近代ホモトピー論（1940年代から1960年代まで）

土屋昭博 述
中井洋史 記

Contents

はじめに

この小冊子は、私が 2008 年 4 月より 7 月にかけて東大数理で行ったホモトピー論の講義に関する記録です。講義の目的はシラバスに書いたように、1940 年代から 1960 年代にかけて展開されたホモトピー論の重要な概念のいくつかを振り返る事によって、「非可換ホモロジー代数」として今や数学のみならず現代物理学を展開するための新たな言葉として重要になりつつあるホモトピー代数を学習または展開するための一助とする事です。

講義の内容や展開の仕方は、講義担当者の個人的考え方や趣味を反映したものになっています。その内容は半期の講義としては多岐にわたっており、厳密さを欠いたり舌足らずになってしまっている所が少なくありません。概念の動機付け・基本的結果・展開のあらすじ・重要な計算や例などについては物語性を重要視して展開したので、ホモトピー論に興味を持っている多くの学生や研究者に楽しんで頂けるのではないかと思います。

この小冊子は講義ノートであり、その内容はほぼ講義に忠実に従っています。また、同じ事が何回も出てきます。これは講義担当者の講義スタイルであり、講義のライブ感を表すためにそのまま残しました。また、いろいろな概念をきちんと数学的に定義せずに展開したり、証明を概略で済ませたり省いたりしている箇所もありますが、この小冊子の目的はホモトピー論がどんなものであるか、何を扱って来たかを大まかに伝える事であり、詳細な定義や証明は適切な文献を参照する事を勧めます。この小冊子のみで細部を詰めてホモトピー論を正確に学習することを試みるのは、労多くして益が少ないでしょう。

ホモトピー論の関手的な扱いをキーワードとして Quillen のモデル圏が登場したことで、1970 年以降ホモトピー論が「非線形ホモロジー代数」として現代化され、今でも発展し続けていますが、この小冊子では Quillen のモデル圏の登場以前を扱っているのでモデル圏が直接表に出てくることはありません。現在発展中のこれらの理論について勉強したい方は、誰か専門家（例えば南範彦氏）に相談することをお勧めします。

最後に、講義担当者の乱暴な講義を非常な努力を払ってこのような形に仕上げて頂いた中井洋史さんには感謝いたします。また、講義ノートを読んでいくつかのコメントを頂いた加藤晃史さん、橋本義武さん、南範彦さんにも感謝します。

2009 年 4 月
土屋 昭博

土屋先生が駒場でホモトピー論の講義をされるという情報をメーリングリストから得たのが 4 月 1 日でした。講義の時間帯は幸い本務校の予定が空いていたので、第 1 回目の講義（4 月 8 日）に参加してその様子を南先生にお知らせしたところ、「では講義ノートとしてまとめてみてはどうですか？」と提案を頂いたのがこの講義録作成のきっかけです。

この講義録を作成するにあたり、東大の加藤晃史先生には自筆の講義ノートを提供して頂き、私のノートで足りない箇所を補うのに活用させて頂きました。さらに、加藤先生にはこの講義録に含まれる全ての図も作成して頂きました。また、阪市大の橋本義武先生, 名工大の南範彦先生, 千葉大の梶浦宏成先生には、御多忙であるにも関わらず数多くの助言を頂きました。その他にも多くの研究者や院生の方々にミスプリント等に関する助言を頂きました。お忙しい中御助力頂いた皆様方に対して、ここに厚く御礼申し上げます。

私の力不足で講義の臨場感や明快さを残せなかったのではとの懸念は残りますが、位相幾何学が大発展を遂げた 1960 年代に研究に従事された「時代の生き証人」である土屋先生の講演記録を、多くの方の御協力と叱咤激励によって何とかまとめることが出来て安堵しています。

最後に、改めてこの講義録の作成機会を与えて頂いた土屋先生と南先生に感謝致します。

2009 年 4 月
中井 洋史

IPMU lectures in Komaba（シラバス）

講義題名：　ホモトピー論（1970 年まで）

日時：　2008 年 4 月～7 月、火曜日 10:30～12:00 (4 月 8 日開講)

場所：　東京大学数理科学研究科 002 号室

担当者：　土屋昭博（IPMU）

内容：　近年ホモトピー論は位相幾何学者の手を離れ現代数学の随所でその力を発揮し始めています。更には、数理物理学の分野でもその考え方が利用され始めています。しかし、その考え方の習得はトポロジーにどっぷり浸かった人達以外には必ずしも容易ではありません。

この講義では、上記の発展を横目で見ながら、1940 年代～1960 年代の発展の主要部分を講義担当者の独断と偏見で切り出し、講義します。このことにより、受講者がホモトピー論の考え方を手に入れることが出来ることを願っています。講義は、概念・例・命題についてはきちんとした形で定式化します。証明については概略のみを述べます。

1970 年代以降はホモトピー論が近代化されました。これは Quillen による model category にその基礎をおいています。model category に基礎をおくとホモトピー論における色々な操作が機能的に出来るようになりました。このことにより、Quillen 以降の現代ホモトピー論は advanced Homological algebra の役割をなし，先に述べたような現代数学の随所で使われるようになりました。

講義担当者はこれらについては入門者であり，力不足のため講義することが出来ませんが，気になっていることは講義中お話しするつもりです。講義を受講するにあたっては、ホモロジー論、コホモロジー論の初歩的な部分およびホモロジー代数の感覚があることが望ましいです。

講義予定：

(1) ホモトピー論の前史（Hurewicz の定理, Hopf の定理, Freudenthal の懸垂定理）

(2) Eilenberg-Maclane 空間と Postnikov system

(3) Steenrod 代数の決定

(4) 球面のホモトピー論に関するセールの定理

(5) 有理ホモトピー論

(6) 安定ホモトピー圏とアダムスのスペクトル列

(7) 複素同境理論と Quillen の定理

(8) その他

参考書：

(1) J.P.May, A Concise Course in Algebraic Topology，The University of Chicago Press
`http://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf`

(2) Douglas Ravenel, Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres, The second edition, AMS Chelsea Series

`http://www.math.rochester.edu/u/faculty/doug/mu.html`

(3) Mark Hovey, Model Category, AMS Mathematical Surveys and Monographs

(4) Gelfand and Manin, Methods of Homological Algebra, Springer

(5) 南範彦, ホモトピー論：単体的集合からその彼方へ, 数理科学 2008 年 3 月号

Chapter 1

ホモトピー論の基礎概念

1　代数的位相幾何学の基本的な考え方（この講義の目的と予定）

代数的位相幾何学では、ホモトピー群や一般コホモロジー群を関手

$$（空間のホモトピー圏）\Longrightarrow（代数的構造）$$

と捉えて、様々な空間を代数の世界で調べる。そのために様々な代数のテクニックが用いられる。

<u>代数的位相幾何の特徴</u>

- 研究対象：　一般次元の図形や空間など
- 研究手法：　代数的な圏への関手を用いる
- 計算能力：　非常に高い

特に、代数的位相幾何学から誕生したホモロジー代数は

（ホモロジー代数）＝（Advanced linear algebra）

だと考えられ、1950〜60 年代を通じて Serre, Grothendieck, 佐藤幹夫等の貢献により代数幾何学や代数解析の中で磨きをかけられ発展を遂げた。

近年、代数的位相幾何学、とりわけホモトピー論的な考え方は応用範囲を更に拡げ、現代数学の随所で利用されるだけでなく超弦理論を中心とした数理物理学の研究などにも利用され始めており、数学と物理の相互作用を記述するための重要な概念となりつつある。

ホモトピー論的な考え方の応用範囲を従来以上に拡げるためには、ホモロジー代数の概念を

「ホモトピー代数（＝ non-linear ホモロジー代数）」

へと拡張する必要がある。ホモトピー代数の形を整え発展させる事は現代数学の重要な課題であり（詳細は南氏の記事 [22] を参照せよ）、このような観点からのホモトピーの現代化は 1960 年代後半から始まった。先駆的な仕事で特に重要なものは D.Quillen による以下の仕事 (1968-1969 年頃) である：

- ホモトピー代数（Lecture Note in Math. [24]）

- 有理ホモトピー論（Ann. of Math. [25]）

Quillen のこれらの仕事は、最近様々な研究者によってモデル圏（Model category）の理論として見通しよく整備された。

$$\text{（モデル圏）} \xRightarrow[\text{局所化}]{} \text{（ホモトピー圏）}$$

モデル圏ではどのような空間達を考えているかにあまり依らない（汎用性が高い）ので、以下のようなメリットがある：

- 扱っている対象を非常に広い意味にとれる（代数的, 非可換, 数論的, 物理的...）
- 理論を functorial に構成出来る

この講義では、これらの Quillen の仕事と最近の動向について詳細には論じることはせず、Quillen の仕事以前の以下の内容について解説と概説をおこなうことを目的とする：

- 1940〜1960 年代のホモトピー論の発展についての解説をおこなう
- それ以降のホモトピー論の一部について、個人的趣味で話す
- モデル圏の公理が理解出来るようになるために、計算の具体例などを中心に話す

位相不変量（すなわち空間の圏から代数的な圏への関手）として、主にホモロジー群とホモトピー群を扱う。ホモロジー群（ここでは特異ホモロジー群を扱う）は定義するのが難しく計算は容易であるが、一方ホモトピー群は定義するのは易しいが計算が大変難しい。双方の長所を活かしながらホモロジー群とホモトピー群の相互の関係を調べることによって、空間の性質をより詳しく調べることが出来る。

1950 年代初めにフランスの J.P.Serre, H.Cartan などによって、現代的なホモトピー論において欠くことが出来ない以下の手法が導入された（これが「現代ホモトピー論」の始まりである）：

- Fibration を使う（path 空間, 弦模型）
- Eilenberg-MacLane 空間 $K(\pi, n)$ を使う（ホモロジーとホモトピーを結ぶ Key Person）
- Serre の class $\mathscr{C}$ 理論
- Postnikov 系

これらの道具立ては、いずれも Leray-Serre のスペクトル系列の計算に乗せることが出来る。特に、これらを通じて Eilenberg-MacLane 空間は近代ホモトピー論の主役に躍り出た。その一端はこの講義でも紹介する。

大まかに言って、第 2 章のトピックまでが 1940 年代までの話で、第 3 章のトピックからが 1950 年代初頭のフランス学派に端を発する近代的ホモトピー論の始まりについてのものである。第 3 章から第 4 章で 1950 年代前半までのホモロジー群とホモトピー群の相互関係を述べる。第 5 章以降では、ホモトピー圏の易しい例として「有理ホモトピー論」および「安定ホモトピー論」を論じる。

また、この講義では以下の話題には触れない。

- Morse 理論　(Bott の仕事)
- 微分トポロジー
- 等質空間（Grassmann）のコホモロジー, Borel-Hirzebruch の理論
- Atiyah-Singer の定理

2 Cofibration.

ホモトピー論の人達が好きな位相空間には以下のようなものがある：

(1) コンパクト生成空間（J.P.May [14], Chap.5 参照）

(2) Cofibration （$\rightsquigarrow$ CW 空間）

- 空間対 $X \supset A$ が「よい関係（Homotopy extension property）」にある場合
- 空間 X を和（$X = \bigcup X_\alpha$）に分けて、空間 X_α の性質から空間 X の性質を導く

(3) Fibration

- 空間の積の拡張
- ファイバー束の世界
- ホモトピー持ち上げ性質（Homotopy lifting property）

概ね次のように考えても良い：

$$\begin{cases} \text{空間を和に分ける（colimit 近似）：} & \text{CW 複体} \\ \text{空間を積に分ける（limit 近似）：} & \text{Postnikov 系} \end{cases}$$

この章と次の章では、ホモトピー論の基本的概念である cofibration と、その圏論的な双対である fibration の概念を導入する。この 2 つの概念は CW 複体や path 空間等と協力し合って、ホモトピー論における関手的取り扱いをスムーズにおこなうための基本的な道具立てとなる。

Remark 2.1 Quillen のモデル圏では、これらの概念が基本的な役割を果たす事になる。この講義では Quillen のモデル圏について詳細には扱わないが、モデル圏の概念は代数的位相幾何学の範疇を越えて、現在ではホモトピー論的な考え方を現代数学の随所で使うための枠組みを与えている。

Definition 2.2 (ホモトピー拡張性質（homotopy extension property）) 位相空間の射 $i : A \to X$ が cofibration であるとは、$f\,|_A = h_{A\times 0}$ をみたす任意の $f : X \to Y$ および $h : A\times I \to Y$ に対して、以下の図式を可換にする写像 $\overline{h} : X \times I \to Y$ が存在する場合をいう。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "i"'] & & A \times I \arrow[dl, "h"'] \arrow[dd, "i\times id"] \\ & Y & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "i_0"] & & X \times I \arrow[ul, dotted, "\exists\overline{h}"'] \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Remark 2.4 $i : A \to X$ が cofibration のとき、次が成立する：

(1) i は集合の写像として単射

(2) $i(A) \subset X$ は閉部分集合

与えられた空間 A に対して、「A 上の空間（space under A）の圏 $A \setminus \mathscr{T}$」が定義出来る。

Definition 2.5 (圏 $A \setminus \mathscr{T}$ の定義) $\mathscr{T}$ を位相空間の圏, $A \in \mathscr{T}$ とする。このとき、A 上の圏 $A \setminus \mathscr{T}$ を、対象として写像 $i : A \longrightarrow X$ 達を持ち、また射として以下の図式を可換にする写像 f 達を持つものとして定義する。

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "j"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

圏 $\mathscr{T}$ における

$$\text{ホモトープな } f, g : X \to Y \qquad \text{あるいは} \qquad \text{ホモトピー同値写像 } f : X \to Y$$

と同様に、圏 $A \setminus \mathscr{T}$ における

$$\begin{aligned} \text{ホモトープな} \quad f, g : \quad & (A \xrightarrow{i} X) \to (A \xrightarrow{j} Y) \\ \text{あるいは} \quad \text{ホモトピー同値写像} \quad f : \quad & (A \xrightarrow{i} X) \to (A \xrightarrow{j} Y) \end{aligned}$$

を定義することも可能であり（[14] Chap.6, section 5 参照）次が成立する。

Proposition 2.6 $i : A \to X$, $j : A \to Y$ を *cofibration* として

$$f : (A \xrightarrow{i} X) \longrightarrow (A \xrightarrow{j} Y)$$

を圏 $A \setminus \mathscr{T}$ の射とする。このとき

$$f \text{ が } A \setminus \mathscr{T} \text{ でホモトピー同値} \iff f \text{ が } \mathscr{T} \text{ でホモトピー同値}$$

□

Proposition 2.7 ([14], Chap.6) 以下の可換図式で、写像 i, j は *cofibration* とする：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

このとき

$$d,\ f \text{ がホモトピー同値} \iff (f, d) : (A \xrightarrow{i} X) \to (B \xrightarrow{j} Y) \text{ が対のホモトピー同値}$$

□

実は、任意の写像はホモトピー論的に cofibration に置き換えることが可能であり（Prop. 2.11）、その際に重要な役割を果たすのが次に定義する写像柱である。

Example 2.8 (“universal” な例) 連続写像 $i : A \to X$ に対して、空間

$$M_i = X \sqcup A \times I/(i(a) \sim (a, 0))$$

を i の写像柱（mapping cylinder）と呼ぶ（Figure 1.1 参照）。位相は誘導位相で入れるものとする。

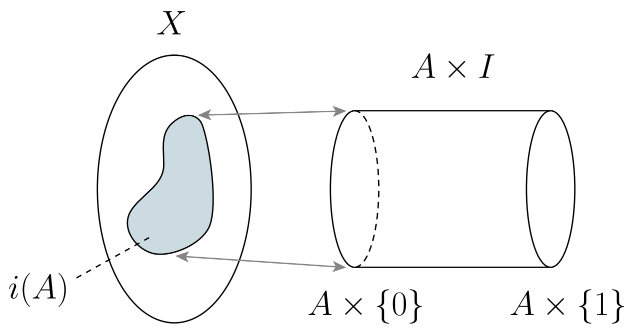

Figure 1.1:

このとき、次が成り立つ：

Proposition 2.9 写像 $i : A \to X$ が cofibration である必要十分条件は、次の図式を可換にする写像 $\overline{h} : X \times I \to M_i$ が存在することである：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "i"'] & & A \times I \arrow[dl] \arrow[dd, "i \times id"] \\
& M_i & \\
X \arrow[ur] \arrow[rr, "i_0"] & & X \times I \arrow[ul, dotted, "\overline{h}"']
\end{tikzcd}$$

□

Remark 2.10 (南範彦氏からのコメント) 写像柱は cofibration の中での圏論的な universal ではないので、上では「“universal” な例」とした。

このとき、次の結果が得られる。

Proposition 2.11 任意の連続写像 $f : X \to Y$ に対して、次を満たす写像 $j : X \to M_f$, $r : M_f \to Y$ が存在する。

(1) $f = r \circ j$

(2) j は *cofibration*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "j"'] & Y \\ & M_f \arrow[u, "r", "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

(3) r はホモトピー同値

Proof. 写像 j および r を次で定義する：

$$\begin{cases} j : A \to M_i & \Longleftrightarrow \quad j(a) = (a, 1) \\ r : M_i \to X & \Longleftrightarrow \quad r(a,t) = i(a), \quad r(x) = x \end{cases}$$

写像 j は cofibration となり、また写像 r は（柱の部分 $X \times I$ を I に沿って縮められることから）ホモトピー同値写像である。 □

すなわち、任意の連続写像 f はホモトピー論的に cofibration 写像 j で置き換えることが可能である。しかもこの置き換えは functorial に出来る。

Remark 2.12 CW 複体と fibration についてはこの後で解説するが、CW 複体は cofibration を繰り返し用いて作られて fibration での写像の持ち上げが考えられる等、ホモトピー論と非常に相性が良い。また、後に fibration の説明で出てくる path 空間

$$\Omega X = \{\ell : ([0,1], \{0,1\}) \to (X, *)\}$$

は一般に CW 複体ではないが、Postnikov 系は fibration を繰り返し用いて作られて cofibration から写像の拡張が考えられる等、やはりホモトピー論と相性が良い。

3 Fibration.

fibration は、cofibration の圏論的な意味での双対である。ここでは fibration の定義と性質について解説をおこない、局所自明な fibration（ねじれた積＝積の一般化）のホモトピー論的な定式化をおこなう。

次のホモトピー持ち上げ性質はホモトピー拡張性質（Def. 2.2）の圏論的な双対概念である。

Definition 3.1 (Fibration) 全射 $p : E \to B$ がホモトピー持ち上げ性質（homotopy lifting property）を持つとは、次を満たす場合を言う： 以下の図式で $h \circ i_0 = p \circ f$ が満たされるとき、写像 $\tilde{h} : Y \times I \to E$ で $f = \tilde{h} \circ i_0$ かつ $h = p \circ \tilde{h}$ を満たすものが存在する：

$$\begin{tikzcd} Y \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{h}"] & B \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

ホモトピー持ち上げ性質が、全ての位相空間 Y に対して満たされるとき $p : E \to B$ は Hurewicz fibration, また CW 複体 Y に対して満たされるとき Serre fibration であるという。

fibration の重要な例として、次の局所自明（locally trivial）な fibration がある。

Definition 3.3 全射 $p : E \to B$ が局所自明な fibration であるとは、B の開被覆 $\{U_\alpha\}$ とある位相空間 F が存在して、各 U_α に対して以下の可換図式が存在する場合を言う：

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "p"] & U_\alpha \times F \arrow[d, "p_1"] \\ U_\alpha \arrow[r, equal] & U_\alpha \end{tikzcd}$$

Proposition 3.4 局所自明ファイバー空間 $p : E \to B$ において B が「（例えばパラコンパクト等の）うまい空間」ならば、p は *fibration* になる。

Proof. 自明な部分 $U_\alpha \times F \to U_\alpha$ に制限すれば明らか。一般の場合は「少しずつずらして全体に拡げて」いけば O.K. （参考文献 [32] Chap.1） □

任意の連続写像がホモトピー論的には cofibration で置き換えられることは既に述べた（Proposition 2.11）が、実は fibration に対しても同様の構成が可能である。

Proposition 3.5 X を位相空間、また $I = [0, 1]$ とするとき

$$X^I = \mathrm{Map}(I \to X)$$

と定義し（位相はコンパクト開位相で入れる）、また写像 $p : X^I \to X$ を $p(\ell) = \ell(0)$ で定義する。このとき、$p : X^I \to X$ は *fibration* である。

Proof. 次の可換図式が与えられたと仮定する：

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"] & X^I \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "h"] & X \end{tikzcd}$$

このとき、h を lift した写像 $\tilde{h} : Y \times I \to X^I$ を $\tilde{h}(y, t) = f(y)$ で定義すればホモトピー可換 $p \circ \tilde{h} \simeq h$ が示せる。実際、ホモトピーを

$$H : (Y \times I) \times I \to X \quad \Longleftrightarrow \quad H(y, t, s) = h(y, st)$$

で定義すれば良い。 □

Proposition 3.6 (Induced fibration) $p : E \to B$ を *fibration*, $g : A \to B$ を連続写像とするとき、空間 $A \times_B E$ を次の *pullback* 図式で定義する（p_i は第 i 成分への射影を表す）：

$$\begin{tikzcd} A \times_B E \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & E \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

すなわち

$$A \times_B E = \{(a, e) \in A \times E \colon g(a) = p(e)\}$$

である。このとき、写像 $p_1 : A \times_B E \to A$ は *fibration* である。 □

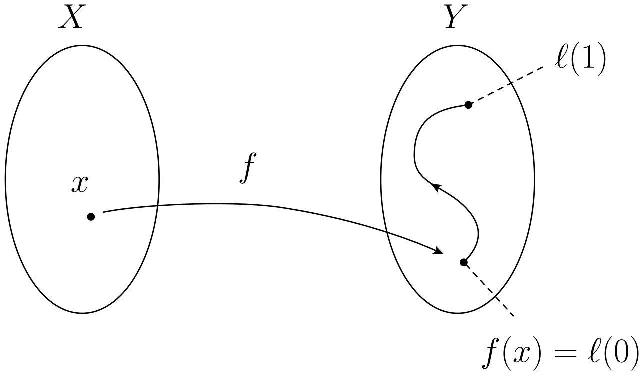

Figure 1.2:

写像 $f: X \to Y$ による fibration $Y^I \to Y$ の induced fibration

$$N_f = X \times_Y Y^I = \left\{(x,\ell) \in X \times Y^I \colon f(x) = \ell(0)\right\}$$

を考える（Figure 1.2 参照）：

写像 $p_1: N_f \to X$ は写像柱の双対であり、次の結果が得られる。

Proposition 3.7 任意の連続写像 $f : X \to Y$ に対して、次を満たす写像 $\rho : N_f \to Y$, $\nu: X \to N_f$ が存在する。

(1) $f = \rho \circ \nu$

(2) ρ は *fibration*

(3) ν はホモトピー同値

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\nu", "\simeq"'] & Y \\ N_f \arrow[ur, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

Proof. 写像 ρ および ν を次で定義する：

$$\begin{cases} \rho: N_f \to Y & \Leftrightarrow \quad \rho(x,\ell) = \ell(1) \\ \nu: X \to N_f & \Leftrightarrow \quad \nu(x) = (x, c_{f(x)}) \end{cases}$$

ここで $c_{f(x)}$ は、任意の $t \in I$ を $f(x) \in Y$ に写す定値写像である。写像 ρ は fibration となり、また写像 ν は path の長さを縮めることによりホモトピー同値であることが示せる（[14] を参照せよ）。 □

すなわち、任意の連続写像 f は、ホモトピー論的に fibration で置き換えることが可能である。

Remark 3.8 (圏の局所化の概念) 1950 年代の代数的位相幾何学の研究で明らかになったのは、位相空間と連続写像からなる圏を「弱ホモトピー同値が同値関係になるように局所化した圏」を位相空間のホモトピー圏として考えると、色々な意味で都合が良いという事である（Gabriel and Zisman [5] 参照）。ところが、「圏の局所化」は一般に存在が保障されていない。

位相空間の間の連続写像 $f: X \to Y$ がホモトピー同値ならば弱ホモトピー同値であることは定義から明らかだが、逆は一般には真でない。（ホモトピー同値は同値関係だが、弱ホモトピー同値は同値関係ではない。）幸いなことに、位相空間の圏の場合は部分圏として CW 複体の圏を考えることが出来て次が成立している：

- 任意の位相空間 X に対し、CW 複体 ΓX と弱ホモトピー同値写像 $f : \Gamma X \to X$ を functorial に構成出来る
- CW 複体の間の弱ホモトピー同値 $f : X \to Y$ はホモトピー同値（J.H.C.Whitehead の定理）

これらの事実を用いて、位相空間のつくる圏を弱ホモトピー同値達で局所化した圏が構成される。

Quillen は、これらの事や後述する Serre の $\mathscr{C}$ 理論と有理ホモトピー論などにもヒントを得て公理を抽出し、fibration, cofibration, 弱同値の 3 つの概念を持つモデル圏の概念に至った。弱同値は（弱ホモトピー同値と同様に）一般には同値関係ではないが、fibration, cofibration の力を借りながら弱同値が生成する同値関係（弱同値による局所化）を考えることで、結果としてホモトピー圏が構成出来る。（cofibration と fibration は互いに双対の概念であり、全ての矢印を逆にして対応する結果を見較べることは良い頭の訓練である。）

この講義では Quillen のモデル圏について講義しないが、興味が有る人は例えば Hovey [10] を読むと良いだろう。

4 モデル圏に関する南範彦氏からの補足

一つの圏に異なるモデル圏の構造を入れることが可能な場合がある。位相空間の圏には、例えば次の 2 つの異なるモデル圏の構造が入る。

Example 4.1 (Storm)

- (fibration)　Hurewicz fibration（Def. 3.1）
- (cofibration)　Hurewicz cofibration（Def. 2.2）
- (弱同値)　ホモトピー同値

Example 4.2 (Quillen)

- (fibration)　Serre fibration（Def. 3.1）
- (cofibration)　Serre cofibration（Def. 2.2）
- (弱同値)　弱ホモトピー同値（写像 $f : X \to Y$ が与えられたとき、全ての $i \geqq 0$ と X の基点 x_0 について $\pi_i(f) : \pi_i(X, x_0) \to \pi_i(Y, f(x_0))$ が $i \geqq 1$ のときは群の, また $i = 0$ のときは集合の同型）

通常の位相空間のホモトピー圏は、空間の圏に Quillen のモデル構造を与えて得られるものである。その他、代数的なモデル圏の例としては、アーベル圏のチェイン複体に由来するモデル圏がある：

Example 4.3 (Joyal, Beke) アーベル圏 $\mathscr{A}$ が Grothendieck アーベル圏であるとは、次の条件が満たされるときをいう：

(1) 任意の filtered colimit は finite limit と可換である

(2) 余完備かつ生成元を持つ、すなわちある対象 $G \in \mathscr{A}$ が存在して、集合への関手

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(G, -) : \mathscr{A} \longrightarrow Sets$$

は忠実となる

すると、すべての Grothendieck アーベル圏上のチェイン複体の圏に、射入的モデル構造（injective model structure）というモデル圏の構造が入る：

- (cofibration)　各次数における単射
- (弱同値)　quasi isomorphism
- (fibration)　cofibration かつ弱同値である全ての射に対して Right Lifting Property を持つ：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\text{各次数で cofibration かつ弱同値}"'] & E \arrow[d, "\text{fibration}"] \\ X \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "\exists"] & B \end{tikzcd}$$

  fibration なら、各次数で全射かつ核がホモロジー代数の意味で射入的だが、逆は必ずしも成立しない。ただし、各次数で射入的かつ上に bounded なものは fibrant となる。

射入的モデル構造に関する fibrant replacement というモデル圏の操作は、各次数毎の射入的分解になっている。

Grothendieck アーベル圏が環上の加群の圏の場合には、この双対とでもいうべきモデル構造も存在する。

Example 4.4 (Quillen, Spaltenstein, Hovey) 環上の加群の圏上のチェイン複体の圏に、射影的モデル構造（projective model structure）というモデル圏の構造が入る：

- (fibration)　各次数で全射
- (弱同値)　quasi isomorphism
- (cofibration)　fibration かつ弱同値である全ての射に対して Left Lifting Property を持つ：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\text{cofibration}"'] & E \arrow[d, "\text{各次数で fibration かつ弱同値}"] \\ X \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "\exists"] & B \end{tikzcd}$$

  cofibration なら、各次数で単射かつ余核はホモロジー代数の意味で射影的だが、逆は必ずしも成立しない。ただし、各次数で射影的かつ下に bounded なものは cofibrant となる。

射影的モデル構造に関する cofibrant replacement というモデル圏の操作は、各次数毎の射影的分解になっている。

環上の加群の圏上のチェイン複体の圏における射入的モデル構造と射影的モデル構造は、同値なホモトピー圏を与える（このようなモデル圏の関係は「Quillen 同値」と呼ばれる）。これらのホモトピー圏は共に環上の加群の圏上のチェイン複体の圏を quasi isomorphism に関して局所化したものであり、環上の加群の圏でホモロジー代数を展開する際に射入的分解, 射影的分解共に用いることが出来る所以となっている。

Chapter 2

ホモトピー群

この章ではホモトピー群の定義とホモトピー完全列の構成について述べ、

- 空間対 (X, A) に関する完全列
- fibration $p : E \to B$ に関する完全列

の 2 つを考える。以下、X は基点付き位相空間（pointed topological space）とする。

5　ホモトピー群の定義とホモトピー完全列

Definition 5.1 空間 X に対して、$\pi_0(X, *)$ を X の弧状連結成分の集合として定義する。これは基点（$= *$ の属する連結成分）付き集合である。さらに、n 次元キューブ I^n $(n \geqq 1)$ を

$$I^n \quad = \quad \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leqq t_i \leqq 1\}$$

で、さらに ∂I^n をその境界部分として定義し、2 つの連続写像 $f_0, f_1 : (I^n, \partial I^n) \to (X, *)$ の間の同値関係（ホモトープと呼ばれる）を、連続写像

$$F : (I^n, \partial I^n) \times I \longrightarrow (X, *)$$

が存在して $F\,|_0 = f_0$ かつ $F\,|_1 = f_1$ を満たす場合として定義する。写像 F は f_0 と f_1 の間のホモトピーと呼ばれ、f_0 と f_1 がホモトープであることは $f_0 \sim f_1$ のように表される。このとき、n 次元ホモトピー群を

$$\pi_n(X, *) \quad = \quad \{(I^n, \partial I^n) \to (X, *)\} / (\text{ホモトープ})$$

で定義する。

$n \geqq 1$ のとき、積と逆元をそれぞれ

- $[f] \cdot [g] = [f * g]$ （Figure 2.1 参照）
- $[f]^{-1} = [f^{-1}]$

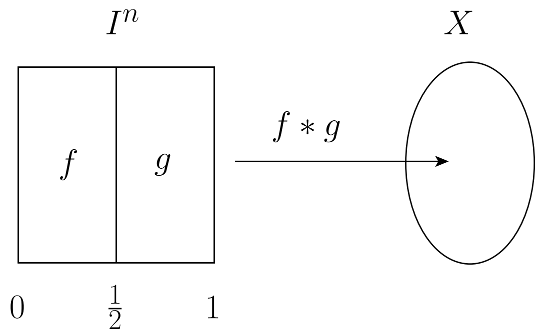

Figure 2.1: 積の定義

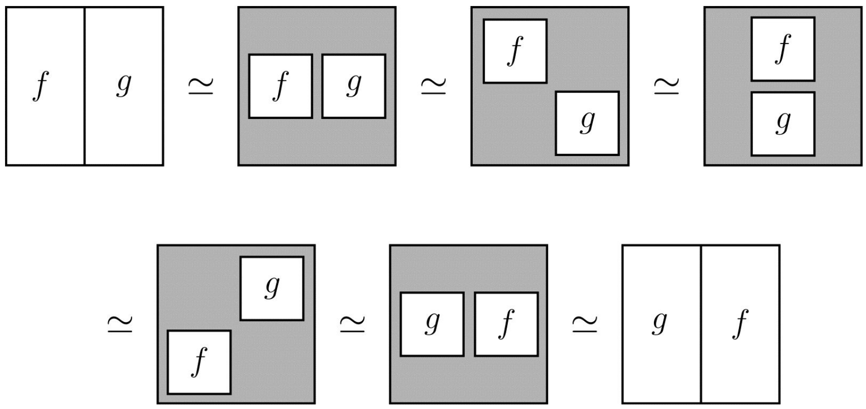

Figure 2.2: 元の可換性

で定義することにより $\pi_n(X,*)$ は群になる。さらに、$n \geqq 2$ のときはアーベル群になる（Figure 2.2 参照)。

連続写像 $f : X \to Y$ に対して、写像 $\pi_n(f) : \pi_n(X,*) \to \pi_n(Y,*)$ は $n = 0$ のとき基点付き集合の写像に、$n = 1$ のとき群の準同型に、また $n \geqq 2$ のときアーベル群の準同型になる。

空間のホモトピー群は、次の相対ホモトピー群へと拡張出来る。

Definition 5.2 (相対ホモトピー群の定義) 空間 J^n を次で定義する。

$$J^n \quad = \quad (\partial I^{n-1} \times I) \cup (I^{n-1} \times \{0\})$$

このとき、$(I^n, \partial I^n, J^n)$ は包含列である（Figure 2.3 参照)。

基点付き位相空間の包含関係 $* \in A \subset X$ が与えられたとき、対 $(X, A, *)$ に対するホモトピー群を次で定義する：

$$\pi_n(X,A,*) \quad = \quad \{(I^n, \partial I^n, J^n) \to (X,A,*)\}/(\text{ホモトープ})$$

$\pi_n(X,A,*)$ は $n = 1$ のとき基点付き集合に、$n = 2$ のとき群に、また $n \geqq 3$ のときアーベル群になる。

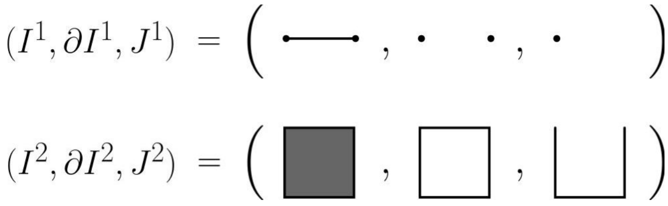

Figure 2.3:

対 $(X, A, *)$ に対して　$i_n : \pi_n(A, *) \to \pi_n(X, *)$ および $j_n : \pi_n(X, *) \to \pi_n(X, A, *)$ は自然な写像として、また境界準同型 $\partial_n : \pi_n(X, A, *) \to \pi_{n-1}(A, *)$ は写像

$$(I^n, \partial I^n, J^n) \longrightarrow (X, A, *)$$

を写像

$$(I^{n-1} \times \{1\}, \partial I^{n-1} \times \{1\}) \longrightarrow (A, *)$$

に制限したものとして定義する（Figure 2.4 参照）。

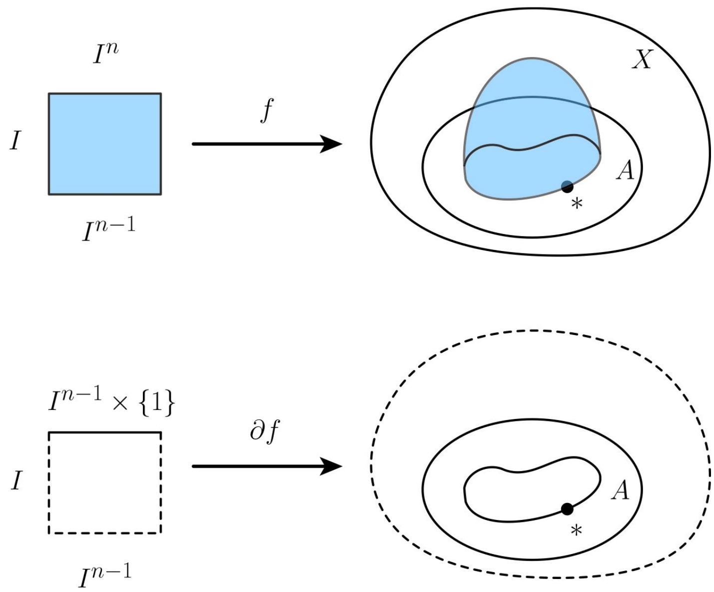

Figure 2.4:

Proposition 5.3 基点付き位相空間の対 $(X, A, *)$ が与えられたとき、次の完全列が存在する：

$$\begin{array}{l}
\cdots \longrightarrow \pi_n(A,*) \xrightarrow{i_n} \pi_n(X,*) \xrightarrow{j_n} \pi_n(X,A,*) \\
\xrightarrow{\partial_n} \pi_{n-1}(A,*) \xrightarrow[i_{n-1}]{} \cdots\cdots \xrightarrow{j_1} \pi_1(X,A,*) \\
\xrightarrow{\partial_1} \pi_0(A,*) \xrightarrow[i_0]{} \pi_0(X,*)
\end{array}$$

ここで j_1, ∂_1, i_0 は基点付き集合の写像、それ以外は群の準同型である。 □

次に、与えられた fibration $p : E \to B$ に随伴するホモトピー完全列について述べる。

Proposition 5.4 $p : E \to B$ のファイバーを $F = p^{-1}(*)$ で表すとき、次の完全列が存在する：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_n(F,*) \arrow[r, "i_n"] & \pi_n(E,*) \arrow[r, "j_n"] & \pi_n(B,*) \arrow[dll, "\partial_n"'] \\
 & \pi_{n-1}(F,*) \arrow[r, "i_{n-1}"'] & \cdots\cdots \arrow[r, "j_1"] & \pi_1(B,*) \arrow[dll, "\partial_1"'] \\
 & \pi_0(F,*) \arrow[r, "i_0"'] & \pi_0(E,*) \arrow[r, "j_0"'] & \pi_0(B,*)
\end{tikzcd}$$

Proof. ホモトピー群 $\pi_n(B)$ $(n \geqq 1)$ は基点の属する成分の情報しか与えないので、今は B が弧状連結と仮定して構わないことに注意せよ。射影から誘導される写像 $\pi_n(E,F,*) \to \pi_n(B,*)$ が 1 対 1 対応であることを示せばよい（Figure 2.5 参照）。

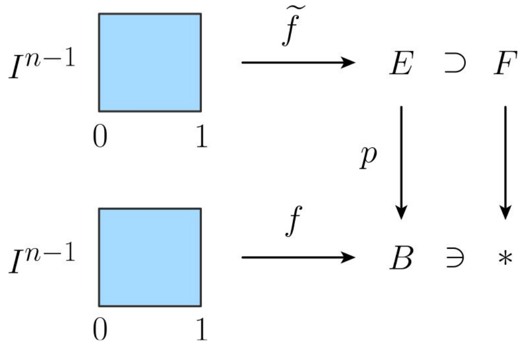

Figure 2.5:

ホモトピー類 $[f] \in \pi_n(B,*)$ を代表する写像 $f : (I^n, \partial I^n) \to (B,*)$ を考え、$g : J^n \to E$ を自明な写像（任意の $x \in J^n$ に対して $g(x) = *$）とするとき、次の可換図式が得られる：

$$\begin{tikzcd}
J^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d] \\
I^n \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dotted, "\exists \tilde{f}"] & B
\end{tikzcd}$$

f の持ち上げ $\tilde{f}$ は $\tilde{f}(\partial I^n) \subset F$ を満たすので、写像

$$\tilde{f} : (I^n, \partial I^n, J^n) \longrightarrow (E, F, *)$$

のホモトピー類は対応

$$\begin{array}{ccc}
\pi_n(E,F,*) & \longrightarrow & \pi_n(B,*) \\
[\tilde{f}] & \longmapsto & [f]
\end{array}$$

を与える。この対応が単射であることも示すことが出来る。 □

Definition 5.5 (Hurewicz 写像) $H_n(X,A;\mathbb{Z})$ を整数係数の特異ホモロジー群（singular homology）とするとき、Hurewicz 写像

$$H_n : \pi_n(X,A,*) \longrightarrow H_n(X,A;\mathbb{Z})$$

を以下で定義する：

<u>$n=0$ のとき</u>　$\pi_0(X,*)$ は各連結成分を元とする集合、また

$$H_0(X;\mathbb{Z}) = \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{(X\text{ の連結成分の数})}$$

は X の各連結成分を生成元とするアーベル群であり

$$H_0 : \pi_0(X,*) \longrightarrow H_0(X;\mathbb{Z})$$

は自然な写像として定義される。（空間対 (X,A) に対しても同様に考えられる。）

<u>$n \geqq 1$ のとき</u>　自然な同一視により $H_n(I^n,\partial I^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ であり

$$I^n = \underbrace{I^1\times I^1\times\cdots\times I^1}_{n\text{ 個}}$$

と考えることで各閉区間 I^1 の向きで I^n に向き付け（orientation）を入れられるので、それによって決まる生成元 $[I^n]$ を 1 つ固定する。このとき、元 $[f] \in \pi_*(X,A,*)$ の代表元の写像

$$f : (I^n,\partial I^n) \longrightarrow (X,A)$$

から得られる整数係数ホモロジー群の準同型

$$H_n(I^n,\partial I^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow H_n(X,A;\mathbb{Z})$$

