

# abc 定理, 楕円曲面, モーデル・ヴェイユ格子

塩田 徹治 述

中岡 宏行 記

## まえがき

このノートは、2005年5月16日～20日に、東京大学数理科学研究科において行われた集中講義の記録である。レクチャーノートとしてまとめるにあたって、若干の加筆をし、この間の進展を後記として付記した。

講義の素材はすべて初等的、具体的なものである。1変数の多項式、その次数の間の関係である abc-定理、Davenport の不等式、それらの証明も初等的である。次に登場する楕円曲線も、難しくいえば1次元アーベル多様体だが、群構造を与える加法定理が具体的な式で与えられるので、これも初等的といえよう。これら1次元のものを組合わせて2次元のもの、すなわち、1変数多項式を係数とする楕円曲線のあらゆる "楕円曲面" をつくる。そして、曲線や曲面の有理点や整数点を考える。

有理数体や関数体などの上に定義された楕円曲線の有理点全体（あるいは整数点全体）を考え、その "有限生成性" や "有限性" を問題にすると、もはや初等的とはいえず、モデル・ヴェイユの定理やジーゲルの定理とよばれる深さのある内容になる。しかし、楕円曲面という幾何学的な像は、それらの問題により身近な視点を提供する。たとえば、ここで扱うモデル・ヴェイユ格子は、楕円曲面の切断 (section) のなす有限生成な群に、曲面上の交点数から定まる自然な内積をいれたものである。格子の構造が一旦分かると、元々の有理点や整数点の問題にきわめて有用な情報を与える。そういう実感をもって頂ければ、幸いである。

この集中講義の機会をつくって下さった桂利行教授、および、講義のノートを整理してまとめて下さった中岡宏行さんに心から感謝したい。

2008年4月記

# 目次

まえがき	2
<b>1 第一日</b>	<b>4</b>
1.1 Davenport の定理と abc-定理	4
1.2 abc-定理の別証明, 分岐被覆	9
1.3 Dessin d'enfant	14
<b>2 第二日</b>	<b>17</b>
2.1 楕円曲線とその群構造	17
2.2 楕円曲線の整点と有理点	21
2.3 楕円曲面 (小平-Néron model)	24
<b>3 第三日</b>	<b>32</b>
3.1 複素代数曲面	32
3.2 Mordell-Weil 格子の formalism	34
3.3 有理楕円曲面	38
3.4 有理楕円曲面の OS 分類	41
<b>4 第四日</b>	<b>45</b>
4.1 Mordell-Weil の定理についての補足	45
4.2 楕円曲線の rank, torsion	48
4.3 楕円曲面の特異ファイバーの個数 (1)	52
<b>5 第五日</b>	<b>57</b>
5.1 楕円曲面の特異ファイバーの個数 (2)	57
5.2 DS-triple と楕円曲面	63
5.3 Mordell-Weil lattice の general scope	65
後記: その後の進展	68
(I) 定理 5.1 の等号を満たす楕円曲面について	68
(II) Davenport の不等式の正標数での反例	69
(III) $K3$ 曲面のピカル数と楕円曲線のランクについて	70

# 1 第一日

## 1.1 Davenport の定理と abc-定理

$k$  を標数 0 の代数閉体とする. Davenport により次の定理が示されている.

**定理 1.1 (Davenport の定理 [8])**  $k$  係数の非定数多項式  $f, g$  が  $f^3 \neq g^2$  を満たすとする. このとき

$$\deg(f^3 - g^2) \geq \frac{1}{2} \deg(f) + 1 \quad (1.1)$$

が成立する.

この定理は,

**予想 1.2 (Hall の予想 [12])** 任意の  $\varepsilon > 0$  に対してある定数  $C_\varepsilon$  が存在して,  $X^3 \neq Y^2$  を満たす任意の整数に対し

$$|X^3 - Y^2| > C_\varepsilon |X|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

が成立する.

という Hall の予想の多項式類似である ([4] を参照). この予想はいわゆる ABC-予想のはしりである. 多項式の場合は予想でなく定理である:

**proof.** (Davenport [8] による. [44] 参照.)  $h := f^3 - g^2$  とおく.  $h$  の次数が  $f^3$  の次数より下がるのは, ある  $m \geq 1$  が存在して

$$\deg(f) = 2m, \deg(g) = 3m$$

で, かつ  $f^3$  と  $g^2$  の最高次係数が一致する場合に限る.

