h_j(z)f_{jk}(z)\zeta_k = g_{jk}(z)h_k(z)\zeta_k$．故に $h_j(z)f_{jk}(z) = g_{jk}(z)h_k(z)$．逆にこのような $\{h_j(z)\}$ があれば F と G は同値．以上をまとめて，

F と G とが同値であるための必要十分条件は，各 U_j 上に $h_j(z)$ $(\det h_j(z) \neq 0)$ があって，$z \in U_j \cap U_k$ に対し，$g_{jk}(z) = h_j(z)f_{jk}(z)h_k^{-1}(z)$ となること．

定義．M 上のベクトルバンドル F が $M \times \mathbb{C}^m$ と複素解析（または可微分）的に同値のとき，F は複素解析（または可微分）的に自明（trivial）という．

$\mathcal{O}^*$ を M 上の零をもたぬ正則函数芽の層（ただし各茎の加群演算は乗法とする）とする：

$$\mathcal{O}^*_x = \left\{ f \,\middle|\, \begin{array}{l} f = f(z) \text{ は収束巾級数で，} x \text{ を原点とする} \\ \text{局所座標をとると } f(0) \neq 0. \end{array} \right\}.$$

一方複素直線バンドル F は変換函数系 $\{f_{jk}(z)\}$ で定められ，$f_{jk} \in \Gamma(U_j \cap U_k, \mathcal{O}^*)$，$f_{ik}(z) = f_{ij}(z)f_{jk}(z)$．従って $\{f_{jk}\}$ は $\mathcal{O}^*$ の 1-cocycle に他ならない．また $g_{jk} = h_j f_{jk} h_k^{-1}$ は $\{g_{jk}\}\{f_{jk}\}^{-1} = \delta\{h_j\}$ と同じことであるから，直線バンドルの同値類は $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ の元と 1 対 1 に対応する．$H^1(M, \mathcal{O}^*)$ を M 上の複素直線バンドル類群（the group of complex line bundles over M）とよぶ．

層の完全列

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 0$$

（ただし，$\mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$ は，$f(z) \in \mathcal{O}$ に対し，$e^{2\pi\sqrt{-1}f(z)} \in \mathcal{O}^*$ を対応させる写像）

よりコホモロジー群の完全列

$$\cdots \to H^1(M, \mathcal{O}) \to H^1(M, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta^*} H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \mathcal{O}) \to \cdots$$

を得るが，

定義．直線バンドル $F \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$ に対し，$C(F) = \delta^*(F)$ を F の Chern 類（Chern class）とよぶ．

$\mathcal{D}$ を M 上の C^∞-可微分函数芽の層とすると，層の可換完全列

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D}^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \circlearrowright & & \circlearrowright & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{O}^* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

より，コホモロジー群の可換完全列

$$
\text{(D)}\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H^1(M,\mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(M,\mathcal{O}^*) & \longrightarrow & H^2(M,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(M,\mathcal{O}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & H^1(M,\mathcal{D}) & \longrightarrow & H^1(M,\mathcal{D}^*) & \longrightarrow & H^2(M,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(M,\mathcal{D}) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}
$$

を得るが，$\mathcal{D}$ は fine sheaf だから $q \geqslant 1$ のとき $H^q(M,\mathcal{D}) = 0$．従って (D) は

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & H^1(M,\mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(M,\mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta^*} & H^2(M,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(M,\mathcal{O}) & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \| & & & \\
 & 0 & \longrightarrow & H^1(M,\mathcal{D}^*) & \xrightarrow{\sim} & H^2(M,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 &
\end{array}
$$

となり，$F \in H^1(M,\mathcal{O}^*)$ に対し，μF と $c(F)$ は 1 対 1 に対応する．従って

命題．$c(F)$ は複素解析的直線バンドル F の可微分同値類をあらわす．特に F が可微分的に自明であるためには $c(F) = 0$ が必要十分．

なお，M 上の連続函数芽の層 $\mathcal{C}$ も fine sheaf だから，同じ議論をくりかえせば，$c(F)$ は F の位相的同値類を与えているといってよい．

注意．$H^1(M,\mathcal{D}^*) = H^1(M,\mathcal{C}^*)\ (= H^2(M,\mathbb{Z}))$.