で生成元 $[I^n]$ を写したものを $H_n([f])$ とおく。

Remark 5.6 Hurewicz 写像はホモトピー群とホモロジー群の相互関係を与えている重要な写像である（Thm. 10.1 参照）。一般に、ホモロジー群 $H_n(X,A;\mathbb{Z})$ には切除定理があるので計算が容易である。

6　CW 複体とその性質

ここでは CW 複体の定義とその性質について述べる。次の記号を用いる：

$$\begin{aligned}
D^n &= \{x\in\mathbb{R}^n : |x|^2 \leqq 1\} && (n=0,1,\ldots)\\
\partial D^n &= \{x\in\mathbb{R}^n : |x|^2 = 1\} = S^{n-1} &&\\
\mathrm{Int}(D) &= D^n \setminus \partial D^n && (n=0,1,\ldots)
\end{aligned}$$

CW 複体は、「C」が「closure finite」,「W」が「weak topology」,「複体」が「cell complex（胞複体）」をそれぞれ意味している。CW 複体では最も簡単な位相空間（素空間）である n 次元ディスク D^n 達を使って「和の原理」で空間を組み立てている。

Definition 6.1 (CW 複体) 位相空間 X（とその上部構造）が CW 複体とは、包含列

$$\phi \;=\; X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X^n \subset \cdots \subset X \;=\; \bigcup X^n$$

が存在して以下を満たす場合をいう：

(1) X^0 は点の集合であり、位相は離散位相で入っている。

(2) 空間 X^n（n skeleton と呼ばれる）が定義されたと仮定する。添え字集合を I_n として、各 $\alpha \in I_n$ に対して胞体の接着写像

$$\varphi_\alpha : \partial D_\alpha^{n+1} = S_\alpha^n \longrightarrow X^n$$

を与えるとき、$(n+1)$ skeleton X^{n+1} を次の pushout 図式で与える：

$$\begin{tikzcd}
\coprod_\alpha \partial D_\alpha^{n+1} \arrow[r, "\coprod_\alpha \varphi_\alpha"] \arrow[d] & X^n \arrow[d] \\
\coprod_\alpha D_\alpha^{n+1} \arrow[r] & X^{n+1}
\end{tikzcd}$$

このとき、$(n+1)$ skeleton X^{n+1} は

$$\begin{aligned}
X^{n+1} &= X^n \cup_{(\coprod_\alpha \varphi_\alpha)} \coprod_\alpha D_\alpha^{n+1} \\
&= X^n \coprod \left(\cup_\alpha D_\alpha^{n+1} \right) / (\partial D_\alpha^{n+1} \ni x \sim \varphi_\alpha(x))
\end{aligned}$$

のようにも表される（Figure 2.6 参照)。X^{n+1} の位相は誘導位相で入っている。

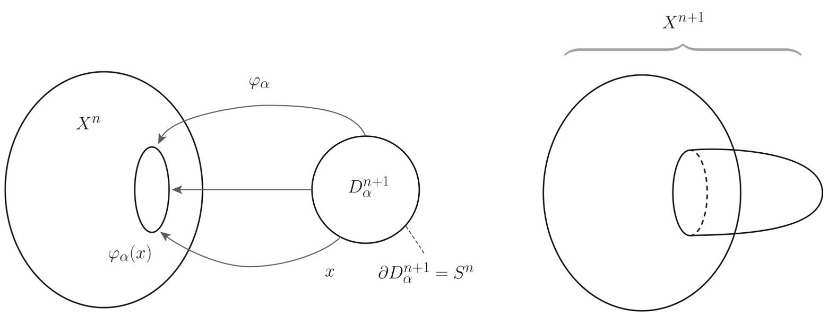

Figure 2.6:

(3) 位相空間として、$X = \cup X^n$ には帰納的極限で位相を入れている（すなわち、U が開集合 $\Longleftrightarrow$ $U \cap X^n$ が任意の X^n で開集合)。

胞体の数が有限個である CW 複体は「有限 CW 複体」と呼ばれる。部分複体がコンパクトである必要十分条件は、部分複体が有限 CW 複体であることである。

D_α^{n+1} を X^{n+1} へうつした像を e_α^{n+1}、またその閉包を $\overline{e}_\alpha^{n+1}$ とするとき、CW 複体 X に対して以下の性質が成り立つ：

- X はハウスドルフ空間である
- （閉包有限性）$\overline{e}^n_\alpha$ を含む X の有限複体が存在する。（注：ただし、∂e^{n+1}_α と交わる X^n の胞体は ∞ 個あるかも知れない。）
- （コンパクト生成）X の部分集合 U が開集合である必要十分条件は、任意のコンパクト部分集合 $K \subset X$ について $K \cap U$ が K で開であることである。

Remark 6.2 n 単体 Δ^n は点, 辺, 面, ... 等を $2^{n+1}-1$ 個も含んでいて記述が面倒なので、三角形分割より胞体分割の方が簡単である。例えば、球面 S^n と複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ は以下のような胞体分割を持つ：

$$\begin{aligned} S^n &= e^0 \cup e^n \quad (n \geqq 1) \\ \mathbb{C}P^n &= e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2n} \end{aligned}$$

Example 6.3 CW 複体 $X = \bigcup_{m,\alpha} e^m_\alpha$ および $Y = \bigcup_{n,\beta} e^n_\beta$ に対して

$$X \times Y = \bigcup_{m,n,\alpha,\beta} e^m_\alpha \times e^n_\beta$$

を通常の直積位相を入れた空間、また $X \times_c Y$ をコンパクト部分空間に関する弱位相を入れた空間とする。このとき、直積 $X \times Y$ に再び CW 複体の構造が入り、次の写像は連続になる：

$$X \times Y \longrightarrow X \times_c Y$$

写像空間については、以下の結果が知られている。

Theorem 6.4 (Milnor) *X, Y を CW 複体とするとき、X から Y への連続写像全体にコンパクト開位相を入れた空間 $\mathrm{Map}(X,Y)$ もまた CW 複体のホモトピー型を持つ。* □

CW 複体に関しては、以下の２つの近似定理が知られている。

Theorem 6.5 (胞体近似定理) *CW 複体の間の任意の連続写像 $f: X \to Y$ に対して、胞体写像 $g: X \to Y$ （すなわち、各 n について n skeleton 間の写像 $g(X^n) \subset Y^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ となる）で $f \simeq g$ となるものが存在する。*

Proof. 例えば、三角形の場合は十分細かく細分をとることにより示される（[33] 参照）。 □

Theorem 6.6 (空間の CW 複体による近似 [14], p.77) *任意の位相空間 X に対して、CW 複体 ΓX と、弱ホモトピー同値な連続写像*

$$\gamma : \Gamma X \longrightarrow X$$

が up to homotopy で唯一つ存在する。

Proof. 次の図式を可換にする写像 γ_n と CW 複体 X^n を、n に関する帰納法で構成したい：

$$\begin{tikzcd} X^0 \arrow[r] \arrow[drr, "\gamma_0"'] & X^1 \arrow[r] \arrow[dr, "\gamma_1"] & X^2 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_2"] & \cdots\cdots \arrow[r] & \Gamma X = \bigcup X^n \\ & & X & & \end{tikzcd}$$

この図式が構成出来れば、ΓX を $\Gamma X = \bigcup X^n$ と定義すればよい。(連結成分毎に考えれば十分なので、以下の証明では X は弧状連結とする。)

<u>$n=0$ のとき</u>　基点 $* \in X$ を一つ固定すれば、包含写像 $X^0 = \{*\} \to X$ は 1 対 1 写像

$$\pi_0(X^0) \longrightarrow \pi_0(X)$$

を誘導する。

<u>$n \geqq 1$ のとき</u>　全ての $q \geqq 1$ について $\pi_q(X)$ の生成元を代表する写像

$$f_\alpha : S^q \longrightarrow X \quad (\alpha \in I_q)$$

を選んで $X^1 = \bigvee_{q,\alpha} S^q_\alpha$ とおけば、f_α 達から得られる写像 $\gamma_1 : X^1 \to X$ が誘導する写像 $\pi_q(X^1) \to \pi_q(X)$ は全ての q に対して全射になる。

次に、ある $m \geqq 1$ に対して写像 $\gamma_m : X^m \to X$ で、誘導する写像

$$\pi_q(X^m) \longrightarrow \pi_q(X)$$

が $q \leqq m-1$ で同型かつ任意の q で全射であるものが構成出来たと仮定して、包含関係 $X^m \subset X^{m+1}$ が成立するような CW 複体 X^{m+1} を構成しよう。全射

$$\pi_m(X^m) \xrightarrow{(\gamma_m)_*} \pi_m(X)$$

の核 $\ker(\gamma_m)_*$ の元を消す(killing homotopy)ために、$\ker(\gamma_m)_*$ の生成元を代表する写像の集合 $\{f_\beta : S^m_\beta \to X^m\}$ を選んで、各 D^{m+1}_β の接着写像を合成

$$S^m_\beta \longrightarrow X^m \xrightarrow{\gamma_m} X$$

で定めることによって、X^{m+1} を

$$X^{m+1} \quad = \quad X^m \cup (\vee_\beta f_\beta) \bigvee_\beta D^{m+1}_\beta$$

で定義する。このとき次の可換図式が得られ、求める写像 $\gamma_{m+1} : X^{m+1} \to X$ が定まる:

$$\begin{tikzcd}
\bigvee_\beta S^m_\beta \arrow[r, tail] \arrow[d, "\vee_\beta f_\beta"'] & \bigvee_\beta D^{m+1}_\beta \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
X^m \arrow[r, tail] \arrow[drr, bend right, "\gamma_m"'] & X^{m+1} \arrow[dr, dotted, "\gamma_{m+1}"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

□

Remark 6.7 (南範彦氏からのコメント)　(1) ここで与えた Thm. 6.6 の証明は、幾何学的で分かり易く CW 複体も小さく取れるという長所があるが、関手的でないという短所もある。構成する CW 複体が巨大になることを厭わなければ、次のようにして関手的に構成出来る:

Step 1. $\mathcal{C}GWH$ を、コンパクト生成かつ弱ハウスドルフという通常考察される圏論的に良い性質を持った位相空間の圏、また $SSets$ を単体集合のなす圏とすると、幾何学的実現 $|-|$ と特異単体的集合関手 $S_\bullet(-)$ はこれらの圏の間で随伴対をなす：

$$|-| : SSets \rightleftarrows \mathcal{C}GWH : S_\bullet$$
$$SSets(K_\bullet, S_\bullet(X)) \cong \mathcal{C}GWH(|K_\bullet|, X)$$

（ここで、$K_\bullet \in SSets$, $X \in \mathcal{C}GWH$ は任意）

Step 2. 任意の位相空間 X に対して、これから関手的に誘導される連続写像

$$|S_\bullet(X)| \longrightarrow X$$

を $\Gamma X \to X$ とおけばよい。

(2) 上の随伴対は実はモデル圏の間の Quillen 同値であり、ホモトピー圏の間の随伴同値を誘導する：

$$\begin{tikzcd} {|-| : SSets[(w.e.)^{-1}]} \arrow[r, shift left, "\cong"] & \mathcal{C}GWH[(w.e.)^{-1}] : S_\bullet \arrow[l, shift left] \\ \mathcal{K}(\mathcal{K}an) \arrow[u, "\cong"] & \mathcal{K}(\mathcal{C}W) \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

これにより、空間のホモトピー圏の研究と単体集合のホモトピー圏の研究が同じであることが分かる。

7 相対 CW 複体と Homotopy Extension Lifting Property

ここまでは $X^{-1} = \phi$（空集合）から CW 複体の構成をスタートしたが、与えられた任意の位相空間 A（必ずしも CW 複体でなくて良い）からスタートして

$$A = X^{-1} \subset X^0 \subset \cdots \subset X^n \subset \cdots \subset X = \bigcup X^n$$

（X^n は X^{n-1} に n 胞体を追加したもの）のような構成を考えることも出来る。

Definition 7.1 (相対 CW 複体) 上のように空間 X が空間 A に胞体を次々に貼り付けて構成されたとき、対 (X, A) は相対 CW 複体と呼ばれる。特に、ある自然数 $n \geqq 0$ に対して $X^n = X$ を満たすような相対 CW 複体 (X, A) は、n 次元相対 CW 複体と呼ばれる。

前と同様にして、相対 CW 複体に対しても相対ホモトピー群 $\pi_*(X, A)$ が定義される。

Definition 7.2 (n 同値) 空間の間の写像 $f : X \to Y$ は、任意の $x \in X$ に対して

$$f_* : \pi_k(X, x) \longrightarrow \pi_k(Y, f(x))$$

が $k < n$ で単射かつ $k \leqq n$ で全射（したがって、$k < n$ では同型）が成立する場合に、n 同値 $(n \geqq 1)$ と呼ばれる。また、f が弱ホモトピー同値である場合は ∞ 同値と呼ばれる。

次はCW複体の重要な性質であり、CW複体の様々な性質を証明するために用いられる。

Theorem 7.3 (Homotopy Extension Lifting Property) (X, A) を n 次元相対 CW 複体とし、写像 $e : Y \to Z$ は n 同値とする。このとき、写像達 $f : X \to Z$, $g : A \to Y$, $h : A \times I \to Z$ が $f\,|_A = h \circ i_0\,|_A$ かつ $e \circ g = h \circ i_1\,|_A$ を満たせば、次の図式を可換にする写像 $\tilde{g}$, $\tilde{h}$ がそれぞれ存在する。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i_0|_A"] \arrow[dd] & & A \times I \arrow[dl, "h"'] \arrow[dd] & & A \arrow[ll, "i_1|_A"'] \arrow[dl, "g"] \arrow[dd] \\
& Z & & Y \arrow[ll, "e"'] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "i_0"'] & & X \times I \arrow[ul, dotted, "\exists\tilde{h}"'] & & X \arrow[ll, "i_1"] \arrow[ul, dotted, "\exists\tilde{g}"']
\end{tikzcd}
\tag{7.4}
$$

Proof. n skeleton X^n に関する帰納法で示される。(Figure 2.7 参照)。 □

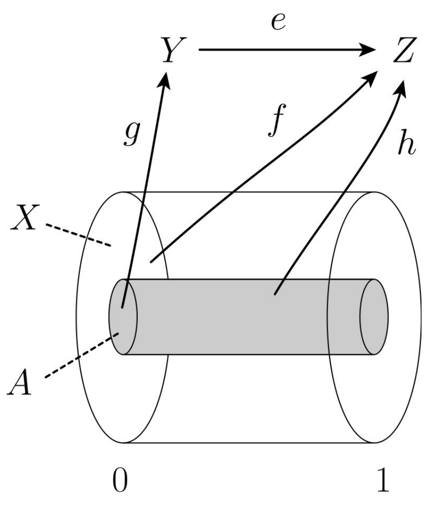

Figure 2.7:

Corollary 7.5 (X, A) を CW 対とするとき、包含写像 $A \hookrightarrow X$ は *cofibration* である。特に、*skeleton* の間の写像 $X^n \hookrightarrow X^{n+1}$ は *cofibration* である。 □

各 $\alpha \in I_n$ に対して $\partial D^{n+1}_\alpha \to D^{n+1}_\alpha$ は cofibration なので、Cor. 7.5 は「cofibration は任意の coproduct と pushout で閉じている」というモデル圏の一般論から従うと考えてもよい。

Cor. 7.5 により、CW 複体 X のホモロジー群は(球面のホモロジー群が分かっているので)比較的簡単に計算することが出来る。

Remark 7.6 (南範彦氏からのコメント) 上の図式 (7.4) は以下のものと同値である：

$$
\begin{tikzcd}
X\times\{1\} \arrow[d] \arrow[rr, dotted, bend left, "\tilde{g}"] & A\times\{1\}=A \arrow[l] \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "e"] \\
X\times I \arrow[rr, dotted, bend right, "\tilde{h}"'] & (A\times I)\cup_{A\times\{0\}}(X\times\{0\}) \arrow[l] \arrow[r, "h\cup f"] & Z
\end{tikzcd}
$$

つまり、$e\circ g \underset{h}{\sim} f\,|_A\colon A\to Z$ ならば、g と $h\cup f$ は各々X と $X\times I$ に拡張され、各々を $\tilde{g}, \tilde{h}$ と置くと $e\circ\tilde{g} \underset{\tilde{h}}{\sim} f : X\to Z$ となり、このホモトピーを A に制限したものが元々の $e\circ g \underset{h}{\sim} f\,|_A\colon A\to Z$ となる。

Definition 7.7 CW 複体と同じホモトピー型を持つ（基点付き）位相空間 X, Y に対して

$$
\begin{aligned}
[X,Y] &= \mathrm{Map}(X,Y)/(\text{ホモトープ}) && (\text{集合})\\
[X,Y]_* &= \mathrm{Map}((X,*),(Y,*))/(\text{基点を保つホモトープ}) && (\text{基点付き集合})
\end{aligned}
$$

と定義する。

次の定理は CW 複体のなす圏がホモトピー論の中で特別な役割を持つことを示す重要な定理である。（証明は省略するが、例えば [14] 等を参照せよ。）

Theorem 7.8 *Z を CW 複体、$f : X\to Y$ を n 同値とするとき、集合の間の写像*

$$f_* : [Z,X] \longrightarrow [Z,Y]$$

は $\dim(Z)<n$ ならば 1 対 1 対応, また $\dim(Z)\leqq n$ ならば全射になる。 □

Corollary 7.9 (J.H.C Whitehead の定理) *X, Y を CW 複体、$f : X\to Y$ を n 同値な写像とするとき*

$$\max(\dim(X),\dim(Y))\leqq n$$

が成立するならば、写像 f はホモトピー同値である。特に、f が弱ホモトピー同値写像（$=\infty$ 同値）ならば、f はホモトピー同値写像である。 □

Cor. 7.9 は、一般の位相空間を考えた場合に逆は必ずしも成立しない。（反例は Hatcher [8] を参照せよ。）一般に、弱ホモトピー同値は反射律が成立しないので同値関係ではない。

<u>相対 CW 複体の特異ホモロジー群</u>　既に、Def. 5.5 でも空間対の特異ホモロジー群を扱ったが、相対 CW 複体の特異ホモロジー群は以下のように計算することも可能である： (X,A) を相対 CW 複体とするとき、各胞体に対して定義される特性写像

$$\varphi_\alpha : (D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha) \longrightarrow (X^n, X^{n-1})$$

を考えることで、以下の同型が得られる：

$$H_p(X^n,X^{n-1}) \cong \begin{cases} 0 & (p\neq n)\\ \sum_{\alpha\in I_n} H_n(D^n_\alpha,\partial D^n_\alpha) & (p=n)\end{cases}$$

n 次元チェイン複体を

$$C_n(X,A) = H_n(X^n, X^{n-1}) \tag{7.10}$$

で定義し、またチェイン複体の微分 d_n を次の合成として定義する：

$$C_n(X,A) = H_n(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1}) \longrightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) = C_{n-1}(X,A)$$

このとき、$d_{n-1} \circ d_n = 0$ が成り立ち、さらに同型

$$H_*(X,A) \;\cong\; H(C_*(X,A), d_*) \tag{7.11}$$

が成立するので、相対 CW 複体の胞体構造が分かれば、ホモロジー群の生成元とその関係式をきちんと表すことが可能になる。

Example 7.12 n 次元複素射影平面 $\mathbb{C}P^n$ は

$$\mathbb{C}P^n \quad = \quad e^0 \cup e^2 \cup \cdots\cdots \cup e^{2n}$$

のような胞体分割を持つので

$$\begin{aligned} C_i(\mathbb{C}P^n) \quad &= \quad \begin{cases} \mathbb{Z} & (i = 0, 2, \ldots, 2n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \\ \text{したがって} \quad H_i(\mathbb{C}P^n) \quad &= \quad \begin{cases} \mathbb{Z} & (i = 0, 2, \ldots, 2n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \end{aligned}$$

8 ホモトピー切除定理

Definition 8.1 (切除的な三つ組) $A, B \subset X$ であるとき、$(X; A, B)$ を三つ組（triad）という（注：$B \subset A \subset X$ を満たす三対（triple）の (X, A, B) と混同しないこと）。さらに、これらが

$$X \quad = \quad \mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B$$

を満たす場合は切除的（excisive）と呼ばれる。

切除的な三つ組 $(X; A, B)$ が与えられたとき、$C = A \cap B$ とおいて包含写像

$$i : (A, C) \longrightarrow (X, B)$$

を考える（Figure 2.8 および 2.9 参照）。このとき、誘導される準同型

$$i_* : H_n(A, C) \longrightarrow H_n(X, B)$$

はホモロジー切除定理により任意の n で同型であるので、ホモロジー群（＝安定領域）を計算するのは比較的容易だった。

ところが、同様の同型はホモトピー群で一般には成立しない。すなわち、（$C \neq \phi$ の仮定のもとで）基点 $* \in C$ を考えるとき、準同型

$$i_* : \pi_n(A, C) \longrightarrow \pi_n(X, B) \tag{8.2}$$

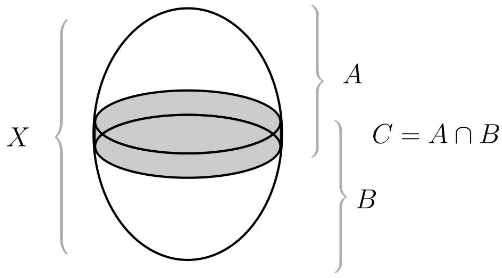

Figure 2.8:

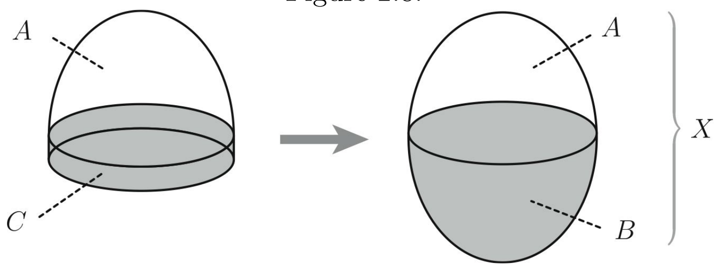

Figure 2.9:

は、n の値が十分に小さい場合（これは X, A, C に依存する）には切除同型が成立するが、一般の次元では同様の同型が成立しない。すなわち、「和に分ける原理」はホモロジー群に対しては有効だったが、一般のホモトピー群に対しては破綻している。（勿論、切除同型が成立しないぎりぎりの次元（critical value）で何が起こっているのかを考えることには意味がある。）

この章と次の章では、ホモトピー切除定理（Thm. 8.7）の概略について述べた後で、「不安定ホモトピー論と安定ホモトピー論のギャップ」を記述すると考えられる Freudenthal の懸垂定理（Thm. 9.1）について述べる。

Remark 8.3 (空間の基点を考えている理由について) 部分空間 A をつぶす写像 $(X, A) \to (X/A, *)$ から誘導される準同型

$$H_*(X, A) \longrightarrow H_*(X/A, *)$$

は同型であるので、切除対 (X, A) は準同型

$$H_*(A) \longrightarrow H_*(X)$$

のギャップを実現する「空間」だとも解釈出来る。ところが、ホモトピーでは

$$\pi_*(X, A) \longrightarrow \pi_*(X/A, *)$$

は一般に同型ではない（対 (X, A) の連結性に応じて同型となる）。

ホモロジーではあまり基点を意識しなくても済んだが、ホモトピーでは基点付きの空間を考えなければ上手くいかない理由は、実はこのギャップと関係があるのである。

Remark 8.4 (南範彦氏からのコメント) 通常、日本の代数的位相幾何学の文献では「非安定ホモトピー論」という表現が使われる。以前、Ravenel さんから次のような「非安定ホモトピー群の元の心を詠んだ joke（詠み人知らず）」を伺った：

This is what a guy living in a unstable world said : "Suspense kills me!"

この「不安定な元」というニュアンスを上手く伝えるためには、「非安定ホモトピー論」よりも「不安定ホモトピー論」の呼称の方が本質を得ているのかも知れない。

ホモトピー群の場合は、(8.2) の同型がどの次元で成立するかは三つ組 $(X; A, B)$ の連結性に依存している。したがって「連結性」がキーワードとなる。

Definition 8.5 空間対 (X, A) が次を満たすとき、n 連結 $(n \geqq 1)$ という：

(1) $\pi_0(C) \to \pi_0(A)$ が全射

(2) 任意の $q \leqq n$ に対して $\pi_q(A, C) = 0$ （結果的に $X = A \cup e^{n+1} \cup \cdots$ を満たす感じ）

Definition 8.6 写像 $f : (A, C) \to (X, B)$ は、次を満たすとき n 同値 $(n \geqq 1)$ と呼ばれる：

(1) 写像
$$(f_*)^{-1} : \mathrm{im}\,(\pi_0(B) \to \pi_0(X)) \longrightarrow \pi_0(A)$$
が定義出来て、その像は $\mathrm{im}\,(\pi_0(C) \to \pi_0(A))$ と等しい

(2) C のすべての基点に関して写像
$$f_* : \pi_q(A, C) \longrightarrow \pi_q(X, B)$$
は（C の基点をどのように選んでも）$q < n$ で 1 対 1 対応かつ $q \leqq n$ で全射である

このとき、次の定理が成立する：

Theorem 8.7 (ホモトピー切除定理（Blakers-Massey の定理）) $(X; A, B)$ を切除的な三つ組として、$C = A \cap B \neq \phi$ と仮定する。このとき、対 (A, C) が $(m-1)$ 連結 $(m \geqq 2)$ かつ対 (B, C) が $(n-1)$ 連結 $(n \geqq 1)$ ならば、空間対の間の包含写像
$$i : (A, C) \longrightarrow (X, B) \tag{8.8}$$
は $(m + n - 2)$ 同値である。 □

Thm. 8.7 はどのように考えれば良いのだろうか？以下では、写像 (8.8) のギャップを実現する path 空間（＝弦を空間に走らせた全体を考えた空間）を構成して考察してみよう。

Definition 8.9 空間対 $X \supset A \ni *$ が与えられたとき、
$$P(X; A, *) = \{\ell : [0,1] \to X \mid \ell(0) \in A,\ \ell(1) = *\}$$
と定義する（Figure 2.10 参照）。（ただし、$P(X; A, *)$ の基点は X の基点への定値写像 $\ell_* : [0, 1] \to *$ とする。）

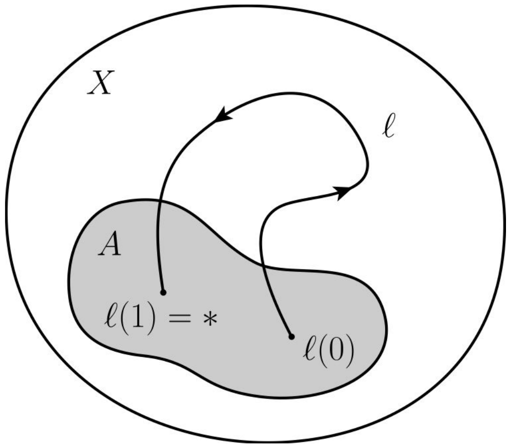

Figure 2.10:

Proposition 8.10 $q \geqq 1$ に対して、次の同型が存在する：

$$\pi_{q-1}(P(X;A,*)) \xrightarrow{\cong} \pi_q(X,A)$$

証明の概略　示すべき同型写像は、$[f] \in \pi_{q-1}(P(X;A,*))$ を代表する写像

$$f : (I^{q-1}, \partial I^{q-1}) \longrightarrow (P(X;A,*), \ell_*)$$

に対して、$I^q = I^{q-1} \times I$ と見て写像

$$\tilde{f} : (I^q, \partial I^q, J^q) \longrightarrow (X, A, *)$$

を対応させることで得られる。 □

$(X;A,B)$ を三つ組, $C = A \cap B \neq \phi$ とするとき、包含写像 $i : (A,C) \to (X,B)$ から写像

$$P(A;C,*) \longrightarrow P(X;B,*)$$

が自然に定義されて、次の可換図式が存在する：

$$\begin{tikzcd}
\pi_q(P(A;C,*)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_q(P(X;B,*)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_q(P(X;B,*), P(A;C,*)) \\
\pi_{q+1}(A,C) \arrow[r, "i_*"] & \pi_{q+1}(X,B) &
\end{tikzcd}$$

したがって、path 空間の対 $(P(X;B,*), P(A;C,*))$ は写像 (8.8) のホモトピー論的なギャップを実現している「空間」だと考えられる。

Definition 8.11 $q \geqq 2$ に対して、三つ組 $(X;A,B)$ のホモトピー群を次で定義する：

$$\pi_q(X;A,B) = \pi_{q-1}(P(X;B,*), P(A;C,*))$$

実際にホモトピー切除定理（Thm. 8.7）を証明するためには、仮定された条件のもとで

$$\pi_q(X; A, B) \;=\; 0 \quad (2 \leqq q \leqq m+n-2)$$

を示せば十分であるが、これは近代兵器を使わなくても何とか示せる。例えば

$$X \;=\; C \cup e^m \cup e^n, \quad A \;=\; C \cup e^n, \quad B \;=\; C \cup e^m$$

の場合に、CW 複体によるホモトピー近似の様子をよく見れば良い。

なお、ホモロジー群 $H_*(P(A; C, *))$ と $H_*(A, C)$ は Serre スペクトル系列を用いて比較することも可能である。例えば、$A = S^n$, $C = *$ である場合には次の事実が知られている。

Theorem 8.12 $n \geqq 2$ に対して

$$H_k(\Omega S^n; \mathbb{Z}) \;=\; \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0,\, n-1,\, 2(n-1),\, 3(n-1),\, \ldots) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

□

9 Freudenthal の懸垂定理

空間 X および 1 次元球面 S^1 を基点付き空間と考え、X の懸垂（suspension）を

$$\Sigma X = X \wedge S^1 = X \times S^1 / (X \times \{*\} \cup \{*\} \times S^1)$$

で定義する。例えば

$$\Sigma S^n = S^n \wedge S^1 \simeq S^{n+1}$$

である（Figure 2.11 参照）。このとき、懸垂写像

$$\Sigma : \pi_i(X) \longrightarrow \pi_{i+1}(\Sigma X)$$

が定義され、$i \geqq 1$ では群の準同型、また $i \geqq 2$ では可換群の準同型になる。懸垂写像は、X の連結性が i に比べて十分に大きいときには同型になることが知られている。

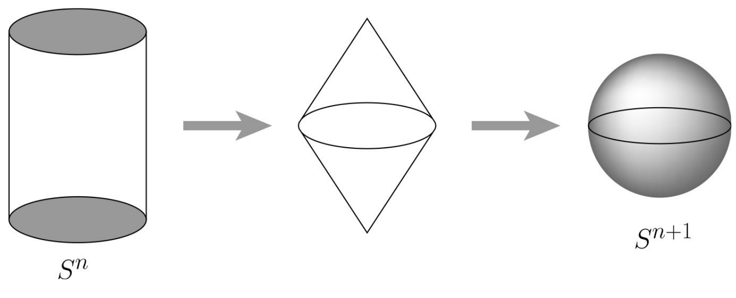

Figure 2.11:

Theorem 9.1 (Freudenthal の懸垂定理) 基点付き空間 X が $(n-1)$ 連結ならば、準同型

$$\Sigma : \pi_i(X) \longrightarrow \pi_{i+1}(\Sigma X)$$

は $i < 2n-1$ で 1 対 1 対応、また $i \leqq 2n-1$ で全射である。 □

Example 9.2 (応用例)

$$\pi_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (i = n) \\ 0 & (i < n) \end{cases}$$

（すなわち S^n が $(n-1)$ 連結であること）は既知とする。Hopf の定理により、$\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ は S^1 を fiber に持つ Hopf 写像

$$S^3 \longrightarrow S^2$$

を生成元として持っており、また同型 $\pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が成立することも 1940 年代後半には既に知られていた。このとき、懸垂写像を繰り返せば Thm. 9.1 により

$$\pi_3(S^2) \xrightarrow{\Sigma} \pi_4(S^3) \xrightarrow[\cong]{\Sigma} \pi_5(S^4) \xrightarrow[\cong]{\Sigma} \cdots$$

すなわち、同型 $\pi_{n+1}(S^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $(n \geqq 3)$ が成立する。

ここまで見た「和の原理」に基づく方法を用いて、球面のホモトピー群に関する結果として 1940 年代までに

$$\pi_i(S^n) = \begin{cases} 0 & (i < n) \\ \mathbb{Z} & (i = n) \end{cases}, \qquad \pi_{n+1}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 2) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (n = 3) \end{cases}, \qquad \pi_n(S^1) = 0 \quad (n \geqq 2)$$

程度が知られていた（当時この計算は難しかった！）。50 年代に Serre が登場して以降は「積の原理」（スペクトル系列）に基づく組織だった方法が導入されて、球面のホモトピー群の計算は大きく進展した。

一般に、空間のホモトピー群を求めることは非常に困難である。特に、非可換群である π_1 が自明でない場合は、π_1 がいろいろなところに作用し始めて理論が破綻してしまう。

Chapter 3

ホモロジー群とホモトピー群の相互関係（Serreの理論）

10　Leray-Serreのスペクトル系列

ホモロジー群とホモトピー群の双方を比較して、ホモトピー群を計算する手段を考えたい。双方を比較する一番最初の定理は次のものである：

Theorem 10.1 (Hurewicz の定理) 基点付きの空間 X が弧上連結と仮定する。このとき *Hurewicz* 写像

$$H : \pi_i(X) \longrightarrow H_i(X; \mathbb{Z})$$

は $i = 1$ のとき群のアーベル化, $i \geqq 2$ のときアーベル群の準同型である。また、X が $(n-1)$ 連結 $(n \geqq 2)$ のとき写像 H は $i \leqq n$ で同型になる。 □

この先（つまり $i > n$ の場合）をどう調べたらよいか？が問題である。

CW 複体は「ホモロジー的に簡単な空間」であるディスク $(D^n, \partial D^n)$ に付随する cofibration $\partial D^n \hookrightarrow D^n$ を元にして「和の原理（colimit 近似）」で空間を構成した空間であり、前章までは与えられた位相空間 X を CW 複体によって近似して考えた。

一方、空間 X を「積の原理（limit 近似）」で近似することも可能である（例えばファイバー束は積の原理）。その場合は「ホモトピー的に簡単かつ人工的な空間（= Eilenberg-MacLane 空間）」が中心的な役割を果たしながら、fibration で空間を組み立てていく。

ここでは、fibration やスペクトル系列などを駆使してホモロジー群とホモトピー群の相互関係を解析した、俗に「Serre の 3 部作」と呼ばれる論文群

- Homologie singulière des espaces fibrés. ([28], 1951 年)
  （ファイバー空間のホモロジー群、Serre スペクトル系列について）
- Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. ([29], 1953 年)
  （Serre の class $\mathcal{C}$ の理論について）
- Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane. ([30], 1953 年)
  （$\mathbb{Z}_2$ 係数の cohomology 群の計算について）

のうち、最初の2つで得られた結果について紹介する。（第3作は、$K(\mathbb{Z}_2, n)$ の $\mathbb{Z}_2$ 係数コホモロジーについて扱ったものであり、後で扱う。）

Serreの第1作 [28] と第2作 [29] の内容

(1) fibrationの（コ）ホモロジー群に対するLeray-Serreのスペクトル系列とその応用

(2) Serreのclass $\mathscr{C}$ の理論（この理論の中で、スペクトル系列を使ってホモロジー群とホモトピー群の関係を見る）

class $\mathscr{C}$ の理論の範疇でも、Hurewiczの定理を定式化して証明を与えることが出来る。さらに、その系として $\pi_i(S^n)$ に関する定性的な結果（Thm. 11.22）が得られる。

Remark 10.2 (戸田宏先生（1928年生まれ）の仕事について) 戸田先生のもとで60年代の後半に修士時代を過ごしたが、戸田先生は1951年くらいからホモトピー論に関する計算を開始し、安定ホモトピー論と不安定ホモトピー論のギャップを記述する仕事など（この講義で解説しないものを含めて）多くの仕事をおこなった。その方法は次の原理達による。

(1) Blakers-Masseyの定理（切除定理）

(2) Freudenthal懸垂写像　$\pi_n(X) \to \pi_{n+1}(\Sigma X)$

(3) 一般化されたHopf不変量

(4) JamesのEHP系列とその拡張

(5) Toda bracket（代数のMassey積に相当する）

(6) $K(\pi, n)$ を用いる（存在は1940年代から知られていた）:

- 可換群 π に対して、π の分解列

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow \pi \longrightarrow 0$$

をCW複体で実現する

- 写像 $S^n \to K(\mathbb{Z}, n)$ のsourceとtargetを比較する（targetのホモロジー群が分かると $\pi_*(S^n)$ のことも少し分かる）

$\pi : E \to X$ をSerre fibrationとして、$F = \pi^{-1}(*)$ かつ X, F, E は弧状連結であると仮定するとき、$\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群

$$H_*(F), \quad H_*(E), \quad H_*(X)$$

の相互関係を、ある種の「近似理論」を用いて記述したい。

$E = X \times F$（自明な積）の場合　アーベル群 M に対して、普遍係数定理

$$0 \longrightarrow H_p(X) \otimes M \longrightarrow H_p(X; M) \underset{\longrightarrow}{\overset{\exists}{\longleftarrow}} \mathrm{Tor}(H_{p-1}(X), M) \longrightarrow 0$$

および Künneth の定理を用いることによって

$$\begin{aligned} H_n(E;G) &= H_n(X \times F;G) \\ &= \sum_{p+q=n} H_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(F;G) \bigoplus \sum_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}(H_p(X), H_q(F;G)) \\ &= \sum_{p+q=n} \Big(H_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(F;G) \bigoplus \mathrm{Tor}(H_{p-1}(X), H_q(F;G)) \Big) \\ &= \sum_{p+q=n} H_p(X; H_q(F;G)) \qquad \text{（$H_q(F)$ 係数のコホモロジー群）} \end{aligned}$$

が成立する。

<u>一般の fibration $\pi : E \to X$（ねじれた積）の場合</u>　$H_n(E)$ の「近似列（＝スペクトル系列）」を次々に構成する：

$$\text{第 1 近似：} \textstyle\sum_{p+q=n} H_p(X; H_q(F)) \quad \Longrightarrow \quad \text{第 ∞ 近似：} H_n(E)$$

近似を次第に良くしていく（＝スペクトル系列の微分を計算する）ことで $H_n(E)$ が得られる。これがスペクトル系列を用いた計算の考え方である。

<u>局所系について</u>　$\gamma : [0,1] \to X$ で $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ をそれぞれ固定する。このとき次の図式を可換にする写像 $\tilde{\gamma}$（写像 γ の持ち上げ）が up to homotopy で一意に存在する。

$$\begin{tikzcd} F_{x_0} \times \{0\} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "i_0"'] & & E \arrow[d] \\ F_{x_0} \times I \arrow[r] \arrow[urr, dotted, "\tilde{\gamma}"] & I \arrow[r, "\gamma"] & X \end{tikzcd}$$

この $\tilde{\gamma}$ はホモトピー同値 $\tilde{\gamma} : F_{x_0} \to F_{x_1}$ を導く。(Figure 3.1 参照)。

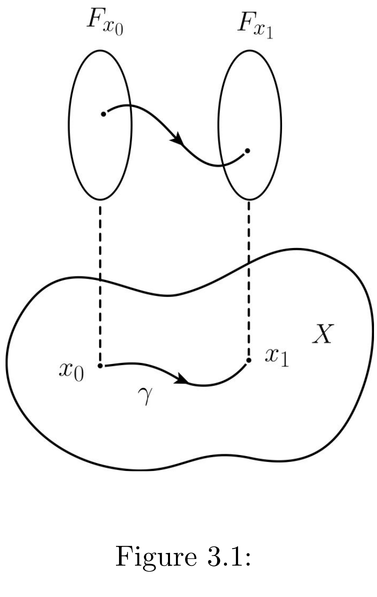

Figure 3.1:

　X の 2 つの path γ と γ' が両端を固定してホモトピックならば、得られる写像 $\tilde{\gamma}$ と $\tilde{\gamma}'$ もホモトピックである (Figure 3.2 参照)。また、γ と γ' がホモトピックでなければ、$\tilde{\gamma}$ と $\tilde{\gamma}'$ もホモトピックとは限らない。(Figure 3.3 参照)。 以上のことから、次の対応が得られる：

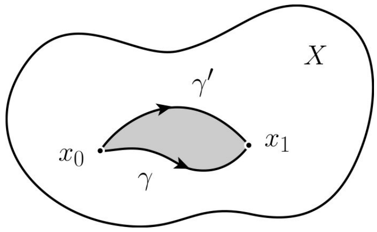

Figure 3.2:

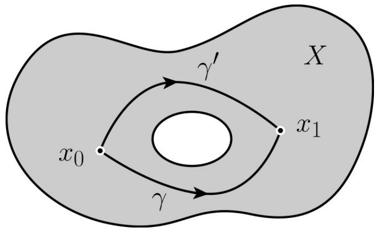

Figure 3.3:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x_0) & \longrightarrow & （F_{x_0}\text{ のホモトピー同値類}） \\ [\gamma] & \longmapsto & [\tilde{\gamma}] \end{array}$$

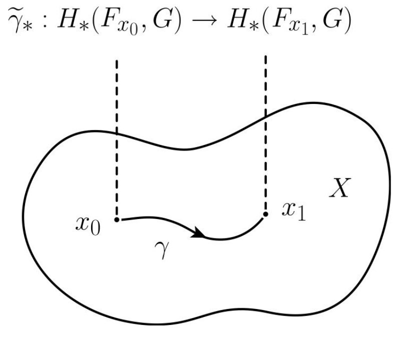

Figure 3.4:

Remark 10.3 $\bigcup_{x\in X} H_*(F_x;G)$ は X 上の次数付きアーベル群の局所系を定める。特に、自明な局所系を持つ場合（例えば $\pi_1(X,*)=0$ の場合）は物事が非常に簡単になる。

アーベル群 G を固定し、$\bigcup_{x\in X} H_*(F_x;G)$ を X 上の次数付きアーベル群の局所系として、局所係数のホモロジー群を考えることが出来る（[9] あるいは [32] の第 3 部を参照せよ）。

以下では簡単のため局所系は自明であると仮定する。次のデータを canonical に構成できる:

Theorem 10.4 (Leray-Serre のホモロジースペクトル系列)

$$E^r_{*,*} = \left(\sum_{p,q \in \mathbb{Z}} E^r_{p,q},\ d^r \right)$$

は $\mathbb{Z}^2$ *graded* チェイン複体であり、次を満たす：

(1) 微分 d^r $(r \geqq 2)$ で

$$d^r : E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p-r,q+r-1}$$

かつ $d^r \circ d^r = 0$ を満たすものが有る。

(2) 各 $n \geqq 0$ に対して、アーベル群の *filtration*

$$H_n(E;G) = D_{n,0} \supset D_{n-1,1} \supset \cdots\cdots \supset D_{-1,n+1} = \{0\}$$

が存在して、アーベル群の同型 $E^\infty_{p,q} \cong D_{p,q}/D_{p-1,q+1}$ が成立する。

(3) $E^2_{p,q} = H_p(X; H_q(F;G))$

(4) $\mathbb{Z}^2$ *graded* アーベル群として　$H(E^r_{*,*}, d_r) \cong E^{r+1}_{*,*}$

(5) $N > \max(p, q+1)$ のとき　$E^\infty_{p,q} = E^N_{p,q}$

□

Remark 10.5 局所系が自明でないときは、E^2 項の修正が必要である。

スペクトル系列の微分を計算することは、近似の精度を上げることに対応する。

<u>スローガン</u>　（スペクトル系列のような）メカの仕組みを勉強するのは事故に遭ってからでよい。まずは高速をどんどん飛ばして景色を楽しめ。

コホモロジー版の Leray-Serre のスペクトル系列を考えることも出来る。以下、G を $\mathbb{Z}$ 上の可換環（例：$G = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$ 等）とし、局所系 $\bigcup_{x \in X} H^p(F_x;G)$ は自明であり、かつ $H^*(X;G)$ 達は G 上の次数付き可換代数（つまり、$xy = (-1)^{|x||y|}yx$）であると仮定する。

Theorem 10.6 (Leray-Serre のコホモロジースペクトル系列（環の構造込めて）)

$$E^{*,*}_r = \left(\sum_{p,q} E^{p,q}_r,\ d_r \right)$$

は $\mathbb{Z}^2$ *graded* チェイン複体であり、次を満たす：

(1) 微分 d_r $(r \geqq 2)$ で

$$d_r : E^{p,q}_r \longrightarrow E^{p+r,q-r+1}_r$$

かつ $d_r \circ d_r = 0$ を満たすものが有る

(2) d_r は *derivation* である：$\deg(x) = (p,q)$ のとき全次数（*total degree*）を $||x|| = p+q$ とおいて

$$d_r(xy) = d_r(x)\,y + (-1)^{||x||}x\,d_r(y)$$

(3) 各 $n \geqq 0$ に対して、アーベル群の *filtration*

$$H^n(E;G) = D^{0,n} \supset D^{1,n-1} \supset \cdots\cdots \supset D^{n+1,-1} = \{0\}$$

は積と交換可能である：

$$D^{p,q} \cdot D^{p',q'} \supset D^{p+p',q+q'}$$

$H^*(E;G) = \sum_n H^n(E;G)$ に対して $\mathbb{Z}^2$ *graded* 代数の同型

$$E_\infty^{*,*} \quad = \quad \mathrm{Gr}^{*,*}(H^*(E;G))$$

がある。

(4) $E_2^{p,q} = H^p(X; H^q(F;G))$

(5) $\mathbb{Z}^2$ *graded* アーベル群として　$H(E_r^{*,*}, d_r) \cong E_{r+1}^{*,*}$

(6) $N > \max(p,q)$ のとき　$E_\infty^{p,q} = E_N^{p,q}$ □

Example 10.7 S^1 をファイバーに持つ fibration

$$S^1 \longrightarrow S^{2n+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^n \qquad (n \geqq 1)$$

に随伴する Serre スペクトル系列の E_2 項は

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{C}P^n; H^q(S^1)) = \begin{cases} H^p(\mathbb{C}P^n) & (q = 0,1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

である。生成元 $s \in H^1(S^1)$ に対し $s^2 = 0$ が成り立つことから、環としては $H^*(S^1) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}(s)$ であり、また E_∞ が

$$E_\infty^{*,*} = H^p(S^{2n+1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = 0,\, 2n+1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

のようになることから、E_2 項を表すチャートは FIGURE 3.5 のようになる。$x \in H^2(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$

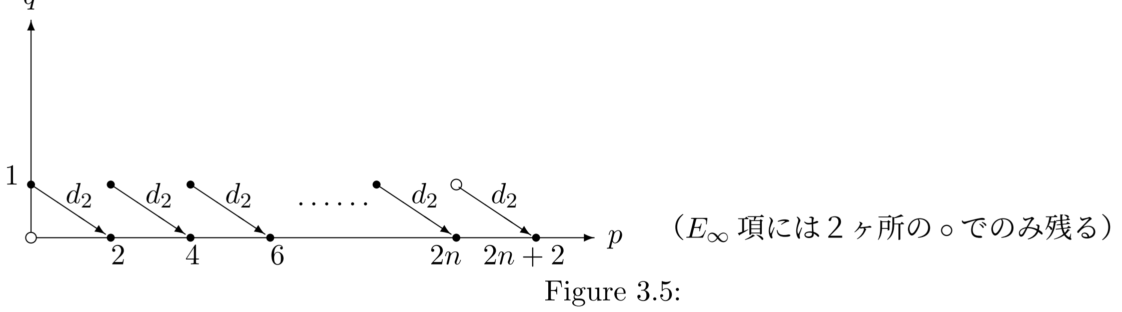

Figure 3.5:

を生成元とするとき、微分

$$d_2 : E_2^{0,1} \longrightarrow E_2^{2,0}$$

は同型でなければならないので、次の対応が得られる：

$$\begin{aligned} d_2(1 \otimes s) &= x \otimes 1, \\ d_2(x^n \otimes s) &= x^{n+1} \otimes 1 \quad (n \geqq 1) \end{aligned}$$

また、チャートから明らかに微分 d_r $(r \geqq 3)$ は自明なので、同型

$$\begin{aligned} E_3^{0,1} &\cong E_4^{0,1} \cong \cdots\cdots \cong E_\infty^{0,1}, \\ E_3^{2,0} &\cong E_4^{2,0} \cong \cdots\cdots \cong E_\infty^{2,0} \end{aligned}$$

が得られる。生成元 $x^n \otimes s \in E_2^{2n,1}$ が E_∞ 項に生き残るためには $x^{n+1} = 0$ でなければならないので、環としての同型 $H^*(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ が得られる。

Example 10.8 局所系が自明な fibration

$$E \xrightarrow{\pi} X$$

が底空間 X の各点で $\mathbb{C}P^n$ とホモトピー同値なファイバー F を持つ場合は

$$H^*(F;\mathbb{Z}) \cong H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$$

が成立し、fibration に随伴する Serre スペクトル系列の E_2 項は次数付き環として

$$E_2^{*,*} = H^*(X; H^*(\mathbb{C}P^n)) \cong H^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} H^*(\mathbb{C}P^n)$$

のようになる。ここで、もし写像

$$i^* : H^2(E) \longrightarrow H^2(\mathbb{C}P^n)$$

が全射、すなわち $i^*(\tilde{x}) = x \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ となる元 $\tilde{x} \in H^*(E)$ が存在すると仮定すれば、$x \in E_2^{0,2}$ は E_∞ 項まで生き残るから、微分

$$d_r : E_r^{0,2} \longrightarrow E_r^{2,1}$$

は $d_r(x) = 0$ $(r \geqq 2)$ を満たす。したがって、スペクトル系列はつぶれて $E_2^{*,*} = E_\infty^{*,*}$ となる。さらに Ex. 10.7 により $x^{n+1} = 0 \in H^*(\mathbb{C}P^n)$ だから、$H^*(X)$ 上の加群としては

$$H^*(E) \cong \bigoplus_{i=0}^{n} H^*(X)\left\{\tilde{x}^i\right\}$$

が成立する。さらに積構造を考えれば、$\tilde{x}^{n+1}$ は $H^*(X)$ 上で $1, \tilde{x}, \ldots, \tilde{x}^n$ の線形結合で書けなければならないので、ある多項式

$$f(\tilde{x}) = \tilde{x}^{n+1} + a_1\tilde{x}^n + \cdots\cdots + a_{n+1} \qquad (a_i \in H^{2i}(X))$$

が存在して $H^*(X)$ 上の代数として次の同型が成立する（多項式 $f(\tilde{x})$ は fibration に依存する）：

$$H^*(E) \cong H^*(X)[\tilde{x}]/(f(\tilde{x})) \tag{10.9}$$

Example 10.10 $V \to X$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ をファイバーとする複素ベクトル束とし、V に随伴した $\mathbb{C}P^n$ 束

$$\mathbb{C}P^n \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} X$$

を考える。$L \to E$ を E 上の canonical な複素直線束（すなわち、V の１次元部分空間をファイバーとする E 上の直線束）とするとき、L の１次元 Chern 類

$$\widetilde{x} \;=\; c_1(L) \quad\in\quad H^2(E;\mathbb{Z})$$

は Ex. 10.8 の条件を満たすことが示されるので、等式 (10.9) を満たす多項式

$$f(\widetilde{x}) \quad=\quad \tilde{x}^{n+1} + c_1(E)\tilde{x}^n + \cdots\cdots + c_{n+1}(E)$$

が存在する。このとき各係数 $c_i(E) \in H^{2i}(X)$ は E の i 番目の Chern 類である（[11] を参照せよ）。

Definition 10.11 (ファイバー空間（＝位相幾何学における弦模型）) X を基点 $* \in X$ を持つ弧状連結な位相空間として、空間 $P(X;X,*)$ を

$$P(X;X,*) = \{\ell : [0,1] \to X \mid \ell(0) \in X,\, \ell(1) = *\}$$

で定義する（Figure 3.6 参照）。

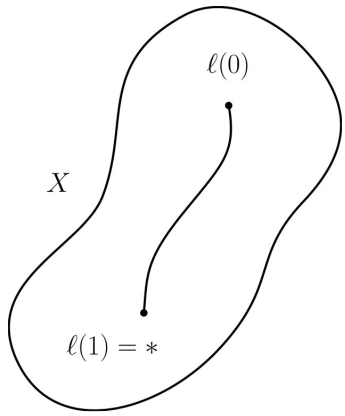

Figure 3.6:

空間 $P(X;X,*)$ は（道を徐々に縮めることで）可縮であることが示される（Figure 3.7 参照）。

$$H_*(P(X;X,*)) = H_*(pt) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 0) \\ 0 & (* \neq 0) \end{cases}$$

このとき

$$\pi : P(X;X,*) \longrightarrow X \quad\Longleftrightarrow\quad \pi(\ell) = \ell(0)$$

はホモトピー持ち上げ性質を持つ fibration であり、ファイバーは

$$\Omega X \quad=\quad \{\ell : [0,1] \to X,\, \ell(0) = \ell(1)\}$$

で与えられる。これは X のループ空間と呼ばれる。

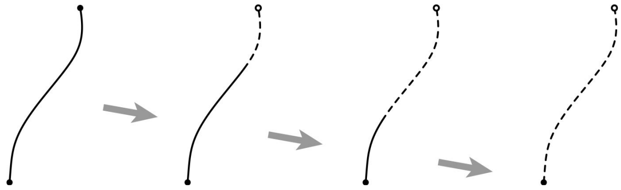

Figure 3.7:

もし $H_*(X)$ の構造が分かっていれば、fibration

$$\Omega X \longrightarrow P(X; X, *) \xrightarrow{\pi} X$$

に随伴する Serre スペクトル系列を用いて $H_*(X)$ と $H_*(\Omega X)$ を比較することにより、$H_*(\Omega X)$ を求めることが可能になる。さらに、上の fibration からは次のホモトピー群の完全列も得られる：

$$\pi_q(P(X; X, *)) = 0 \longrightarrow \pi_q(X) \xrightarrow[\cong]{\partial} \pi_{q-1}(\Omega X) \longrightarrow \pi_{q-1}(P(X; X, *)) = 0$$

Example 10.12 ループ空間

$$\Omega S^n \quad = \quad \{\ell : [0,1] \to S^n \mid \ell(0) = \ell(1) = *\}$$

のホモロジー群は Serre fibration

$$\Omega S^n \longrightarrow P(S^n; S^n, *) \xrightarrow{\pi} S^n$$

を用いて計算出来る。$P(S^n; S^n, *)$ が可縮なことから Serre ホモロジースペクトル系列の E^∞ 項は

$$H_p(P(S^n; S^n, *); \mathbb{Z}) \;=\; \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = 0) \\ 0 & (p \neq 0) \end{cases}$$

となり、一方スペクトル系列の E^2 項は

$$E^2_{p,q} = H_p(S^n; H_q(\Omega S^n)) = \begin{cases} H_q(\Omega S^n) & (p = 0,\, n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で与えられるので、まず $0 \leqq q \leqq n-1$ の範囲で以下のことが分かる：

$$H_q(\Omega S^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (q = 0,\, n-1) \\ 0 & (0 < q < n-1) \end{cases}$$

スペクトル系列の微分を順番に見ていくことによって、結局次の結果が得られる：

$$H_i(\Omega S^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (i = k(n-1),\, k \geqq 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

Remark 10.13 これらの理論の応用として、ループ空間のホモロジー群の情報を幾何的なデータと比較することが考えられる。例えば次のような例が挙げられる：

- S^N にリーマン計量を入れて微分幾何的に考える（閉測地線の幾何）。

$$L(S^N) = \left\{\ell : S^1 \to S^N : \text{区分的に連続な写像}\right\}$$

- energy function E や length function L 等についてモース理論を考える（[17] を参照せよ）。

$$\begin{array}{lcl} E \text{ の critical point} & \Longleftrightarrow & \text{閉測地線で弧長をパラメータとする曲線} \\ L \text{ の critical point} & \Longleftrightarrow & \text{測地線} \end{array}$$

11 Serre の $\mathscr{C}$ 理論

Leray-Serre のスペクトル系列の応用として、Serre によるアーベル群の class $\mathscr{C}$ の理論と、いくつかの計算例（球面のホモトピー群, $K(\pi;n)$ のホモロジー群など）について考察する。

ホモロジー群とホモトピー群に関する最も最初かつ重要な定理は、次の Hurewicz の定理だった：

Theorem 11.1 $(n-1)$-連結 $(n \geqq 1)$ な空間 X に対して、以下が成り立つ：

(1) 準同型 $H_i : \pi_i(X, *) \to H_i(X;\mathbb{Z})$ は $1 \leqq i \leqq n-1$ で同型、すなわちゼロである。

(2) $H_n : \pi_n(X, *) \to H_n(X;\mathbb{Z})$ は、$n = 1$ のときアーベル化, $n \geqq 2$ のときアーベル群の同型である。 □

この定理を class $\mathscr{C}$ の理論に移植して、いくつかの結果を導く。

Definition 11.2 $\mathscr{C}$ をアーベル群の空でない集まり（集合とは限らない）とする。（f が必ずしも単射でなく g が必ずしも全射でない）任意の完全列

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

において、「$L,\ N \in \mathscr{C}$ ならば $M \in \mathscr{C}$」が成り立つとき、$\mathscr{C}$ を「Serre の class $\mathscr{C}$（または単に Serre 類）」と呼ぶ。

Lemma 11.3 $\mathscr{C}$ が *Serre* 類である必要十分条件は以下を満たすことである：

(1) 自明なアーベル群は $\mathscr{C}$ に入る：$\{0\} \in \mathscr{C}$

(2) $L \in \mathscr{C}$ かつ $L \cong L'$ ならば、$L' \in \mathscr{C}$

(3) $L \subset M$ かつ $M \in \mathscr{C}$ ならば、$L,\ M/L \in \mathscr{C}$

(4) 完全列　$0 \to L \to M \to N \to 0$　において $L,\ N \in \mathscr{C}$ ならば $M \in \mathscr{C}$ □

Serre 類の簡単な例としては、「$\{0\}$ のみからなる場合」、「アーベル群全体」、「有限生成アーベル群全体」、「有限アーベル群全体」などがある。

さらに次のような例も有る：

Example 11.4 (南範彦氏による Serre 類の例の追加)

(1) P を素数からなる集合とする。（P が空集合や有限集合, 無限集合の場合もあり得る。）このとき、各元 $a \in G$ に対して P に属する有限個の素数 $(p_1, \dots, p_\ell)$ と自然数 n が存在して、$(p_1, \dots, p_\ell)^n \cdot a = 0$ となるようなアーベル群 G の全体。

$P = \phi$ の場合は $\{0\}$ だけからなるので上の「$\{0\}$ のみからなる場合」であり、また $P =$（すべての素数の集合）の場合は torsion アーベル群全体となる。後者は 5 章で学習する有理ホモトピー論を導入するにあたり、基本的な役割を果たす。

(2) P を (1) と同様の集合とする。このとき、有限生成アーベル群で、(1) の条件を満たすものの全体。

$P = \phi$ の場合は上の「$\{0\}$ のみからなる場合」、また $P =$（すべての素数の集合）の場合は有限アーベル群全体となるので上の「有限アーベル群全体」の場合に対応する。

Definition 11.5 $\mathscr{C}$ をアーベル群の Serre 類とする。

(1) $A \equiv 0 \bmod \mathscr{C}$ であるとき、A は $\mathscr{C}$-zero であるという。

(2) $f : A \to B$ をアーベル群の準同型とするとき

$$f \text{ が } \mathscr{C}\text{-単射（または } \mathscr{C}\text{-全射）} \quad \Longleftrightarrow \quad \ker f \in \mathscr{C} \text{（または } \operatorname{coker} f \in \mathscr{C}\text{）}$$

$\mathscr{C}$-単射かつ $\mathscr{C}$-全射ならば、$\mathscr{C}$-同型という。

Definition 11.6 $\mathscr{C}$ をアーベル群の Serre 類とする。

(1) $A, B \in \mathscr{C}$ ならば $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$, $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}}(A, B) \in \mathscr{C}$ が成立するとき、$\mathscr{C}$ は環であるという。

(2) $A \in \mathscr{C}$ と任意のアーベル群 B に対して $A \otimes_{\mathbb{Z}} B \in \mathscr{C}$ が成立するとき、$\mathscr{C}$ をイデアルという。

Remark 11.7 (南範彦氏によるコメント) $\mathscr{C}$ がイデアルのとき、任意のアーベル群 $A \in \mathscr{C}$ と任意のアーベル群 B に対して $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}}(A, B) \in \mathscr{C}$ が成り立つ。実際、B の $\mathbb{Z}$ 加群としての射影分解を

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

とすれば、$\mathrm{Tor}^i_{\mathbb{Z}}(A, B)$ $(i = 0, 1)$ は次の複体のホモロジーだったことを思い出そう：

$$0 \longrightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} P_1 \longrightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} P_0 \longrightarrow 0$$

特に $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}}(A, B) = \mathrm{Tor}^1_{\mathbb{Z}}(A, B)$ は $A \otimes_{\mathbb{Z}} P_1$ の部分加群となるが、$\mathscr{C}$ がイデアルかつ $A \in \mathscr{C}$ だから $A \otimes_{\mathbb{Z}} P_1 \in \mathscr{C}$ となることと、$\mathscr{C}$ が Serre 類であることを用いれば $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}}(A, B) \in \mathscr{C}$ が示される。

<u>Eilenberg-MacLane 複体</u>　与えられたアーベル群 π と整数 $n \geqq 1$ に対して、Eilenberg-MacLane 空間 $K(\pi, n)$ は次の性質を持つものとして特徴付けられた（1940 年頃のこと）：

- $K(\pi, n)$ は CW 複体
- $\pi_i(K(\pi, n)) = \begin{cases} \pi & (i = n) \\ 0 & (i \neq n) \end{cases}$

- $K(\pi, n)$ は up to homotopy で一意に定まる

Eilenberg-MacLane 空間はこの性質だけで定義されており、存在が保証されたとしても導入された 1940 年代にはそれを扱う道具立てはまだ開発されていなかった。そのような時代背景のもとでこのような物を導入する洞察にはただただ感心するばかりである。

Eilenberg-MacLane 空間 $K(\pi, n)$ の構成法はいくつかあるが、ここでは CW 複体を使った方法を後に紹介する。

Example 11.8 (Eilenberg-MacLane 空間の例)

$$K(\mathbb{Z}, 1) = S^1, \quad K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}P^\infty, \quad K(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, 1) = S^\infty/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$$

Remark 11.9 $K(\pi, n)$ 達は次の fibration で関係し合っている。

$$K(\pi, n) \longrightarrow E \longrightarrow K(\pi, n+1)$$

（ここで、E は可縮な空間。）この fibration に Leray-Serre のスペクトル系列を用いることで、帰納的に $H^*(K(\pi, n))$ を計算することが出来る。後に、$H^*(K(\mathbb{Z}_p, n); \mathbb{Z}_p)$（$p$ が奇素数の場合）の計算を紹介する。

Example 11.10 $K(\pi, 1)$ は、まず可縮かつフリーな π の作用を持つ CW 複体 E を構成してから $E/\pi = K(\pi, 1)$ とおくことで得られ、fibration

$$E \longrightarrow K(\pi, 1)$$

における π の作用は被覆変換（deck transformation）である。また、群のコホモロジーとの間に次の同型が存在する：

$$H_n(\pi; \mathbb{Z}) \cong H_n(K(\pi, 1); \mathbb{Z}) \qquad (\text{左辺＝代数的, 右辺＝位相幾何的})$$

Definition 11.11 $\pi \in \mathscr{C}$ ならば $H_n(\pi; \mathbb{Z}) \in \mathscr{C}$ $(n \geqq 1)$ が成り立つとき、$\mathscr{C}$ は acyclic と呼ばれる。

Example 11.12 次のことが知られている：

(1) $H_n(K(\mathbb{Z}, 1)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0, 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

(2) $H_n(K(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, 1)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0) \\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & (n = 1, 3, 5, \ldots) \\ 0 & (n = 2, 4, 6, \ldots) \end{cases}$

したがって、$\mathscr{C}$ を有限生成アーベル群全体（あるいは有限アーベル群全体）とするとき、$\mathscr{C}$ は環かつ acyclic になる。

ここからは様々な計算を $\mathscr{C}$ を法として（すなわち $\mathscr{C}$-同型で）考えてみる。

Theorem 11.13 *X を連結かつ単連結な空間, また $\mathscr{C}$ を acyclic な Serre 類とする。このとき次が成立している：*

(1) 任意の $1 \leqq i < n$ に対して $\pi_i(X) \in \mathscr{C}$ $\iff$ 任意の $1 \leqq i < n$ に対して $H_i(X) \in \mathscr{C}$

(2) (1) が成立するとき、Hurewicz 準同型 $H_n : \pi_n(X) \to H_n(X)$ *は* $\mathscr{C}$*-同型である*

□

この定理は、後ほど Thm. 11.19 として改めて紹介して証明する。

Remark 11.14 (南範彦氏によるコメント) 実は、Thm. 11.13 は X の単連結という仮定を $\pi_1(X)$ が可換かつ単純という弱い仮定にしても成立する。

Example 11.15 球面のホモロジー群が

$$H_i(S^n;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (i = 0, n) \\ 0 & (i \neq 0, n) \end{cases}$$

で与えられたことと有限生成アーベル群の Serre 類の理論を組み合わせることで、各 $\pi_i(S^n)$ が有限生成であることが示される（Thm. 11.22)。

アーベル群の 5-lemma の類似は class $\mathscr{C}$ でも成立し、スペクトル系列に関しても class $\mathscr{C}$ で考えることが可能である。以下では Serre 類 $\mathscr{C}$ を一つ固定し、X が連結かつ単連結, F が連結な fibration

$$F \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} X$$

に随伴する Serre スペクトル系列

$$\begin{cases} E^2_{*,*} & = & H_*(X;H_*(F)) \\ E^\infty_{*,*} & & H_*(E) \end{cases}$$

を mod $\mathscr{C}$ で考えることで、ホモロジー群 $H_*(E)$, $H_*(X)$, $H_*(F)$ 達の関係を調べることが出来る。

Theorem 11.16 ([29] Prop. 3.A, Prop. 3.B) $n \geqq 2$ とする。さらに、$H_i(E;\mathbb{Z}) \in \mathscr{C}$ $(i > 0)$ かつ $H_i(X;\mathbb{Z}) \in \mathscr{C}$ $(0 < i < n)$ と仮定するとき

(1) $\mathscr{C}$ *が環ならば、*$H_i(F;\mathbb{Z}) \in \mathscr{C}$ $(0 < i < n-1)$ *かつ* $H_{n-1}(F;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(X;\mathbb{Z})$ *は* $\mathscr{C}$ *同型*

(2) $\mathscr{C}$ *がイデアルならば、*$H_i(F;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{i+1}(X;\mathbb{Z})$ $(0 < i < 2n-2)$ *は* $\mathscr{C}$ *同型*

□

単連結な空間 Y が $H_0(Y) \cong \mathbb{Z}$ かつ $H_i(Y) \in \mathscr{C}$ $(i > 0)$ を満たすとき、Y は $\mathscr{C}$-acyclic と呼ばれる。例えば、$\mathscr{C}$ を有限生成アーベル群の Serre 類かつ $\pi \in \mathscr{C}$ とするとき、Ex. 11.12 によって Eilenberg-MacLane 空間 $K(\pi, n)$ は $\mathscr{C}$-acyclic である。

Serre スペクトル系列を用いることで以下の 2 つを示すことが出来る：

Theorem 11.17 ([29] Prop. 4.A) $\mathscr{C}$ *を環とする。このとき* E, F, X *のうち 2 つが* $\mathscr{C}$*-acyclic ならば、3 つ目もそうである。* □

Theorem 11.18 ([29] Prop. 5.B, 6.B) $\mathscr{C}$ *をイデアルとするとき*

(1) 任意の $i>0$ に対して $H_i(X;\mathbb{Z})\in\mathscr{C}$ ならば、$H_i(F;\mathbb{Z})\xrightarrow{i_*}H_i(E;\mathbb{Z})$ は $\mathscr{C}$-同型である。

(2) 任意の $i>0$ に対して $H_i(F;\mathbb{Z})\in\mathscr{C}$ ならば、$H_i(E;\mathbb{Z})\xrightarrow{\pi_*}H_i(X;\mathbb{Z})$ は $\mathscr{C}$-同型である。

□

次の定理は $\mathscr{C}$ 理論の重要な結果である。

Theorem 11.19 (Hurewicz の定理の mod $\mathscr{C}$ 版) X を連結かつ単連結な空間，また $\mathscr{C}$ を *acyclic* な *Serre* 類とする。このとき次が成立している：

(1) 任意の $0<i<n$ に対して $\pi_i(X)\in\mathscr{C}$ $\iff$ 任意の $0<i<n$ に対して $H_i(X)\in\mathscr{C}$

(2) *(1)* が成立するとき、*Hurewicz* 準同型

$$H_n:\pi_n(X)\longrightarrow H_n(X)$$

は $\mathscr{C}$-同型である。

Proof. n についての帰納法で示す。以下では、まず $\mathscr{C}=\{0\}$ の場合（すなわち、オリジナルの Hurewicz の定理）を考えてみる。

<u>$n=1$ の場合</u>　準同型 H_1 は $\pi_1(X)$ のアーベル化を表していたので、X が単連結であるとの仮定からしたがって

$$\pi_1(X)=0\xrightarrow{\cong}H_1(X)=0$$

が成り立つ。

<u>$n\geqq 2$ の場合</u>　$n=k-1$ の場合の (2) を仮定すれば、$n=k$ の場合の (1) は自動的に成り立つ。よって、$0<i<k$ に対して $\pi_i(X)=0$ （または $H_i(X)=0$）を仮定して H_k が同型を示せば良い。

Serre fibration

$$\Omega X\longrightarrow PX\longrightarrow X$$

に関する Serre スペクトル系列を（$PX\simeq *$ を用いて）考えることで、特に微分

$$d^k:E^k_{k,0}=H_k(X)\longrightarrow E^k_{0,k-1}=H_{k-1}(\Omega X) \tag{11.20}$$

が同型なことが分かる。また、Serre fibration はホモトピー群の完全列を誘導するから、境界準同型

$$\partial_k:\pi_k(X)\longrightarrow\pi_{k-1}(\Omega X)$$

も同型である。したがって、次の可換図式の縦の写像は共に同型である：

$$\begin{tikzcd}
\pi_{k-1}(\Omega X) \arrow[r, "H_{k-1}"] & H_{k-1}(\Omega X) \\
\pi_k(X) \arrow[u, "\partial_k", "\cong"'] \arrow[r, "H_k"] & H_k(X) \arrow[u, "\partial_k", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

仮定から $\pi_i(\Omega X) = \pi_{i+1}(X) = 0$ $(0 < i < k-1)$ が成り立つので、$n = k-1$ に対する (2) を用いることで H_{k-1} は同型となり、よって H_k の同型が示せた。

一般の Serre 類 $\mathscr{C}$ の場合でも同様の証明が有効である。(「$= 0$」は「$\in \mathscr{C}$」で、また「同型」は「$\mathscr{C}$ 同型」でそれぞれ置き換えて、同型 (11.20) を示すのには Thm. 11.16 (1) を用いる。) □

このように、fibration やスペクトル系列を用いた Serre の方法はホモトピー論の世界に次々と著しい結果を与えた。次に述べる Eilenberg-MacLane 空間 $K(\mathbb{Z}, n)$ の（コ）ホモロジー群の計算に関する結果もそうである。

<u>$H_i(K(\mathbb{Z}, n))$ の計算</u>　有限生成アーベル群であることは分かっているので、mod（有限アーベル群）で計算したい。そのためには、$H^i(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = H^i(K(\mathbb{Z}, n)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を求めても良い。

Theorem 11.21 ($K(\mathbb{Z}, n)$ の $\mathbb{Q}$ 係数コホモロジー群) 次が成り立つ。

$$H^i(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}[\iota_n] & (i \text{ が偶数}) \\ \Lambda_{\mathbb{Q}}[\iota_n] & (i \text{ が奇数}) \end{cases}$$

ここで、$\iota_n \in H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ は生成元である。

Proof. n についての数学的帰納法で示す。$n = 1$ の場合は、$K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$ により

$$H^*(K(\mathbb{Z}, 1); \mathbb{Q}) \;=\; \Lambda_{\mathbb{Q}}(\iota_1)$$

が成立する。一般の場合は、path 空間 $P = P(K(\mathbb{Z}, n+1), K(\mathbb{Z}, n+1), *)$ および fibration

$$K(\mathbb{Z}, n) \longrightarrow P \longrightarrow K(\mathbb{Z}, n+1)$$

が有るので、これに Serre スペクトル系列を次々に適用すれば良い。 □

これによって、$K(\mathbb{Z}, n)$ のホモロジー群は

$$H_i(K(\mathbb{Z}, n)) \;\equiv\; \begin{cases} \mathbb{Z} & (i = 0, n \quad \text{あるいは} \quad i = kn \ (k \geqq 1 \text{ かつ } n \text{ が偶数})) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

のようになるので、$\pi_n(K(\mathbb{Z}, n)) = \mathbb{Z}$ の生成元を表す写像

$$S^n \longrightarrow K(\mathbb{Z}, n)$$

は n が奇数のとき $\mathscr{C}$-同型であり、誘導されるコホモロジー群の写像

$$H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(S^n; \mathbb{Q}) \cong \Lambda(s_n)$$

により生成元 ι_n は s_n にうつる。一方、n が偶数の場合は同型にならない。これをよく見ることで次の結果が得られる：

Theorem 11.22 (Serre の有限性定理) 球面のホモトピー群について、次が成立する：

- $\pi_m(S^n)$ は有限生成アーベル群である。
- 有限アーベル群を法として

$$\pi_m(S^n) \equiv \begin{cases} \mathbb{Z} & (\text{任意の } n \geqq 1 \text{ に対し } m = n, \text{ または偶数の } n \text{ に対し } m = 2n-1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

□

これは Blakers-Massey の定理の mod $\mathscr{C}$ 版とも捉えることが出来て、この頃までのホモトピー論の最大の結果である。

12 Hopf 不変量問題

$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ は n 次元球面の生成元は簡単だが、Thm. 11.22 で得られた

$$\pi_{2n-1}(S^n) \cong \mathbb{Z} \oplus (\text{有限アーベル群})$$

の $\mathbb{Z}$ 部分の生成元を代表する写像

$$\varphi : S^{2n-1} \longrightarrow S^n \qquad (n \geqq 2 \text{ は偶数})$$

はどのように理解すれば良いのだろうか？

Definition 12.1 (Hopf 不変量) $X_\varphi = S^n \cup_\varphi e^{2n}$ とおくとき、（向きが固定された）生成元

$$H^n(X_\varphi; \mathbb{Z}) \;\cong\; \mathbb{Z} \ni [S^n]^*, \qquad H^{2n}(X_\varphi; \mathbb{Z}) \;\cong\; \mathbb{Z} \ni [e^{2n}]^*$$

に対して

$$[S^n]^* \cup [S^n]^* = H(\varphi)[e^{2n}]^* \qquad (\cup \text{ は cup 積})$$

を満たす整数 $H(\varphi) \in \mathbb{Z}$ を対応させる写像

$$H : \pi_{2n-1}(S^n) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

は準同型写像であることが示せる。$H(\varphi)$ は Hopf 不変量と呼ばれる。

Proposition 12.2 任意の偶数 n に対して、$2\mathbb{Z} \subset Im\,(H)$ が成り立つ。

Proof. $S^n \times S^n$ を

$$S^n \times S^n \;\;=\;\; (* \times S^n) \cup (S^n \times *) \cup e^{2n}$$

のように分解して、$(*, x) \in * \times S^n$ と $(x, *) \in S^n \times *$ を同一視することで得られる CW 複体 $Y = S^n \cup e^{2n}$ を考える。胞体 e^{2n} を S^n に接着する写像 $f \in \pi_{2n-1}(S^n)$ に対して、容易な計算で $H(f) = 2$ が示される。 □

そこで、準同型 H の像は $\mathbb{Z}$ あるいは $2\mathbb{Z}$ のどちらか?ということが問題となる。特に、$H(f) = 1$ となる $f \in \pi_{2n-1}(S^n)$ が存在すれば $\mathrm{Im}\,(H) = \mathbb{Z}$ であるので、そのような写像 f が存在するかどうかが問題である。

$H(\varphi) = 1$ を満たす写像 φ が存在すれば、$n = 2^s$ の形でなければならないのはすぐ分かる：ある $\varphi \in \pi_{2n-1}(S^n)$ が $H(\varphi) = 1$ を満たせば、係数の変換

$$\rho : H^i(X_\varphi; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(X_\varphi; \mathbb{Z}/2)$$

による像

$$\rho([S^n]^* \cup [S^n]^*) = \rho([S^n]^*) \cup \rho([S^n]^*) = Sq^n(\rho([S^n]^*))$$

は自明ではない。一方、Steenrod 作用素 Sq^n は $n = 2^s$ の形以外では decomposable であり、$0 < i < n$ に対して $H^{n+i}(X_\varphi; \mathbb{Z}) = 0$ であることから、$n \neq 2^s$ であれば $Sq^n(\rho([S^n]^*)) = 0$ である。

実際には次の結果が得られる：

Theorem 12.3 準同型 H の像が $\mathbb{Z}$ になる必要十分条件は $n = 2,\, 4,\, 8$ である。 □

Hopf 不変量が 1 の写像は、$\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$（Cayley 数）などの性質を用いて構成される。

Hopf 不変量問題は、secondary operation を用いて 1958 年に J.F.Adams [3] によって最初に解決された。後に、K 理論を用いてもっと簡単に解かれた（Atiyah [1] 参照）。

Chapter 4

障害理論とその応用

写像の拡張性の可能性などのトポロジーの問題を代数的な量で判断出来るように問題を還元する手法を、一般に「障害理論」と呼び、これはホモトピー論の応用を考える上で重要なものである。

X, Y を位相空間とするとき、（基点を考えない）ホモトピー集合

$$[X, Y] = \mathrm{Map}(X, Y)/(\text{ホモトピック})$$

を計算するために、$[X, Y]$ の近似として $[X^{(n)}, Y]$ を考えようというのが（古典的な）障害理論の動機付けとなっている。

この章の参考文献としては、例えば [7] の §5, [9] の第 12 章, [32] の第 III 部等を挙げておく。

13 π_1 のホモトピー群への作用

基本的設定　まず、$X = S^n$ $(n \geqq 1)$ の場合を考える（Y は弧状連結としてよい）：

$$[S^n, Y] = \mathrm{Map}(S^n, Y)/(\text{ホモトピック})$$

$* \in Y$ を基点とするとき、写像

$$\pi_n(Y, *) \longrightarrow [S^n, Y]$$

を「基点の行き先を無視する」ことで定義する。

Definition 13.1 ($\pi_1(Y, *)$ の $\pi_n(Y, *)$ への作用) 写像

$$f : (S^n, *) \longrightarrow (Y, *)$$

への元 $\gamma \in \pi_1(Y, *)$ の作用を以下で定義する：$I = [0, 1]$ とするとき、以下の図式を可換にする写像 $\widetilde{f}$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
(S^n, *) \times I \arrow[r, dotted, "\widetilde{f}"] & (Y, Y) \\
(S^n, *) \times \{0\} \cup (* \times I) \arrow[u, hook] \arrow[r] & (Y, *) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

ここで、$(S^n,*)\times\{0\}\to(Y,*)$ は f で、また $(*,I)\to(Y,*)$ は γ で、それぞれ与えられている。このとき $\gamma([f])$ を次で定義する：

$$\gamma([f]) = [\tilde{f}\,|_{(S^n,*)\times\{1\}}] : (S^n,*) \longrightarrow (Y,*)$$

このようにして定義された作用

$$\gamma_* : \pi_n(Y,*) \longrightarrow \pi_n(Y,*)$$

は $n=1$ のとき群の準同型, また $n \geqq 2$ のときアーベル群の準同型となり以下を満たす：

$$(\gamma_2\cdot\gamma_1)_* = (\gamma_2)_*\cdot(\gamma_1)_*, \qquad (\gamma^{-1})_* = (\gamma_*)^{-1}$$

特に、$\pi_1(Y,*)$ の $\pi_1(Y,*)$ 自身への作用は共役を与える作用として定義される。すなわち、$\gamma\in\pi_1(Y,*)$ の $\gamma_1\in\pi_1(Y,*)$ への作用は

$$\gamma([\gamma_1]) = \gamma\cdot\gamma_1\cdot\gamma^{-1}$$

で定義される。

Definition 13.2 (n 単純) $\pi_1(Y,*)$ が $\pi_n(Y,*)$ に自明に作用する（基点 $*$ の取り方によらない）とき、空間 Y は n 単純と言う。特に 1 単純のとき、$\pi_1(Y,*)$ はアーベル群である。

上に述べたことから次のようなことが成り立つ：

Proposition 13.3 次が成り立つ：

(1) $\pi_1(Y,*)$ は $\pi_n(Y,*)$ に作用する。特に、$\pi_1(Y,*)$ が自分自身に自明に作用する必要十分条件は、$\pi_1(Y,*)$ が可換群であることである。