従って,  $\deg(f) = 2m, \deg(g) = 3m$  の場合に,  $f, g$  : monic として

$$\deg(h) \leq m \Rightarrow h = 0$$

を示せばよい.  $f, g$  を

$$f(t) = \prod_{i=1}^{2m} (t - \alpha_i), \quad g(t) = \prod_{j=1}^{3m} (t - \beta_j)$$

と表せば

$$f^3 = g^2 \Leftrightarrow 3 \sum_{i=1}^{2m} \alpha_i^\nu = 2 \sum_{j=1}^{3m} \beta_j^\nu \quad (0 \leq \nu \leq 6m) \quad (1.2)$$

となる ( $\nu = 0$  のときは自明に成立). ここに体の標数が  $0$  であることを用いている. 今  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2m}, \beta_1, \dots, \beta_{3m}\}$  の相異なるものを  $\{\theta_1, \dots, \theta_r\}$  ( $r \leq 5m$ ) とおくと, (1.2) は

$$\sum_{k=1}^r c_k \theta_k^\nu = 0 \quad (0 \leq \nu \leq 6m)$$

( $c_k \in \mathbb{Z}$ ) とかける.  $\deg(h) \leq m$  ならば  $f^3, g^2$  の  $t^{6m-1}, t^{6m-2}, \dots, t^{m+1}$  の係数が等しくなるので,

$$\sum_{k=1}^r c_k \theta_k^\nu = 0 \quad (0 \leq \nu \leq 5m-1) \quad (1.3)$$

が成立する. 行列  $(\theta_k^\nu)$  ( $1 \leq k \leq 5m, 0 \leq \nu \leq 5m-1$ ) は van der Monde 行列ゆえ  $\det(\theta_k^\nu) \neq 0$  を満たすため,  $c_k$  の方程式 (1.3) の解は

$$c_1 = \dots = c_r = 0$$

となる. 従って

$$\sum_{k=1}^r c_k \theta_k^\nu = 0 \quad (0 \leq \nu \leq 6m)$$

より  $f^3 = g^2$  が成立する. ■

注意 1.3 上の証明は  $k$  の標数  $p$  が  $p > 6m$  を満たすときにも通用する.

$p = 2$  のときの反例として  $f = t^2, g = t^3 + 1$  が,

$p = 3$  のときの反例として  $f = t^2 + 1, g = t^3$  が挙げられる.

問題 1.4  $3 < p \leq 6m$  のとき Davenport の定理は成立するか. <sup>1</sup>

exercise 1.5 ([44], Lemma 3.1)  $\deg(h) = m+1$  のとき, 上の証明で  $r = 5m$  となることを示せ.

---

<sup>1</sup>後記 (II)

これは根  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2m}, \beta_1, \dots, \beta_{3m}\}$  がすべて異なることを意味しており、従って  $(f, g) = 1$ , また  $f, g$  は単根のみからなると分かる.

$f, g$  が非定数多項式,  $h = f^3 - g^2 \neq 0$  のとき Davenport の定理は

$$\deg(h) \geq \frac{1}{2} \deg(f) + 1$$

に他ならない. これは

定理 1.1'  $\deg(f) = 2m, \deg(g) = 3m \Rightarrow \deg(h) \geq m + 1$

或いは

定理 1.1''  $\deg(f) \leq 2(\deg(h) - 1), \deg(g) \leq 3(\deg(h) - 1)$

に同値であり, この形で用いることもある.

Stothers が (1.1) において等号の成立する場合を詳しく調べている ([51]) ことに因み, 次のように定義する.

定義 1.6 多項式の組  $\{f, g, h\}$  が位数  $m$  の Davenport-Stothers triple (DS-triple) であるとは

$$\deg(f) = 2m, \deg(g) = 3m, \deg(h) = m + 1$$

を満たすときをいう.

定理 1.7 (abc-定理)  $a, b, c$  が, 条件

$$a + b = c$$

$$(a, b) = 1$$

を満たす非定数  $k$  係数多項式とする. このとき,

$$\max(\deg(a), \deg(b), \deg(c)) \leq N_0(abc) - 1$$

が成立する. ここで, 多項式  $f$  に対して  $N_0(f)$  で  $f$  の相異なる根の個数を表す. これは  $f$  から得られる被約多項式の次数  $\deg(f_{\text{red}})$  に等しい.