さて，(F,ϖ) を M 上の複素解析的（または可微分）ベクトルバンドルとする．

定義．U が M の開集合のとき，U 上の F の正則（または可微分）切断（holomorphic (differentiable) section）φ とは，正則（または可微分）写像 $\varphi : U \to F$ で，$\varpi\varphi(z) = z$ なるものをいう．

このとき φ は $U \cap U_j$ の上では

$$\varphi : z \mapsto \varphi(z) = (z, \varphi_j^1(z), \ldots, \varphi_j^m(z))$$

というベクトル値函数で表わされ，$z \in U_j \cap U_k$ のとき，

$$\varphi_j^\lambda(z) = \sum_{\nu=1}^m f_{jk\nu}^\lambda(z)\varphi_k^\nu(z).$$

定義．M 上の F の正則（または可微分）切断の芽の層を $\mathcal{O}(F)$（または $\mathcal{D}(F)$）で表わす．

以下 F は複素解析的ベクトルバンドルとする．

定義．U 上のF 係数 (p,q) 型微分形式（(p,q)-form with coefficient in F）φ とは，各 $U \cap U_j$ 上では m 個の (p,q) 形式 $\varphi(z) = (\varphi_j^1(z), \ldots, \varphi_j^m(z))$ であって，$\varphi_j^\lambda = \sum_{\nu=1}^m f_{jk\nu}^\lambda(z)\varphi_k^\nu(z)$ なるもの．

定義．M 上の F 係数 C^∞-可微分 (p,q) 形式の芽の層を $\mathcal{A}^{p,q}(M)$ と書く．$\mathcal{A}^{0,0}(F) = \mathcal{D}(F)$ である．

定義． $\varphi \in \Gamma(U, \mathcal{A}^{p,q}(F))$ に対し，$\bar{\partial}\varphi$ を各 $U \cap U_j$ 上で $\bar{\partial}\varphi = (\bar{\partial}\varphi_j^1(z), \ldots, \bar{\partial}\varphi_j^m(z))$ と定める．$\bar{\partial} f_{jk\nu}^{\lambda}(z) = 0$ より，$\bar{\partial}\varphi_j^{\lambda}(z) = \sum f_{jk\nu}^{\lambda}(z)\bar{\partial}\varphi_k^{\nu}(z)$．従って $\bar{\partial}\varphi \in \Gamma(U, \mathcal{A}^{p,q+1}(F))$ である．

注意． $d\varphi, \partial\varphi$ は定義できない．

定理 10.1．

$$
\begin{aligned}
0 \to \mathcal{O}(F) \to \mathcal{A}^{0,0}(F) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{0,1}(F) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \\
\cdots \to \mathcal{A}^{0,q-1}(F) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{0,q}(F) \to \cdots \to \mathcal{A}^{0,n}(F) \to 0
\end{aligned}
$$

は $\mathcal{O}(F)$ の fine resolution．

定理 10.2．

$$H^q(M, \mathcal{O}(F)) \cong \frac{H^0(M, \bar{\partial}\mathcal{A}^{0,q-1}(F))}{\bar{\partial}H^0(M, \mathcal{A}^{0,q-1}(F))}, \qquad (q \geqslant 1)$$

§11. 無限小変形

再び複素解析族 $(\mathcal{M}, B, \varpi)$ を考える．$\mathcal{M}$，B は複素多様体で，ϖ は $\mathcal{M}$ から B の上への正則写像かつ

1）$M_t = \varpi^{-1}(t)$ $(t \in B)$ はコンパクト，

2）rank Jacobian $\varpi = \dim B = m$

であった．（$\dim M_t = n$，$\dim \mathcal{M} = m + n$）

この節では，B の局所座標，$t = (t_1, \ldots, t_\lambda, \ldots, t_m)$ に対し $\frac{\partial M_t}{\partial t_\lambda}$ を定義することを考える．

まず，可微分多様体 M を考える．$p \in M$ に対し，$(x^1, \ldots, x^n)$ を p の近傍での局所座標とすれば，p における M の接空間 $T_p(M) = \{v \mid v = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial x_i}\}$ であった．M が複素多様体のときは，$(z_j^1, \ldots, z_j^n)$ を U_j 上の複素局所座標とすると，$p \in U_j$ における M の接ベクトル v は

$$v = \sum_{\alpha=1}^n \mathcal{A}_\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^n b_\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}$$