(2) Y が単連結であれば、任意の n について Y は n 単純である。

(3) 写像 $\pi_n(Y,*)\to[S^n,Y]$ は全射である。

(4) 写像 $\pi_n(Y,*)\to[S^n,Y]$ は 1 対 1 対応である必要十分条件は、Y が n 単純なことである。

□

π_1 があると難しいので、以下のこの講義では π_1 が関係しないところを見ることにする。（整数論の人は π_1 を研究している人が多い。）

14 障害コチェインと障害類

以下では X, Y を弧状連結な CW 複体とし、空間を n 次元球 D^n を基本空間として和に分けてみよう。すなわち、X を

$$X = \bigcup_n e^n_\alpha$$

と CW 分解し、$X^n = \bigcup_{p\leqq n}\bigcup_\alpha e^p_\alpha$ を X の n 切片（n-skeleton）として、Y は n 単純 $(n\geqq 1)$ とする（例えば $\pi_1(Y,*)$ が自明である場合など）。

$A \subset X$ を部分 CW 複体とするとき、次の問いかけを考える：

Question 1. 連続写像 $f_n : X^n \cup A \to Y$ $(n \geqq 1)$ が与えられたとき、これを

$$f_{n+1} : X^{n+1} \cup A = (X^n \cup A) \cup \left(\bigcup_\alpha e_\alpha^{n+1}\right) \longrightarrow Y$$

に拡張出来るか？

最も単純に考えれば、以下の図式で

$$\begin{tikzcd} \bigcup S_\alpha^n \arrow[r, "\cup\varphi_\alpha"] \arrow[dr] & X^n \cup A \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & X^{n+1} \cup A = (X^{n-1} \cup A) \cup \left(\cup_\alpha e_\alpha^n\right) \arrow[dl, dotted, "f_{n+1}"] \\ & Y & \end{tikzcd} \tag{14.1}$$

すなわち、$\varphi = \cup\varphi_\alpha$ とおくとき $f_n \circ \varphi \simeq 0$ であれば f_n の拡張 f_{n+1} が存在するが、代数的にはこれをどのように考えればよいのか？

チェイン複体 $C_*(X, A; \mathbb{Z})$ は、以前定義した (7.10) ように

$$\begin{aligned} C_n(X, A; \mathbb{Z}) &= H_n(X^n \cup A, X^{n-1} \cup A; \mathbb{Z}) \\ &= H_n((X^{n-1} \cup A) \cup \left(\cup_\alpha e_\alpha^n\right), X^{n-1} \cup A; \mathbb{Z}) \\ &= \bigoplus_\alpha H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n; \mathbb{Z}) \\ &= \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}[e_\alpha^n] \qquad (\mathbb{Z} \text{ の生成元 } e_\alpha^n \text{ を固定} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{向き付けを決める}) \end{aligned}$$

となる自由アーベル加群であり、微分

$$d_n : C_n(X, A; \mathbb{Z}) \longrightarrow C_{n-1}(X, A; \mathbb{Z})$$

について、$H(C_*(X, A), d_*) = H_*(X, A; \mathbb{Z})$ が成立した (7.11) ことを思い出そう。

Definition 14.2 (G 係数コチェイン複体) (X, A) を相対 CW 複体、G をアーベル群とするとき、コチェイン複体 $\{C^*(X, A; G), d^*\}$ を

$$\begin{aligned} C^n(X, A; G) &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n(X, A; \mathbb{Z}), G) \\ d^n : C^n(X, A; G) &\longrightarrow C^{n+1}(X, A; G) \end{aligned} \tag{14.3}$$

と定義する（ここで、d^n は d_{n+1} の双対である)。

この設定のもとに次の定義をする。

Definition 14.4 (14.3) で $G = \pi_n(Y)$ とおいて、f_n の障害コチェイン $\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n)$ を元

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n) &\in C^{n+1}(X, A; \pi_n(Y)) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{n+1}(X^{n+1} \cup A, X^n \cup A), \pi_n(Y))\end{aligned}$$

で、次の図式を可換にする写像として定義する：

$$\begin{tikzcd} C_{n+1}(X, A) \arrow[r, "\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n)"] & \pi_n(Y, *) \\ \pi_{n+1}(X^{n+1} \cup A, X^n \cup A) \arrow[u, "H_{n+1}", "\cong"'] \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & \pi_n(X^n \cup A, *) \arrow[u, "(f_n)_*"'] \end{tikzcd} \tag{14.5}$$

ただし、ここで ∂_* はホモトピー群の完全列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \pi_n(X^n \cup A, *) \xrightarrow{i_n} \pi_n(X^{n+1} \cup A, *) \xrightarrow{j_n} \pi_n(X^{n+1} \cup A, X^n \cup A) \xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

の境界準同型であり

$$H_{n+1} : \pi_{n+1}(X^{n+1} \cup A, X^n \cup A) \longrightarrow C_{n+1}(X, A)$$

は Hurewicz 準同型を表す。

Remark 14.6 図式 (14.1) の写像 φ_α 達は、(14.5) の準同型 ∂_n の像に入っている。したがって、$\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n) = 0$ であれば $(f_n)_*(\varphi_\alpha) = 0$ が従う。

以下の結果が、Question 1. に対する答えである：

Proposition 14.7 障害コチェイン $\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n) \in C^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$ について以下が成立する：

(1) $\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n)$ は $n+1$ 次の *cocycle* である。すなわち、写像

$$d^{n+1} : C^{n+1}(X, A; \pi_n(Y)) \longrightarrow C^{n+2}(X, A; \pi_n(Y))$$

について $d^{n+1}(\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n)) = 0$ が成り立つ。

(2) f_n が $f_{n+1} : X^{(n+1)} \cup A \to Y$ に拡張出来るための必要十分条件は

$$\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n) = 0 \in C^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$$

Proof. 可換図式

$$\begin{tikzcd} C_{n+2}(X, A) \arrow[r, "d_{n+2}"] & C_{n+1}(X, A) \\ \pi_{n+2}(X^{n+2} \cup A, X^{(n+1)} \cup A) \arrow[u, "H_{n+2}", "\cong"'] \arrow[r, "d_{n+2}"] & \pi_{n+1}(X^{n+1} \cup A, X^{(n)} \cup A) \arrow[u, "H_{n+1}", "\cong"'] \end{tikzcd}$$

を考えるとき

$$d^{n+1}(\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n)) = 0 \iff (f_n)_* \circ \partial_{n+1} \circ d_{n+2} = 0$$

であり、$d_{n+2} = j_{n+1} \circ \partial_{n+2}$ であったことから (1) が従う。また、(2) は Rem. 14.6 から従う。□

上の結果では chain 複体 $C_n(X, A; \mathbb{Z})$ の定義の部分で (X, A) の胞体分解に依存してしまう。そこで、胞体分割に依存しない方法を考えたい。

Definition 14.8 (障害類の定義) $\mathfrak{o}(f_n) = [\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n)] \in H^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$ を f_n の障害類と呼ぶ。

これだと、$\mathfrak{o}(f_n)$ の定義があまり胞体分割に依らないで済む。しかもコホモロジー群の元だから計算し易い。

Question 2. $\mathfrak{o}(f_n) = 0 \in H^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$ とはどういう事か？つまり

$$H^{n+1}(X, A; \pi_n(Y)) = \frac{Z^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))}{B^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))}$$

で $\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n) \in Z^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$ が coboundary のとき、Z^{n+1} の元として考えていたものを B^{n+1} の元で置き換えるとどうなっているか？

これを注意深く見ていくのが、障害理論の核心部である。

Proposition 14.9 Y に上と同じ条件（すなわち Y は n 単純）を仮定する。

(1) 2つの写像 $f_n,\ g_n : X^n \cup A \to Y$ が

$$f_n\,|_{X^{n-1}\cup A} = g_n\,|_{X^{n-1}\cup A}\ :\ X^{n-1} \cup A \longrightarrow Y \tag{14.10}$$

を満たすならば、$\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n) - \widetilde{\mathfrak{o}}(g_n) \in B^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$ である。すなわち

$$\mathfrak{o}(f_n) = \mathfrak{o}(g_n) \in H^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$$

(2) f_n を与えたとき、*(14.10)* を満たすような g_n を様々に取れば、$\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n) - \widetilde{\mathfrak{o}}(g_n)$ は $B^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$ の元全てを動く。

Proof. (1) のみを示す。((2) の証明は省略する。) まず、$f_n \simeq g_n : X^n \cup A \to Y$ （ホモトピック）ならば

$$\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n) = \widetilde{\mathfrak{o}}(g_n) \in C^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$$

に注意せよ。与えられた写像から、ホモトピー拡張性質などを用いて CW 複体 $X \times I$ の部分複体

$$\begin{aligned} J_n &= ((X^n \cup A) \times \{0\}) \bigcup ((X^n \cup A) \times \{1\}) \bigcup \big((X^{n-1} \cup A) \times I\big) \\ &= (X \times I)^n \bigcup A \times I \end{aligned}$$

から Y への写像 $F : J_n \to Y$ を

$$F\,|_{(X^n \cup A)\times\{0\}} = f_n \quad \text{かつ} \quad F\,|_{(X^n \cup A)\times\{1\}} = g_n$$

を満たすように構成することが出来る。このとき、F の障害コチェイン

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{o}}(F) &\in C^{n+1}(X \times I, A \times I; \pi_n(Y)) \\ &= C^{n+1}((X, A) \times I; \pi_n(Y)) \\ &\longrightarrow C^n(X, A; \pi_n(Y)) \qquad (C_1(I) \text{ の生成元とのスラント積}) \\ &\xrightarrow{\delta} C^{n+1}(X, A; \pi_n(Y)) \end{aligned}$$

の像が $\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n) - \widetilde{\mathfrak{o}}(g_n)$ となるので、

$$\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n) - \widetilde{\mathfrak{o}}(g_n) \in B^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$$

となる。 □

Theorem 14.11 (障害理論の主結果) (X, A) を CW 対, Y を弧状連結かつ n 単純 $(n \geqq 1)$ とするとき、連続写像

$$f_n : X^n \cup A \longrightarrow Y$$

に対して障害コチェイン $\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n) \in Z^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$ が定義出来て

$$\mathfrak{o}(f_n) = [\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n)] = 0 \in H^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$$

であるとき、かつそのときに限り、写像

$$f_{n+1} : X^{n+1} \cup A \longrightarrow Y$$

で次を満たすものが存在する：

$$f_{n+1}\,|_{X^{n-1} \cup A} \quad = \quad f_n\,|_{X^{n-1} \cup A}$$

（注：同様の等式は $X^n \cup A$ への制限では成立しない。）

Proof. $\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n) \in B^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$ と仮定して、Prop. 14.9 (2) により

$$\widetilde{\mathfrak{o}}(f_n) - \widetilde{\mathfrak{o}}(g_n) = \widetilde{\mathfrak{o}}(f_n) \in B^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$$

すなわち $\widetilde{\mathfrak{o}}(g_n) = 0 \in C^{n+1}(X, A; \pi_n(Y))$ かつ等式 (14.10) を満たすような写像 $g_n : X^n \cup A \to Y$ が得られ、これは Prop. 14.7 (2) によって、$f_{n+1} : X^{n+1} \cup A \to Y$ に拡張出来る。 □

上では n 単純を仮定したので、基点を気にしなくても良いことにも注意せよ。

15 ファイバー束への応用

ここまでは連続写像 $X \to Y$ を近似する話だったが、次に障害理論のファイバー束への応用を考えてみよう。

Definition 15.1 ホモトピー拡張性質を持つファイバー束 $p : E \to X$ のファイバーを F とおき、X, E, F は弧状連結であると仮定する。特に基点上のファイバーを $F_* = p^{-1}(*)$ とおいて、群の準同型

$$\pi_1(X, *) \longrightarrow \mathrm{Map}(F_*, F_*)/(\text{ホモトープ})$$

を「モノドロミー表現」と呼ぶ。

ここでは簡単のため以下を仮定する：

- このモノドロミー表現が自明（例えば、$\pi_1(X, *) = \{*\}$ なら O.K.）
- ファイバー F は up to homotopy で一意かつ n 単純 $(n \geqq 1)$ である

<u>**Question 3.**</u> X を CW 複体, $A \subset X$ を部分複体とする。切断

$$s_n : X^n \cup A \to E \quad (n \geqq 1)$$

が与えられたと仮定するとき、これが $s_{n+1} : X^{n+1} \cup A \to E$ に拡張出来るための条件は何か？

$$\begin{tikzcd} & & F \arrow[dl] \\ E^{(n)} \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"] & E \arrow[d, "p"] & \\ X^{(n)} \cup A \arrow[r, hook] \arrow[u, bend left, "s_n"] & X & \end{tikzcd}$$

Proposition 15.2 （前と同様に）障害コチェインを

$$\widetilde{\mathfrak{o}}(s_n) \in Z^{n+1}(X, A; \pi_n(F, *))$$

で定義するとき、切断 s_n が s_{n+1} に拡張出来るための必要十分条件は $\widetilde{\mathfrak{o}}(s_n) = 0$ である。 □

さらに、以前と同様に障害類を

$$\mathfrak{o}(s_n) = [\widetilde{\mathfrak{o}}(s_n)] \in H^{n+1}(X, A; \pi_n(F, *))$$

で定義するとき、以下の定理が成立する（証明は省略する)。

Theorem 15.3 $p : E \to X$ をファイバー束, (X, A) を相対 CW 複体とする。切断

$$s_n : X^n \cup A \longrightarrow E$$

に対して $\mathfrak{o}(s_n) = 0 \in H^{n+1}(X, A; \pi_n(F))$ が満たされるとき、かつそのときに限り、切断 s_n の拡張

$$s_{n+1} : X^{n+1} \cup A \longrightarrow E$$

で次を満たすものが存在する：

$$s_{n+1} \mid_{X^{n-1} \cup A} \quad = \quad s_n \mid_{X^{n-1} \cup A}$$

□

<u>オイラー類との関連</u>　X を弧状連結な CW 複体, また $p : V \to X$ をファイバー $\mathbb{R}^n$ を持つ位相ベクトル束とする。このベクトル束の 0 切断を V_0 とおけば

$$V \setminus V_0 \xrightarrow{p} X$$

はファイバーが

$$F = (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq S^{n-1}$$

のファイバー束である。このモノドロミー表現

$$\begin{tikzcd} & H_n(\mathbb{R}^n, S^{n-1}; \mathbb{Z}) \arrow[d, "\partial"', "\cong"] \\ \pi_1(X, *) \arrow[r] & H_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

が自明（すなわち、このベクトル束は向き付け可能）だと仮定するとき、障害類

$$\mathfrak{o}(s_{n-1}) \in H^n(X; \pi_{n-1}(S^{n-1})) = H^n(X; \mathbb{Z})$$

はオイラー類そのものである。

16 障害理論の $K(\pi, n)$ への応用

アーベル群 π に対して、Eilenberg-MacLane 空間 $K(\pi, n)$ $(n \geqq 1)$ は

$$\pi_i(K(\pi, n)) = \begin{cases} \pi & (i = n) \\ 0 & (i \neq n) \end{cases}$$

を満たす空間だった。Hurewicz 同型によって

$$H_i(K(\pi, n); \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & (i < n) \\ \pi & (i = n) \end{cases}$$

さらに普遍係数定理によって次が成り立つことに注意せよ：

$$H^i(K(\pi, n); \pi) = \begin{cases} 0 & (i < n) \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi, \pi) & (i = n) \end{cases}$$

Theorem 16.1 写像 $A \to * \in K(\pi, n)$ を拡張して得られる写像

$$f : (X, A) \longrightarrow (K(\pi, n), *)$$

のホモトピー類 $[f] \in [(X, A), (K(\pi, n), *)]$ に対して、準同型

$$f^* : H^n(K(\pi, n); \pi) \longrightarrow H^n(X, A; \pi)$$

で生成元 $\iota_n \in H^n(K(\pi, n); \pi)$ をうつした元 $f^*(\iota_n)$ を対応させる写像

$$\begin{array}{rcl} [(X, A), (K(\pi, n), *)] & \longrightarrow & H^n(X, A; \pi) \\ [f] & \longmapsto & f^*(\iota_n) \end{array}$$

は 1 対 1 対応である。 □

$P = P(K(\pi, n), K(\pi, n), *)$ とおくとき、次の fibration が存在した：

$$\Omega K(\pi, n) = K(\pi, n-1) \longrightarrow P \xrightarrow{p} K(\pi, n)$$

元 $[f] \in [(X, A), (K(\pi, n), *)]$ を代表する写像 f から得られる induced fibration を考えて、次の図式が考えられる：

$$\begin{tikzcd} & K(\pi, n-1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & K(\pi, n-1) \arrow[d] \\ & E \arrow[r] \arrow[d, "p'"] & P \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, hook] \arrow[ur, dotted, "s"] & X \arrow[r, "f"] & K(\pi, n) \end{tikzcd}$$

ここで、p' は $K(\pi, n-1)$ を fiber とする fibration p の pullback fibration であり、各々の fibration における $\pi_1(X)$ 作用と $\pi_1(X/A)$ 作用は自明。また s は $p' |_A$ の切断である。

すると構成から明らかなように、このような induced fibration と切断のペア $(E \xrightarrow{p'} X, A \xrightarrow{s} E)$ も、写像 f のホモトピー類によって分類される。具体的には次の結果が得られた：

Theorem 16.2 X 上で $K(\pi, n-1)$ をファイバーに持つ *fibration*

$$K(\pi, n-1) \longrightarrow E \xrightarrow{p} X$$

で、ファイバーのモノドロミー作用が自明かつ部分複体 $A \subset X$ 上に切断 $s : A \to E$ を有するものの同値類全体は、$H^n(X, A; \pi)$ と同一視される：

$$\begin{aligned} H^n(X, A; \pi) &\cong [(X, A), (K(\pi, n), *)] \\ &\cong [X/A, K(\pi, n)] \\ &\cong (E \xrightarrow{p} X,\ A \xrightarrow{s} E)/(\text{ホモトープ}) \end{aligned}$$

□

これらが障害理論の相対 version から得られた結果である。この結果を用いて、以下では Postnikov 系列の性質と構成方法を見ることにしよう。

17 Postnikov 系

CW 複体の考え方は空間 X を「和の原理」を用いて D^n 達で組み上げるものだったが、Postnikov 系は位相空間 Y を「積の原理」で $K(\pi, n)$ 達で組み上げる考え方に基づいている。

以下では、Y は連結かつ単連結であり、CW 複体のホモトピー型を持つ（つまり、$\Gamma Y \to Y$ がホモトピー同型となる）と仮定する。

Theorem 17.1 (Postnikov 系) *X が連結かつ単連結であり CW 複体のホモトピー型を持つとき、ホモトピー可換な図式*

$$\begin{tikzcd} X_2 & X_3 \arrow[l, "\pi_2"'] & X_4 \arrow[l, "\pi_3"'] & \cdots\cdots \arrow[l, "\pi_4"'] \\ X \arrow[u, "f_2"] \arrow[ur, "f_3"] \arrow[urr, "f_4"'] & & & \end{tikzcd}$$

が X について functorial に構成出来て、以下の性質を満たす：

(1) X_n 達は *CW* 複体と同じホモトピー型をもつ

(2) 各 $\pi_n : X_{n+1} \to X_n$ は、*Serre fibration* である。

(3) 写像 $f_n : X \to X_n$ が誘導する写像 $(f_n)_* : \pi_i(X) \to \pi_i(X_n)$ は $i \leqq n$ で同型である

(4) $\pi_i(X_n) = 0\ (i > n)$

(5) $X = \varprojlim_n X_n$

<u>Postnikov 分解の構成法のあらすじ</u>　$X \to X_2 = K(\pi_2(X), 2)$ からスタートして、数学的帰納法で $\{X_n, f_n, \pi_n\}_{n \geq 2}$ を構成したい。X_n まで構成出来たと仮定して、以下で X_{n+1} の構成法を述べる。

X_n についての仮定と Hurewicz の定理の相対 version によって $\pi_i(X_n, X) = 0$ $(i \leqq n+1)$ であるので、$H_i(X_n, X) = 0$ $(i \leqq n+1)$ かつ同型

$$\pi_{n+1}(X) \xleftarrow[\cong]{\partial_{n+2}} \pi_{n+2}(X_n, X) \xrightarrow[\cong]{H_{n+2}} H_{n+2}(X_n, X; \mathbb{Z})$$

が成り立ち、さらに普遍係数定理によって

$$H^{n+2}(X_n, X; \pi_{n+1}(X)) \quad \cong \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_{n+1}(X), \pi_{n+1}(X)) \ \ni \ \iota_{n+2}$$

が得られるので、Thm. 16.2 を用いて ι_{n+2} に対応する次の fibration を考える：

$$\begin{tikzcd}
 & F_{n+1} \arrow[r, equal] \arrow[d] & F_{n+1} \arrow[d] \\
 & X_{n+1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_n"] & P \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, hook, "f_n"] \arrow[ur, dotted, "f_{n+1}"] & X_n \arrow[r, "q_n"] & K(\pi_{n+1}(X), n+2)
\end{tikzcd}$$

ここで、$F_{n+1} = K(\pi_{n+1}(X), n+1)$ とおいた。（fibration $X_{n+1} \xrightarrow{\pi_n} X_n$ を分類する元

$$\kappa_{n+1} \in H^{n+2}(X_n; \pi_{n+1}(X))$$

は、「（f_n の）$n+1$ 次の Postnikov 不変量」とも呼ばれる。）このように構成された空間 X_{n+1} は、ホモトピー群の完全列

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(X_{n+1}) \longrightarrow \pi_{n+1}(X_n) \xrightarrow{\partial} \pi_n(F_{n+1}) \longrightarrow \pi_n(X_{n+1}) \xrightarrow{\cong} \pi_n(X_n) \longrightarrow \cdots$$

と帰納法の仮定から、望ましいホモトピー群を持つことが示される。 □

Example 17.2 S^n $(n \geqq 2)$ についての *Postnikov* 系を考えることにより、球面のホモトピー群について *1940* 年代までに以下のような結果が知られていた：

$$\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$$

$$\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \pi_{n+1}(S^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\pi_4(S^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \pi_{n+2}(S^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

しかし、Postnikov 系を使う方法はこれ以上の計算にはあまり向いていない。

Chapter 5

有理ホモトピー論

18　局所化とホモトピー圏

前章までに、例えば以下の結果を見た：

Theorem 18.1 （*Thm. 11.19* を $\mathscr{C}=$（有限生成アーベル群）の場合に適用して）連結かつ単連結な空間 X について以下が成立する：

$$\pi_i(X)\text{（}{}^\forall i>0\text{）が有限生成アーベル群} \quad \Longleftrightarrow \quad H_i(X;\mathbb{Z})\text{（}{}^\forall i>0\text{）が有限生成アーベル群}$$

□

Theorem 18.2 (Thm. 11.22) $\pi_i(S^n)$ は有限生成アーベル群であり、*mod*（有限アーベル群）で

$$\pi_i(S^n)\equiv\begin{cases}\mathbb{Z} & \text{（}i=n,\ \text{あるいは}\ i=2n-1\ \text{かつ}\ n\ \text{が偶数）}\\ 0 & \text{（その他）}\end{cases}$$

が成立する。 □

これらの結果は、有限アーベル群を法としてホモトピー論を展開すれば（難しい部分を上手に避けて）綺麗な結果が得られることを示唆している。

　本章で展開する有理ホモトピー論の目的は、以下で定義する圏 $\mathscr{H}(\mathscr{T}_2)$ で有限アーベル群を法とするホモトピー論をおこなうことである。

　以下、技術的な理由で連結かつ単連結な空間のみを考えよう。

Definition 18.3 (圏 $\mathscr{T}_2$) 圏 $\mathscr{T}_2$ の対象は、位相空間 X で次を満たすものである：

(1) 連結かつ単連結（すなわち $\pi_0(X)=\pi_1(X)=0$）

(2) $H_i(X;\mathbb{Z})$ が有限生成アーベル群 $(i=0,1,2,\ldots)$ （$\Longleftrightarrow \pi_i(X)$ が有限生成アーベル群）

また射は連続写像とする。

Definition 18.4 $\mathscr{T}_2$ の射 $f:X\to Y$ が弱ホモトピー同値（weak homotopy equivalence）とは

$$f_*:\pi_i(X)\xrightarrow{\cong}\pi_i(Y)\quad\text{（}\Longleftrightarrow f_*:H_i(X)\xrightarrow{\cong}H_i(Y)\text{）}\quad(i\geqq 0)$$

を満たす場合をいう。（注：一般に対称律が成立しないから、これは同値関係ではない。）

Remark 18.5 以下で我々は、弱ホモトピー同値で局所化した圏を考察する。一般に圏をある射の集まりで局所化した圏が存在するとは限らないが、もし存在すれば圏同値を除いて一意であることが示される。圏の局所化の概念は Quillen によってモデル圏の枠組みで定式化され、現在ではホモトピー論の展開にとって必要不可欠なものになっている。モデル圏の一般論に興味がある読者は M.Hovey [10] を見ると良いだろう。

この講義ではモデル圏の一般論を表に出すことなく、その場その場でプラグマティックに圏の局所化を扱う。例えば、この講義では圏 $\mathscr{T}_2$ に加えて、Rational space の圏 $\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}$（Def. 19.3）、Differential Graded Algebra の圏 $\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$（Def. 20.2）等の弱ホモトピー同値による局所化を考えるが、これらの圏が確かに存在することは CW 複体からなる充満部分圏 $\mathscr{T}_2' \subset \mathscr{T}_2$ および $\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}' \subset \mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}$、あるいは minimal な D.G.A. からなる充満部分圏 $\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}' \subset \mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ を使って示される。

Definition 18.6 (局所化した圏 $\mathscr{H}(\mathscr{T}_2)$) 圏 $\mathscr{T}_2$ と同様の対象を持ち、弱ホモトピー同値な射で局所化した圏を $\mathscr{H}(\mathscr{T}_2)$ で表す（この圏の存在は後に示す）。圏 $\mathscr{H}(\mathscr{T}_2)$ を $\mathscr{T}_2$ のホモトピー圏と呼ぶ。

より正確には次の普遍性が成立する場合に、圏 $\mathscr{H}(\mathscr{T}_2)$ と関手 $\Phi : \mathscr{T}_2 \to \mathscr{H}(\mathscr{T}_2)$ の組が「圏 $\mathscr{T}_2$ の弱ホモトピー同値で局所化した圏」言う：

(1) $f : X \to Y$ が圏 $\mathscr{T}_2$ の弱ホモトピー同値ならば、$\Phi(f) : \Phi(X) \to \Phi(Y)$ は圏 $\mathscr{H}(\mathscr{T}_2)$ の中で同型である。

(2) $\varphi : \mathscr{T}_2 \to \mathscr{C}$ をある関手とし、圏 $\mathscr{T}_2$ の任意の弱ホモトピー同値 $f : X \to Y$ に対して $\varphi(f) : \varphi(X) \to \varphi(Y)$ は圏 $\mathscr{C}$ の中で同型とする。このとき、関手 φ は圏 $\mathscr{H}(\mathscr{T}_2)$ を *factor through* する：

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T}_2 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathscr{H}(\mathscr{T}_2) \arrow[d, dotted] \\ & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

Definition 18.7 (圏 $\mathscr{T}_2'$ と圏 $\mathscr{H}(\mathscr{T}_2')$) $\mathscr{T}_2$ の充満部分圏で CW 複体と同じホモトピー型をもつ位相空間を対象とする圏を $\mathscr{T}_2'$、また弱ホモトピー同値で局所化した圏を $\mathscr{H}(\mathscr{T}_2')$ で表す。

圏 $\mathscr{T}_2$ および $\mathscr{T}_2'$ において 2 つの写像がホモトピックな事は同値関係なので、ホモトピー同値で局所化した圏を考える際には Rem. 18.5 で述べたような困難は生じない。そこで次の定義をおこなう。

Definition 18.8 (ホモトピー圏 $\mathscr{H}'(\mathscr{T}_2')$) 対象は圏 $\mathscr{T}_2'$ と同様であり、また 2 つの対象 $X, Y \in \mathscr{H}'(\mathscr{T}_2')$ の間の射はホモトピー集合

$$[X, Y] \quad = \quad \mathrm{Mor}(\mathscr{T}_2')(X, Y)/(\text{ホモトープ})$$

で置き換えたものとする。すなわち、$\mathscr{H}'(\mathscr{T}_2')$ は $\mathscr{T}_2'$ をホモトピー同値で局所化した圏である。

同様に、圏 $\mathscr{T}_2$ をホモトピー同値で局所化した圏 $\mathscr{H}'(\mathscr{T}_2)$ も定義出来て、自然な関手

$$\mathscr{H}'(\mathscr{T}_2) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathscr{T}_2)$$

が存在するが、これは圏同値にならないので、圏 $\mathscr{H}'(\mathscr{T}_2)$ はホモトピー論の研究対象とはならない。

Whitehead の定理により、圏 $\mathscr{T}_2'$ では弱ホモトピー同値ならばホモトピー同値なので、$\mathscr{T}_2'$ を弱ホモトピー同値で局所化した圏とホモトピー同値で局所化した圏は同値である。すなわち

$$\mathscr{H}(\mathscr{T}_2') \;=\; \mathscr{H}'(\mathscr{T}_2')$$

が成立している。また、CW 近似の理論により任意の $X \in \mathscr{T}_2$ に対して $\Gamma X \in \mathscr{T}_2'$ と弱ホモトピー同値 $\gamma : \Gamma X \to X$ が存在するので、自明な関手 $\mathscr{T}_2' \to \mathscr{T}_2$ を弱ホモトピー同値で局所化すると圏の同値が得られる。

これらをまとめると、次が得られる：

Proposition 18.9 圏 $\mathscr{H}(\mathscr{T}_2)$ が存在して、次の圏同値がある：

$$\mathscr{H}'(\mathscr{T}_2') = \mathscr{H}(\mathscr{T}_2') \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}(\mathscr{T}_2)$$

□

Remark 18.10 上の圏の同値を用いれば、$X, Y \in \mathscr{H}(\mathscr{T}_2)$ の間の射の集合は、$\mathscr{H}'(\mathscr{T}_2')$ における射 $[-,-]$ を用いて以下のように表される：

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(\mathscr{T}_2)}(X,Y) \;=\; \varinjlim_{X'} \varprojlim_{Y'} [X', Y']$$

（各弱ホモトピー同値 $X' \to X$ および $Y' \to Y$ の代表元を全てを考えて極限を取っている。）$\mathscr{H}(\mathscr{T}_2)$ が圏になっていることを確認するには、写像の合成

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(\mathscr{T}_2)}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(\mathscr{T}_2)}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(\mathscr{T}_2)}(X,Z)$$

が定義されることを示す必要があるが、これは $X, Y \in \mathscr{T}_2$ を弱ホモトピー同値な CW 複体 $\Gamma X, \Gamma Y \in \mathscr{T}_2'$ でおきかえて

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(\mathscr{T}_2)}(X,Y) \;=\; [\Gamma X, \Gamma Y]$$

と表せることから従う。

19 Rational space の圏

Definition 19.1 (写像の $\mathbb{Q}$ 同値) 単連結な空間の間の写像 $f : X \to Y$ が $\mathbb{Q}$ 同値とは、以下の同値ないずれかの条件が満たされる場合を言う：

(1) 任意の $i \geqq 0$ に対して、$f_* : H_i(X;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_i(Y;\mathbb{Q})$ が群の同型

(2) $f_* : \pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(Y)$ が $i = 0$ のとき集合の全単射であり、かつ $f_* : \pi_i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \pi_i(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が任意の $i \geqq 1$ に対して群の同型

Definition 19.2 (圏 $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{T}_2)$ と $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{T}_2')$) $\mathscr{T}_2$（あるいは $\mathscr{T}_2'$）を $\mathbb{Q}$ 同値な射で局所化した圏を $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{T}_2)$（あるいは $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{T}_2')$）で表す。

（Serre の $\mathscr{C}$ 理論と同様に）圏 $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{T}_2)$ および圏 $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{T}_2')$ では torsion に関する情報を落とすので物事が非常に簡単になるが、Rem. 18.5 で述べたように、圏 $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{T}_2)$ は一般論によっては存在が保障されない。ところが、次に展開する圏 $\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}$ や $\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}'$ の局所化を使うことで存在が保障される。

Definition 19.3 (圏 $\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}$ と圏 $\mathscr{T}'_{2,\mathbb{Q}}$) 圏 $\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}$ を、対象として連結かつ単連結な空間 X で任意の $i > 0$ に対して

$$\pi_i(X) \text{ が有限次元 } \mathbb{Q} \text{ ベクトル空間}\ (\Longleftrightarrow H_i(X;\mathbb{Z}) \text{ が有限次元 } \mathbb{Q} \text{ ベクトル空間})$$

を満たすものを持ち、また射として連続写像を持つ圏として定義する。さらに、$\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}$ の充満部分圏で、CW 複体のホモトピー型を持つ位相空間を対象とする圏を $\mathscr{T}'_{2,\mathbb{Q}}$ で表す。

それぞれの圏を弱ホモトピー同値写像で局所化した圏は $\mathscr{H}(\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}})$ あるいは $\mathscr{H}(\mathscr{T}'_{2,\mathbb{Q}})$ で、また射の集合をホモトピー集合で置き換えて出来る圏は $\mathscr{H}'(\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}})$ あるいは $\mathscr{H}'(\mathscr{T}'_{2,\mathbb{Q}})$ で、それぞれ表す。

Remark 19.4 ホモトピー圏 $\mathscr{H}(\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}})$, $\mathscr{H}(\mathscr{T}'_{2,\mathbb{Q}})$ および $\mathscr{H}'(\mathscr{T}'_{2,\mathbb{Q}})$ の存在は前小節と同様に証明出来て、次の圏同値が成立する：

$$\mathscr{H}'(\mathscr{T}'_{2,\mathbb{Q}}) = \mathscr{H}(\mathscr{T}'_{2,\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}(\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}})$$

有理ホモトピー理論の最初の定理は次のものである：

Theorem 19.5 以下の圏同値が成立する：

$$\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{T}_2) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}(\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}})$$

Proof. まず、関手

$$\mathscr{T}_2 \longrightarrow \mathscr{H}(\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}) \tag{19.6}$$

を構成しよう。構成法には様々なものがあるが、ここでは対象 $X \in \mathscr{H}(\mathscr{T}_2)$ に対して、Postnikov 分解をファイバー毎に有理化して、圏 $\mathscr{H}(\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}})$ における Postnikov 系を考える：

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
 & X_4 \arrow[r] \arrow[d] & (X_4)_{\mathbb{Q}} \arrow[d] & \\
 & X_3 \arrow[r] \arrow[d] & (X_3)_{\mathbb{Q}} \arrow[d] & K(\pi_3(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q},3) \arrow[l] \\
X \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[uur] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & (X_2)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, equal] & K(\pi_2(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q},2) \\
 & K(\pi_2(X),2) & &
\end{tikzcd}$$

X の Postnikov 系に現れる全ての空間を帰納的に $\mathbb{Q}$ space で置き換えていくことで、結果として得られる写像

$$X \longrightarrow \varprojlim (X_n)_{\mathbb{Q}} = X_{\mathbb{Q}}$$

は $\mathbb{Q}$ 同値、かつ $X_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ space となる。以上で関手 (19.6) が得られた。

関手 $\mathscr{T}_2 \to \mathscr{H}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{T}_2)$ は $\mathbb{Q}$ 局所化の普遍性を満たす（すなわち $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{T}_2)$ を factor through する）ことが分かるので、定理で主張している関手が得られる。

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T}_2 \arrow[r] \arrow[dr] & \mathscr{H}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{T}_2) \arrow[d, dotted, "\cong"] & \text{（圏同値）} \\ & \mathscr{H}(\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}) & \end{tikzcd}$$

□

この結果により、圏 $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{T}_2)$ の構造解析をするためには圏 $\mathscr{H}(\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}})$ を調べれば良い。

圏 $\mathscr{H}(\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}})$ の対象で最も基本的なものは Eilenberg-MacLane 空間 $K(\mathbb{Q}, n)$ $(n \geqq 2)$ であり、その $\mathbb{Z}$ 係数コホモロジー環は以下のようになっている（Thm. 11.21 も参照せよ）：

Theorem 19.7 次が成り立つ。

$$H^*(K(\mathbb{Q}, n); \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}[\iota_n] & (i \text{ が偶数}) \\ \Lambda_{\mathbb{Q}}[\iota_n] & (i \text{ が奇数}) \end{cases}$$

ここで、$\iota_n \in H^n(K(\mathbb{Q}, n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}$ は生成元である。 □

20 Differential graded algebra

代数的位相幾何学の基本的なアイデアは、位相空間のホモトピー圏からの関手

$$\mathscr{H}(\mathscr{T}) \longrightarrow \text{（代数的な対象からなる圏）}$$

（例えばホモトピー群 $\pi_i(-)$ やホモロジー群 $H_i(-; \mathbb{Z})$ など）を用いて、代数的圏での情報を用いて位相的圏 $\mathscr{H}(\mathscr{T})$ を解析することだった。

ここでは、前章で考察した幾何的な圏 $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{T}_2)$ と圏同値な「よし扱いやすい代数的な圏」を、Griffiths-Morgan [7] の方法（D.Sullivan による）を用いて構成する。（D.Quillen [25] 等も参照せよ。）

Definition 20.1 (局所有限型の $\mathbb{Q}$ 上の次数付き微分代数) 次数付き $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $A^* = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ が、$\mathbb{Q}$ 双線形かつ associative な積

$$A^m \otimes_{\mathbb{Q}} A^n \longrightarrow A^{m+n}$$

と、単位元 1 を持つ次数付き可換代数であり、微分 d との間に以下の関係があるとする：

(1) $x \cdot y = (-1)^{|x||y|} y \cdot x$

(2) $d : A^n \to A^{n+1}$ は $\mathbb{Q}$ 線形かつ $d^2 = 0$

(3) $d(xy) = d(x)y + (-1)^{|x|} x d(y)$

(4) $d(1) = 0$

このとき、組 (A^*, d) を次数付き微分代数（Differential Graded Algebra, 以下 D.G.A. と略す）と呼ぶ。さらに、ここでは (A^*, d) のコホモロジー $H^*(A) = \sum_{n=0}^{\infty} H^n(A)$ に対して、以下の性質も仮定する：

(5) $H^0(A) = \mathbb{Q}$（連結性）

(6) $H^1(A) = \{0\}$（単連結性）

(7) $\dim H^n(A) < \infty$ （有限性）

位相的な圏の場合と同様に、圏 $\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ においても弱ホモトピー同値な射とそれらで局所化した圏が以下のようにして定義される。

Definition 20.2 (圏 $\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ と $\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$) 圏 $\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ を、連結かつ単連結な D.G.A. を対象として持ち、また射

$$f : (A^*, d_A) \longrightarrow (B^*, d_B)$$

は積を保ち、微分 d_A および d_B に仮定される性質と compatible、かつ次を満たす写像とする：

(1) f は次数付き $\mathbb{Q}$ 線形写像

(2) $f(ab) = f(a)f(b)$

(3) $f(1_A) = 1_B$

(4) $f \circ d_A = d_B \circ f$

このとき、$\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ の射 $f : A^* \to B^*$ が弱ホモトピー同値とは、f がコホモロジーの同型

$$f^* : H^*(A) \xrightarrow{\cong} H^*(B)$$

を誘導する場合をいう（注：$\mathscr{T}_2$ の場合と同様に、これは同値関係ではない）。圏 $\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ を弱ホモトピー同値で局所化した圏を $\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$ で表す。

さらに、圏 $\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ における射のホモトピー同値も以下のように定義される。

Definition 20.3 ([7] Definition 10.1) A^*, B^* の間の 2 つの D.G.A. 写像

$$f, g : A^* \longrightarrow B^*$$

がホモトープである（$f \simeq g$ と表す）とは、多項式環と外積代数のテンソル積 $P(t) \otimes \Lambda(dt)$ (ここで $\deg(t) = 0$ かつ $\deg(dt) = 1$) を記号 $(t,\, dt)$ で表すとき、D.G.A. 写像

$$H : A^* \longrightarrow B^* \otimes (t,\, dt)$$

で $H\,|_{t=0,\,dt=0} = f$ かつ $H\,|_{t=1,\,dt=0} = g$ を満たすものが存在する場合をいう（H を f と g のホモトピーと呼ぶ）。

$f \simeq g$ である場合に当然期待される性質として、次が成立する：

Proposition 20.4 $\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ のホモトープな２つの射 $f \simeq g : A^* \to B^*$ は弱ホモトピー同値である。すなわち、コホモロジーを取れば同じ写像を導く：

$$f_* = g_* : H^*(A) \longrightarrow H^*(B)$$

□

有理ホモトピー論の主要結果は、関手

$$A^* : \mathscr{H}(\mathscr{T}_2) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}) \tag{20.5}$$