**proof.** (初等的証明 [19])  $a + b = c$  から  $\max(\deg(a), \deg(b), \deg(c)) = \max(\deg(a), \deg(b))$  であること, 及び, 条件  $(a, b) = 1$  は  $a, b, c$  が共通因子を持たないことに同値であることを注意しておく.

$u = \frac{a}{c}, v = \frac{b}{c}$  という有理関数を考え, 関係式

$$u + v = 1$$

の両辺を  $t$  で微分すると

$$u' + v' = 0$$

より,

$$\frac{b}{a} = \frac{v}{u} = -\frac{\left(\frac{u'}{u}\right)}{\left(\frac{v'}{v}\right)} \quad (1.4)$$

を得る.  $a, b, c$  を

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 \prod_i (t - \alpha_i)^{e_i} & (\alpha_i \neq \alpha_{i'} \ (i \neq i')) \\ b(t) &= b_0 \prod_j (t - \beta_j)^{f_j} & (\beta_j \neq \beta_{j'} \ (j \neq j')) \\ c(t) &= c_0 \prod_k (t - \gamma_k)^{g_k} & (\gamma_k \neq \gamma_{k'} \ (k \neq k')) \end{aligned}$$

と表す. このとき  $\frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}$  は

$$\frac{u'}{u} = \sum_i \frac{e_i}{t - \alpha_i} - \sum_k \frac{g_k}{t - \gamma_k}, \quad \frac{v'}{v} = \sum_j \frac{f_j}{t - \beta_j} - \sum_k \frac{g_k}{t - \gamma_k} \quad (1.5)$$

と求まる.  $a, b, c$  が共通因子を持たないことから  $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$  は全て異なるため,

$$N(t) = \prod_i (t - \alpha_i) \prod_j (t - \beta_j) \prod_k (t - \gamma_k)$$

とおくと  $\deg(N) = N_0(abc)$  であり, (1.5) より

$$\deg\left(N \cdot \frac{u'}{u}\right) \leq N_0(abc) - 1, \quad \deg\left(N \cdot \frac{v'}{v}\right) \leq N_0(abc) - 1$$

となる. (1.4) より

$$\frac{b}{a} = -\frac{N \cdot \frac{u'}{u}}{N \cdot \frac{v'}{v}}$$

であり, これと  $(a, b) = 1$  から  $\deg(a), \deg(b) \leq N_0(abc) - 1$  を得る. ■

条件  $a + b = c$  は  $a + b + c = 0$  で置き換えても構わず, 定理は  $a, b, c$  に関し対称な主張であることを注意しておく. この定理は Stothers-Mason の定理とも呼ばれることもある. abc-定理の名前の由来は整数についての「ABC-予想」の類似であるからだが, これについてはたとえば [11] を参照されたい.

abc-定理を用いて次を示すことができる.

定理 1.8  $f, g$  が互いに素な多項式のとき,  $h = f^3 - g^2$  とおくと (特に  $f, g$  は非定数,  $h \neq 0$ ),

$$\deg(f) \leq 2(N_0(h) - 1)$$

$$\deg(g) \leq 3(N_0(h) - 1)$$

が成立する.

注意 1.9  $N_0(h) \leq \deg(h)$  ゆえ, この結論は定理 1.1'' の結論より強い. 仮定が強いいため, より強い結論が出てくるのである.

proof. 定理 1.7 を  $f^3 - g^2 - h = 0$  に適用すると,

$$3 \deg(f) = \deg(f^3) \leq N_0(f^3 g^2 h) - 1 \quad (1.6)$$

$$2 \deg(g) = \deg(g^2) \leq N_0(f^3 g^2 h) - 1 \quad (1.7)$$

が成立する. ここで

$$N_0(f^3 g^2 h) = N_0(fgh) \leq N_0(f) + N_0(g) + N_0(h) \leq \deg(f) + \deg(g) + N_0(h)$$

ゆえ, (1.6), (1.7) より

$$2 \deg(f) \leq \deg(g) + N_0(h) - 1$$

$$\deg(g) \leq \deg(f) + N_0(h) - 1$$

を得る. これから直ちに結論が従う. ■



## 1.2 abc-定理の別証明, 分岐被覆

Riemann-Hurwitz の関係式を用いて abc-定理の別証明が得られる.