の形にあらわせる．

定義． $T_p(M) = \{v \mid v = \sum_{\alpha=1}^n \zeta^\alpha \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}, \zeta^\alpha \in \mathbb{C}\}$ を M の p における正則接空間（holomorphic tangent space）といい，$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$ を M の正則接バンドル（holomorphic tangent bundle）という．

$T(M)$ は複素解析的ベクトルバンドルであることは次のようにしてわかる：

$\varpi : T_p(M) \to p$ と定めると，

$$\varpi^{-1}(U_j) = \bigcup_{p \in U_j} T_p(M) = \left\{(p, v) \,\middle|\, v = \sum_{\alpha=1}^n \zeta_j^\alpha \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}, \zeta_j^\alpha \in \mathbb{C}\right\}$$

であるから，(p,v) に $(p,\zeta_j^1,\dots,\zeta_j^n)$ を対応させると，$\varpi^{-1}(U_j)=U_j\times\mathbb{C}^n$．また $p\in U_j\cap U_k$ に対しては，$v=\sum\zeta_j^\alpha(\partial/\partial z_j^\alpha)=\sum\zeta_k^\beta(\partial/\partial z_k^\beta)$ より，(p,ζ_j) と (p,ζ_k) は

$$\zeta_j^\alpha=\sum_{\beta=1}^n\frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_k^\beta}\zeta_k^\beta$$

のとき同じであることが分る．以上から，$T(M)$ は，$\{f_{jk}(z)\}$，（$f_{jk}=(f_{jk\beta}^\alpha(z))$，$f_{jk\beta}^\alpha(z)=\partial z_j^\alpha/\partial z_k^\beta$）で定められた複素解析的ベクトルバンドルである．

定義． $\Theta=\mathcal{O}(T(M))$.

W を M の開集合とし，$\theta=\Gamma(W,\Theta)$ とすると $W\cap U_j$ 上で，$\theta(z)=\sum_{\alpha=1}^n\theta_j^\alpha(z)\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}$ で，$\theta_j^\alpha(z)$ は $z\in W\cap U_j$ の正則函数となる．

定義． θ を W 上の<u>正則ベクトル場</u>という．

さて，$(\mathcal{M},B,\varpi)$ を複素解析族とし，任意の点 $0\in B$ をとり，$(t_1,\dots,t_m)$ を 0 の近傍 N 上の局所座標とする．以下 N と $(t_1,\dots,t_m)$ は固定する．また $N=\{(t_1,\dots,t_m)\mid |t_\lambda|<\varepsilon\}$ としておく．§4 にのべたように $\varpi^{-1}(N)=\bigcup_{j\in I}\mathcal{U}_j$，$\mathcal{U}_j=\{(z_j,t)\mid z_j=(z_j^1,\dots,z_j^n),|z_j^\alpha|<1,t\in N\}$，としてよく，$U_j=\{z_j\mid |z_j^\alpha|<1\}$ とすれば $\mathcal{U}_j=U_j\times N$ である．$(z_j,t)\in\mathcal{U}_j$ と $(z_k,t)\in\mathcal{U}_k$ が同じ点を表わす条件を $z_j^\alpha=f_{jk}^\alpha(z_k,t)$，（$f_{jk}^\alpha(z_k,t)$ は $(z_k,t)\in\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_k$ の正則函数）と表わしておく．

$M_t=\varpi^{-1}(t)=\bigcup_{j\in I}\mathcal{U}_j\cap M_t=\bigcup_{j\in I}U_j\times t=\bigcup_{j\in I}U_j$ で，$z_j\in U_j$ と，$z_k\in U_k$ は，$z_j^\alpha=f_{jk}^\alpha(z_k,t)$ のとき同一視する．すなわち $M_t=\bigcup U_j$．各 $U_j=\{z_j\mid |z_j^\alpha|<1\}$ は t によらず，U_j と U_k のはり合せ方が t による．従って $\frac{\partial M_t}{\partial t_\lambda}$ は $\frac{\partial f_{jk}^\alpha(z_k,t)}{\partial t_\lambda}$ から作られるはず．そこで，$\theta_{jk}=\theta_{jk}(t)=\theta_{jk}(z,t)=\sum\frac{\partial f_{jk}^\alpha(z_k,t)}{\partial t_\lambda}\frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}$ とすれば，$\theta_{jk}\in\Gamma(U_j\cap U_k,\Theta_t)$ で，一方

$$z_i^\alpha=f_{ik}^\alpha(z_k,t)=f_{ij}^\alpha(z_j,t)=f_{ij}^\alpha(f_{jk}(z_k,t),t)$$