で圏同値

$$A^* : \mathscr{H}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{T}_2) \cong \mathscr{H}(\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$$

を導くものの存在を示すことである（Thm. 21.15）。関手 A^* の定義の方法は様々だが、ここでは D.Sullivan による PL de Rham 形式を使う構成方法の流れを紹介する。（詳細は Griffiths-Morgan [7] を参照せよ。）

n 単体 Δ^n を

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; 0 \leqq t_i \leqq 1,\, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}$$

で定義する。$\mathbb{R}^{n+1}$ で定義された任意の微分形式を Δ^n 上に制限したもの

$$\sum_i \varphi_{i_1 \ldots i_j}\, dt_{i_1} \wedge \ldots \wedge dt_{i_j} \qquad (\varphi_{i_1\ldots i_j} \in \mathbb{Q}[t_{i_1}, \ldots, t_{i_j}])$$

の全体を $A^*(\Delta^n)$ とおく。$A^*(\Delta^n)$ は代数として

$$A^*(\Delta^n) = \Lambda(t_0, \ldots, t_n, dt_0, \ldots dt_n) \Big/ \left(\sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\ \sum_{i=0}^{n} dt_i = 0 \right)$$

のように書くことが出来て、特に外積 $\wedge$ と微分 d により D.G.A. の構造を持つ。

Definition 20.6 ([7] p.106) $K \in \mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}$ に適当な単体分割が与えられていると仮定する。このとき、$\mathbb{Q}$ 上の D.G.A. である $A^*(K)$ を次で定義する：

$$A^*(K) = \{ \omega_\sigma \in A^*(\sigma) \;\mid\; \sigma \in K,\ \tau \text{ が } \sigma \text{ の面ならば } \omega_\sigma \mid \tau = \omega_\tau \}$$

$C^*(K;\mathbb{Q})$ を単体的集合の $\mathbb{Q}$ 係数コチェイン複体とするとき、積分によってコチェイン複体の写像

$$\rho : A^*(K) \longrightarrow C^*(K;\mathbb{Q})$$

が定義され、次が成り立つ：

Theorem 20.7 (PL de Rham 定理) コチェイン写像 ρ は、コホモロジー同型を与える。 □

この定理により、連結かつ単連結な単体的複体 K について $A^*(K) \in \mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ であることが示される。

K の重心細分 K' を考えるとき $\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ の射

$$A^*(K) \longrightarrow A^*(K')$$

が、また単体写像 $f : K \to L$ があるとき $\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ の射

$$f^* : A^*(L) \longrightarrow A^*(K)$$

が得られる。さらに、任意の位相空間が弱ホモトピー同値な単体的複体で近似出来る事を用いれば、$\mathscr{T}_2$ の元 X, Y を $K \to X$, $L \to Y$ で（十分に重心細分を考えながら）それぞれ単体近似することで、$\mathscr{T}_2$ の連続写像 $f : X \to Y$ を単体写像

$$K(f) : K \longrightarrow L$$

で置き換えることが出来る。したがって、反変関手 (20.5) が得られる。

Remark 20.8 PL de Rham 形式の空間 $A^*(K)$ は微分形式の外積で D.G.A. の構造を持つが、$C^*(K;\mathbb{Q})$ あるいはもっと一般に特異コチェイン複体 $S^*(X;\mathbb{Q})$ 自体には（そのコホモロジー群は cup 積により次数付き可換代数の構造が入るにも関わらず）D.G.A. の構造は入らない。これが、関手 (20.5) を定義するために PL de Rham 形式を用いた理由である。

21 Hirsch 拡大と minimal な D.G.A.

有理ホモトピー論の主要定理は A^* が圏同値

$$A^* : \mathscr{H}(\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$$

を導くことである（Thm. 21.15）。これを示すために、以下では圏 $\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{,\mathbb{Q}})$ における Eilenberg-MacLane 空間や fibration の対応物、さらには $\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{,\mathbb{Q}})$ における「Postnikov 系」を構成する。

まず最初に、圏 $\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ を弱ホモトピー同値で局所化した圏 $\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$ の存在を示そう（Thm. 21.4）。そのためには、minimal と呼ばれる性質を持つ D.G.A を対象として持つ充満部分圏 $\mathscr{DG}'_{2,\mathbb{Q}} \subset \mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ を定義する必要がある。$\mathscr{DG}'_{2,\mathbb{Q}}$ は、$\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ における Postnikov 系の存在を示す際にも重要な役割を果たす圏である。

Definition 21.1 (minimal な D.G.A.) 次の条件を満たす次数付き可換代数

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^* = \sum_{i \geqq 0} \mathfrak{M}^i \quad \in \mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$$

は minimal と呼ばれる：

(1) 次数付き可換代数として free である。すなわち、

$$\mathfrak{M}^* = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots] \quad (\deg(x_i) \geqq 2)$$

（偶数次は多項式, 奇数次は外積代数に対応）

(2) $d : \mathfrak{M}^i \longrightarrow (\mathfrak{M}_{>0} \cdot \mathfrak{M}_{>0}) \subset \mathfrak{M}^*$ （ここで、$\mathfrak{M}_{>0} = \sum_{i>0} \mathfrak{M}^i$）

以下の定理は、minimal な D.G.A. が CW 複体の代数的な類似物であることを示唆している：

Theorem 21.2 次が成り立つ：

(1) （*[7], Lem. 10.10*）*minimal* な *D.G.A.* の間の射 $f : \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$ は、弱ホモトピー同値であればホモトピー同値である（これは *J.H.C.Whitehead* の定理の類似）

(2) （*[7], Thm. 9.5, Cor. 10.9*）任意の $A^* \in \mathscr{DG}_2$ に対して、*minimal* な *D.G.A.* である $\mathfrak{M}(A^*)$（A^* の *minimal* モデルと呼ばれる）および弱ホモトピー同値写像 $f : \mathfrak{M}(A^*) \to A^*$ が *up to homotopy* に一意に存在する。すなわち、$g : \mathfrak{M}'(A^*) \to A^*$ を他の *minimal* モデルとするとき、同型 $\varphi : \mathfrak{M}(A^*) \to \mathfrak{M}'(A^*)$ が存在して、以下の図式は *up to homotopy* で可換になる：

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M}(A^*) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"', "\cong"] & A^* \\ \mathfrak{M}'(A^*) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Proof. 存在の証明（[7] Thm. 9.5）は、CW 複体で胞体をくっつけるのと同様の考え方で出来る。一意性の証明（[7] Thm. 10.9）のためには、まず障害理論をつくって（[7] Prop. 10.4, Cor. 10.6）、J.H.C.Whitehead 型の定理（[7] Thm. 10.8）を適用する。 □

Definition 21.3 (圏 $\mathscr{DG}'_{2,\mathbb{Q}}$) $\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ の充満部分圏で、minimal な D.G.A. を対象として持つような圏を $\mathscr{DG}'_{2,\mathbb{Q}}$ で、また弱ホモトピー同値で局所化した圏を $\mathscr{H}(\mathscr{DG}'_{2,\mathbb{Q}})$ で、それぞれ表す。さらに、対象は $\mathscr{DG}'_{2,\mathbb{Q}}$ と同じで、射を（D.G.A. の射の集合をホモトープで割った）ホモトピー集合

$$[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2] \; = \; \mathrm{Mor}(\mathscr{DG}'_{2,\mathbb{Q}})(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)/(\text{ホモトープ})$$

で置き換えた圏を $\mathscr{H}'(\mathscr{DG}'_{2,\mathbb{Q}})$ で表す。

このとき、Thm. 21.2 により次の結果が得られる（証明は Prop. 18.9 と同様）：

Theorem 21.4 次の圏の同値が存在する：

$$\mathscr{H}'(\mathscr{DG}'_{2,\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}(\mathscr{DG}'_{2,\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$$

□

したがって、圏 $\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$ を調べるためには圏 $\mathscr{H}'(\mathscr{DG}'_{2,\mathbb{Q}})$ を調べれば良い。

圏 $\mathscr{H}(\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}})$ における基本的な対象は Eilenberg-MacLane 複体 $K(\mathbb{Q}, n)$ であった。圏 $\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$ にも、以下で定義されるような Eilenberg-MacLane 複体の対応物が存在する。

Definition 21.5 V を 2 以上の次数 n の元で生成された $\mathbb{Q}$ 上の有限次元ベクトル空間とする。このとき、free な次数付き可換代数 $A(V, n)$ を

$$A(V, n) = \begin{cases} V \text{ で生成される多項式環 } \mathbb{Q}[V] & (n \text{ が偶数の場合}) \\ V \text{ で生成される外積代数 } \Lambda_{\mathbb{Q}}[V] & (n \text{ が奇数の場合}) \end{cases}$$

で定義する。$A(V, n)$ は自明な微分を持つ $\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ の対象と考える。

$A(V,n)$ が、圏 $\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$ における Eilenberg-MacLane 複体の対応物であることは以下の定理で示される：

Theorem 21.6 V を $\mathbb{Q}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、$V^* = Hom(V,\mathbb{Q})$ をその双対とする。このとき、圏 $\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$ の対象として次の同型が成立する：

$$A^*(K(V,n)) \;\cong\; A(V^*,n) \qquad (n \geqq 2)$$

Proof. $\mathscr{H}(\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}})$ の対象 $K(V,n)$ は反変関手

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{H}(\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}) & \longrightarrow & (\mathbb{Q}\text{ ベクトル空間の圏}) \\ X & \longmapsto & H^*(X;V) = [X, K(V,n)] \end{array}$$

を表現しており、Thm. 20.7 によってこれは $H^*(A^*(X)) \otimes_{\mathbb{Q}} V$ と同型である。また、$\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$ の対象 $A(V^*,n)$ が共変関手

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}) & \longrightarrow & (\mathbb{Q}\text{ ベクトル空間の圏}) \\ A^* & \longmapsto & H^*(A^*) \otimes_{\mathbb{Q}} V = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})}(A(V^*,n), A^*) \end{array}$$

を表現していることも、$A(V^*,n)$ の定義から分かる。特に、$A^* = A(K(V,n))$ とおけば

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})}(A^*(V^*,n), A^*(K(V,n))) & = & H^*(K(V,n)) \otimes_{\mathbb{Q}} V \\ & = & V^* \otimes_{\mathbb{Q}} V \;=\; \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V) \end{array}$$

と変形され、恒等写像 $id_V \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V)$ に対応する $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})}(A^*(V^*,n), A^*(K(V,n)))$ の元

$$A(V^*,n) \longrightarrow A^*(K(V,n))$$

は $\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ における弱ホモトピー同値となる。 □

次に、$A(V,n)$ を「ファイバー」とする圏 $\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$ の「fibration」を定義しよう。

Definition 21.7 ([7] XI.A.) 圏 $\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ の射

$$A^* \longrightarrow (B^*,\, d)$$

が、$A(V,n)$ による Hirsch 拡大（Hirsch extension）であるとは、写像

$$d : V \longrightarrow A^{n+1}$$

および $\mathbb{Q}$ 上の次数付き可換代数の同型

$$B^* \;\cong\; A^* \otimes_{\mathbb{Q}} A(V,n) \qquad (n \geqq 2)$$

が与えられて、B^* の D.G.A. としての微分が

$$\begin{array}{rrcl} a \in A^n \text{ に対して} & d_{B^*}(a \otimes 1) & = & d_{A^*}(a) \otimes 1 \;\subset\; A^{n+1} \otimes 1 \subset B^{n+1} \\ v \in V \text{ に対して} & d_{B^*}(1 \otimes v) & = & d(v) \otimes 1 \;\subset\; A^{n+1} \otimes 1 \subset B^{n+1} \end{array}$$

を満たす場合を言う。

$A \in \mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ の $A(V,n)$ による 2 つの Hirsch 拡大

$$A^* \hookrightarrow (B_1 = A^* \otimes_{\mathbb{Q}} A(V,n),\, d_1)$$

$$A^* \hookrightarrow (B_2 = A^* \otimes_{\mathbb{Q}} A(V,n),\, d_2)$$

が同値であるとは、任意の $v \in V$ について

$$d_2(v) \quad = \quad d_1(v) + d_A(f(v))$$

となる $\mathbb{Q}$ 線形写像

$$f : V \longrightarrow A^n$$

が存在する場合を言う。この定義から直ちに次を得る（Thm. 16.2 の類似）：

Theorem 21.8 (Hirsch 拡大の分類定理) *$A^* \in \mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ の $A(V,n)$ $(n \geqq 2)$ による Hirsch拡大*

$$A^* \longrightarrow (B^* = A^* \otimes_{\mathbb{Q}} A(V,n),\, d)$$

の同値類は次のコホモロジー類と 1 対 1 に対応する：

$$[d] \in H^{n+1}(A) \otimes_{\mathbb{Q}} V^*$$

□

以下では、$V_n = \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$ とおく。圏 $\mathscr{T}_2$ における $K(V_n, n)$ $(n \geqq 2)$ をファイバーとする Serre fibration

$$K(V_n, n) \longrightarrow E \longrightarrow X \tag{21.9}$$

の対応物は以下の Hirsch 拡大である：

$$A^*(X) \longrightarrow A^*(E) \cong A^*(X) \otimes_{\mathbb{Q}} A(V_n^*, n)$$

次に、minimal な $\mathfrak{M} \in \mathscr{DG}'_{2,\mathbb{Q}}$ に対して「圏 $\mathscr{DG}'_{2,\mathbb{Q}}$ における Postnikov 分解」を構成しよう。

Lemma 21.10 ([7], Prop. 9.4) *$\mathfrak{M}^{(n)}$ を minimal な D.G.A. $\mathfrak{M}$ の n 次以下 $(n \geqq 2)$ の元で生成される部分 D.G.A. とする。このとき、各 $\mathfrak{M}^{(n)}$ はそれぞれ minimalであり、さらに有限次元 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 V_n で次を満たすものが存在する：*

(1) $\mathfrak{M}^{(2)} \cong A(V_2^*, 2)$

(2) $\mathfrak{M}^{(n+1)}$ *は* $\mathfrak{M}^{(n)}$ *の* $A(V_{n+1}^*, n+1)$ *による Hirsch 拡大である*

□

Thm. 21.2 によって、任意の D.G.A. A^* に対して minimal な $\mathfrak{M}(A^*)$ が存在する。特に、$X \in \mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}$ に対して $\mathfrak{M}(X) = \mathfrak{M}(A^*(X)) \in \mathscr{DG}'_{2,\mathbb{Q}}$ のように表すことにする。$\mathfrak{M}(X)$ に対して Lem. 21.10 を適用して得られる D.G.A. 達 $\left\{\mathfrak{M}^{(n)}(X)\right\}_{n \geqq 2}$ が、X の圏 $\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}$ における Postnikov 分解

$$\begin{array}{ccccccccc} K(V_2,2) & & K(V_3,3) & & K(V_4,4) & & & & \\ \| & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ X_2 & \longleftarrow & X_3 & \longleftarrow & X_4 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & X = \varprojlim X_n \end{array} \tag{21.11}$$

から得られる D.G.A. 達 $\{\mathfrak{M}(X_n)\}_{n\geqq 2}$ と canonical に対応する事を示せば、関手

$$A^* : \mathscr{H}(\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}) \tag{21.12}$$

が圏同値であることが示される。以下にこれを実行しよう。

<u>圏 $\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$ における Postnikov 分解</u>　$X \in \mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}$ の Postnikov 分解 (21.11) を１つ固定すると、各ステップ

$$K(V_{n+1}, n+1) \longrightarrow X_{n+1} \longrightarrow X_n \tag{21.13}$$

の Postnikov 不変量 $\kappa_n \in H^{n+2}(X_n; V_{n+1})$ から定まる Hirsch 拡大

$$d_n : \mathfrak{M}^{(n)}(X) \quad \hookrightarrow \quad \mathfrak{M}^{(n+1)}(X) = \mathfrak{M}^{(n)}(X) \otimes A(V_{n+1}^*, n+1)$$

を、$\mathfrak{M}^{(2)}(X) = A(V_2^*, 2)$ から始めて次々に繋げていくことにより、Hirsch 拡大の列

$$\mathfrak{M}^{(2)}(X) \longrightarrow \mathfrak{M}^{(3)}(X) \longrightarrow \mathfrak{M}^{(4)}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathfrak{M}(X) = \varinjlim \mathfrak{M}^{(n)} \tag{21.14}$$

が得られる。このようにして得られた各 minimal D.G.A. 達 $\mathfrak{M}^{(n)}(X)$ は、各ステップで望ましい同型

$$H^*(\mathfrak{M}^{(n)}(X)) \quad \cong \quad H^*(X_n; \mathbb{Q}) \qquad (n \geqq 2)$$

を満たす。以上で「圏 $\mathscr{H}(\mathscr{DG}'_{2,\mathbb{Q}})$ における Postnikov 分解」が得られた（[7] Thm. 11.5 も参照せよ)。

以上の考察を Thm. 19.5 の結果と併せることで、結局次の定理が得られた：

Theorem 21.15 (有理ホモトピー論の主要定理) 次の圏同値が存在する：

$$\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{T}_2) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$$

□

単連結な空間の圏の場合は、基本的空間である Eilenberg-MacLane 空間を用いて Postnikov 系を考えることにより、ある程度空間のホモトピー型を決定出来た。その比較的易しい例が有理ホモトピー圏 $\mathscr{H}(\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}})$ であり、そこで Postnikov 系を考えることは代数的な圏 $\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$ で完全に minimal series を考えることに対応しているわけである。

このように圏論的な見方や手法を獲得することで、現在のホモトピー論は代数的トポロジーの範疇から完全に飛び出して、数理物理や弦模型の世界を含むほぼ全数学に浸透してきている (今はまだ一部の人だけがそう思っているだけかも知れないが....)。

以下では例として、S^n, $\mathbb{C}P^n$ などの minimal モデルを見てみよう。

Example 21.16 (S^n の場合) 次が示される：

(1) $\mathfrak{M}(S^n)$ は次で与えられる：

$$\mathfrak{M}(S^n) \quad = \quad \begin{cases} (\Lambda_{\mathbb{Q}}[x_n],\, d = 0) & (n：\text{奇数}) \\ \left(\mathbb{Q}[x_n] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x_{2n-1}],\, d(x_{2n-1}) = x_n^2\right) & (n：\text{偶数}) \end{cases}$$

(2) $\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$ の対象として、$A^*(S^n) \;\cong\; H^*(S^n;\mathbb{Q})$

<u>(1) が成立すること</u>　S^n の三角形分割 K を一つ固定し、D.G.A. 元 $\varphi \in A^*(K)$ で $d\varphi = 0$ かつ

$$[\varphi] \quad \in \quad H^n(A^*(K)) \;\cong\; \mathbb{Q}$$

が生成元であるようなものを選ぶ。n が奇数のときは、$\varphi^2 = 0 \in A^{2n}(K)$ なので、D.G.A. 写像

$$\begin{array}{rcl} (\Lambda_{\mathbb{Q}}(x_n),\, d = 0) & \longrightarrow & A^*(K) \\ x_n & \longmapsto & \varphi \end{array}$$

が定義され、これはコホモロジーの同型を誘導するので弱ホモトピー同値である。したがって

$$\mathfrak{M}(S^n) \quad = \quad (\Lambda_{\mathbb{Q}}(x_n),\, d = 0)$$

一方、n が偶数のときは $\varphi^2 = d\psi$ となる $\psi \in A^{2n-1}(K)$ が存在するので、D.G.A. 写像を

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{Q}[x_n] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x_{2n-1}],\, d(x_{2n-1}) = x_n^2) & \longrightarrow & A^*(K) \\ x_n & \longmapsto & \varphi \\ x_{2n-1} & \longmapsto & \psi \end{array}$$

と定義すれば、やはりこれは D.G.A. の弱ホモトピー同値となる。したがって、

$$\mathfrak{M}(S^n) \quad = \quad (\mathbb{Q}[x_n] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x_{2n-1}],\, d(x_{2n-1}) = x_n^2)$$

<u>(2) が成立すること</u>　(1) により、$\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$ における次の弱ホモトピー同値写像が定義される：

$$\mathfrak{M}(S^n) \longrightarrow H^*(S^n;\mathbb{Q}) \tag{21.17}$$

Remark 21.18 $\mathfrak{M}(S^n)$ を用いて、空間 $X \in \mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}$ のホモトピー群の対応物を minimal D.G.A. の圏で考えることも出来る：

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{H}'(\mathscr{T}_{2,\mathbb{Q}}) & \longleftrightarrow & \mathscr{H}'(\mathscr{DG}'_{2,\mathbb{Q}}) \\ \pi_n(X) = V_n & \longleftrightarrow & [\mathfrak{M}(X), \mathfrak{M}(S^n)] = V_n \qquad (n \geqq 2) \end{array}$$

Remark 21.19 圏 $\mathscr{DG}'_{2,\mathbb{Q}}$ では

$$（\text{ホモトピー同値}）\Longleftrightarrow（\text{弱ホモトピー同値}）$$

が成立するのに対し、圏 $\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ では

$$（\text{ホモトピー同値}）\Longrightarrow（\text{弱ホモトピー同値}）$$

は成立するが、逆は一般には成立しない。実際、Ex. 21.16 において n が偶数のとき、弱ホモトピー同値 (21.17) の逆向きの射は自明なものしか作れないので、写像 (21.17) は D.G.A. のホモトピー同値にはなり得ない。これによって、圏 $\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ をホモトピー同値で局所化した圏 $\mathscr{H}'(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$ は弱ホモトピー同値で局所化した圏 $\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$ と同値にはならず、ここで展開した Eilenberg-MacLane 空間や Hirsh 拡大を使った minimal D.G.A. の理論が成立しない。（これと同様のことは位相空間の圏でも起こっている。）

Remark 21.20 n が奇数の場合は $\mathfrak{M}(S^n) = \mathfrak{M}(K(\mathbb{Q}, n))$ が成り立つが、n が偶数の場合は

$$\mathfrak{M}(S^n) \;=\; \mathfrak{M}(\mathbb{Q}, n) \otimes \Lambda_{\mathbb{Q}}(x_{2n-1}) \qquad (x_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{Q}, n),\, d(x_{2n-1}) = x_n^2)$$

であり、これは $\mathfrak{M}(K(\mathbb{Q}, n))$ とホモトピー同値にはならない。実際、$\mathfrak{M}(S^n)$ の形から次の Serre の定理が読み取れる：

$$\pi_i(S^{2n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \;=\; \begin{cases} \mathbb{Q} & (i = 2n \text{ または } 4n-1) \\ 0 & (i \neq 2n \text{ かつ } i \neq 4n-1) \end{cases}$$

Example 21.21 ($\mathbb{C}P^n$ $(n \geqq 1)$ の場合) 次が示される：

(1) $\mathfrak{M}(\mathbb{C}P^n) \;=\; \big(\mathbb{Q}[x_2] \otimes \mathbb{Q}[x_{2n+1}],\, d(x_{2n+1}) = x_2^{n+1}\big)$

(2) $\mathscr{H}(\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}})$ の対象として、$A^*(\mathbb{C}P^n) \;\cong\; H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Q})$

(1) が成立すること　Ex. 21.16 と同様にして、$\mathscr{DG}_{2,\mathbb{Q}}$ における弱ホモトピー同値

$$\big(\mathbb{Q}[x_2] \otimes \mathbb{Q}[x_{2n+1}],\, d(x_{2n+1}) = x_2^{n+1}\big) \longrightarrow A^*(\mathbb{C}P^n)$$

が構成される。

(2) が成立すること　これも Ex. 21.16 と同様である。

Remark 21.22 上の例で見たように $A^* = A^*(S^n)$ あるいは $A^* = A^*(\mathbb{C}P^n)$ の場合には、$A^* \in \mathscr{H}(\mathscr{D}\mathscr{G}_{2,\mathbb{Q}})$ と $H^*(A)$ が弱ホモトピー同値（微分 $d=0$ を持つ $\mathscr{H}(\mathscr{D}\mathscr{G}_{2,\mathbb{Q}})$ の元と考える）であったが、一般の D.G.A. ではこれは成立しない。

$\mathscr{H}(\mathscr{D}\mathscr{G}_{2,\mathbb{Q}})$ の元として、A^* と $H^*(A^*)$ （微分 $d=0$ を持つ $\mathscr{H}(\mathscr{D}\mathscr{G}_{2,\mathbb{Q}})$ の元と考える）が同型であるとき、A^* は formal と呼ばれる。また、$A^*(X)$ が formal ならば、$X \in \mathscr{T}_2$ は formal space と呼ばれる。

上述の S^n や $\mathbb{C}P^n$ は formal space の例であるが、より一般に次の定理が知られている。

Theorem 21.23 (Deligne-Griffiths-Morgan-Sullivan) *コンパクト Kähler 多様体 X は formal space である。*

Proof. $\Omega^*(X, \mathbb{C}, d)$ を解析することで formal の主張が示される。（証明は調和積分論であり、Hodge のスペクトル列が E_2 項で退化することが重要である。それを示すために Kähler 性を使う。） □

22 代数的なモデル圏

Quillen [24] が導入したモデル圏のアイデアは以下のようなものだった：

- ある圏 $\mathscr{C}$ に対して fibration, cofibration, 弱同値などの射を考え、それらの間が満たすべきいくつかの公理を考えてモデル圏を作る。
- 弱ホモトピー同値 $W \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ で局所化した圏 $\mathscr{C}[W^{-1}]$ を考えて、W が同値になるようにする。（代表元が up to homotopy で一意になるようにしたい。）

様々なことを公理化してモデル圏が構成出来れば functorial に色々と上手くいくが、一般にモデル圏を作るのは難しい。しかも、あるモデル圏を導来圏（derived category）にまでもってきて考えると、functorial な操作が中々上手くいかない。

一方、代数では様々なモデル圏の例が知られている。以下では、R を可換環としてホモロジー代数での例を見てみよう。

Definition 22.1 (圏 $R\text{-}Mod$ と $C^b(R\text{-}Mod)$) 左 R 加群を対象として持つ圏を $R\text{-}Mod$ と表す。また、対象として R 加群が component であるような bounded な（すなわち、$d^2 = 0$ かつ $|i| \gg 0$ に対して $C^i = 0$ が成り立つ）コチェイン複体

$$C^\bullet = (\cdots \longrightarrow C^i \longrightarrow C^{i+1} \longrightarrow \cdots)$$

を持ち、射としてコチェイン複体の間の写像を持つ圏を $C^b(R\text{-}Mod)$ で表す。

Definition 22.2 $C^b(R\text{-}Mod)$ の射 $f : C^\bullet \to D^\bullet$ が弱ホモトピー同値とは、コホモロジーの同型

$$f^* : H^*(C) \xrightarrow{\cong} H^*(D)$$

を導く場合を言う（注：これも同値関係ではない)。

Definition 22.3 (導来圏 $D^b(R\text{-}Mod)$) 圏 $C^b(R\text{-}Mod)$ を弱ホモトピー同値によって局所化した圏を、$\mathscr{H}C^b(R\text{-}Mod)$ または $D^b(R\text{-}Mod)$ で表す。

Definition 22.4 $C^b(R\text{-}Mod)$ の充満部分圏で、component が全て射影的加群であるものを対象とする圏を $C^b_{pro}(R\text{-}Mod)$ で、また圏 $C^b_{pro}(R\text{-}Mod)$ を弱ホモトピー同値で局所化した圏を $\mathscr{H}C^b_{pro}(R\text{-}Mod)$ で、さらに圏 $C^b_{pro}(R\text{-}Mod)$ の射の集合をチェインホモトピー同値で割ったもので置き換えた圏を $\mathscr{H}'C^b_{pro}(R\text{-}Mod)$ で、それぞれ表す。

以下では、圏 $R\text{-}Mod$ の全ての対象は有限の長さの射影的分解を持つと仮定する。$C^\bullet \in C^b(R\text{-}Mod)$ に対しては、射影的分解を対応させる関手

$$\begin{array}{ccc} C^b(R\text{-}Mod) & \longrightarrow & C^b_{pro}(R\text{-}Mod) \\ C^\bullet & \longmapsto & C^\bullet_{pro} \end{array}$$

が存在した（射影的分解の存在）。また、圏 $C^b_{pro}(R\text{-}Mod)$ では

$$f : C_1^\bullet \to C_2^\bullet \text{ が弱ホモトピー同値} \quad \Longleftrightarrow \quad f : C_1^\bullet \to C_2^\bullet \text{ がホモトピー同値}$$

が成立する（これは CW 複体の世界の類似である）ので、圏の同値

$$\mathscr{H}'C^b_{pro}(R\text{-}Mod) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}C^b_{pro}(R\text{-}Mod)$$

が存在する。これらのことから、次の圏の同値がある：

$$\mathscr{H}'C^b_{pro}(R\text{-}Mod) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}C^b_{pro}(R\text{-}Mod) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}C^b(R\text{-}Mod) = D^b(R\text{-}Mod)$$

圏 $D^b(R\text{-}Mod)$ は、実は三角圏（triangulated category）の構造を持っている。上の圏の同値から、$X \in D^b(R\text{-}Mod)$ の射影的分解を X_{pro}, またコチェイン写像のチェインホモトピー同値類全体を $[X_{pro}, Y_{pro}]$ のように書けば

$$[X_{pro}, Y_{pro}] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{D^b(R-Mod)}(X, Y)$$

が成立する。

Chapter 6

Steenrod代数とEilenberg-MacLane 空間のコホモロジー

Steenrod 代数はコホモロジーを位相的圏から代数的圏への関手と考えて、その自然変換で安定な（すなわち懸垂写像と可換な）もの全体を考えるときに出てくる対象である。有理ホモトピー論では torsion の情報を完全に捨てていた（$\mathbb{Q}$ 上で考えると物事がすごく楽になる）が、コホモロジー群を $\mathscr{A}^*$ 加群として解析する場合にはある固定した素数 p について p-torsion の情報が含まれる。ただ、単に p-torsion 部分をそのまま調べると難しいので安定な自然変換だけを考えるように条件を弱めたものだとも考えられるわけである。

「コホモロジー関手の自然変換の全体がなす環」を考えてその構造を決定するなどということは（良い圏では出来るかも知れないが）本来とてつもないことであり、類似の概念は物理学などでも定義され得るが、それを手に届くような範囲に持ってくることは通常ほとんど不可能である。（ちょっとでも出来たら、それはすごいことである。）数論でも最近これの Motivic 版が考えられて、Voevodsky 等によって 2-torsion に対する Milnor 予想が解かれたことは記憶に新しい。

この章では、Steenrod 代数 $\mathscr{A}^*$ の環構造（さらには Hopf 代数構造）を完全に決定する。

23 Steenrod 代数 $\mathscr{A}^*$

p を素数, 素体を $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ として、次数付き $\mathbb{Z}_p$ ベクトル空間の圏を Vec_p^* で表す。また位相空間のホモトピー圏を $\mathscr{H}\mathscr{T}$ で、基点付き位相空間の圏を $\mathscr{H}\mathscr{T}_*$ で、それぞれ表す。

コホモロジー $H^*(-;\mathbb{Z}_p)$（単に $H^*(-)$ とも書く）は反変関手

$$\begin{array}{rcl} H^* : \mathscr{H}\mathscr{T} & \longrightarrow & Vec_p^* \\ X & \longmapsto & H^*(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} H^n(X) \end{array}$$

また簡約コホモロジー $\widetilde{H}^*(-;\mathbb{Z}_p)$（単に $\widetilde{H}^*(-)$ とも書く）は反変関手

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{H}^* : \mathscr{H}\mathscr{T}_* & \longrightarrow & Vec_p^* \\ X & \longmapsto & \widetilde{H}^*(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{H}^n(X) \end{array}$$

だと、それぞれ考えることが出来た。

Definition 23.1 (スマッシュ積, 懸垂関手) $\mathscr{H}\mathscr{T}_*$ の 2 つの対象 $X = (X, *)$ および $Y = (Y, *)$ が与えられたとき、スマッシュ積

$$X \wedge Y = X \times Y/(X \times * \cup * \times Y)$$

が定義される。このとき、共変な懸垂（suspension）関手

$$\Sigma : \mathscr{H}\mathscr{T}_* \longrightarrow \mathscr{H}\mathscr{T}_*$$

を、$X = (X, *)$ に対して $\Sigma X = X \wedge S^1$ を対応させる関手として定義する。

$\widetilde{H}^1(S^1) = \mathbb{Z}_p\{s^1\}$ かつ $\widetilde{H}^n(S^1) = 0$ $(n \neq 1)$ であり、同型

$$\widetilde{H}^*(\Sigma X) = \widetilde{H}^*(X \wedge S^1) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widetilde{H}^*(S^1)$$

が存在するので、コホモロジー群について次の懸垂同型（suspension isomorphism）が存在する：

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \widetilde{H}^*(X) & \longrightarrow & \widetilde{H}^{*+1}(\Sigma X) \\ x & \longmapsto & \sigma(x) = x \wedge s^1 \end{array}$$

これは、可換図式を用いて次のように表すことも出来る：

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}\mathscr{T}_* \arrow[r, "\widetilde{H}^*"] \arrow[d, "\Sigma"] & Vec_p^* \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathscr{H}\mathscr{T}_* \arrow[r, "\widetilde{H}^{*+1}"] & Vec_p^* \end{tikzcd}$$

Definition 23.2 (安定コホモロジー作用素) 関手

$$\widetilde{H}^* : \mathscr{H}\mathscr{T}_* \longrightarrow Vec_p^*$$

の自然変換 Φ で懸垂同型 σ と可換なものを、($\mathbb{Z}_p$ 係数の）安定コホモロジー作用素と呼ぶ。すなわち、安定コホモロジー作用素 Φ および $\mathscr{T}_*$ の写像 $f : X \to Y$ が与えられたとき、次の可換図式がある：

$$\begin{tikzcd} \widetilde{H}^*(X) \arrow[r, "\Phi_X"] & \widetilde{H}^{*+k}(X) \\ \widetilde{H}^*(Y) \arrow[r, "\Phi_Y"] \arrow[u, "f^*"] & \widetilde{H}^{*+k}(Y) \arrow[u, "f^*"] \end{tikzcd}$$

（自然変換 Φ_X と Φ_Y は Σ と可換）

代数的位相幾何学の基本的な哲学は「トポロジー的な（ホモトピー的な）対象を代数的なもので表す」ことだったが、このような観点からコホモロジーを考えると、

$$\widetilde{H}^*(X; \mathbb{Z}_p) \cong \widetilde{H}^{*+1}(\Sigma X; \mathbb{Z}_p) \cong \cdots$$

を単に次数付き $\mathbb{Z}_p$ 加群として捉えるだけではなく「安定コホモロジー作用素の作用込みで」考えることが重要になってくる。

このようなコホモロジー理論における圏論的な見方や考え方は、1950 年代当時から（計算出来るかどうかは別として）僅か 10 年くらいで定着した。

Definition 23.3 ($\mathbb{Z}_p$ 係数の Steenrod 代数) 次数 k の安定コホモロジー作用素の全体がなす $\mathbb{Z}_p$ ベクトル空間を $\mathscr{A}_p^k$（あるいは単に $\mathscr{A}^k$）で表す。このとき

$$\mathscr{A}_p^* = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{A}_p^k$$

は、作用の合成によって $\mathbb{Z}_p$ 上の次数付き associative な代数となり、単位元 1（＝恒等な作用素）を持つ。（注：ただし可換な代数ではない。）また、k が負ならば $\mathscr{A}_p^k = \phi$ であることも知られている。

（まだ構造がよく分かっていないばかでかい）Steenrod 代数 $\mathscr{A}^*$ 上の次数付き加群の圏を $\mathscr{A}^*$-mod で表せばコホモロジー群は $\mathscr{A}^*$-mod の対象だと考えられ、$\widetilde{H}^*(-)$ を次のような関手として捉えることが出来る：

$$\widetilde{H}^* : \mathscr{H}\mathscr{T}_* \longrightarrow \mathscr{A}^*\text{-}mod$$

$\mathscr{A}^*$ 加群の圏は非常に豊富な構造を持っており、特に Steenrod 代数 $\mathscr{A}^*$ は単なる環ではなく Hopf 代数の構造を持つので

“advanced linear algebra”（＝ホモロジー代数）

の枠組みで考えることが出来て、位相的な圏を functorial に解析するための強力な道具立てとなる。（自然変換の作る環 $\mathscr{A}^*$ を用いてコホモロジー群を調べることは、体の拡大を調べる際にその自己同型群（＝隠れた対称性、変換性）を調べることに似ているとも言える。）したがって、$\mathscr{A}^*$ の代数構造をきちんと調べることが必要不可欠である。

Steenrod 代数 $\mathscr{A}^*$ は非可換な積と可換な余積を持っていたので、双対 Steenrod 代数

$$\mathscr{A}_* = \sum_n \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathscr{A}^n, \mathbb{Z}_p)$$

では積が可換, 余積は非可換になる。$H^*(\mathbf{MU})$ や $\pi_*(\mathbf{MU})$ の構造を決めるためにも $\mathscr{A}^*$ の構造決定をする必要があったが、どちらの構造を決めても同じ事なので、$\mathscr{A}_*$ の構造を決めたというのが Milnor の仕事（Thm. 27.1, 1958 年）である。これは 1960 年代までの代数トポロジーの最高峰の一つであり、この講義の一つの山場でもある。

> 余積でも積でも圏論的にはひっくり返すだけだから同じことだが、どういうわけか 2-1 演算の方が 1-2 演算より考えやすい（どっちみち 3 個が絡むから同じことのはずだが....）。物理学の世界では、粒子 2 個がぶつかって 1 個になるのと 1 個が 2 個に分裂するのは双対を取れば同じだという「charge conjugation」の概念がある。

$\Phi \in \mathscr{A}^*$ をコホモロジー関手 $\widetilde{H}^*$ の自然変換とする。コホモロジー $\widetilde{H}^*$ は Eilenberg-MacLane 空間によって表現可能だったので（Thm. 16.1）、$X \in \mathscr{T}_*$ に対して次の可換図式がある：

$$\begin{tikzcd}
{[X, K(\mathbb{Z}_p, n)]} \arrow[r, equal] & \widetilde{H}^n(X;\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "\Phi"] & \widetilde{H}^{N+n}(X;\mathbb{Z}_p) \arrow[r, equal] & {[X, K(\mathbb{Z}_p, N+n)]} \\
{[\Sigma X, K(\mathbb{Z}_p, n+1)]} \arrow[u] \arrow[r, equal] & \widetilde{H}^{n+1}(\Sigma X;\mathbb{Z}_p) \arrow[u, "\sigma", "\cong"'] \arrow[r, "\Phi"] & \widetilde{H}^{N+n+1}(X;\mathbb{Z}_p) \arrow[u, "\sigma", "\cong"'] \arrow[r, equal] & {[X, K(\mathbb{Z}_p, N+n+1)]} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Theorem 23.4 $\mathbb{Z}_p$ 加群として、次の同型が成り立つ：

$$\mathscr{A}^n = \varprojlim_N \widetilde{H}^{N+n}(K(\mathbb{Z}_p, N)) = \varprojlim_N [K(\mathbb{Z}_p, N), K(\mathbb{Z}_p, N+n)]_*$$

つまり、元 $\varphi \in \widetilde{H}^{N+n}(K(\mathbb{Z}_p, N))$ から *Eilenberg-MacLane* 空間の間の写像が *up to homotopy* で得られて、次の自然変換が対応する（ここで $N \gg 0$）：

$$\widetilde{H}^n(X) = [\Sigma^N X, K(\mathbb{Z}_p, N+n)]_* \xrightarrow{\Phi_\varphi} \widetilde{H}^{n+k}(X) = [\Sigma^N X, K(\mathbb{Z}_p, N+n+k)]_*$$

□

この同一視によって、Steenrod 代数 $\mathscr{A}^*$ の構造を知りたければ universal example である Eilenberg-MacLane 空間の $\mathbb{Z}_p$ 係数コホモロジーを計算すれば良いので、これならまだ何とかなりそうである。このような考え方に基づいて $\mathscr{A}^*$ の計算は僅か 5 年から 10 年で完結した。

一般に、ある関手の自然変換全体がなす環を調べるためには、もしその関手が表現されれば表現している対象の上で関手がどうなってるかを見れば良い（しかし、これは general nonsense である）。今の若い人達はこのような考え方を自分のものにしている（と思う）。

Remark 23.5 コホモロジーには懸垂同型があったので

$$H^n(\mathbf{X}; \mathbb{Z}_p) \quad = \quad \varprojlim_N \widetilde{H}^{n+N}(\Sigma^N X; \mathbb{Z}_p)$$