### Riemann-Hurwitz の関係式

一般に, 種数  $\tilde{g}$  の曲線  $\tilde{C}$  から種数  $g$  の曲線  $C$  への次数  $d$  の分岐被覆  $\tilde{C} \rightarrow C$  が与えられたとき,

$$2\tilde{g} - 2 = d(2g - 2) + \sum_{x \in \tilde{C}} (e_x - 1)$$

が成立する. ここで  $e_x$  は点  $x$  での分岐指数を表す.

abc-定理の別証明.  $a + b = c$  ゆえ,  $a, b, c$  のうち少なくとも二つは次数が等しい. 対称性から  $\deg(a) = \deg(b)$  としてよく, またこのとき  $\deg(c) \leq \deg(a) (= \deg(b))$  となる. 与えられた  $a, b, c$  に対し分岐被覆  $u = \frac{a}{c} : \mathbb{P}_t^1 \rightarrow \mathbb{P}_u^1$  を考え,  $\tilde{g} = g = 0$  の場合の Riemann-Hurwitz の関係式を適用する.  $\deg(a) = \deg(b) = d$  とおけば,  $a, c$  が互いに素であることから  $u$  は次数  $\max(\deg(a), \deg(c)) = d$  の分岐被覆となる.

前の証明のように  $a = a_0 \prod_{i=1}^n (t - \alpha_i)^{e_i}$ ,  $b = b_0 \prod_{j=1}^m (t - \beta_j)^{f_j}$ ,  $c = c_0 \prod_{k=1}^{\ell} (t - \gamma_k)^{g_k}$  と表せば, この被覆は  $u = 0$  では点  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  でそれぞれ指数  $e_1, \dots, e_n$  の分岐を,  $u = 1$  では点  $\beta_1, \dots, \beta_m$  で指数  $f_1, \dots, f_m$  の分岐を,  $u = \infty$  では点  $\gamma_1, \dots, \gamma_{\ell}$  で指数  $g_1, \dots, g_{\ell}$  の分岐をもつ.  $\deg(c) < d$  の場合はさらに  $u = \infty$  上の点  $t = \infty$  で分岐指数が  $d - \deg(c)$  となる.  $\deg(c) = d$  の場合は  $u(\infty) \neq 0, 1, \infty$  である. その他の点上の分岐の寄与を  $V'$  で表せば,  $\deg(c) < d$  のとき

$$\begin{aligned} -2 &= (-2)d + \sum_{i=1}^n (e_i - 1) + \sum_{j=1}^m (f_j - 1) + \sum_{k=1}^{\ell} (g_k - 1) \\ &\quad + (d - \deg(c) - 1) + V' \end{aligned}$$

が得られ, 従って

$$\begin{aligned} 2d - 2 &= (d - n) + (d - m) + (\deg(c) - \ell) + (d - \deg(c) - 1) + V' \\ &= 3d - (n + m + \ell) - 1 + V' = 3d - N_0(abc) - 1 + V' \end{aligned}$$

となり,  $d = N_0(abc) - 1 - V' \leq N_0(abc) - 1$  を得る.

$\deg(c) = d$  の場合も同様に

$$-2 = (-2)d + \sum_{i=1}^n (e_i - 1) + \sum_{j=1}^m (f_j - 1) + \sum_{k=1}^{\ell} (g_k - 1) + V'$$

から

$$\begin{aligned} 2d - 2 &= (d - n) + (d - m) + (d - \ell) + V' \\ &= 3d - (n + m + \ell) + V' = 3d - N_0(abc) + V' \end{aligned}$$

となり,  $d = N_0(abc) - 2 - V' < N_0(abc) - 1$  を得る. ■

定理 1.7 で等号が成立する場合にここだけの呼称を与えることにする:

**定義 1.10** 非定数多項式の組  $\{a, b, c\}$  が

$$a + b = c$$

$$(a, b) = 1$$

$$\max(\deg(a), \deg(b)) = N_0(abc) - 1$$

を満たすとき, これを *abc-extreme* と呼ぶ.

**注意 1.11**  $\{a, b, c\}$  が *abc-extreme* のとき, 前出の記号において ( $\deg(c) < d$  かつ)  $V' = 0$  が成立し, 被覆  $u : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  は  $\{0, 1, \infty\}$  の外で不分岐となる.