より，$\frac{\partial f_{ik}^\alpha}{\partial t_\lambda}=\frac{\partial f_{ij}^\alpha}{\partial t_\lambda}+\sum_{\beta=1}^n\frac{\partial f_{ij}^\alpha}{\partial z_j^\beta}\frac{\partial f_{jk}^\beta}{\partial t_\lambda}$．従って $U_i\cap U_j\cap U_k$ 上，

$$\begin{aligned}\theta_{ik}&=\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial f_{ik}^\alpha}{\partial t_\lambda}\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}=\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial f_{ij}^\alpha}{\partial t_\lambda}\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}+\sum_{\alpha,\beta=1}^n\frac{\partial f_{ij}^\alpha}{\partial z_j^\beta}\frac{\partial f_{ik}^\beta}{\partial t_\lambda}\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}\\&=\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial f_{ij}^\alpha}{\partial t_\lambda}\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}+\sum_{\beta=1}^n\frac{\partial f_{jk}^\beta}{\partial t_\lambda}\frac{\partial}{\partial z_j^\beta}=\theta_{ij}+\theta_{jk}\end{aligned}$$

故に θ_{ik} の集まり $\{\theta_{ik}\}$ は Θ_t の 1-cocycle であって，$\{\theta_{ik}\}$ のコホモロジー類 $\in H^1(M_t,\Theta_t)$.
（Θ_t は M_t 上の正則ベクトル場の芽の層 $=\mathcal{O}(T(M_t))$）.

定義． $\{\theta_{jk}\}$ のコホモロジー類を $\frac{\partial M_t}{\partial t_\lambda}$ と書く．また，$\frac{\partial}{\partial t}=\sum c_\lambda\frac{\partial}{\partial t_\lambda}\in T_t(B)$ が与えられたとき，$\frac{\partial M_t}{\partial t}=\sum c_\lambda\frac{\partial M_t}{\partial t_\lambda}$ を M_t の $\frac{\partial}{\partial t}$ 向きの<u>無限小変形</u>（<u>infinitesimal deformation</u>）とよぶ．

◎$\frac{\partial M_t}{\partial t}$ は被覆 $\bigcup \mathcal{U}_j$ と局所座標 z_j^α の選び方によらない.

証明. 1）$\bigcup \mathcal{U}_j$ を細分しても $\{\theta_{jk}\}$ のコホモロジー類は変らない.（$\mathcal{U}_j = \bigcup_\lambda \mathcal{U}_j \cap \mathcal{V}_\lambda$ のとき，$\mathcal{U}_j \cap \mathcal{V}_\lambda$ 上の座標を $z_{j\lambda}^\alpha = z_j^\alpha$ ととればよい.）

2)$\bigcup_{j\in I} \mathcal{U}_j$ を変えないで, 座標を変える.（(z_j, t) の他の座標 (w_j, t) をとると, $z_j^\alpha = h^\alpha(w_j, t)$ は (w_j, t) の正則函数. $z_j^\alpha = f_{jk}^\alpha(z_k, t)$，$w_j^\beta = g_{jk}^\beta(w_k, t)$ とし，z_j，w_j からきまる 1-cocycle をそれぞれ $\{\theta_{jk}\}$，$\{\hat{\theta}_{jk}\}$ とすれば,

$$\theta_{jk} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_{jk}^\alpha}{\partial t_\lambda} \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}, \qquad \hat{\theta}_{jk} = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial g_{jk}^\beta}{\partial t_\lambda} \frac{\partial}{\partial w_j^\beta}$$

である．一方

$$f_{jk}^\alpha(h_k(w_k, t), t) = z_j^\alpha = f_{jk}^\alpha(z_k, t) = h_j^\alpha(g_{jk}(w_k, t), t)$$