と定義すれば、これは $\widetilde{H}^n(X)$ と同型である。（$\mathbf{X}$ は次章で解説される安定ホモトピー圏 $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ の対象で「スペクトラム」と呼ばれる。）コホモロジー $H^n(\mathbf{X}; \mathbb{Z}_p)$ を関手

$$H^n : \mathscr{H}\mathbf{Sp} \longrightarrow \mathscr{A}^*\text{-}mod$$

だと考えるとき、Eilenberg-MacLane スペクトラム $\mathbf{K}(\mathbb{Z}_p)$ を用いて

$$\mathscr{A}^n = \varprojlim_N \widetilde{H}^{N+n}(K(\mathbb{Z}_p, N)) = H^n(\mathbf{K}(\mathbb{Z}_p)) = [\mathbf{K}(\mathbb{Z}_p), \mathbf{K}(\mathbb{Z}_p)]^n$$

と書き表せるので H^* は $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ で表現可能であり、次の $\mathbb{Z}_p$ 上の次数付き環としての同型がある：

$$\mathscr{A}^* \cong \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\mathbf{K}(\mathbb{Z}_p), \mathbf{K}(\mathbb{Z}_p)]^n$$

24 $H^*(K(\mathbb{Z}_p, n); \mathbb{Z}_p)$ の計算

ここでは、素数 p についてコホモロジー $H^*(K(\mathbb{Z}_p, n); \mathbb{Z}_p)$ を $n \geqq 1$ についての帰納法で計算する。$\iota_n \in H_n(K(\mathbb{Z}_p, n))$ を次の同型で与えられる生成元とする：

$$H_n : \pi_n(K(\mathbb{Z}_p, n)) = \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\cong} H_n(K(\mathbb{Z}_p, n))$$

Definition 24.1 (Bockstein 作用素) 短完全列 $0 \to \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_{p^2} \to \mathbb{Z}_p \to 0$ により得られる完全列の連結準同型として作用素 β を定義する：

$$\cdots \longrightarrow H^n(X; \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^n(X; \mathbb{Z}_{p^2}) \longrightarrow H^n(X; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\beta} H^{n+1}(X; \mathbb{Z}_p) \longrightarrow \cdots$$

このとき $\beta \in \mathscr{A}^1$ であり、$\beta^2 = 0$ が成立する。

<u>$n=1$ の場合</u>　$S^\infty = \left\{(z_0, z_1, \ldots) \in \mathbb{C}^\infty \colon \sum_i |z_i|^2 = 1\right\}$ とおくとき、

$$K(\mathbb{Z}_p, 1) = S^\infty/\mathbb{Z}_p \qquad (S^\infty \text{ は } \infty \text{ 連結であり } \mathbb{Z}_p \text{ は free に作用})$$

であり、コホモロジー群は次のようになる：

$$H^*(K(\mathbb{Z}_p, 1); \mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2[\iota_1] & (p = 2 \text{ の場合}) \\ \Lambda(\iota_1) \otimes \mathbb{Z}_p[\beta\iota_1] & (p \text{ が奇素数の場合}) \end{cases} \tag{24.2}$$

<u>$n \geqq 2$ の場合</u>　$X = K(\mathbb{Z}_p, n+1)$ とおいて Serre fibration

$$\Omega X = K(\mathbb{Z}_p, n) \longrightarrow PX \longrightarrow K(\mathbb{Z}_p, n+1) \tag{24.3}$$

（ここで PX は可縮）に関する Serre スペクトル系列

$$\begin{aligned} E_2^{*,*} &= H^*(K(\mathbb{Z}_p, n+1); \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^*(K(\mathbb{Z}_p, n); \mathbb{Z}_p) \\ E_\infty^{*,*} &= E_\infty^{0,0} = \mathbb{Z}_p \end{aligned}$$

を考えて、n についての帰納法で計算を進める。このスペクトル系列の計算は、$p = 2$ の場合は Serre の三部作で, また $p > 2$ の場合は H.Cartan 達のセミナー（1954 年頃）で、それぞれ扱われた。（荒木捷朗 「数学」位相幾何学・特集号（1958 年）も参照せよ。）

以下では、p が奇素数の場合について解説する。（$p = 2$ のときも同様であるが、記述が少し違うので省略する。）奇素数の場合は、$p = 2$ の場合に比べて p が奇素数の場合は工藤の転入定理を必要として少々面倒であるがその分面白いのである。

次の転入は実際の計算で多用する。

Definition 24.4 (転入) fibration $F \to E \xrightarrow{\pi} X$ で、F が弧状連結かつ X が単連結とするとき

$$H^{n-1}(F) \xrightarrow{\partial_n} H^n(E, F) \xleftarrow{\pi^*} H^n(B)$$

（∂_n は対のコホモロジー完全列の境界準同型）において

$$\tau = (\pi^*)^{-1} \circ \partial_n : (\partial_n)^{-1}(\pi^*(H^n(B))) \longrightarrow H^n(B)/\ker(\pi^*)$$

を転入（transgression）と呼び、また $(\partial_n)^{-1}(\pi^*(H^{n+1}(B)))$ の元を転入的（transgressive）と呼ぶ。転入 τ は自然に Serre スペクトル系列の微分

$$d_n : E_n^{0,n-1} \longrightarrow E_n^{n,0}$$

と同一視出来て、転入的な元 $x \in E_n^{0,n-1}$ は $d_r(x) = 0$ $(r < n)$ を満たす。

さて、Serre fibration (24.3) の $n = 1$ の場合に関する Serre スペクトル系列において

$$E_2^{s,t} \quad = \quad H^s(K(\mathbb{Z}_p, 2)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^t(K(\mathbb{Z}_p, 1))$$

であり、Hurewicz の定理から $H^1(K(\mathbb{Z}_p,2)) = 0$ なので $E_2^{1,t} = 0$ $(t \geqq 0)$ であることに注意する。$\iota_1 \in E_2^{0,1}$ は転入的であり、微分

$$d_2 : E_2^{0,1} = H^1(K(\mathbb{Z}_p,1)) \longrightarrow E_2^{2,0} = H^2(K(\mathbb{Z}_p,2))$$

は対応 $d_2(\iota_1) = \iota_2$ により同型写像となる。より一般に、微分

$$d_2 : E_2^{2n,1} \longrightarrow E_2^{2(n+1),0}$$

について $d_2(\iota_2^n \otimes \iota_1) = \iota_2^{n+1} \otimes 1$ が成立する。

一般に $x \in E_n^{0,n}$ が転入的で $d_n(x) = y$ を満たすとき、$\beta x \in E_n^{0,n+1}$ も転入的で $d_{n+1}(\beta x) = \beta y$ が成立するので、$d_2(\beta\iota_1) = 0$ かつ

$$d_3 : E_3^{0,2} = H^2(K(\mathbb{Z}_p,1)) \longrightarrow E_3^{3,0} = H^3(K(\mathbb{Z}_p,2))$$

は対応 $d_3(1 \otimes \beta\iota_1) = \beta\iota_2 \otimes 1$ により同型写像となる。より一般に、$d_2(1 \otimes (\beta\iota_1)^n) = 0$ かつ微分

$$d_3 : E_3^{0,n+1} \longrightarrow E_3^{3,n-1}$$

について $d_3(1 \otimes (\beta\iota_1)^n) = n(\beta\iota_2 \otimes (\beta\iota_1)^{n-1})$ も成立し、特に $d_3(1 \otimes (\beta\iota_1)^p) = 0$ が成り立つ。

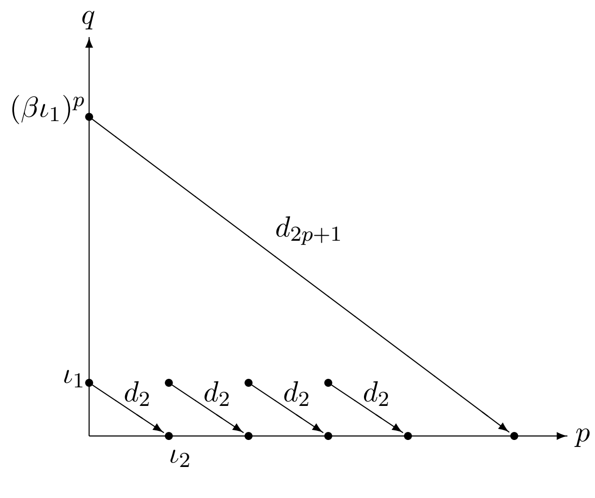

Figure 6.1:

$E_\infty^{*,*} = \mathbb{Z}_p$ であることから、全ての微分が最後には消えなければならないので

$$d_{2p+1}(1 \otimes (\beta\iota_1)^p), \quad d_{2(p-1)+1}(\beta\iota_2 \otimes (\beta\iota_1)^{p-1})$$

などの微分もちゃんと調べる必要があるが（この計算ではこういうことが何回も起こる)、そういう事さえクリアすればこのスペクトル系列の計算は全部解ける。

これらの微分の行き先を知るためには代数的な計算に頼るだけではなく、幾何的な「別立ての考察（cup i 積）」が必要である。Def. 24.1 で定義した Bockstein 作用素以外に、コホモロジー作用素

$$P^n \in \mathscr{A}^{2n(p-1)} \qquad (n=0,1,\ldots)$$

で、元 $x \in H^{2n}(X)$ に対して $P^n(x) = x^p$ のように作用する Steenrod 作用素が構成出来る（この構成法は後述する）。これについて、次の結果を認める：

Theorem 24.5 (工藤の転入定理, 1956 年) *fibration* $F \to E \to X$ において、空間は全て連結かつ $\pi_1(X)$ のモノドロミー作用は自明と仮定する。このとき *Serre* スペクトル系列は

$$\begin{aligned} E_2^{*,*} &= H^*(X;\mathbb{Z}_p) \otimes H^*(F;\mathbb{Z}_p) \\ E_\infty^{*,*} &= H^*(E;\mathbb{Z}_p) \end{aligned}$$

となり、転入写像 $d_r : E_r^{0,r-1} \to E_r^{r,0}$ は *Steenrod* 作用素と可換になる。特に、$x \in E_{2n+1}^{0,2n} = H^{2n}(F)$ に対して $d_{2n+1}(x) = y \in E_{2n+1}^{2n+1,0} = H^{2n+1}(X)$ ならば

(1) $r \leqq 2np$ に対して $d_r(x^p) = 0$ かつ $d_{2np+1}(x^p) = P^n(y) \in E_{2np+1}^{2np+1,0}$

(2) $r \leqq 2n(p-1)$ に対して $d_r(y \otimes x^{p-1}) = 0$ かつ $d_{2n(p-1)+1}(y \otimes x^{p-1}) = \beta P^n(y) \in E_{2n(p-1)+1}^{2np+2,0}$

□

この定理の参考書としては、例えば荒木捷朗先生による「数学」位相幾何学特集号（1956 年）の論説が読みやすいだろう。

Thm. 24.5 により、例えば以下のような微分が存在することが分かる：

$$\begin{aligned} (\beta\iota_1)^p &\overset{d}{\longmapsto} P^1(\beta\iota_2) \\ (\beta\iota_1)^{p^r} &\overset{d}{\longmapsto} P^{p^r} P^{p^{r-1}} \cdots P^1(\beta\iota_2) \end{aligned}$$

この結果を用いて、この Serre スペクトル系列の微分を全て計算することが可能である。結局

$$H^{n+1}(K(\mathbb{Z}_p, n+1) = \mathbb{Z}_p\iota_{n+1}$$

からスタートして、ι_{n+1} に作用素 P^n, β 達を次々に作用することで $H^*(K(\mathbb{Z}_p,n+1)$ の全ての生成元が得られることが示される。

> 代数幾何の人達は大体 E_2 項からつぶれるスペクトル系列しか扱っていなかったが、この計算では E_2 項からつぶれていない（全部の微分を決めなければならない）ので、この計算の正否はこれらの微分を全て決めることにかかっている。（代数的トポロジーにはそれが出来るだけの計算能力が備わっている。）
>
> この計算能力を代数幾何や数理物理等の他の分野に応用することが出来たならば、その世界でちゃんとした仕事が出来る（例えば整数論では Motivic コホモロジー）。

上でも述べた Steenrod 作用素の性質について、以下にまとめておこう。

Theorem 24.6 (Steenrod [31]) p を奇素数とするとき、安定作用素 $\beta \in \mathscr{A}^1$, $P^n \in \mathscr{A}^{2n(p-1)}$ $(n \geqq 0)$ は以下の性質を満たす：

(1) $P^0 = id$ である。また、$x \in H^{2n}(X)$ に対して $P^n(x) = x^p$ が成り立つ

(2) （*Cartan* 公式）$P^n(xy) = \sum_{i+j=n} P^i(x)P^j(y)$

(3) （*Adem* 関係式）次の関係式が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
r < ps \text{ のとき}\quad P^rP^s &= \sum_{i=0}^{[r/p]}(-1)^{r+i}\binom{(s-i)(p-1)-1}{r-pi}P^{r+s-i}P^i \\
r \leqq ps \text{ のとき}\quad P^r\beta P^s &= \sum_{i=0}^{[r/p]}(-1)^{r+i}\binom{(s-i)(p-1)}{r-pi}\beta P^{r+s-i}P^i \\
&\quad - \sum_{i=0}^{[(r-1)/p]}(-1)^{r+i}\binom{(s-i)(p-1)-1}{r-pi-1}P^{r+s-i}\beta P^i
\end{aligned}
$$

□

具体的な微分を決めるメカニズムを制御する工藤の転入定理を、この Adem 関係式と共に何回も使うことによって、実は Steenrod 代数 $\mathscr{A}^*$ はある形の元の線形結合で書ける。それを説明するために、以下の定義をおこなう。

Definition 24.7 非負整数の列 $J = (\varepsilon_1, i_1, \ldots, \varepsilon_n, i_n, \varepsilon_{n+1})$ が許容列（admissible sequence）とは、各 k について $\varepsilon_k = 0$ または 1 であり、かつ $i_k \geqq pi_{k+1} + \varepsilon_{k+1}$ $(1 \leqq k < n)$ が成り立つ場合を言う。このとき、

$$P^J = \beta^{\varepsilon_1}P^{i_1}\cdots\beta^{\varepsilon_n}P^{i_n}\beta^{\varepsilon_{n+1}}$$

と表す。また

$$d(J) = 2(p-1)\sum_{1\leqq k\leqq n} i_k + \sum_{1\leqq k\leqq n+1}\varepsilon_k$$

とおいて J の超過数（excess）を $e(J) = 2(i_1p + \varepsilon_1) - d(J)$ で定義する。

Theorem 24.8 奇素数 p に対して、$H^*(K(\mathbb{Z}_p, n))$ は $e(J) \leqq n-1$ を満たす許容列 J に対する元

$$P^J(\iota_n) \quad \in \quad H^{n+d(J)}(K(\mathbb{Z}_p, n); \mathbb{Z}_p)$$

達で生成された $\mathbb{Z}_p$ 上の非可換環である。 □

さらに上の結果で n について limit を取れば次の結果が得られる。

Theorem 24.9 奇素数 p に対して、$\mathscr{A}^*$ は $\mathbb{Z}_p$ 上の *free* な次数付き非可換代数であり、生成元として *Bockstein* 作用素 β $(\deg(\beta) = 1)$ および *mod p Steenrod* 作用素 P^n $(\deg(P^n) = 2n(p-1))$ を持つ。生成元の間の関係式は $\beta^2 = 0,$ *Adem* 関係式, $P^0 = id,$ $P^n = 0$ $(n < 0)$ のみであり、$\mathbb{Z}_p$ 上のベクトル空間として

$$\mathscr{A}^* \quad \cong \quad \bigoplus_J \mathbb{Z}_p\{P^J\} \qquad (J \text{ は全ての許容列を走る})$$

□

これで一応 Steenrod 代数 $\mathscr{A}^*$ の環としての構造を決定したが、$\mathscr{A}^*$ は非可換かつ可算個の生成元と関係式を持ち、また Noether 環でもないことからこのままでは $\mathscr{A}^*$ の構造があまりにも複雑でどう扱っていいかよく分からない。($\mathscr{A}^*$ 加群のホモロジー代数を考えると関係式がたくさん出てくる等鬱陶しい事がたくさんある。)

$\mathscr{A}^*$ の構造を分かり易くするために双対を取って考えてみたというのが Milnor の仕事である(第 7 章 27 で解説する)。

今やっと表現論や数理物理でもこの程度の計算が行われるようになったが、50 年前の当時(僅か 5 年くらいの間に)これだけの計算をやった計算能力と概念化はすごいことである。(こういうことが今の現代数学の中に再現出来て、例えば表現論などの世界で利用できるようになるだろうか?)

25 Steenrod 作用素 P^n の構成法の概略

ここでは、上で紹介した作用素 P^n の構成法に関する概説をおこなう。

コホモロジー作用素 $P^n \in \mathscr{A}^{2n(p-1)}$ $(n \geqq 0)$ は、1940 年代の「トポロジーの暗黒時代」の産物である。Eilenberg-MacLane 空間 $K(\pi, n)$ のコホモロジーが分かっていればそこから直ちに出てくるものだが、当時は計算結果が未だ知られていなかったので、コホモロジーの構成の仕方を注意深く見ることしかコホモロジー作用素を見つける手段がなかった。

以下では、「cup i 積」と呼ばれる cup 積の一般化を用いた P^n の構成法の一端を説明する。コホモロジー群 $H^*(X;\mathbb{Z}_p)$ の cup 積は、対角写像 $\Delta : X \to X \times X$ を用いて

$$H^*(X;\mathbb{Z}_p) \otimes H^*(X;\mathbb{Z}_p) = H^*(X \times X;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\Delta^*} H^*(X)$$

すなわち $x{\cdot}y = \Delta^*(x \otimes y)$ で定義された。cup 積は次数付き可換 (すなわち、$x{\cdot}y = (-1)^{|x|\cdot|y|} y{\cdot}x$) であったが、その理由を注意深く観察するには特異コホモロジー $H^*(X;\mathbb{Z}_p)$ の定義をコチェイン複体のレベルで見る必要がある。

n 単体を

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geqq 0,\ \sum_i t_i = 1 \right\}$$

で定義するとき、$\mathbb{Z}_p$ 係数の線形写像 $\sigma : \Delta^n \to X$ (特異 n 単体)全体が生成する自由加群 $S_n(X)$ の上に、境界写像

$$\partial_n : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$$

で $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ を満たすものが存在して、$S_n(X)$ の双対加群

$$S^n(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(S_n(X), \mathbb{Z}_p)$$

のコホモロジーとして $H^*(X;\mathbb{Z}_p)$ が定義された。ここで、図式

$$\begin{tikzcd}
S_n(X) \arrow[r, "\Delta_*"] \arrow[dr] & S_n(X \times X) \arrow[d, "A"', "\simeq"] & \text{(チェインホモトピー同値)} \\
& \sum_{n=n_1+n_2} S_{n_1}(X) \otimes S_{n_2}(X) &
\end{tikzcd}$$

のチェイン・ホモトピー同値 A は（例えば非輪状モデルの方法で）Eilenberg-Zilber の定理で X について functorial であるように与えられるが、チェイン複体のレベルでは以下の図式が「絶対にどうやっても」可換（正確には、歪可換＝ skew commutative）にはならない：

$$\begin{tikzcd} S_*(X \times X) \arrow[dr, "A"] \arrow[dd, "\sigma"'] & \\ & S_*(X) \otimes S_*(X) \\ S_*(X \times X) \arrow[ur, "A"'] & \end{tikzcd}$$

ただし、ホモロジーを取れば可換になるので A と $A \circ \sigma$ はチェイン・ホモトープである。

上の図式がチェイン複体のレベルで可換にならないことを逆手に取ることで、cup 積の拡張である cup i 積（$i = 0, 1, \cdots$）が構成出来る（注：cup 0 積は普通の cup 積）。特に、$\mathbb{Z}_2$ 係数の Steenrod 作用素

$$Sq^i : H^*(X; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{*+i}(X; \mathbb{Z}_2)$$

が定義された（詳細は Steenrod の本 [31] を参照せよ）。

p が奇素数の場合は、生成元 $\sigma_p = (2, 3, \ldots, p, 1) \in \mathbb{Z}_p$ （p 次の巡回置換）を考えて、X の p 個の積に対応する

$$A_p : S_*(X \times \cdots \times X) \longrightarrow S_*(X) \otimes \cdots \otimes S_*(X)$$

について（上の場合と同様に非輪状モデルの方法で）X について functorial になるようにチェイン・ホモトピーを構成する等により、$\mathbb{Z}_p$ 係数のコホモロジー作用素 P^n 達が構成される。

Remark 25.1 このような考え方は現在、代数的位相幾何学を大きく越えて数学の色々な分野で重要になってきている。例えば、代数幾何学で重要な Hodge 分解を保証する Hodge スペクトル系列の E_2 項での退化が、標数 p への reduction と上の考え方を使って証明されていると噂に聞いている。

Chapter 7

安定ホモトピー圏

この章では、安定ホモトピー圏 $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ について述べる。

対象 $X \in \mathscr{H}\mathscr{T}_*$ が有理ホモトピー型を持つ場合は（あるいはホモトピー圏全体を $\mathbb{Q}$ で局所化すれば）可換な次数付き微分代数のホモトピー圏で完全に実現出来たが、通常はそうはいかない。

圏 $\mathscr{H}\mathscr{T}_*$ を圏 $\mathscr{A}^*$-*mod* と比較しながら構造解析するためには、$\mathscr{H}\mathscr{T}_*$ を「懸垂同型と compatible になるように」定式化しなおした位相圏を考える必要があり、そのようなもので扱い易いものとして、例えば安定ホモトピー圏 $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ が知られている。

圏 $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ はそれ自体が三角圏なので（幾何的な）ホモロジー代数を考えることが出来る。コホモロジー関手

$$H^* : \mathscr{H}\mathbf{Sp} \longrightarrow \mathscr{A}^*\text{-}mod$$

を用いて $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ のホモロジー代数が $\mathscr{A}^*$-*mod* のホモロジー代数をどのくらい上手く近似出来ているのかを調べるためには、圏 $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ における自由分解の概念（Adams 分解）等を整備する必要がある。

関手性を重要視して圏 $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ を定義出来るようになったのは、実際には 1980 年代以降のことである。また、Gelfand-Manin [6] の p.257 に代数的な三角圏における Postnikov 系（代数的な圏での Adams 分解）の構成に関する演習問題があるので、一度読むことをお勧めする。

<u>スローガン</u>　良い概念はしばしば補題や演習問題などの中（さらには計算の中）に隠れていて、それらが概念として十分に消化されると定義に変わる。

26　スペクトラムの定義

初めに少し技術的な次の定義をしておこう。

Definition 26.1 スペクトラムとは基点付き空間の列と写像の集まり

$$\mathbf{X} = \left\{ \mathbf{X}(n) \in \mathscr{T}_*, \ \ \varepsilon_n : \Sigma\mathbf{X}(n) \to \mathbf{X}(n+1) \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

の事である。

本講義では、スペクトラム $\mathbf{X}$ について次の仮定が満たされる事を仮定する：

(1) 各 $\mathbf{X}(n)$ は CW 複体のホモトピー型を持つ

(2) 自然数 n_0 で、$n < n_0$ ならば $\mathbf{X}(n) = *$ を満たすものが存在する

(3) 自然数 k_0 で、$n \gg 0$ かつ $i \leqq n + k_0$ に対し、$\pi_i(\mathbf{X}(n)) = 0$ を満たすものが存在する

(4) 自然数 k_1 で、$n \gg 0$ かつ $i \leqq 2n + k_1$ に対し $\pi_i(\mathbf{X}(n)) \xrightarrow{\cong} \pi_{i+1}(\mathbf{X}(n+1))$ を満たすものが存在する

Definition 26.2 対象としてスペクトラムを持ち、次で定義されるような射を持つ圏（スペクトラムのホモトピー圏）を $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ で表す：

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \varprojlim_m \varinjlim_n [\Sigma^n \mathbf{X}(m), \mathbf{Y}(n+m)]$$

（ここで、$[\Sigma^n \mathbf{X}(m), \mathbf{Y}(n+m)]$ は $\mathscr{H}\mathscr{T}_*$ における写像のホモトピー類の集合。）

Remark 26.3 ホモトピー類の集合 $[\Sigma^n \mathbf{X}(m), \mathbf{Y}(n+m)]$ は $n \geqq 2$ でアーベル群なので、$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ はアーベル群であり、$\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ は加法圏になる。また、translation functor と呼ばれる可逆な関手

$$\Sigma : \mathscr{H}\mathbf{Sp} \longrightarrow \mathscr{H}\mathbf{Sp}$$

が $\Sigma(\mathbf{X})(n) = \mathbf{X}(n+1)$ で定義されて

$$\begin{array}{rcl} [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^{(n)} & = & [\mathbf{X}, \Sigma^n \mathbf{Y}] \\ \text{さらに} \quad [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^* & = & \displaystyle\sum_n [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^{(n)} \end{array}$$

とおけば、$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^*$ は次数付きアーベル群となる。

Remark 26.4 正確な $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ における射の定義は複雑であるが、$f \in [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ について、$\mathbf{X}$ と $\mathbf{Y}$ をそれぞれ同じホモトピー型を持つ良いスペクトラムで置き換えて、写像 f を

$$f(n) : \mathbf{X}(n) \longrightarrow \mathbf{Y}(n) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

で次の可換図式を満たすようなものとして実現出来る：

$$\begin{tikzcd} \Sigma\mathbf{X}(n) \arrow[r, "\Sigma f(n)"] \arrow[d, "\varepsilon_n"] & \Sigma\mathbf{Y}(n) \arrow[d, "\varepsilon_n"] \\ \mathbf{X}(n+1) \arrow[r, "f(n+1)"] & \mathbf{Y}(n+1) \end{tikzcd}$$

Remark 26.5 (中井による補足) 各写像 $\varepsilon_n : \Sigma\mathbf{X}(n) \to \mathbf{X}(n+1)$ が同値であるとき、$\mathbf{X}$ は懸垂スペクトラム（suspension spectrum）と呼ばれる。また、ε_n の随伴写像 $\bar{\varepsilon}_n : \mathbf{X}(n) \to \Omega\mathbf{X}(n+1)$ が同値であるとき、$\mathbf{X}$ は Ω スペクトラムと呼ばれる。

一般に、スペクトラムの射 $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ を考えるとき、ターゲットが Ω スペクトラムでない場合は技術的な困難が伴うが、そのような場合はターゲットのスペクトラムを

$$\widetilde{\mathbf{Y}}(m) = \varinjlim_n \Omega^n \mathbf{Y}(m+n)$$

のように Ω スペクトラム $\widetilde{\mathbf{Y}}$ と取り替えれば上手くいく。（このとき、2つのスペクトラムの間の標準的な写像 $\mathbf{Y} \to \widetilde{\mathbf{Y}}$ はホモトピー群の同型を誘導し、$\mathbf{Y}$ と $\widetilde{\mathbf{Y}}$ がホモトピー同値になることが示される。）

Example 26.6 位相空間 $X \in \mathscr{T}_*$ に対してスペクトラム $\mathbf{\Sigma}(X) \in \mathbf{Sp}$ を

$$\mathbf{\Sigma}(X)(n) = \begin{cases} \Sigma^n X & (n \geqq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$

として定義する。これは関手

$$\mathbf{\Sigma} : \mathscr{H}\mathscr{T}_* \longrightarrow \mathscr{H}\mathbf{Sp}$$

を与える。

Example 26.7 以下で定義されるものを球面スペクトラムと呼ぶ：

$$\mathbf{S}^0(n) = \begin{cases} S^n & (n \geqq 1) \\ 0 & (n \leqq 0) \end{cases}$$

Example 26.8 以下で定義されるものを Eilenberg-MacLane スペクトラムと呼ぶ：

$$\mathbf{K}(\mathbb{Z}_p)(n) = \begin{cases} K(\mathbb{Z}_p, n) & (n \geqq 1) \\ * & (n \leqq 0) \end{cases}$$

写像 $K(\mathbb{Z}_p, n) \to \Omega K(\mathbb{Z}_p, n+1)$ が存在して、これが Ω スペクトラムであることも分かる。

Definition 26.9 $\mathbf{X} \in \mathscr{H}\mathbf{Sp}$ に対して、以下のように定義する：

$$\begin{aligned} \pi_i(\mathbf{X}) &= \lim_{n\to\infty} \pi_{i+n}(\mathbf{X}(n)) \qquad (i \in \mathbb{Z}) \\ H^i(\mathbf{X};\pi) &= \varprojlim_{n} \widetilde{H}^{i+n}(\mathbf{X}(n);\pi) \qquad (i \in \mathbb{Z},\ \pi \text{ は有限生成アーベル群}) \\ H^*(\mathbf{X};\pi) &= \sum_i H^i(\mathbf{X};\pi) \end{aligned}$$

Theorem 26.10 (コホモロジー関手の表現定理) π を有限生成アーベル群とする。$\mathbf{X} \in \mathscr{H}\mathbf{Sp}$ について同型

$$H^n(\mathbf{X};\pi) \cong [\mathbf{X}, \mathbf{K}(\pi)]^{(n)} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

が成立する。したがって、コホモロジー関手

$$H^*(-;\pi) : \mathscr{H}\mathbf{Sp} \longrightarrow Vec_p^*$$

はスペクトラム $\mathbf{K}(\pi)$ で表現される。 □

これにより特に、各素数 p について $\mathbb{Z}$ graded な $\mathbb{Z}_p$ 代数として

$$\mathscr{A}_p^* = [\mathbf{K}(\mathbb{Z}_p), \mathbf{K}(\mathbb{Z}_p)]^*$$

が成立する。ただし、$[\mathbf{K}(\mathbb{Z}_p), \mathbf{K}(\mathbb{Z}_p)]^*$ は写像の合成を積として持つ algebra とする。

素数 p について、コホモロジー関手

$$H^*(-;\pi) : \mathscr{H}\mathbf{Sp} \longrightarrow Vec_p^* \tag{26.11}$$

を考えると、Steenrod 代数 $\mathscr{A}_p^*$ の元はコホモロジー関手 (26.11) の自然変換を与える。また、$\mathscr{A}_p^*$ はコホモロジー関手 $H^*(-;\mathbb{Z}_p)$ の自然変換全体の作る環である。

Note 26.12 コホモロジー関手は $\mathbb{Z}_p$ 加群への関手から、$\mathscr{A}^*$ 加群への関手

$$H^* : \mathscr{H}\mathbf{Sp} \longrightarrow \mathscr{A}^*\text{-}mod$$

へと「格上げ」された。Steenrod 代数はコホモロジー理論から作られる代数（隠れた対称性）だと考えられる。

「物の見方を変える」という変換がこの世界に act していて、例えば物理だったら「観測装置を変える」、数論だったら体の拡大を考えるとき自己同型を考える、のように。

あるコホモロジー理論という物の見方が与えられたとき、「その物の見方を変える変え方（対称性）全体」を全部調べ尽くすという非常に抽象的なことをやっている。

次のステップ　コホモロジー関手

$$H^* : \mathscr{H}\mathbf{Sp} \longrightarrow \mathscr{A}^*\text{-}mod$$

を用いて、ホモトピー論をやりたい。$\mathscr{A}_p^*$ 加群のホモロジー代数を使って圏 $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ を調べたい。（アーベル圏（$\mathscr{A}_p^*$ 加群）のコチェイン複体の作る三角圏への関手を使って圏 $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ 調べる。）

ところが、$\mathscr{A}^*$ の環構造は非常に複雑であり、$\mathscr{A}^*$ 加群の構造を調べるためには $\mathscr{A}^*$ の構造を良く把握する必要がある。（そこで Milnor が登場する。）

27　双対 Steenrod 代数 $\mathscr{A}_*$ の構造（Milnor の仕事）

ここでは、J.Milnor [18] による $\mathscr{A}^*$ の構造定理について述べる。以下、p は奇素数とする。

$\Phi \in \mathscr{A}^*$ に対して $\Phi(x \cup y) = \sum_i \Phi'(x) \cup \Phi''(y)$ が成り立つとき、$\mathscr{A}^*$ の余積が

$$\Delta(\Phi) = \sum_i \Phi' \otimes \Phi''$$

で定義される。このとき mod p Steenrod 作用素は以下を満たす：

$$\begin{aligned}\Delta(\beta) &= \beta \otimes 1 + 1 \otimes \beta \\ \Delta(P^n) &= \sum_{i+j=n} P^i \otimes P^j\end{aligned}$$

$\mathscr{A}^*$ はこの余積に関して余可換だが、合成で定義される積に関しては非可換な Hopf 代数なので、構造解析が面倒くさい。（量子群に関する Hopf 代数の場合は積も余積も非可換なのでもっと大変。）

そこで Steenrod 代数 $\mathscr{A}^* = \sum_{n \geqq 0} \mathscr{A}^n$ の双対

$$\mathscr{A}_* = \sum_{n \geqq 0} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathscr{A}^n, \mathbb{Z}_p)$$

を考えると、これは可換かつ非余可換な $\mathbb{Z}_p$ 上の Hopf 代数の構造を持つ。また $\mathscr{A}^*$ 加群構造

$$\begin{aligned}\lambda : \mathscr{A}^* \otimes H^*(X) &\longrightarrow H^*(X) \\ \Phi \otimes x &\longmapsto \Phi(x)\end{aligned}$$

の双対である $\mathscr{A}_*$ 余加群構造

$$\lambda^* : H^*(X) \longrightarrow H^*(X) \otimes \mathscr{A}_*$$

は $\lambda(\Phi \otimes x) = \lambda^*(x)(1 \otimes \Phi)$ で定義する。

$H^*(K(\mathbb{Z}_p, 1)) = \Lambda(\alpha) \otimes \mathbb{Z}_p[\beta]$ （ここで $\alpha = \iota_1$, $\beta = \beta(\iota_1)$ である, (24.2) 参照）の余加群構造を

$$\begin{aligned} \lambda^*(\alpha) &= \alpha \otimes 1 + \beta \otimes \tau_0 + \beta^p \otimes \tau_1 + \beta^{p^2} \otimes \tau_2 + \cdots\cdots \\ \lambda^*(\beta) &= \beta \otimes \beta_0 + \beta^p \otimes \xi_1 + \beta^{p^2} \otimes \xi_2 + \cdots\cdots \end{aligned}$$

のように表すことで $\mathscr{A}_*$ の元

$$\tau_r \quad (r \geqq 0,\ \deg(\tau_r) = 2p^r - 1)\ , \qquad \xi_r \quad (r \geqq 0,\ \deg(\xi_r) = 2p^r - 2,\ \xi_0 = 1)$$

がそれぞれ定まり、これらが $\mathscr{A}_*$ を生成していることが分かる：

Theorem 27.1 (Milnor [18]) $\mathbb{Z}_p$ 上の次数付き可換環として

$$\mathscr{A}_* = \Lambda(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots) \otimes \mathbb{Z}_p[\xi_1, \xi_2, \ldots]$$

であり、非余可換な余積 $\Delta : \mathscr{A}_* \to \mathscr{A}_* \otimes \mathscr{A}_*$ について

$$\Delta(\xi_k) \ = \ \sum_{i=0}^{k} \xi_{k-i}^{p^i} \otimes \xi_i, \qquad \Delta(\tau_k) \ = \ \sum_{i=0}^{k} \xi_{k-i}^{p^i} \otimes \tau_i + \tau_k \otimes 1$$

□

これは実に見事な結果である！

Remark 27.2 Eilenberg-MacLane 空間 $K(\mathbb{Z}_p, 1)$ は、そのコホモロジー群に作用させて τ_r, ξ_r を得るための道具として使っただけである。

非負整数の列

$$R \ = \ (r_1, r_2, \ldots), \qquad E \ = \ (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots) \quad (\varepsilon_i = 0 \text{ or } 1)$$

が与えられたとき、双対 Steenrod 代数の元 $\xi(R)$ と $\tau(E)$ を

$$\xi(R) = \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \cdots\cdots\ , \qquad \tau(E) = \tau_0^{\varepsilon_0} \tau_1^{\varepsilon_1} \cdots\cdots$$

でそれぞれ定義する。このとき、単項式の集まり $\{\tau(E)\xi(R)\}$ は $\mathscr{A}_*$ の $\mathbb{Z}_p$ ベクトル空間としての基底をなし、Steenrod 代数 $\mathscr{A}^*$ の 2 つの基底

- $\mathscr{A}_*$ の基底 $\tau(E)\xi(R)$ の双対基底
- $\mathscr{A}^*$ の基底 P^J （Def. 24.7）

の間の変換公式は、それぞれの基底に上手く順序を入れると上三角行列で表せる（Milnor [18] を参照せよ）。

28 スペクトラムのなす三角圏

今日の話はJ.F.Adamsの1950年代終わりの仕事[2]についてである。Adamsは安定ホモトピー論の概念を（本当はもっと前から有ったが）キチンと定義した。（Def. 26.1のスペクトラムの定義は「その場限りの定義」であり、functorialにやろうとすると大変である。）

> 今まではどうやったか？　位相空間の圏 $\mathscr{T}_*$ では弱ホモトピー同値が同値関係ではないが、CW複体で近似すれば弱ホモトピー同値ならばホモトピー同値だったので、空間をCW複体で置き換えて弱ホモトピー同値全体を局所化した射の空間を定義した。一方(co)fiber spaceを考えるときは、CW複体ではなく(co)fibrationで近似した（そういう基礎的な理論を講義の最初にやった）。
>
> さらにホモロジー代数でも、非可換環上の加群の圏を考えるときに、射影的（あるいは射入的）分解を考えてそこで置き換えた（置き換えても良いものだけを考えてきた）。これが導来圏の考え方である。

先週定義したスペクトラムのホモトピー圏 $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ は加法圏であり、可逆な自己同型関手

$$\Sigma : \mathscr{H}\mathbf{Sp} \longrightarrow \mathscr{H}\mathbf{Sp}$$

はtranslation functor（または懸垂関手）と呼ばれた。

Definition 28.1 (写像錐) スペクトラム $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ の間の写像 $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ が、

$$f(n) : \mathbf{X}(n) \longrightarrow \mathbf{Y}(n) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

で次の可換図式を満たすようなものとして実現されているとする：

$$\begin{tikzcd}
\Sigma\mathbf{X}(n) \arrow[r, "\Sigma f(n)"] \arrow[d, "\varepsilon_n"] & \Sigma\mathbf{Y}(n) \arrow[d, "\varepsilon_n"] \\
\mathbf{X}(n+1) \arrow[r, "f(n+1)"] & \mathbf{Y}(n+1)
\end{tikzcd}$$

このとき、f の写像錐（mapping cone）$\mathbf{C}_f \in \mathscr{H}\mathbf{Sp}$ を

$$\mathbf{C}_f(n) = C_{f(n)} = \mathbf{Y}(n) \cup_{f(n)} C\mathbf{X}(n)$$

で定義する。このとき、完全三角（exact triangle）と呼ばれる可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[rr, "f"] & & \mathbf{Y} \arrow[dl] \\
& \mathbf{C}_f \arrow[ul, "\text{degree } +1"] &
\end{tikzcd}$$

を得る。ここに、$\mathbf{Y} \to \mathbf{C}_f$ は自然な写像である。

加法圏 $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ は完全三角達を懸垂関手 Σ と併せて考えることで三角圏の構造を持つ。三角圏の正確な定義及びさらに詳しい性質については [6] を参照すると良いだろう。

完全三角に対して、

$$\cdots \longrightarrow H^*(\mathbf{C}_f) \longrightarrow H^*(\mathbf{Y}) \longrightarrow H^*(\mathbf{X}) \longrightarrow H^{*+1}(\mathbf{C}_f) \longrightarrow \cdots$$

は次数付き $\mathscr{A}_p^*$ 加群の完全列である。

Remark 28.2 三角圏 $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ は代数的ではない。つまり、ある非可換環上の加群から作られる三角圏と同型とならない。

29 Adams スペクトル系列

ここでは、安定ホモトピー圏 $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ を $\mathscr{A}^*$ で近似して構造解析する（すなわち、スペクトラム $\mathbf{X} \in \mathscr{H}\mathbf{Sp}$ 達の性質を $\mathbb{Z}_p$ 係数コホモロジー $H^*(\mathbf{X})$ の $\mathscr{A}^*$ 加群構造を用いて調べる）ために J.F.Adams が発展させた Adams フィルトレーション, Adams スペクトル系列等の理論について述べる。

$\mathscr{A}^*$ は $\mathbb{Z}_p$ 上の無限生成の非可換環であり、Noether 環でも何でもないので、ホモロジー代数を考えると面倒くさいことが起こるが、それでも頑張る。

以下、$H^n(\mathbf{X}) = 0$ $(n < 0)$ かつ各 $H^n(\mathbf{X})$ は有限生成 $\mathbb{Z}_p$ 加群と仮定する。このとき、$\mathscr{A}^*$ 加群の圏における $H^*(\mathbf{X})$ の自由分解が存在する：

$$0 \longleftarrow H^*(\mathbf{X}) \longleftarrow C^0 \longleftarrow C^1 \longleftarrow C^2 \longleftarrow \cdots\cdots$$