これに関して次の著しい定理が知られている ([20, 第 2 章] 参照):

**定理 1.12 (Belyĭの定理 [3])**  $X$  を標数 0 の体上の完備非特異曲線とすると, 次は同値である.

- (1)  $X$  は  $\bar{\mathbb{Q}}$  上定義される曲線に同型となる.
- (2)  $\mathbb{P}^1$  への分岐被覆  $X \rightarrow \mathbb{P}^1$  であって, 高々 3 点  $(0, 1, \infty)$  としてよい) のみで分岐するものが存在する.

但し,  $\bar{\mathbb{Q}}$  は代数的数の全体のなす体をあらわす.

$\mathbb{P}^1$  の分岐被覆であって  $\{0, 1, \infty\}$  の外で不分岐なものを Belyi 関数という。  
 これにより  $\{a, b, c\}$  が abc-extreme のとき,  $\mathbb{P}_t^1$  の座標  $t$  を適当にとれば  $a, b, c \in \bar{\mathbb{Q}}[t]$  とできる.  $\{f, g, h\}$  が Davenport-Stothers triple のとき  $\{f^3, g^2, h\}$  は abc-extreme となるため,  $f, g, h \in \bar{\mathbb{Q}}[t]$  とできる.

位数  $m$  の DS-triple の例として次のようなものが知られている ([44] 参照).

**例 1.13**

- $m = 1$

$$f = t^2 - 1, \quad g = t^3 - \frac{3}{2}t, \quad h = \frac{3}{4}t^2 - 1$$

- $m = 2$

$$f = t^4 - 4t, \quad g = t^6 - 6t^3 + 6, \quad h = 8t^3 - 36$$

- $m = 3$  (Birch [4])

$$f = t^6 + 4t^4 + 10t^2 + 6, \quad g = t^9 + 6t^7 + 21t^5 + 35t^3 + \frac{63}{2}t, \\ h = 27t^4 + \frac{351}{4}t^2 + 216$$

- $m = 4$  (Hall [12])

$$f = t^8 + 6t^7 + 21t^6 + 50t^5 + 86t^4 + 114t^3 + 109t^2 + 74t + 28, \\ g = t^{12} + 9t^{11} + 45t^{10} + 156t^9 + 408t^8 + 846t^7 + 1416t^6 \\ + 1932t^5 + 2136t^4 + 1873t^3 + \frac{2517}{2}t^2 + \frac{1167}{2}t + \frac{299}{2}, \\ h = -\frac{27}{4}(4t^5 + 15t^4 + 38t^3 + 61t^2 + 62t + 59)$$

- $m = 5$  (Birch, Chowla, Hall, Schinzel [4])

· (B)

$$f = t(t^9 + 12t^6 + 60t^3 + 96), \\ g = t^{15} + 18t^{12} + 144t^9 + 576t^6 + 1080t^3 + 432, \\ h = -1728(3t^6 + 28t^3 + 108)$$

·(C<sub>+</sub>)

$$\begin{aligned}
f &= t^{10} + 26t^8 + 7(34 + 3\sqrt{-3})t^6 + 24(35 + 18\sqrt{-3})t^4 \\
&\quad + \frac{3}{2}(371 + 1509\sqrt{-3})t^2 + 3(-775 + 543\sqrt{-3}), \\
g &= t(t^{14} + 39t^{12} + \frac{3}{2}(407 + 21\sqrt{-3})t^{10} + \frac{5}{2}(1921 + 423\sqrt{-3})t^8 \\
&\quad + 18(1028 + 717\sqrt{-3})t^6 + 54(253 + 1260\sqrt{-3})t^4 \\
&\quad + \frac{1}{4}(-616509 + 535437\sqrt{-3})t^2 + \frac{1}{4}(-1524069 + 136485\sqrt{-3}), \\
h &= \frac{27}{8}(17755915 - 17284173\sqrt{-3}) \cdot \\
&\quad (t^6 + 18t^4 + (87 + 18\sqrt{-3})t^2 + (16 + 240\sqrt{-3}))
\end{aligned}$$

·(C<sub>-</sub>)... 共役. (C<sub>+</sub>) において  $\sqrt{-3}$  の符号を変えたもの.