の両辺を t_λ で微分すると,

$$\frac{\partial f_{jk}^\alpha}{\partial t_\lambda} + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_k^\beta} \frac{\partial h_k^\beta}{\partial t_\lambda} = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial z_j^\alpha}{\partial w_j^\beta} \frac{\partial g_{jk}^\beta}{\partial t_\lambda} + \frac{\partial h_j^\alpha}{\partial t_\lambda}$$

となるが，さらに両辺を z_j^α で微分して α について加え合せると,

$$\theta_{jk} + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial h_k}{\partial t_\lambda} \frac{\partial}{\partial z_k^\beta} = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial g_{ik}^\beta}{\partial t_\lambda} \frac{\partial}{\partial w_j^\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial h_j^\alpha}{\partial t_\lambda} \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}$$

となる．そこで

$$\eta_j = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial t_\lambda} \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} \in \Gamma(U_j, \Theta_t)$$

とすれば，$\theta_{jk} + \eta_k = \hat{\theta}_{jk} + \eta_j$ すなわち

$$\{\hat{\theta}_{jk}\} - \{\theta_{jk}\} = \delta\{\eta_j\}$$

故に $\{\theta_{jk}\}$ のコホモロジー類は座標によらない.

歴史.（1957）. $\partial M_t / \partial t_\lambda$ が複素構造の微分と考えられるようになった理由.

M をコンパクト複素多様体，$\Theta = \mathcal{O}(T(M))$ とし，$\dim H^1(M, \Theta)$ と M が含む任意定数（パラメタ）の数を比べる.

（1）$M = \mathbb{P}^n$．パラメタの数は 0，一方 $\dim H^1(M, \Theta) = 0$.

（2）$M = \mathbb{C}^n / G$（複素トーラス）

$$G = \left\{ \omega \;\middle|\; \omega = \sum_{j=1}^{2n} m_j \omega_j, m_j \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad \omega_j = (\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_n}),$$

M は，$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{1,1}, & \dots, & \omega_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{2n,1}, & \dots, & \omega_{2n,n} \end{pmatrix}$ によるが，$\mathbb{C}^n$ の座標系を変換すると，

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{1,1} & \dots & \omega_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{n,1} & \dots & \omega_{n,n} \\ 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

となり，パラメタの数は n^2．一方 $\dim H^1(M,\Theta) = n^2$．

（3）$M = Q_{p_m} \dots Q_{p_2} Q_{p_1}(\mathbb{P}^2)$

各 p_m は 2 つのパラメタにより，$\mathbb{P}^2$ の射影変換で任意の 4 点は任意の 4 点にうつるから，パラメタの数は $2(m-4)$．一方

$$\dim H^1(M,\Theta) = \begin{cases} 0, & m \leq 4 \\ 2(m-4), & m > 4. \end{cases}$$

（4）$\mathbb{P}^{n+1}$ の超曲面．

$M^n = \{z \mid z = (z_0, z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{P}^{n+1}, f(z) = 0\}$．$f(z)$ は h 次の同次多項式．$n \geqslant 2$，$h \geqslant 3$ とする．f の係数の数 $= \binom{n+1+h}{h}$ で，z の座標変換を考慮に入れると，M^n のパラメタの数は，$\binom{n+1+h}{h} - (n+2)^2$．一方

$$\dim H^1(M^n,\Theta) = \begin{cases} \binom{n+1+h}{h} - (n+2)^2, & (n,h) \neq (2,4) \\ 20, & n = 2, h = 4. \end{cases}$$

$n = 2$，$h = 4$ のときのパラメタ数は，$\binom{7}{4} - 16 = 19$ であって $\dim H^1(M^n,\Theta)$ より 1 少ないが，M^2 の変形で $\mathbb{P}^3$ に入らないものがあることが分っている（中野）．

以上の例でも分る通り，M のパラメタ数と $\dim H^1(M,\Theta)$ は大抵の場合一致し，$\partial M_t/\partial t_\lambda$ が微分を表わしていると考えられる．

予想．$\dim H^1(M,\Theta) = M$ の含むパラメタの数．

実は Mumford が 3 次元の場合，Kas が 2 次元の場合に反例を作ったが，一般にこの予想の反例を作るのは難しい．