ここで各 C^n の形は、$\mathscr{A}^*$ を次数 n_i （各 n_i は非負整数）だけシフトしたものを $\mathscr{A}^*[n_i]$ で表すとき

$$C^n = \sum_i \mathscr{A}^*[n_i] \tag{29.1}$$

この自由分解に対応する安定ホモトピー圏 $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ の列を構成したいというのが、以下の Adams resolution の考えるモチベーションである。

Theorem 29.2 (Adams resolution) $\mathbf{X} \in \mathscr{H}\mathbf{Sp}$ に対して $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ 内での射の列

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \longleftarrow \mathbf{X}_1 \longleftarrow \mathbf{X}_2 \longleftarrow \cdots\cdots$$

で次の性質を持つものが、*up to homotopy* で一意に構成出来る：空間の列 $\{\mathbf{Z}_n\}_{n\geqq 0}$ を

$$\mathbf{Z}_n = \bigvee_i \Sigma^{n_i}\mathbf{K}(\mathbb{Z}_p) \qquad \text{（ここで、各 } n_i \text{ は } (29.1) \text{ と同じもの）}$$

とおくとき、完全三角の可換図式

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \mathbf{X}_n \arrow[l] \arrow[dr] & & \mathbf{X}_{n+1} \arrow[ll] \arrow[dr] & & \mathbf{X}_{n+2} \arrow[ll] & \cdots \arrow[l] \\
& & \mathbf{Z}_n \arrow[ur, "\deg +1"'] \arrow[rr, bend right] & & \mathbf{Z}_{n+1} \arrow[ur, "\deg +1"'] & &
\end{tikzcd}$$

が存在し、コホモロジーの可換図式

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^*(\mathbf{X}_n) \arrow[rr] & & H^*(\mathbf{X}_{n+1}) \arrow[rr] \arrow[dl, "\deg +1"] & & H^*(\mathbf{X}_{n+2}) \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \\
& & H^*(\mathbf{Z}_n) \arrow[ul] & & H^*(\mathbf{Z}_{n+1}) \arrow[ul] \arrow[ll, bend left] & &
\end{tikzcd}$$

および次の $\mathscr{A}^*$ 加群の可換図式を与える：

$$\begin{tikzcd}
0 & H^*(\mathbf{X}) \arrow[l] \arrow[d, equal] & H^*(\mathbf{Z}_0) \arrow[l] \arrow[d, "\cong"] & H^*(\mathbf{Z}_1) \arrow[l] \arrow[d, "\cong"] & H^*(\mathbf{Z}_2) \arrow[l] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \arrow[l] \\
0 & H^*(\mathbf{X}) \arrow[l] & C_0 \arrow[l] & C_1 \arrow[l] & C_2 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Remark 29.3 写像列

$$\pi_*(\mathbf{X}) \longleftarrow \pi_*(\mathbf{X}_1) \longleftarrow \pi_*(\mathbf{X}_2) \longleftarrow \pi_*(\mathbf{X}_3) \longleftarrow \cdots\cdots$$

で与えられる $\pi_*(\mathbf{X})$ のフィルトレーションを考えることで、$\pi_*(\mathbf{X})$ に収束するスペクトル系列が構成出来る。このとき、$\pi_*(\mathbf{X}_n)$ と $\pi_*(\mathbf{X}_{n+1})$ のギャップを表す $\pi_*(\mathbf{Z}_n)$ は

$$\begin{aligned}
\pi_*(\mathbf{Z}_n) &= \sum_i (\mathbb{Z}_p \text{ を } n_i \text{ 次元だけシフトしたもの}) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_p^*}(C^n, \mathbb{Z}_p)
\end{aligned}$$

を満たす（注：$\mathbb{Z}_p$ は自明な $\mathscr{A}_p^*$ 加群と考える）ので、コチェイン複体

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^*}(C^0, \mathbb{Z}_p) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^*}(C^1, \mathbb{Z}_p) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^*}(C^2, \mathbb{Z}_p) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\pi_*(\mathbf{Z}_0) \arrow[r] & \pi_*(\mathbf{Z}_1) \arrow[r] & \pi_*(\mathbf{Z}_2) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

のコホモロジーを考えることで、スペクトル系列の E_2 項が $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}_p^*}(H^*(\mathbf{X}), \mathbb{Z}_p)$ であることも分かる。

以上の事から次の定理が得られる。

Theorem 29.4 (Adams スペクトル系列) スペクトル系列で、以下を満たすものが存在する：

(1) $E_2^{s,t} = Ext^s_{\mathscr{A}_p^*}(H^t(\mathbf{X}), \mathbb{Z}_p) = \dfrac{Ker\left(Hom^t_{\mathscr{A}_p^*}(C^s, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow Hom^t_{\mathscr{A}_p^*}(C^{s+1}, \mathbb{Z}_p)\right)}{Im\left(Hom^t_{\mathscr{A}_p^*}(C^{s-1}, \mathbb{Z}_p) \rightarrow Hom^t_{\mathscr{A}_p^*}(C^s, \mathbb{Z}_p)\right)}$

(2) $d_r : E_r^{s,t} \to E_r^{s+r, t+r-1}$

(3) $s < 0$ または $t < s$ のとき、$E_2^{s,t} = 0$

(4) $E_\infty^{s,t} = E_N^{s,t} \quad (N \gg 0)$

(5) $\pi_n(\mathbf{X})$ のフィルトレーション

$$\pi_n(\mathbf{X}) = B^{0,n} \supset B^{1,n+1} \supset B^{2,n+2} \supset \cdots$$

が存在して次を満たす：

(a) $K^n = \bigcap_{t-s=n} B^{s,t}$ は $\pi_n(\mathbf{X})$ の有限部分アーベル群で、p と互いに素な位数を持つ元で構成される。

(b) 同型 $B^{s,t}/B^{s+1,t+1} \cong E_\infty^{s,t}$ が成立する。

□

Remark 29.5 上のスペクトル系列は、有限複体 Y の懸垂スペクトラム $\mathbf{Y}$ を取ってきて $[\mathbf{Y}, \mathbf{X}]^*$ に収束するスペクトル系列に拡張することも出来る。その場合の E_2 項は次で与えられる：

$$E_2^{*,*} \quad = \quad \mathrm{Ext}^*_{\mathscr{A}^*}(H^*(\mathbf{X}), H^*(\mathbf{Y}))$$

Remark 29.6 特異コホモロジー理論 H 以外にも、$\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ からアーベル圏への反変関手でいくつかの公理を満たすものが得られた場合は、それは「一般コホモロジー理論」と呼ばれ、例えば K 理論や（次章以降で扱う）複素コボルディズム理論（MU 理論）などが知られている。一般コホモロジー関手が表現可能であるための条件は「Brown の表現定理」で与えられ（[9] を参照せよ)、最近では位相幾何学を越えて様々な分野で非常に重要になってきている。

また、上で紹介した Adams スペクトル系列は特異コホモロジー理論からスペクトル系列を構成したが、同様の構成は K 理論や MU 理論など他の表現可能な一般コホモロジー理論でも可能である。これら一連のスペクトル系列は Adams 型スペクトル系列と呼ばれ、特にコボルディズム理論を用いて構成されたものは Adams-Novikov スペクトル系列と呼ばれる。

代数的位相幾何学で整備されてきたこのような考え方は、ホモロジー代数の中に未だ十分に浸透したとは言えないが、Gelfand-Manin の本 [6] の演習問題の中に三角圏における Postnikov 系や convolution という概念が定義されており、コホモロジー関手よりもさらに一般的な概念で述べられている。（Toda bracket や Massey 積なども説明されている。）

Chapter 8

複素コボルディズム理論と Pontryagin-Thom構成

この章では、Thom, Pontryagin による複素コボルディズムスペクトラム **MU** の構成と、Milnor-Novikov（1958 年頃）による安定ホモトピー群 $\pi_*(\mathbf{MU})$ の計算について述べる。

前の章までに解説したことは、「三角圏が一つあって、その上に表現可能なコホモロジー関手があれば、コホモロジー関手の自然変換全体がなす環を定義することによって何か仕事が出来る（物事が上手くいく）」ことを示唆している。この考え方を MU という当時最新の一般コホモロジー理論に適用したのが、1966 年の Novikov の革新的なアイデアだった。

30　複素コボルディズム群の定義

M を n 次元のコンパクト C^∞ 多様体とし、複素構造より弱い概念として次を定義する：

Definition 30.1 (弱複素構造) M の接束 TM を安定化したものが複素構造を持つとする。すなわち、以下を仮定する：

(1) TM は n 次元実ベクトル束

(2) $\tau_M = TM \oplus \mathbb{R}^{2N-n}$ $(N \gg 0)$ は M 上の実 $2N$-次元ベクトル束であり、複素構造 I を持つ

(3) 同値関係 $(\tau_M, I) \sim (\tau_M \oplus \mathbb{R}^2, I \oplus I^0)$ を満たす（安定同値)。ここで、$I^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

このとき (M, τ_M, I) の同型類を弱複素構造（weakly complex structure）と呼び、M を弱複素多様体（weakly complex manifold）と呼ぶ。

Remark 30.2 複素構造ではなく弱複素構造なので、奇数次元の多様体も可能性がある。M が偶数次元の複素多様体であれば自然に弱複素構造を持つ。

Definition 30.3 (コボルディズム環) 向き付けられたコンパクトな n 次元 C^∞ 多様体 M_1, M_2 に対し、$(n+1)$ 次元向き付けられたコンパクトな多様体 W で

$$\partial W = M_1 - M_2$$

となるものが存在するとき「M_1 と M_2 はコボルダント」と呼び、$M_1 \sim M_2$ で表す（Figure 8.1 参照)。

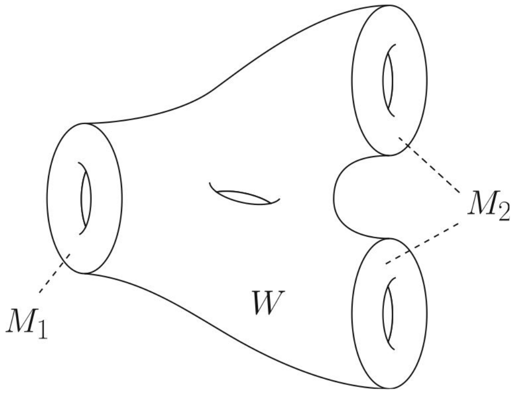

Figure 8.1:

Ω_n^{SO} を向き付けられた n 次元 C^∞ 多様体のコボルディズム類全体として、多様体 M のコボルディズム類を $[M]$ で表すとき、Ω_n^{SO} は直和

$$[M_1] + [M_2] = [M_1 \cup M_2], \qquad -[M] = [-M] \quad \text{（$-M$ は M の向き付けを変えたもの）}$$

によりアーベル群に、さらに

$$[M_1] \cdot [M_2] = [M_1 \times M_2] \qquad \text{（右辺は多様体の直積）}$$

により $\Omega_*^{SO} = \sum_{n \geqq 0} \Omega_n^{SO}$ は可換環の構造を持つ。

同様に、（向き付けられた多様体の代わりに弱複素多様体で考えた）複素コボルディズム類全体 $\Omega_*^U = \sum_{n \geqq 0} \Omega_n^U$ も可換環になる。$\Omega_0^U = \mathbb{Z}$ であり、Ω_*^U は $\mathbb{Z}$ graded 可換環の構造を持つ。

コボルディズム環の構造を決定するためには、「ある空間」の構成とそのホモトピー群の決定が必要である。

Theorem 30.4 (Thom) スペクトラム $\mathbf{MU} \in \mathscr{H}\mathbf{Sp}$ で、アーベル群の同型

$$\Omega_n^U \xrightarrow{\cong} \pi_n(\mathbf{MU})$$

を満たすものが存在する。さらに圏 $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ でのスマッシュ積

$$\mathbf{MU} \wedge \mathbf{MU} \longrightarrow \mathbf{MU}$$

により、上の同型は環としての同型となる。 □

この結果により Ω_*^U の構造を知りたければ $\pi_*(\mathbf{MU})$ の構造を調べればよい。つまり、コボルディズムという「多様体のグローバルな構造（幾何学的な事）」を、あるホモトピー群の計算に還元した（参考文献は 1954 年の Thom の論文 [34]、これは微分トポロジーの夜明けを告げた論文でもある）。

勿論どちらも難しいのだが、当時は $\pi_*(\mathbf{MU})$ の方が計算手段を持っていた。

Remark 30.5 当時、複素多様体の層コホモロジーの指数を、複素多様体と層に関する Chern 類を用いた位相不変量によって表示する高次元の Riemann-Roch の定理が定式化され、コボルディズム理論を使って証明された。（Hirzebruch の本 [11] は是非読むことをお勧めする。）

また、Atiyah-Singer (1962 年) の最初の証明はコボルディズム（指数のコボルディズム不変量）を用いてなされた。（指数は摂動（perturbation）によって安定なので、層をいろいろ動かしても指数は変わらないことを使う。）

以下、**MU** の構成法について説明する（ここに微分トポロジーのエッセンスがある）。

微分トポロジー（1940 年代〜60 年代まで）

$$\left(\begin{array}{c} C^\infty \text{ 多様体 } M \text{ の} \\ \text{大域的性質（コボルディズム等）} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c} M \text{ を線形化した} \\ TM \text{ を用いて性質を調べる} \end{array}\right)$$

微分トポロジーは、1970 年代〜80 年代に非線形方程式の解の空間を考えてそのトポロジーを調べる（この考えは Atiyah に始まる）connection という方法が開発されて、それまでと様相が一変した。

31 普遍ベクトル束と特性類

複素コボルディズム理論では複素接ベクトル束 $\tau_M \to M$ を考えることが重要だった。一般に、ファイバー $\mathbb{C}^n$ を持つ CW 複体 X 上の複素ベクトル束

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow E \longrightarrow X$$

を調べることを考える。（本当は、今の場合 C^∞ で考えなければならないが、E や X が多様体の構造を持つ場合は、局所座標の連続関数を C^∞ 関数でいくらでも精度良く近似出来る。）

$\mathrm{Gr}_{\mathbb{C}}(n, n+N)$ を $\mathbb{C}^{n+N}$ 内の n 次元部分空間全体のつくる Grassmann 多様体として

$$BU_n = \varinjlim_N \mathrm{Gr}_{\mathbb{C}}(n, n+N)$$

と定義する。次の n 次元ベクトル束を考える：

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow E_n \longrightarrow BU_n \tag{31.1}$$

Theorem 31.2 (Steenrod [32] あるいは Milnor [16]) *(1)* X を *CW* 複体とするとき、任意の n 次元複素ベクトル束

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow E \longrightarrow X$$

に対して、連続写像 $f : X \to BU_n$ が *up to homotopy* で一意に存在して以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd}
f^*E_n \arrow[dr, equal] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& E \arrow[r] \arrow[d] & E_n \arrow[d] \\
& X \arrow[r, "f_E"] & BU_n
\end{tikzcd}$$

(2) $\mathrm{Vect}_n(X)$ を X 上の n 次元ベクトル束の同型類とするとき、次の 1 対 1 対応が存在する：

$$\mathrm{Vect}_n(X) = [X, BU_n] \quad \text{（写像のホモトピー類の集合）}$$

□

この結果から、X 上の n 次元複素ベクトル束の同型類の分類問題（位相的な問題）は、写像 $X \to BU_n$ のホモトピー類の分類問題に帰着される。（X 上のベクトル束の位相的性質は BU_n が全て担っている、すなわち BU_n は位相的な意味での n 次元ベクトル束のモジュライ空間と考えられる。）

あるコホモロジー理論（今の場合は $H^*(-;\mathbb{Z})$）とベクトル束が与えられると、「特性類の理論」を考えることが出来て、特性類を「$H^*(-;\mathbb{Z})$ に値を持つベクトル束の不変量」だと考える。（例えば Chern 類の理論（由緒正しい理論）がある。）

ベクトル束が BU_n への写像で表現されることと

$$H^*(BU_n;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1,\ldots,c_n] \quad \text{（c_i は i 番目の Chern 類であり、$\deg(c_i) = 2i$）}$$

であることにより、n 次元ベクトル束の特性類全体はコホモロジーの写像

$$H^*(BU_n;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(X;\mathbb{Z})$$

を通じて実現出来る。

$$\left\{ \begin{array}{c} H^*(X;\mathbb{Z}) \text{ に値を持つ} \\ n \text{ 次元ベクトル束の不変量} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\;1 \text{ 対 } 1\;} \left\{ \begin{array}{c} H^*(BU_n;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1,c_2,\ldots,c_n] \\ \text{（}c_i \in H^{2i}(BU_n;\mathbb{Z}) \text{ は } i \text{ 番目の Chern 類）} \end{array} \right\}$$

可換図式

$$\begin{tikzcd} E_n \oplus \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & E_{n+1} \arrow[d] \\ BU_n \arrow[r, "i_n"] & BU_{n+1} \end{tikzcd}$$

を考えるとき、写像 i_n で誘導される準同型によって生成元は次のようにうつされる：

$$\begin{array}{rcl} i_n^* : H^*(BU_{n+1}) & \longrightarrow & H^*(BU_n) \\ c_i & \longmapsto & c_i \quad (i \leqq n) \\ c_{n+1} & \longmapsto & \text{（}c_1,\ldots,c_n \text{ で表される多項式）} \end{array}$$

これらのことは 1950 年代初めには良く知られていた。（例えば Hirzebruch [11] を参照せよ。）

32 MU スペクトラムと Pontryagin-Thom 構成

普遍ベクトル束 (31.1) で E_n にエルミート計量を考え、ファイバーでノルムが 1 以上の部分を $E_n^{\geqq 1}$ と表す。このとき MU_n を

$$MU_n = (E_n, E_n^{\geqq 1}) = E_n / E_n^{\geqq 1}$$

とおく（Thom 空間と呼ばれる）。また、図式

$$\begin{tikzcd} E_n \oplus \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & E_{n+1} \arrow[d] \\ BU_n \arrow[r] & BU_{n+1} \end{tikzcd}$$

で各ファイバーの 1 以上の部分をつぶす操作をそれぞれ考えることで、写像

$$\varphi_n : MU_n \wedge S^2 = \Sigma^2 MU_n \longrightarrow MU_{n+1}$$

が得られる。このとき、スペクトラム **MU** の n 番目の空間を

$$\mathbf{MU}(n) = \begin{cases} MU_{[\frac{n}{2}]} & (n \text{ が偶数}) \\ \Sigma MU_{[\frac{n}{2}]} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

で、またスペクトラムの構造写像 $\varepsilon_n : \Sigma\mathbf{MU}(n) \to \mathbf{MU}(n+1)$ を次で定義する：

$$\varepsilon_n = \begin{cases} MU_{[\frac{n}{2}]} \text{ 上の恒等写像} & (n \text{ が偶数}) \\ \varphi_{(n-1)/2} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

このようにして構成されるスペクトラムは Thom スペクトラムと呼ばれる。

Remark 32.1 Thom スペクトラムは、元々は 1940 年代に Thom が **MU** ではなく **MO**（多様体に向き付けがない場合）と **MSO**（多様体に向き付けが有る場合）で、また Pontryagin が framed コボルディズム（枠付き多様体の場合）の場合をそれぞれ考えた。

コボルディズムに関する結果は、1950 年代中頃には代数幾何学にも応用された。例えば、Hirzebruch [11]（日本語訳は 1966 年に出版された）を参照せよ。

Thom スペクトラムとコボルディズムは、次の定理によって結びつけられる：

Theorem 32.2 次の準同型が定義されて、アーベル群の同型になる：

$$\Omega_n^U \longrightarrow \pi_{2N+n}(MU_N) \qquad (N \gg 0)$$

Proof. （写像の定義） n 次元 smooth 多様体 M および複素構造 (M, τ_M, I) が与えられたとき、M を $\mathbb{R}^{2N+n}$（N はある自然数）に埋め込むことが出来て、M は管状近傍（tubular neighborhood）U および写像 $p : U \to M$ を持つ。これは $2N$ 次元ベクトル束になり、法束（normal bundle）と呼ばれる（ν_M で表す、Figure 8.2 参照）。

$$\begin{tikzcd} \nu_M \arrow[r, equal] \arrow[d] \arrow[dr, hook, "\text{open に入っている}"] & M \text{ の管状近傍} \\ M \arrow[u, bend left, "0 \text{ 切断}"] \arrow[r, hook] & \mathbb{R}^{2N+n} \quad \text{：埋め込み} \end{tikzcd}$$

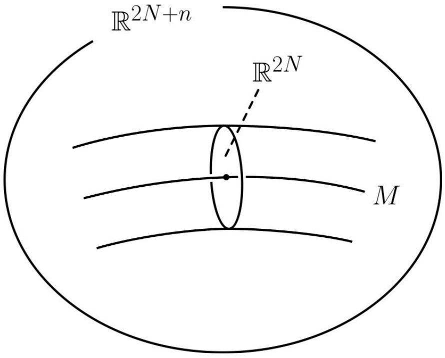

Figure 8.2:

0 切断 $M \to U$ および適当な距離を考えて、半径 1 以上の部分を $(\nu_M)^{\geqq 1}$ で表すとき

$$\begin{array}{rcl} (\nu_M, (\nu_M)^{\geqq 1}) & \subset & (\mathbb{R}^{n+N}, (S^{n+N-1} \text{ の外側})) \\ \text{かつ} \quad (\nu_M)/(\nu_M)^{\geqq 1} & = & \mathbb{R}^{n+N}/S^{n+N-1} \text{ の外側} \ = \ S^{n+N} \end{array}$$

のようになっている。ところで、$\tau_M \oplus \mathbb{R}^{2N-n} \simeq \tau_M$ に複素構造が入っていれば up to homotopy で $\mathbb{R}^{2N}$ 束 ν_M にも複素構造が入る。

$$\begin{tikzcd} (\nu_M, \nu_M^{\geqq 1}) \arrow[r] \arrow[d] & (E_N, E_N^{\geqq 1}) \arrow[d] \\ M \arrow[r] \arrow[u, bend left, "0\text{ 切断}"] & BU_N \arrow[u, bend left] \end{tikzcd}$$

BU_N は $N \gg 0$ のとき Grassmann 多様体であり、0 切断の normal 方向は $\mathbb{C}^N$ である（複素構造が入っている）。ここでの写像は、ファイバー方向の複素構造は deform したまま C^∞ 写像で切断の上で横断的であるように近似出来る（近似定理による）（Figure 8.3 参照）。

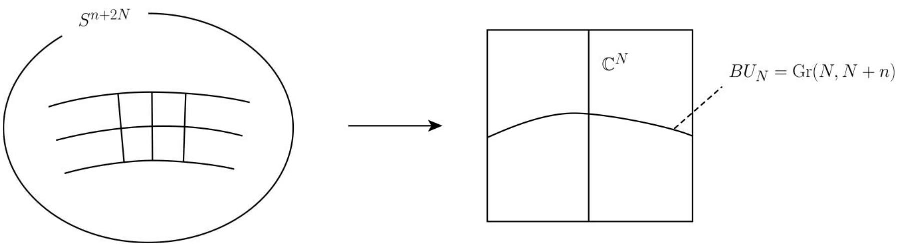

Figure 8.3:

以上の構成法で写像

$$\begin{array}{rcll} f_{\nu_M} : S^{n+2N} = (\nu_M, (\nu_M)^{\geqq 1}) & \longrightarrow & (E_N, E_N^{\geqq 1}) = MU_N & \qquad \cdots (*) \\ * & \longmapsto & * & \end{array}$$

およびホモトピー類 $[f_{\nu_M}] \in \pi_{n+2N}(MU_N)$ が得られた（コボルディズムがあると写像が up to homotopy で一意に決まることも示される）。

（全射であること）　逆に写像 $(*)$ があると、0 切断として入っている BU_N （C^∞ 多様体として考えてよい）のファイバー方向に横断的であるように写像 $(*)$ を C^∞ 写像で近似出来る（横断性定理)。したがって

ファイバーが $\mathbb{C}^N$ のベクトル束が出来る
$\rightsquigarrow$ ν_M の複素構造が決まる
$\rightsquigarrow$ （ひっくり返すと）τ_M の stable な複素構造が決まる

したがって、可換図式

$$\begin{tikzcd} E_N \oplus \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & E_{N+1} \arrow[d] \\ BU_N \arrow[r] & BU_{N+1} \end{tikzcd}$$

も stable なところで決まる（写像 $\Sigma^2 MU_N \to MU_{N+1}$ が得られる)。以上のようにして、M の弱複素構造が決まる。

（単射であること）　省略する。 □

Remark 32.3 このように、代数的トポロジーでは位相的な対象をその場その場で作っていくのが常套手段である。

1984 年以降は、Atiyah がアドバルーンを飛ばして（特に 4 次元の）多様体の上のゲージ場のモジュライ空間を作って計算することによって 4 次元多様体の不変量が構成出来ることを示した。そこでの思想は、ベクトル束のように線形化した所ではなくゲージ場の理論（Yang-Mills 方程式や自己双対方程式のような非線形偏微分方程式の解）を用いてあるモジュライ空間を構成して位相不変量を計算したり、交叉理論等を利用して多様体の不変量を定義する事だった。

33 Thom 類と Thom 同型

$\pi_*(\mathbf{MU})$ に $\otimes\mathbb{Q}$ したものは比較的容易に構造が分かるが、最終的に $\pi_*(\mathbf{MU})$ を $\mathbb{Z}$ 加群として構造決定（Thm. 35.4）するには、$\pi_*(\mathbf{MU})$ を各素数 p 成分毎に調べなければならない。そのための道具立てとしては Adams スペクトル系列

$$E_2^{*,*} = \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}^*}(H^*(\mathbf{MU};\mathbb{Z}_p),\mathbb{Z}_p) \implies \pi_*(\mathbf{MU})/(p \text{ と素な torsion 部分})$$

が知られているが、これを計算するには $H^*(\mathbf{MU};\mathbb{Z}_p)$ を $\mathscr{A}^*$ 加群として構造決定する必要がある（Milnor, Novikov)。このために、Milnor は [18] で Steenrod 代数の構造定理を、さらに Hopf 代数の構造定理が必要だったので Moore と共同で [19] を書き上げた。

以下では、まずコホモロジー群

$$H_*(\mathbf{MU};\mathbb{Z}_p) = \varinjlim_N H_{*+2n}(\mathbf{MU}(2n);\mathbb{Z}_p) = \varinjlim_N H_{*+2n}(MU_n;\mathbb{Z}_p)$$

の $\mathscr{A}^*$ 加群としての構造を求めてみよう。

Remark 33.1 $H_*(\mathbf{MU};\mathbb{Z}_p)$ の構造を決定して、Hurewicz 写像

$$H : \pi_*(\mathbf{MU}) \longrightarrow H_*(\mathbf{MU};\mathbb{Z}_p)$$

の像を求めることは、（ホモロジーを用いた）Adams スペクトル系列

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}_*}(\mathbb{Z}_p, H_*(\mathbf{MU};\mathbb{Z}_p)) \quad \Longrightarrow \quad \pi_*(\mathbf{MU})$$

の edge 準同型を計算することに相当する。Hattori-Stong の理論では、K-Hurewicz 写像

$$\pi_*(\mathbf{MU}) \longrightarrow K_*(\mathbf{MU})$$

の像が決められた（魔法のように決まった）。

Remark 33.2 非連結スペクトラム K から連結スペクトラム H へのスペクトラム写像は存在しないが、K から $\prod_{n\in\mathbb{Z}} \Sigma^{2n} H\mathbb{Q}$ へのスペクトラム写像（Chern charactor）は存在する。

$$\begin{tikzcd}
\pi_*(\mathbf{MU}) \arrow[rr, hook, "\text{Hurewicz}"] \arrow[dr, "\cong"'] & & H_*(\mathbf{MU}) \\
& P(K_*(\mathbf{MU})) \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, hook] & \\
& & K_*(\mathbf{MU})
\end{tikzcd}$$

ここで $P(K_*(\mathbf{MU}))$ は、K 理論から構成される Adams 型スペクトル系列の E_2 項の 0-th line

$$P(K_*(\mathbf{MU})) \quad = \quad \mathrm{Ext}^{0,*}_{K_*K}(K_*(\mathbf{S}^0), K_*(\mathbf{MU}))$$

であり、K 理論における Adams 作用素の双対達の $K_*(\mathbf{MU})$ への作用から得られる元達である。

以下では $\mathbb{Z}$ 係数のコホモロジーで考える。次の fibration を考える：

$$\begin{tikzcd}
MU_N \simeq (E_N, E_N^{\geq 1}) \arrow[d, "\pi"'] & (\mathbb{C}^N, (\mathbb{C}^N)^{\geq 1}) = (D^{2N}, \partial D^{2N}) \simeq S^{2N} \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\pi"] \\
BU_N & * \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

BU_N の各点 p にはファイバー $(D^{2N}, \partial D^{2N})$ が対応している（Figure 8.4 参照）：
$H^i(E_N, \partial E_N) = 0$ $(i < 2N)$ かつ

$$H^{2N}(E_N, \partial E_N) \cong \mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} H^{2N}(D^{2N}, \partial D^{2N}) \cong \mathbb{Z}$$

である。この生成元の取り方（向き付け）は２つあるが、あらかじめ決めてある複素構造から１つに定めることが出来る。

Definition 33.3 (Thom 類) 上のように定まる生成元 $U \in H^{2N}(E_N, \partial E_N)$ を Thom 類と呼ぶ。

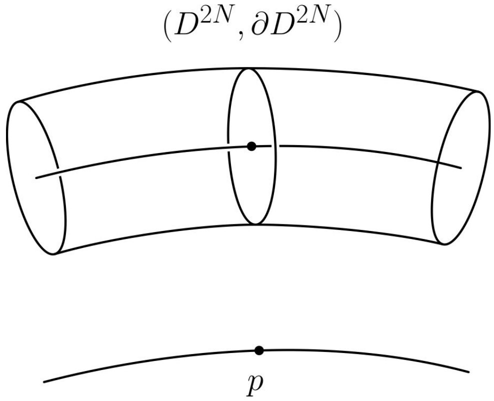

Figure 8.4:

$H^{2N}(E_N, \partial E_N) = \widetilde{H}^{2N}(MU_N)$ であり、底空間 BU_N のコホモロジー

$$H^*(BU_N) \;=\; \mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots, c_N]$$

は既によく知られていたことに注意せよ。このとき、元 $x \in H^*(BU_N)$ に対して cup 積

$$\begin{array}{ccc} H^*(E_N) \times \widetilde{H}^{2N}(MU_N) & \longrightarrow & \widetilde{H}^{*+2N}(MU_N) \\ (\pi^*(x), U) & \longmapsto & \pi^*(x) \cdot U \end{array}$$

が考えられるので、写像

$$\phi : H^*(BU_N) \longrightarrow \widetilde{H}^{*+2N}(MU_N)$$

が $\phi(x) = \pi^*(x) \cdot U$ で定義される。

Theorem 33.4 (Thom 同型定理) 写像 ϕ はベクトル空間としての同型である（*Thom* 同型と呼ばれる)。さらに可換図式

$$\begin{tikzcd} H^*(BU_N) \arrow[r, "\cong"] & \widetilde{H}^{*+2N}(MU_N) \\ H^*(BU_{N+1}) \arrow[u] \arrow[r, "\cong"] & \widetilde{H}^{*+2(N+1)}(MU_{N+1}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

で極限を考えることで、次の同型も得る：

$$\begin{array}{rcl} \phi : H^*(\mathbf{BU}) & \xrightarrow{\cong} & H^*(\mathbf{MU}) \\ x & \longmapsto & \pi^*(x) \cdot U \end{array}$$

□

これで、$H^*(\mathbf{MU})$ の構造が分かった。また、積 $\mathbf{BU} \times \mathbf{BU} \to \mathbf{BU}$ が $H^*(\mathbf{BU})$ に余積

$$\begin{array}{rcl} H^*(\mathbf{BU}) & \longrightarrow & H^*(\mathbf{BU}) \otimes H^*(\mathbf{BU}) \\ c_n & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i+j=n} c_i \otimes c_j \qquad (c_0 = 1) \end{array}$$

を与えること等により $H^*(\mathbf{BU})$ は（その双対の $H_*(\mathbf{BU})$ も）Hopf 代数の構造を持ち、Thom 同型

$$\begin{array}{rcl} H^*(\mathbf{MU}) & \cong & H^*(\mathbf{BU}) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots] \\ H_*(\mathbf{MU}) & \cong & H_*(\mathbf{BU}) = \mathbb{Z}[b_1, b_2, \ldots] \end{array} \qquad \text{（注：} b_i \text{ は } c_i \text{ と双対な元ではない）}$$

によって $H^*(\mathbf{MU})$ と $H_*(\mathbf{MU})$ にも Hopf 代数構造が誘導される。

34 $\pi_*(\mathbf{MU}) \otimes \mathbb{Q}$ の計算

$\pi_*(\mathbf{MU})$ の構造解析は、実は torsion を除いた部分はそれほど難しくはなく、Hurewicz 写像

$$H : \Omega_n^U \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow H_n(\mathbf{MU}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

の像を Chern 類を用いながら計算することで達成される。

Remark 34.1 Hurewicz 写像 H は、以下のような解釈をすることも可能である：

$$\begin{tikzcd} \Omega_*^U \cong \pi_*(\mathbf{MU}) \arrow[r] \arrow[dr, "H"'] & H_*(\mathbf{BU}) \arrow[d, "\cong"] \\ & H_*(\mathbf{MU}) \end{tikzcd}$$

$\sum_i i\, n_i = n$ を満たす非負整数の列 $\lambda = (n_1, n_2, \ldots)$ に対応する Chern 類を

$$c_\lambda \quad = \quad c_1^{n_1} \cdots c_N^{n_N} \quad \in H^n(\mathbf{BU})$$

で表し、また n 次元多様体 $M \in \Omega_n^U$ に対して、法束 $\nu_M \to M$ の分類写像から誘導される準同型

$$H^n(\mathbf{BU}) \longrightarrow H^n(M)$$

で c_λ をうつしたものを $c_\lambda(\nu_M) \in H^n(M; \mathbb{Z})$ で表すことにしよう。M の接束 ν_M は複素構造を持ってるので、そこから誘導される向き付けで決まる M の基本類を $[M] \in H_n(M; \mathbb{Z})$ として、クロネッカー積

$$\langle c_\lambda(\nu_M), [M] \rangle \in \mathbb{Z}$$

のことを改めて $c_\lambda(M)$ とおけば、アーベル群の準同型

$$c_\lambda : \Omega_n^U \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad (\deg(c_\lambda) = n)$$

が得られる。これが Hurewicz 写像の正体である。

これは「多様体 M 自身の法束（inverse を取れば接束でも同じ）からつくられた Chern 類を評価して一種の Chern 数を考えている」とも捉えることが出来る。

Proposition 34.2 *Hurewicz* 写像

$$H : \Omega_n^U \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow H_n(\mathbf{MU}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

は $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の同型を与える。

Proof. （単射であること） $\Omega_n^U \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \supset \mathbb{Q}[P^1, P^2, \ldots]$ （$P^n = [\mathbb{C}P^n]$）であり、$n = \sum n_i$ とするとき

$$P^{n_1} \times \cdots \times P^{n_N} \in \Omega_n^U \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

である。これら全てについて、P^i の Chern 類の計算

$$c_i(P^n) = \binom{n+1}{i} x^i \in H^*(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$$

等を用いながら Hurewicz 準同型を計算する（大きな行列を計算するだけ)。結局、P^n の H での行き先は $b_i \in H_*(\mathbf{BU})$ の多項式で表せて、（対称式の計算をすること等によって）単射だということが示せる。

（全射であること） 省略。 □

35 $\pi_*(\mathbf{MU})$ の計算

$\Omega_*^U \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ではなく、Ω_*^U そのものを求めるのはもっと大変である。そのためには、素数 p ごとに Ω_*^U の p 成分（すなわちアーベル群として $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}_{p^n}$ の部分）を Adams スペクトル系列を使って求める必要がある。そのために

(1) $H^*(\mathbf{MU}; \mathbb{Z}_p)$ を $\mathscr{A}^*$ 加群として計算

(2) $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}^*}^*(H^*(\mathbf{MU}; \mathbb{Z}_p))$ を計算

のような手順で計算をおこなう。

$H^*(\mathbf{MU}; \mathbb{Z}_p)$ の $\mathbb{Z}_p$ 加群としての構造は、Thom 同型

$$\phi : H^*(\mathbf{BU}; \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^*(\mathbf{MU}; \mathbb{Z}_p)$$

で $H^*(\mathbf{BU}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[c_1, c_2, \ldots]$ から与えられたが、$\mathscr{A}^*$ 加群としての構造はどうだろうか？

$\underline{H^*(\mathbf{MU}; \mathbb{Z}_p) \text{ の } \mathscr{A}^* \text{ 加群としての構造}}$ 前の章で見たように、双対 Steenrod 代数は

$$\mathscr{A}_* = \mathbb{Z}_p[\xi_1, \xi_2, \ldots] \otimes \Lambda(\tau_0, \tau_1, \ldots)$$

で与えられた。また、非負整数の列 R と E を

$$R = (r_1, r_2, \ldots)\ (r_i \geqq 0), \quad E = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots)\ (\varepsilon_i = 0 \text{ or } 1)$$

が与えられたとき、単項式 $\xi(R)$ および $\tau(E)$ を

$$\xi(R) = \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \cdots, \qquad \tau(E) = \tau_0^{\varepsilon_0} \tau_1^{\varepsilon_1} \cdots$$

でそれぞれ定義すれば、単項式の集まり $\{\tau(E)\xi(R)\}$ は $\mathscr{A}_*$ の $\mathbb{Z}_p$ ベクトル空間としての基底をなし、その双対基底として Steenrod 代数 $\mathscr{A}_*$ の $\mathbb{Z}_p$-基底 $\{\rho(E, R)\}$ が与えられる。特に、$\xi(R)$ の双対を $P^R = \rho(\mathbf{0}, R)$ で表す。（$R = (r, 0, 0, \ldots)$ の場合は $P^R = P^r$ は mod p Steenrod 作用素である。）

このとき、以下が成立する：

Proposition 35.1 (Milnor [15]) 元 $P^R,\ Q_0,\ Q_1,\ Q_2,\ \ldots \in \mathscr{A}^*$ で次を満たすものが存在する：

(1) $Q_0^{\varepsilon_0} Q_1^{\varepsilon_1} \ldots P^R \in \mathscr{A}^*$ は $\tau(E)\xi(R) \in \mathscr{A}_*$ の双対基底

(2) $\beta = Q_0$（τ_0 の双対）

(3) $\deg(P^R) = \sum_{i=0}^{\infty} 2r_i(p^i - 1), \quad \deg(Q_i) = 2p^i - 1$

(4) $\mathscr{A}^0 = \Lambda(Q_0, Q_1, \ldots)$ は $\mathscr{A}^*$ の部分外積代数である

(5) $i \neq j$ のとき、$Q_iQ_j + Q_jQ_i = 0$

(6) $\mathscr{A}^*$ は右 $\mathscr{A}^0$ 加群として *free* である

(7) (Q_0) を Q_0 が生成する $\mathscr{A}^*$ の両側イデアルとするとき

$$\begin{aligned} \mathscr{A}^*/(Q_0) &\cong (P^1, P^2, \ldots) \text{ の生成する部分代数} \\ &= \mathscr{A}^* \otimes_{\mathscr{A}^0} \mathbb{Z}_p \qquad \text{（左 } \mathscr{A}^* \text{ 加群として）} \end{aligned}$$

□

$H^*(\mathbf{MU};\mathbb{Z}_p)$ は偶数次元のところしか元がないので、奇数次元の Q_0 はゼロとして作用している。したがって、$H^*(\mathbf{MU};\mathbb{Z}_p)$ は $\mathscr{A}^*/(Q_0)$ 加群である。

さらに、$H^*(\mathbf{MU};\mathbb{Z}_p)$ が $\mathscr{A}^*/(Q_0)$ 加群として free であることを言うだけなら、単射

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{A}^*/(Q_0) & \longrightarrow & H^*(\mathbf{MU};\mathbb{Z}_p) \\ a & \longmapsto & a \cdot U \quad \text{の生成する部分代数} \end{array}$$

を示して（ここら辺、Milnor の論文を読んでないのでこういう風にしているかどうか不明だが、大抵はこうやる）$H^*(\mathbf{MU};\mathbb{Z}_p)$ の $\mathscr{A}^*$ 作用は対角的に（すなわち、$\pi^*(x)$ と U の両方に）かかっていて

$$\begin{array}{rcl} \Delta : \mathscr{A}^* & \longrightarrow & \mathscr{A}^* \otimes \mathscr{A}^* \\ a & \longmapsto & \sum a' \otimes a'' \qquad (\longleftarrow \pi^*(x) \text{ と } U \text{ のそれぞれに作用}) \end{array}$$

で定まる $H^*(\mathbf{MU};\mathbb{Z}_p)$ への作用をよく見て、あとは Hopf 代数のルーティンワークで示せる。(Milnor-Moore [19] で開発された Hopf 代数の構造論を使う。)