·(A)

$$\begin{aligned}
f &= t^{10} + \frac{65}{3}t^8 + \frac{45}{2}t^7 + \frac{6895}{36}t^6 + \frac{3829}{12}t^5 + \frac{165175}{144}t^4 \\
&\quad + \frac{51605}{36}t^3 + \frac{1678945}{432}t^2 + \frac{449155}{144}t + \frac{8849347}{2592}, \\
g &= t^{15} + \frac{65}{2}t^{13} + \frac{135}{4}t^{12} + \frac{1390}{3}t^{11} + \frac{3377}{4}t^{10} + \frac{118450}{27}t^9 \\
&\quad + \frac{68695}{8}t^8 + \frac{1074955}{36}t^7 + \frac{3658145}{72}t^6 + \frac{1161107}{9}t^5 + \frac{6662225}{36}t^4 \\
&\quad + \frac{13571900915}{41472}t^3 + \frac{5019815}{16}t^2 + \frac{31879878455}{82944}t + \frac{21951424793}{165888}, \\
h &= \frac{5^{25}}{2^{22}3^{12}}(432t^6 + 6480t^4 + 7560t^3 + 35820t^2 + 54972t + 166675)
\end{aligned}$$

各  $m$  に対して位数  $m$  の DS-triple の同値類は有限個で, その個数 ( $\text{St}(m)$  とおく) は Stothers によって明示的な関数で表されている (Theorem 4.6. in [51]). これにより

$$\text{St}(m) = 1 \quad (1 \leq m \leq 4), \quad \text{St}(5) = 4, \dots$$

等と計算できる. よって,  $m \leq 5$  のとき, 任意の DS-triple は上に挙げた例のいずれかと同値 (本質的に同じ) となる.

なお、次の 1.3 節で、 $\text{St}(m)$  がある種のグラフの個数に等しいことを見る。  
 次の定理は、よく知られており証明も難しくはないが深い定理である。

### Riemann の存在定理

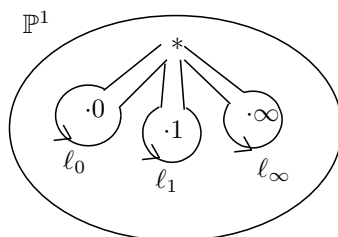
$Y$  を連結なコンパクト Riemann 面、 $\Sigma \subset Y$  をその有限部分集合とする。1 以上の整数  $d$  と可移置換表現  $\rho : \pi_1(Y \setminus \Sigma) \rightarrow \mathfrak{S}_d$  に対し、ある連結コンパクト Riemann 面  $X$  と固有正則写像  $\Phi : X \rightarrow Y$  が存在して  $\rho$  をモノドロミー表現に持つ。また、このような  $(X, \Phi)$  は同型を除き一意に定まる。

ここで、置換表現  $\rho$  が可移とは、集合  $\{1, \dots, d\}$  への  $\text{Im}(\rho) (\subseteq \mathfrak{S}_d)$  の作用が可移であることとする。(モノドロミー表現が常に可移であることに注意すれば、) この定理により  $\{0, 1, \infty\} \subset \mathbb{P}^1$  の外で不分岐な被覆  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  の同型類はモノドロミー表現  $\rho$  で完全に決まることが分かる。

被覆が abc-extreme なトリプル  $\{a, b, c\}$  により

$$X = \mathbb{P}_t^1, \quad \Phi(t) = \frac{a(t)}{c(t)}$$

与えられている場合を考える。このとき  $\Sigma = \{0, 1, \infty\}$  であり、 $\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$  に base point  $*$  をとるとき  $0, 1, \infty$  を反時計回りに一度まわるループ  $\ell_0, \ell_1, \ell_\infty$  は  $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma, *)$  の生成元となる ( $\ell_0 \ell_1 \ell_\infty = 1$  という関係を持つ)。従って  $\rho$  は  $\ell_0, \ell_1, \ell_\infty$  の像  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_\infty$  で定まる。



$0$  のファイバーが分岐指数  $e_1, e_2, \dots$  の点からなるとすると、 $\sigma_0$  は互いに交わらない巡回置換の積

$$\sigma_0 = (e_1)(e_2) \cdots$$

となる。但し、 $(n)$  は長さ  $n$  の巡回置換を表す。  $1, \infty$  についても同様に分岐指数  $f_1, f_2, \dots, g_1, g_2, \dots$  を用いて  $\sigma_1 = (f_1)(f_2) \cdots, \sigma_\infty = (g_1)(g_2) \cdots$  と表せる ( $\sigma_0 \sigma_1 \sigma_\infty = 1$ )。また、像  $\langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_\infty \rangle \subseteq \mathfrak{S}_d$  は可移部分群となる。

逆に, このような条件を満たす  $\sigma_0, \sigma_1 \in \mathfrak{S}_d$  が与えられたとき, Riemann 面の張り合わせで分岐被覆  $(X, \Phi)$  を得ることができる (Riemann の存在定理).  $d$  を固定するときこれらの条件を満たす  $\rho$  は有限個であるため, この同型類も有限個である. 従って, 位数  $m$  を固定するときの DS-triple の同値類の個数も有限個であると分かる.

位数  $m$  の DS-triple  $\{f, g, h\}$  から定まる被覆

$$u = \frac{f^3}{h} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$$

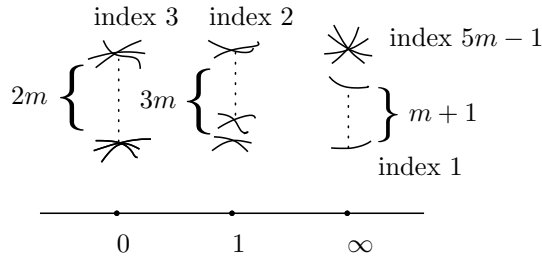
は次数  $6m$  の分岐被覆であり, その分岐は

0 の fiber : 指数3 の点が  $2m$  個

1 の fiber : 指数2 の点が  $3m$  個

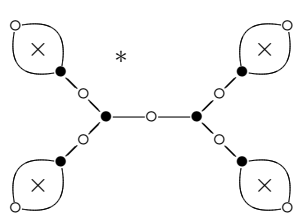
$\infty$  の fiber : 指数  $5m - 1$  の点が 1 個, 指数 1 の点が  $m + 1$  個

となっている.



### 1.3 Dessin d'enfant

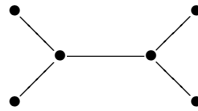
Belyi関数  $u : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  による実線分  $[0, 1] \subseteq \mathbb{P}^1$  の逆像をとると, 0 のファイバーの点  $\bullet$  と 1 のファイバーの点  $\circ$  たちを結ぶ 2 色グラフ [20, 第 1,2 章] が得られる. (ここで  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  はリーマン球と考えている.) これは Grothendieck によって導入された ( $\mathbb{P}^1$  上の) dessin d'enfant と呼ばれるものの 1 例で, 被覆の様子はこの dessin d'enfant で完全に決まる.



- ...0 の fiber 上の点
- ...1 の fiber 上の点
- ×... inner face,  $\infty$  の fiber 上の  
指数 1 の点に対応
- \*... outer face,  $\infty$  の fiber 上の  
指数  $5m - 1$  の点に対応

(位数 3 の DS-triple の定める被覆から生ずる dessin d'enfant)

これに関して最近出た面白い本として [20] がある. 上図でループと点  $\circ$  を省略して点  $\bullet$  のみの簡略化したグラフで表すと,



元の 2 色グラフは, このグラフの端点 (valency 1 の点) にループを追加し, 各辺上に一つずつ点  $\circ$  を補間することで復元できる. このように簡略化されたグラフは valency 1 の点が  $m + 1$  個, valency 3 の点が  $m - 1$  個の tree となることが分かる. 位数 4 までのグラフは条件から一意に定まり, 実際にこれらが各位数での DS-triple に対応する. また, 任意の位数  $m$  に対し, 上の条件をみたまグラフの存在を容易に示すことができる. 故に  $\text{St}(m) \geq 1$ , 即ち任意の位数  $m$  に対して DS-triple が存在することが従う.

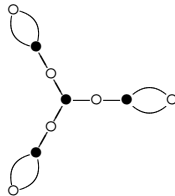
- 位数 1:



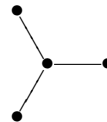
簡略化:



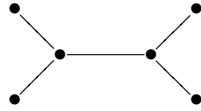
- 位数 2:



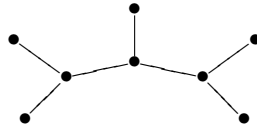
簡略化:



- 位数 3:

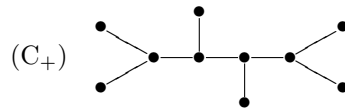
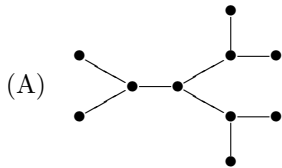


- 位数 4:

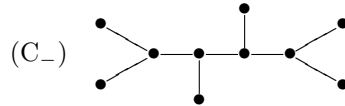
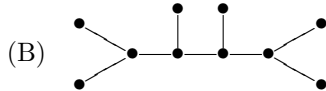


位数 5 以上では複数存在し, 位数 5 の場合は次の 4 通りである.