$\mathscr{A}^*$ の $H^*(\mathbf{BU};\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[c_1, c_2, \ldots]$ への作用を見るには、分解原理（splitting principle）を用いて以下の可換図式を考えればよい：

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^N & \longrightarrow & E_N & \longrightarrow & BU_N \quad \text{: fibration} \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & E_1 \oplus \cdots \oplus E_1 & \longrightarrow & \mathbb{C}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{C}P^\infty \end{array}$$

ここで、底空間の間の写像から誘導される準同型は以下のようになっている：

$$\begin{array}{rcl} H^*(BU_N;\mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & H^*((\mathbb{C}P^\infty)^{\times N};\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[x_1, x_2, \ldots, x_N] \\ c_i & \longmapsto & i \text{ 番目の基本対称式} \\ & & \left(\prod_i (1 + x_i) = 1 + c_1 + c_2 + \cdots \right) \end{array}$$

$H^*(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z}_p)$ の上では、$\mathscr{A}_*$ の余作用が

$$\begin{array}{rcl} \lambda : H^*(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & H^*(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z}_p)\otimes\mathscr{A}_* \\ x & \longmapsto & \lambda^*(x) = x\otimes\xi_0 + x^p\otimes\xi_1 + x^{p^2}\otimes\xi_2+\cdots \end{array}$$

となる（これは以前にやった）。これを使うと、$H^*((\mathbb{C}P^\infty)^{\times N};\mathbb{Z}_p)$ さらには $H^*(\mathbf{BU};\mathbb{Z}_p)$ 上での $\mathscr{A}^*$ の余作用が分かる。

Theorem 35.2 (Milnor [15], Thm. 2) $H^*(\mathbf{BU};\mathbb{Z}_p)$ の元 s_λ を

$$H^*(\mathbf{BU};\mathbb{Z}_p)\ni s_\lambda = s_\lambda(c_1c_2\cdots) = c_1^{\lambda_1}c_2^{\lambda_2}\cdots + \textit{(error terms)}$$

$$\text{かつ}\quad \deg(s_\lambda) = \textstyle\sum_j 2(p^j-1)\lambda_j$$

とおいてその *Thom* 同型による像 $\phi(s_\lambda)$ を考えるとき、左 $\mathscr{A}^*$ 加群としての同型

$$H^*(\mathbf{MU};\mathbb{Z}_p) \;=\; \sum_{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)} \mathscr{A}^*/(Q_0)\cdot\phi(s_\lambda) \qquad (\text{各 }\lambda_i\text{ は }p^\bullet-1\text{ の形でないものを走る})$$

がある（すなわち、$H^*(\mathbf{MU};\mathbb{Z}_p)$ は $\mathscr{A}^*/(Q_0)$ を $\phi(s_\lambda)$ 次元ずらしたものの直和である）。 □

Remark 35.3 $\mathscr{A}^*/(Q_0)$ の「だいたいの大きさ」は

$$\mathscr{A}^*/(Q_0) \;=\; \mathbb{Z}_p[\xi_1,\xi_2,\ldots]$$

である（注：degree-wise にはこれで良いが、双対を取ってないのでこれは本当はウソ）。

このことから Adams スペクトル系列の E_2 項は

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{A}^*}(H^*(\mathbf{MU};\mathbb{Z}_p),\mathbb{Z}_p) \;=\; \sum_\lambda \mathrm{Ext}^*_{\mathscr{A}^*}(\mathscr{A}^*/(Q_0),\mathbb{Z}_p)\cdot\phi(s_\lambda)$$

となる。さらに、$\mathscr{A}^*$ は右 $\mathscr{A}^0$ 加群として free であり（[15] Lem. 1）

$$\mathscr{A}^*/(Q_0) \;\cong\; \mathscr{A}^*\otimes_{\mathscr{A}^0}\mathbb{Z}_p$$

と表されるので、change-of-rings 同型（表現論における Frobenius の公式）によって

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ext}^*_{\mathscr{A}^*}(\mathscr{A}^*/(Q_0),\mathbb{Z}_p) & \cong & \mathrm{Ext}^*_{\mathscr{A}^0}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p) \\ & = & \mathbb{Z}_p[\bar b_0,\bar b_1,\bar b_2,\ldots] \qquad (\deg(\bar b_j)=(1,2p^j-1),\ \text{全次数は }2p^j-2) \end{array}$$

と変形されるので、結局 $\pi_*(\mathbf{MU})$ の p 成分に収束する Adams スペクトル系列の E_2 項は次のようになる：

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{A}^*}(H^*(\mathbf{MU};\mathbb{Z}_p),\mathbb{Z}_p) \;=\; \sum_\lambda \mathbb{Z}_p[\bar b_0,\bar b_1,\bar b_2,\ldots]\otimes\phi(s_\lambda)$$

Theorem 35.4 (Milnor [15] Thm. 3)

$$\pi_*(\mathbf{MU}) \;\cong\; \mathbb{Z}[a_1,a_2,\ldots] \qquad (\deg(a_j)=2j)$$

Proof. 今考えている Adams スペクトル系列は E_2 項でつぶれている、すなわち $E_2^{*,*} = E_\infty^{*,*}$ となる。また、torsion を持たないことも分かる（[15] Thm. 1）。

実際の元の移り方は、**MU** の Adams filtration

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{MU} = \mathbf{X}_0 \arrow[dr] & & \mathbf{X}_1 \arrow[ll] \arrow[dr] & & \mathbf{X}_2 \arrow[ll] & \cdots \arrow[l] \\
& \mathbf{Z}_0 \arrow[ur] & & \mathbf{Z}_1 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

を考えて（各 $\mathbf{Z}_\bullet$ は $\mathbf{K}(\mathbb{Z}_p)$ を懸垂してずらしたもの）$\pi_*(\mathbf{MU})$ の各フィルターで detect されている部分をよく見れば、元の移り方が以下のようであることも分かる：

$$\begin{array}{rcl} H : \pi_*(\mathbf{MU}) & \longrightarrow & H_*(\mathbf{MU}) \otimes \mathbb{Z}_p \\ a_j & \longmapsto & 0 \qquad (j = p^\bullet - 1 \text{ の場合}) \end{array}$$

□

以上が、Milnor-Novikov による $\pi_*(\mathbf{MU})$ の構造（つまり Ω_*^U の構造）の決定方法である。

Remark 35.5 Macdonald の本で書かれているかなりのことは、トポロジストは Chern 類の理論としてよく知っていた（勿論 q-analogue は知らなかったが、mod p 簡約は知っていた）。

この世界だと環の大きさは無限変数の多項式環くらいだった（私が最近扱っている代数の大きさはこのくらい）。一般に、$\mathbb{Z}$ 上での構造解析は難しいが、$\otimes\mathbb{Q}$ すると（標数 0 の世界で考えると）大抵は簡単になる。代数的トポロジーでは、torsion 部分を調べるためにまず標数 p の部分を取り出して考え、その構造解析のために Steenrod 代数を用いたわけである。

私が今扱っている分野ではそういう構造は入らないけど、ねじれた積や「隠れた標数 p の世界」があったりする。

Chapter 9

複素コボルディズム理論とQuillenの理論

特異コホモロジー理論の代わりに、スペクトラム $\mathbf{MU}$ を使って定義される一般コホモロジーである「複素コボルディズム（MU^*）理論」を用いて三角圏 $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ を代数的に調べることが出来る。

この章では、特異コホモロジーでおこなった議論とパラレルに特性類, Thom 同型, 作用素全体がなす環などについて議論を進める。最後に、D.Quillen や J.Moravan による形式群則を用いたコボルディズム理論に対する洞察についても述べる。

圏 $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ の扱いは 1960 年代まではきちんと定義されていなかったが、functorial な構成等のキチンとした扱いが最近ようやく出来るようになってきた。$\mathscr{A}_U^*$ 加群の理解の仕方は、Quillen と Morava によって様相を「ガラッ」と変えられた。

今からは $\mathbf{MU}^*(\mathbf{MU}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}[\mathbf{MU}, \Sigma^n\mathbf{MU}]$ の環の構造の決定の話（1960 年代の終わりの話, Novikov-Landweber の仕事）。

36　MU^* コホモロジー理論と Novikov 環

スペクトラム $\mathbf{MU} \in \mathscr{H}\mathbf{Sp}$ （Novikov, 1966〜68 年）を用いて、スペクトラム $\mathbf{X} \in \mathscr{H}\mathbf{Sp}$ に対して

$$\begin{array}{rcll} MU^n(\mathbf{X}) & = & [\mathbf{X}, \Sigma^n\mathbf{MU}] & \text{（写像のホモトピー類）} \\ MU^*(\mathbf{X}) & = & \sum_n MU^n(\mathbf{X}) & \text{（次数付きアーベル群）} \end{array}$$

とおくことで「複素コボルディズム」と呼ばれる反変関手 $MU^*(-)$ が定義される：

$$MU^* : \ \mathscr{H}\mathbf{Sp} \longrightarrow Vec_p^*$$

トポロジストは一般コホモロジー理論（単に一般コホモロジー、あるいはコホモロジー関手）と呼ぶ。（定義から明らかだが）一般コホモロジー $MU^*(-)$ は、上で見たようにスペクトラム $\mathbf{MU} \in \mathscr{H}\mathbf{Sp}$ で表現されている。

関手 $MU^*(-)$ によって、$\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ における三角列はアーベル群の完全列にうつされる：

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[rr] & & \mathbf{Y} \arrow[dl] \\ & \mathbf{Z} \arrow[ul, "\deg +1"] & \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} MU^*(\mathbf{X}) \arrow[dr, "\deg +1"'] & & MU^*(\mathbf{Y}) \arrow[ll] \\ & MU^*(\mathbf{Z}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

つまり次の長完全列が得られる：

$$\cdots \longrightarrow MU^*(\mathbf{Z}) \longrightarrow MU^*(\mathbf{Y}) \longrightarrow MU^*(\mathbf{X}) \longrightarrow MU^{*+1}(\mathbf{Z}) \longrightarrow \cdots$$

<u>$H^*(-;\mathbb{Z}_p)$ でやったこと</u>

$$H^*(-;\mathbb{Z}_p): \quad \begin{tikzcd} \mathscr{H}\mathbf{Sp} \arrow[r] \arrow[dr] & Vec_p^* \arrow[d, squiggly, "\text{格上げした}"] \\ & \mathscr{A}^*\text{-}mod \end{tikzcd}$$

$\mathbb{Z}$ graded $\mathscr{A}^*$ 加群のホモロジー代数で $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ を近似した。（Adams filtration, Adams スペクトル系列）

これを MU 理論について真似をしたい。すなわち、ここまでは $\mathbf{MU}$ は攻撃対象だったが、これからは $\mathbf{MU}$ をしもべ（道具）にして（一般コホモロジー $MU^*(-)$ を用いて）第 7 章まで特異コホモロジー理論でおこなったのと同様の解析を安定ホモトピー圏 $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ に対して試みる。

MU 理論における「Steenrod 代数の対応物」は何だろうか？

特異コホモロジー H^* の場合は、関手が Eilenberg-MacLane スペクトラム $\mathbf{K}(\mathbb{Z}_p)$ によって表現されているから、安定作用素全体（Steenrod 代数）は

$$\mathscr{A}^* = \sum_n H^n(\mathbf{K}(\mathbb{Z}_p)) = \sum_n [\mathbf{K}(\mathbb{Z}_p), \Sigma^n \mathbf{K}(\mathbb{Z}_p)]$$

MU 理論でも同様にコホモロジー関手が $\mathbf{MU}$ スペクトラムで表現されているから

$$\mathscr{A}_U^* = MU^*(\mathbf{MU}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} MU^n(\mathbf{MU})$$

は合成によって $\mathbb{Z}$ graded な環になる。これが MU 理論における「Steenrod 代数」であり、Novikov 環と呼ばれる。

Steenrod 代数 $\mathscr{A}^*$ の場合はどのようにして構造決定をしたか、以下簡単に復習しよう。大まかに言って以下の原理が用いられた（以下は p が奇素数の場合）。

(1) 作用素 β_p, $P^n \in \mathscr{A}_p^*$ $(n \geqq 0)$ 達を構成してから Adem 関係式を示す。（基本的には acyclic model の方法, Steenrod [31], 中岡稔 [20], Fomenko [23] 等を参照せよ）

(2) コホモロジー環

$$H^*(K(\mathbb{Z}_p, 1); \mathbb{Z}_p) = \Lambda^*(\iota_1) \otimes \mathbb{Z}_p(\beta\iota_1)$$

からスタートして、Serre fibration

$$K(\mathbb{Z}_p, n) \longrightarrow P \longrightarrow K(\mathbb{Z}_p, n+1) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

と Serre のスペクトル系列を用いて n について帰納法により $H^*(K(\mathbb{Z}_p, n); \mathbb{Z}_p)$ を計算して、$n \to \infty$ とする（$\mathscr{A}^*$ の決定）。

(3) 双対 Steenrod 代数 $\mathscr{A}_* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathscr{A}^*, \mathbb{Z}_p)$ の Hopf 代数としての構造の決定（Milnor）。

Novikov 環 $\mathscr{A}_U^*$ の構造を決定するために同様の方法を用いたいところだが、$\mathscr{A}_U^*$ は $\mathscr{A}_p^*$ と比べて非常にばかでかい非可換環であり、有限生成ですらない。さらに、functorial にキチンとやるためには $\mathscr{H}\mathbf{Sp}$ で位相的な環や加群等を考える必要もある。

したがって、$H^*(-;\mathbb{Z}_p)$ の方法は完全には上手く機能せず、別の道を辿る必要がある。

$\mathscr{A}_U^*$ の構造決定は、Novikov（ソ連）の 100 頁の論文 [21] と Landweber（アメリカ）の 40 頁の論文 [13] により独立に発表された（方法は同じ）。彼らがおこなった方法は、以下の方針に基づいている：

(1) MU^* 理論における Chern 類（MU^* に値を持つ複素ベクトル束の特性類）の理論

(2) MU^* 理論における Thom 同型

以下では、まず $\mathscr{A}_U^*$ のアーベル群としての構造を調べたい。

ホモトピー associative なスペクトラムの積 $\mu : \mathbf{MU} \wedge \mathbf{MU} \to \mathbf{MU}$ および単位写像 $\iota : \mathbf{S}^0 \to \mathbf{MU}$ （これは $\pi_0(\mathbf{MU}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元）は次の可換図式を満たす：

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{MU} = \mathbf{S}^0 \wedge \mathbf{MU} \arrow[r, "\iota\wedge id"] \arrow[dr] & \mathbf{MU} \wedge \mathbf{MU} \arrow[d, "\mu"] & \mathbf{MU} \wedge \mathbf{S}^0 = \mathbf{MU} \arrow[l, "id\wedge\iota"'] \arrow[dl] \\
& \Sigma^n \mathbf{MU} &
\end{tikzcd}$$

また、μ から誘導される写像

$$\mu_* : \pi_*(\mathbf{MU}) \times \pi_*(\mathbf{MU}) \longrightarrow \pi_*(\mathbf{MU}) = \Omega_*^U$$

は Ω_*^U の積を与え、$\iota \in \pi_*(\mathbf{MU})$ は単位元 $1 \in \Omega_*^U$ と対応している。

Remark 36.1 ($MU^*(\mathbf{MU})$ の Ω_*^U 加群構造)

$$\pi_*(\mathbf{MU}) \;=\; MU^*(\mathbf{S}^0) \;=\; \mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots] \qquad (\deg(a_i) = -2i)$$

であり、また定義から $\mathscr{A}_U^* = MU^n(\mathbf{MU}) = [\mathbf{MU}, \Sigma^n\mathbf{MU}]$ でもあるので、元

$$\pi_{-n}(\mathbf{MU}) \;=\; [\mathbf{S}^0, \Sigma^n\mathbf{MU}] \ni a$$

を１つ取ってきたとき次の合成が考えられる：

$$\mathbf{S}^0 \wedge \mathbf{MU} \xrightarrow{a\wedge id} \Sigma^n\mathbf{MU} \wedge \mathbf{MU} \xrightarrow{\mu} \Sigma^n\mathbf{MU}$$

これにより、次数付き環の写像

$$\Omega_*^U \longrightarrow \mathscr{A}_U^*$$

が得られるので、$\mathscr{A}_U^*$ に Ω_*^U 加群構造を入れることが出来る。

ただし注意すべきなのは、ホモトピー群の間の２つの写像

$$\pi_*(\iota \wedge id), \quad \pi_*(id \wedge \iota) : \pi_*(\mathbf{MU}) \longrightarrow \pi_*(\mathbf{MU} \wedge \mathbf{MU})$$

はそれぞれ $\eta_L = \pi_*(\iota \wedge id)$ （左単位写像）、$\eta_R = \pi_*(id \wedge \iota)$ （右単位写像）と呼ばれ、一般には異なる準同型を与えるということである。したがって、$\mathscr{A}_U^*$ に入る Ω_*^U 加群構造にも 2 通りの異なるものがある。(η_L で左加群構造、η_R で右加群構造を入れる。)

スペクトラム $\mathbf{MU}$ の代わりに $\mathbf{K}(\mathbb{Z}_p)$ で考えた場合は η_L と η_R は一致する。この違いにより、特異コホモロジー理論から出てくる代数的対象は Hopf 代数、また複素コボルディズム理論から出てくる代数的対象は Hopf 亜代数（Hopf algebroid）とそれぞれ呼ばれる。

特異コホモロジー H の場合は、Steenrod 代数 $\mathscr{A}^*$ は基礎環 $\pi_*(\mathbf{K}(\mathbb{Z}_p)) = \mathbb{Z}_p$ をもつ Hopf 代数であり、$H^*(\mathbf{X})$ に作用していた。コボルディズム理論 MU の場合は、基礎環がばかでかい Ω_*^U に持ち上がり、$MU^*(\mathbf{X})$ に Novikov 環 $\mathscr{A}_U^*$ とコボルディズム環 $\Omega_*^U = \mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots]$ の両方が作用している。

したがって、MU^* 理論では非常にばかでかい可換環の上の加群の理論を考える必要がある。

37 MU^* 理論における特性類の理論

ここでは、MU^* に値をもつ複素ベクトル束の安定特性類について述べる。（通常の Chern 類などは、$H^*(-;\mathbb{Z}_p)$ や $H^*(-;\mathbb{Z})$ に値を持っていた。）

Definition 37.1 n 次元複素ベクトル束

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow E \longrightarrow X$$

の同型類に元 $c(E) \in MU^*(X)$ を対応させる関手

$$c : \mathrm{Vect}_n(X) \longrightarrow MU^*(X)$$

で、次の性質を満たすものを「MU^* に値を持つ安定特性類」と呼ぶ：

(1) （自然性）誘導束

$$f^*(E) = \begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

が与えられたとき、$f^*(c(E)) = c(E')$ が成り立つ。

(2) （安定性）　$c(E \oplus \mathbb{C}) = c(E)$ を満たす。

複素ベクトル束の理論により可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}_n(X) & \xrightarrow{\cong} & [X, BU_n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Vect}_{n+1}(X) & \xrightarrow{\cong} & [X, BU_{n+1}] \end{array}$$

があったので、特異コホモロジー H^* の場合と同様にして、MU^* に値を持つ安定特性類はは $MU^*(\mathbf{BU})$ の元と 1 対 1 に対応している。

特異コホモロジー理論の場合、$H^*(\mathbf{BU};\mathbb{Z})$ は次数付き $H^*(\mathbf{S}^0)$ $(= \mathbb{Z})$ 加群として

$$H^*(\mathbf{BU};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots] \quad (\deg(c_i) = 2i)$$

であり正の次元の元しか現れなかったので

- $\mathscr{A}^*$ における環構造の基本関係式＝ Adem 関係式
- 双対 Steenrod 代数 $\mathscr{A}_*$ の余積を決めた（Milnor）

などが考える事が出来た。ところが、複素コボルディズムの場合に $MU^*(\mathbf{BU})$ は次数付き $MU^*(\mathbf{S}^0)$ $(=\mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots])$ 加群として

$$MU^*(\mathbf{BU}) = \Omega_*^U[c_1^{MU}, c_2^{MU}, \ldots] \qquad (\deg(a_i) = -2i, \quad \deg(c_i^{MU}) = 2i)$$

のように元の次数が正と負の両方向に無限にのびていることから、$[\mathbf{BU}, \Sigma^n\mathbf{MU}]$ を複体だと考えると大変複雑な胞体構造を持っている。このようなでかい環の上の加群の理論はあまりなく、したがって BU を有限個の胞体からなる CW 複体で近似してトポロジーを考える、完備化して考える等しなければ理論が破綻してしまう。（それでも何とか頑張って $\mathscr{A}_U^*$ の積構造が決定された。）

<u>H^* 理論の場合（復習）</u>　複素ベクトル束 $\mathbb{C}^n \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} X$ に対して

$$\begin{array}{ccc} H^{2n}(E, E^{\geqq 1}) & \xrightarrow{i^*} & H^{2n}(\mathbb{C}^n, (\mathbb{C}^n)^{\geqq 1}) \;\cong\; \mathbb{Z} \\ U_E & \longmapsto & \text{（向き付け）} \end{array}$$

で定まる Thom 類 U_E が存在して、次の Thom 同型が成立した：

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) & \xrightarrow{\cong} & H^{*+2n}(E, E^{\geqq 1}) \\ x & \longmapsto & \pi^*(x) \cdot U_E \end{array}$$

多様体のトポロジーをやってないのでほとんど説明していないが、Thom 類や Thom 同型は多様体のコホモロジー論で交叉理論（intersection theory）を考える際の最も重要な結果でもあった。

MU 理論においても同様に Thom 類や Thom 同型を考える必要がある

Proposition 37.2 (MU^* における Thom 同型)

$$\begin{array}{ccc} MU^{2n}(E, E^{\geqq 1}) & \xrightarrow{i^*} & MU^{2n}(\mathbb{C}^n, (\mathbb{C}^n)^{\geqq 1}) \;\cong\; \pi_0(\mathbf{MU}) \;\cong\; \mathbb{Z} \\ U_E & \longmapsto & \text{（生成元）} \end{array}$$

となる U_E が *functorial* に取れて、以下の同型が成立する：

$$\begin{array}{ccc} MU^*(X) & \xrightarrow{\cong} & MU^{*+2n}(E, E^{\geqq 1}) \\ x & \longmapsto & \pi^*(x) \cdot U_E \end{array}$$

特に、写像

$$MU_n = (E, E^{\geqq 1}) \longrightarrow BU_n$$

から誘導される準同型は Ω_*^U 加群の同型であり、さらに *Atiyah-Hirzebruch* スペクトル系列を（BU を胞体分割して胞体でフィルトレーションを入れて近似を考えながら）用いれば次の同型も得られる：

$$\phi : MU^*(\mathbf{BU}) \xrightarrow{\cong} MU^*(\mathbf{MU})$$

□

したがって、Novikov 環 $MU^*(\mathbf{MU})$ を調べるには $MU^*(\mathbf{BU})$ を調べればよく、MU 理論における Chern 類をよく見ることが必要になる。$MU^*(\mathbf{BU})$ は、Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列を用いて求められる。

Proposition 37.3 非負整数の列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ に対して $||\lambda|| = \sum_i i\lambda_i$ $(< \infty)$ とおくとき、$MU^*(\mathbf{BU})$ の MU^* 加群としての基底は、次の元達で与えられる：

$$c_\lambda^{MU} = (c_1^{MU})^{\lambda_1}(c_2^{MU})^{\lambda_2}\cdots \quad \in MU^{2||\lambda||}(\mathbf{BU})$$

□

このとき、次が成り立つ：

Theorem 37.4 (Landweber-Novikov) $\mathscr{A}_U^* = MU^*(\mathbf{MU})$ は MU^* 加群として *free* であり、*Prop. 37.3* の元達を *Thom* 同型でうつした元 $\phi(c_\lambda^{MU})$ 達を基底として持つ。 □

特異コホモロジー理論 H^* の場合

$$\phi : H^*(\mathbf{BU}) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots] \longrightarrow H^*(\mathbf{MU}) = \mathbb{Z}[\phi(c_\lambda)]$$

と比べて基礎環（$\mathbb{Z}$ の部分）が、MU^* $(= \Omega_*^U)$ へと大きくなっていることが分かる。

$\mathscr{A}_U^*$ の環構造を調べるには、MU^* 理論における cup 積がどうなっているのかをよく見る必要がある。例えば、元 $\phi(c_\lambda^{MU}) \in \mathscr{A}_U^*$ 達について積

$$\phi(c_\lambda^{MU}) \cdot \phi(c_{\lambda'}^{MU}) \;\; = \;\; \sum_{\lambda''} a_{\lambda,\lambda'}^{\lambda''}\, \phi(c_{\lambda''}^{MU})$$

（ここで、$\deg(c_\lambda^{MU}) = 2||\lambda||$, $\deg(c_{\lambda'}^{MU}) = 2||\lambda'||$, $\deg(c_{\lambda''}^{MU}) = 2||\lambda''||$）を考えたとき、構造定数

$$a_{\lambda,\lambda'}^{\lambda''} \in \Omega_{2(||\lambda||+||\lambda'||-||\lambda''||)}^{MU}$$

は一般に無限和で表されるが、これをキチンと書き下さなければならない。このためには、単にホモトピー群を見るだけではなく幾何学的な情報が必要になる。（背後には MU 理論における交叉理論が隠れている。）

環構造に関する詳細は時間の関係上やらないが、Landweber-Novikov は $\mathscr{A}_U^*$ の環構造を非常に綺麗に決定して Milnor の $\mathscr{A}_*$ のレベルまでほぼ到達した。興味ある人は Novikov [21], Landweber [13] を読む事を勧める。（後に、Quillen [26] により形式群則との関係により代数的に求められるようにもなった。）

38 MU^* 理論における Quillen の理論

特異コホモロジー理論 $H^*(-;\mathbb{Z})$ は幾何的にも「由緒正しいコホモロジー論」であり、de Rham コホモロジーの理論等とも非常に相性が良かった（さらに Hodge 理論などにも発展した）。このように、幾何学から来ている「由緒正しい理論」には数学の他領域の様々な理論とつながりやすい利点があった。

特異コホモロジー理論を、幾何的な由来を一旦忘れて

$$H^*(\mathbf{X};\mathbb{Z}) \;\; = \;\; \sum_n [\mathbf{X}, \Sigma^n\mathbf{K}(\mathbb{Z})] \quad \text{（写像のホモトピー類の集合）}$$

として考えると、ホモロジーの計算自体はしづらくなった代わりにホモトピー論の様々な道具を自由に使えた。複素コボルディズムでは、ホモトピー集合 $\mathscr{A}_U^*$ を考える際に

$$MU^*(\mathbf{X}) \quad = \quad \sum_n [\mathbf{X}, \Sigma^n \mathbf{MU}]$$

を定義として捉えて、ここまで全くホモトピー論な議論のみで進めてきたが、実はコボルディズム理論にも対応する「由緒正しい理論」代数的な理論が存在する。それが、１次元可換な形式群則（1-dimensional commutative formal group law）の理論である。（これは Chern 類のテンソル積の理論と密接に関連している。）

以下で、R は $\mathbb{Z}$, Ω_U^* 等の $\mathbb{Z}$ graded 可換環とする。

Definition 38.1 R 上の１次元可換な形式群則とは、２変数のべき級数

$$F(X,Y) = \sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j \in R[[X,Y]]$$

（元の次数はそれぞれ $\deg(X) = \deg(Y) = 2$, $\deg(a_{ij}) = 2-2(i+j)$）で次を満たすものである：

(1) $F(X,0) = X$, $F(0,Y) = Y$ （すなわち、$a_{1,0} = a_{0,1} = 1$ かつ $i > 1$ に対して $a_{i,0} = a_{0,i} = 0$）

(2) $F(X,Y) = F(Y,X)$ （すなわち、$a_{i,j} = a_{j,i}$）

(3) $F(X, F(Y,Z)) = F(F(X,Y),Z)$

可換環 R を固定して R 上の形式群則全体のなす圏を $\mathscr{F}orm(R)$ で表す。環準同型 $\theta : R \to R'$ に対して共変関手

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}orm(R) & \longrightarrow & \mathscr{F}orm(R') \\ \displaystyle\sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i,j} a'_{ij} X^i Y^j \qquad \text{（ここで } a'_{ij} = \theta(a_{ij})\text{）} \end{array}$$

が定義される。

MU^* 理論と形式群則の関係を見るために、まず $MU^*(\mathbb{C}P^\infty)$ を Ω_*^U 加群として計算する。L_1 を $\mathbb{C}P^1$ $(= S^2)$ 上の複素直線束で、包含写像 $\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^\infty = BU_1 \simeq MU_1$ で分類されているものとするとき

$$MU^2(\mathbb{C}P^\infty) \longrightarrow MU^2(\mathbb{C}P^1)$$

で $MU^2(\mathbb{C}P^1) = MU^2(S^2)$ の生成元を引き戻したもの

$$x \;=\; c_1^{MU}(L_1) \;\in\; MU^2(\mathbb{C}P^\infty)$$

を考える。以下、複素直線束の列

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{C}P^{N+1} \arrow[d, equal] & & \mathbb{C}P^2 \arrow[d, equal] \\
 & \cdots & (L_1,(L_1)^{\geqq 1}) \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & (L_1,(L_1)^{\geqq 1}) \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathbb{C}P^\infty & \cdots \arrow[l] & \mathbb{C}P^N \arrow[l] \arrow[u, bend left, "0\text{切断}"] & \cdots \arrow[l] & \mathbb{C}P^1 = S^2 \arrow[l] \arrow[u, bend left, "0\text{切断}"]
\end{tikzcd}$$

を考えていくことにより

$$MU^*(\mathbb{C}P^N) \cong MU^*[x]/(x^{N+1})$$

となり、極限を考えることにより、結局 Ω_*^U 加群として $MU^*(\mathbb{C}P^\infty) \cong \Omega_*^U[[x]]$ であることが分かる。さらに

$$\begin{aligned} MU^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) &\cong MU^*(\mathbb{C}P^\infty) \otimes_{MU^*} MU^*(\mathbb{C}P^\infty) \\ &\cong MU^*[[x_1, x_2]] \end{aligned}$$

も分かる。ここで、直線束のテンソル積

$$L_1 \otimes L_2 \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$$

に対応する Chern 類を考える：

$$\begin{aligned} MU^2(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) &\longmapsto MU^*[[x_1, x_2]] = \mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots][[x_1, x_2]] \\ c_1^{MU}(L_1 \otimes L_2) &\longmapsto F_{MU}(x_1, x_2) = \sum_{i,j} a_{ij} x_1^i x_2^j \end{aligned}$$

（ここで、$\deg(a_{ij} = 2 - 2(i + j))$ かつ $\deg(x_1) = \deg(x_2) = 2$）この F_{MU} は MU^* 上の形式群則であることが示される。

複素コボルディズムから構成された形式群則が、形式群全体の中でどのような位置にあるのかを考えてみよう。$\mathscr{F}orm(R)$ を R 上の形式群則全体の集合として次の関手を考えることが出来る：

$$\begin{aligned} \mathscr{F}orm: \quad \mathbb{Z}\text{ graded な可換環} &\longrightarrow Sets \qquad \text{（共変関手）} \\ R &\longmapsto \mathscr{F}orm(R) \end{aligned}$$

このとき、次の定理が成立する：

Theorem 38.2 (Lazard (1958)) 関手 $\mathscr{F}orm$ は表現可能である。すなわち、$\mathbb{Z}$ 上の多項式環

$$L = \mathbb{Z}[\ell_1, \ell_2, \ldots] \qquad (\deg(\ell_i) = -2i)$$

（*Lazard* 環と呼ばれる）および L 上の形式群則 $F_L = F_L(x, y)$ が同型を除いて一意に存在して、R 上の任意の形式群則に対して

$$\begin{aligned} \mathscr{F}orm(R) &\cong Hom_{\mathbb{Z}\text{-}graded\ ring}(L, R) \\ F &\longmapsto (\varphi_F : L \to R) \end{aligned}$$

□

Quillen は、上で定義された MU^* 上の形式群則 $F_{MU} \in \Omega_*^U[[X, Y]]$ に対して Thm. 38.2 から定まる環写像

$$\varphi : L \longrightarrow \Omega_*^U$$

について次の結果を得た。

Theorem 38.3 (Quillen) φ は $\mathbb{Z}$ *graded* の環としての同型である。 □

つまり、MU 理論におけるベクトル束の特性類である Chern 類（幾何学的な対象）は、1 次元の形式群則の理論における universal object（代数的な対象）と自然に対応しているのである。

特異コホモロジー理論にせよ、複素コボルディズム理論にせよ、代数的に非常に綺麗な理論が出来上がるところには、このように「良い幾何（あるいは物理理論, 物性理論）で実現される」理論が潜んでいると考えて良い。

形式群則は代数幾何の世界で十分に研究されてきた対象であり、1950 年代からは Grothendieck の代数幾何のアイデアがどんどん入ってきて応用されていた。Quillen の洞察によってそれらの豊富な形式群則の自然変換の理論を複素コボルディズムの自然変換の理論に応用出来るようになった。

<u>形式群則の自然変換が作る環</u>　形式群則 F_L に 1 変数座標変換

$$f(x) \quad = \quad x + \sum_{i>0} b_i x^{i+1} \quad \in MU^*[[x]]$$

を作用させたもの

$$F_L(x,y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j \longmapsto (F_L)^f(x,y) = f^{-1}\left(\sum_{i,j} a_{i,j} f(x)^i f(y)^j\right)$$

もまた形式群則になる。

$$\Gamma = \left\{ f(x) \in MU^*[[x]] \ \mid \ f(0) = 0,\ f'(0) = 1 \right\}$$

は無限次元代数群であり、上述のような方法で形式群則に（すなわち MU^* に）作用しているので、Γ は MU^* 理論のコホモロジー作用素を生み出す。

MU 理論の Steenrod 代数 $\mathscr{A}_U^*$ は、このようにして生成されていると考えられるのである。

<u>Morava の理論</u>　MU^* の理論（すなわち一般コホモロジー群 $MU^*(\mathbf{X})$）は Ω_*^U 上の加群であり、Ω_*^U 上には Γ が作用していた：

$$\begin{array}{c} \Omega_*^U \longrightarrow \mathrm{Spec}(\Omega_*^U) \\ \circlearrowleft \\ \text{無限次元の群} = \Gamma \end{array}$$

Γ は、Ω_*^U への作用を通じて $\mathrm{Spec}(\Omega_*^U) \cong \mathbb{A}^\infty$（$\infty$ 次元アフィン空間）にも作用しているので、$MU^*(\mathbf{X})$ を $\mathbb{A}^\infty$ 上の層（Γ 同変な層）だと捉えてさらに詳しく調べることが可能になる。そのようなストラテジーでの第一歩を示したのが J.Morava である（1966 年）。

この話はその後さらに進展して、現在では M.Hopkins を旗頭とするグループが壮大な理論を展開していて、$\mathscr{A}_U^*$ 理論（さらには安定ホモトピー理論）の「代数幾何学化」が今まさに進行中である。

ここに出てくるアフィン空間は無限次元であり、そこに作用している 1 次元座標変換群の作る無限変数のアフィン群（ある意味で代数群）による商空間や同変層について、そういうまた

代数幾何的な理論を使って（ホモロジー代数の理論を使って）$\mathscr{A}_*^U$ 加群の理論をさらに同変コホモロジーの理論にまで格上げすることが出来る。（コホモロジー代数の構造を使って、いろんなことが出来るようになった。）

ところが、例えば球面の安定ホモトピー群

$$\pi_*(\mathbf{S}^0) = \sum_n \pi_{p+n}(S^p)$$

の計算（1940 年代からの問題）は MU^* の理論を使っても殆ど手が届かない。（ほんのちょっと進展があったが、未だ現在進行中である。）

D.Quillen [26] についてももう数回時間があれば話せたのだが $\cdots$

こういう大きな代数（無限変数, 次数付けが正負の両側に無限に広がっている）の上でホモロジー代数をやろうとすると、非常に注意深くやらなければ理論が破綻する。例えば、この理論で Adams 分解（位相的な自由分解）を作ろうとするとかなり深刻に考えなければばならない。実際、Adams は 1960 年代後半から 1970 年代始めにかけてこの問題をかなり深刻に考えられて整理された。（この理論もまだ発展中である。）

Bibliography

[1] M. F. Atiyah. K-theory. Lecture notes by D. W. Anderson. Benjamin, New York-Amsterdam (1967).

[2] J. F. Adams. On the structure and applications of the Steenrod algebra. Comment. Math. Helv. 32, (1958). 180–214.

[3] J. F. Adams. On the nonexistence of elements of Hopf invariant one. Bull. Amer. Math. Soc. 64, (1958). 279–282.

[4] A.K.Bousfield and V.K.A.M.Gugenheim. On PL de Rham theory and rational homotopy type. Mem. Amer. Math. Soc. 8 (1976), no. 179

[5] Gabriel, P.; Zisman, M. Calculus of fractions and homotopy theory. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35 Springer-Verlag New York, Inc., New York 1967

[6] S. I. Gelfand and Y. I. Manin. Methods of homological algebra. Second edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[7] P. A. Griffiths and J. W. Morgan. Rational homotopy theory and differential forms. Progress in Mathematics, 16. Birkhäuser, Boston, Mass., 1981.

[8] A.Hatcher. Algebraic topology. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[9] 服部晶夫. 位相幾何学 III. 岩波講座基礎数学, 1979.

[10] M. Hovey. Model categories. Mathematical Surveys and Monographs, 63. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[11] F. Hirzebruch Topological methods in algebraic geometry. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[12] 小松醇郎, 戸田宏, 中岡稔. 位相幾何学. 現代数学講座, 共立出版, 1957.

[13] P.S.Landweber. Cobordism operations and Hopf algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 129, (1967) 94–110.

[14] J. P. May. A concise course in algebraic topology. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago.
Available at `http://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf`

[15] J.Milnor. On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue. I. Amer. J. Math. 82, (1960) 505–521.

[16] J.Milnor and J.Stasheff. Characteristic classes. Annals of Mathematics Studies, No. 76 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1974.

[17] J.Milnor. Morse theory. Annals of Mathematics Studies, No. 51 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1963.

[18] J.Milnor. The Steenrod algebra and its dual. Ann. of Math. (2) 67 (1958) 150–171.

[19] J.Milnor and J.Moore. On the structure of Hopf algebras. Ann. of Math. (2) 81 (1965) 211–264.

[20] 中岡稔. 位相幾何学ーホモロジー論. 共立講座 現代の数学, 共立出版, 1970.

[21] S.P.Novikov. Methods of algebraic topology from the point of view of cobordism theory. (Russian). Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 31 1967 855–951.

[22] 南範彦. ホモトピー論：単体的集合からその彼方へ. 数理科学 2008 年 3 月号

[23] A.T.Fomenko, V.L. Gutenmacher and D.B. Fuchs（三村護訳） ホモトピー論 -幻想の世界から位相幾何学へ- . 共立出版, 1989.

[24] D.Quillen. Homotopical algebra. Lecture Notes in Mathematics, No. 43 Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

[25] D.Quillen. Rational homotopy theory. Ann. of Math. (2) 90, (1969) 205–295.

[26] D.Quillen. On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory. Bull. Amer. Math. Soc. 75 1969 1293–1298.

[27] D. C. Ravenel. Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres. The second edition, AMS Chelsea Series.
Available at `http://www.math.rochester.edu/u/faculty/doug/mu.html`

[28] J. P.Serre. Homologie singulière des espaces fibrés. Ann. of Math. (2) 54, (1951). 425–505.

[29] J. P.Serre. Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. Ann. of Math. (2) 58, (1953). 258–294.

[30] J. P.Serre. Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane. Comment. Math. Helv. 27, (1953). 198–232.

[31] N. E.Steenrod. Cohomology operations. Lectures by N. E. STeenrod written and revised by D. B. A. Epstein. Annals of Mathematics Studies, No. 50 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1962

[32] N. E.Steenrod. The Topology of Fibre Bundles. Princeton Mathematical Series, vol. 14. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.

[33] 田村一郎. トポロジー. 岩波全書 (1972)

[34] Thom, René. Quelques propriétés globales des variétés différentiables. (French) Comment. Math. Helv. 28, (1954), 17–86.

[35] 戸田宏. 数学との出会い. 数学まなびはじめ（第１集）, p.21–36, 数学のたのしみ編集部編（日本評論社）

[36] A.Tsuchiya. Characteristic classes for spherical fiber spaces. Nagoya Math. J. 43 (1971), 1–39.

[37] A.Tsuchiya. Characteristic classes for PL micro bundles. Nagoya Math. J. 43 (1971), 169–198.

[38] A.Tsuchiya. Homology operations on ring spectrum of H^∞ type and their applications. J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 277–316.