- 位数 5:



⇕ 反対の向き



これらのグラフは, 例 1.13 で与えた DS-triple に対応している.  $m = 5$  のとき, (A), (B) を与える DS-triple  $\{f, g, h\}$  は  $\mathbb{Q}$  係数の多項式となる. (C<sub>+</sub>), (C<sub>-</sub>) を与える DS-triple は  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$  係数多項式となり,  $\mathbb{Q}$  上共役である.

今回は楕円曲線, 楕円曲面に関する講義を行う.

$h := f^3 - g^2 \neq 0$  を満たす多項式  $f(t), g(t) \in k[t]$  に対し, 楕円曲線

$$E_{f,g} : y^2 = x^3 - 3f(t)x - 2g(t)$$

$$\mathcal{E}_h : Y^2 = X^3 - h(t)$$



を考えると,

$$\begin{aligned}\Delta(E_{f,g}) &= -108h \\ j(E_{f,g}) &= \frac{f^3}{h} \\ P &:= (f, g) \in \mathcal{E}_h(k[t]) \quad (\mathcal{E}_h \text{の整点})\end{aligned}$$

なる対応がある.

## 2 第二日

### 2.1 楕円曲線とその群構造

$K$  を標数が 2, 3 と異なる体とする.

定義 2.1 体  $K$  上の楕円曲線  $(E, O)/K$  ( $E/K$  又は  $E$  と略す) とは, 次の同値な定義を満たす代数曲線のことをいう:

- (1) 種数 1 の非特異な射影代数曲線と, その上のひとつの  $K$ -有理点  $O$  の組.
- (2)  $\mathbb{P}^2$  内の非特異 3 次曲線, 即ち 3 次斉次式  $F(X, Y, Z) \in K[X, Y, Z]$  ( $\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\partial F}{\partial Z} = 0$  と  $F = 0$  は非自明な共通零点を持たない) が定める曲線  $E$  と, その上のひとつの  $K$ -有理点  $O$  の組.
- (3)  $\mathbb{P}^2$  において  $F = Y^2Z - (X^3 + AXZ^2 + BZ^3)$  ( $A, B \in K$ , 判別式  $\Delta = 4A^3 + 27B^2 \neq 0$ ) の定める曲線  $E$  と, その上の有理点  $O = (0 : 1 : 0)$  の組.

(3) の方程式は  $y^2 = x^3 + Ax + B$  と表すこともあり,  $E/K$  の Weierstrass form という. このとき  $K$ -有理点  $O$  は  $x = y = \infty$  で定まる  $\mathbb{P}^2$  の点である  $(E(K) = \{(x, y) \in K^2 \mid y^2 = x^3 + Ax + B\} \cup \{O\})$ .

**proof.**

- (3)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (1) は自明である. (1)  $\Rightarrow$  (3) を示す.

$\bar{K}$  を  $K$  の代数閉包とする.  $E$  上の因子

$$D = \sum_{\text{有限和}} n_i [P_i], \quad (n_i \in \mathbb{Z}, P_i \in E(\bar{K}))$$

に対して線形空間

$$\mathcal{L}(D) = \{\varphi \in \bar{K}(E)^\times \mid (\varphi) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

を考え,  $\ell(D) = \dim_{\bar{K}}(\mathcal{L}(D))$  とおく. Riemann-Roch の定理より,

$$\deg D = \sum n_i > 0 \Rightarrow \ell(D) = \deg D \quad (2.1)$$

が成立する.

与えられた  $K$ -有理点  $O$  を用いて  $\mathcal{L}_n := \mathcal{L}(n[O])$  とおくと, (2.1) より任意の  $n \geq 1$  に対して  $\dim \mathcal{L}_n = n$  が成立する:

$$\bar{K} = \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_3 \subsetneq \cdots$$

従って, ある定数関数でない  $x \in \mathcal{L}_2, y \in \mathcal{L}_3$  が存在して  $\{1, x\}$  が  $\mathcal{L}_2$  の基底,  $\{1, x, y\}$  が  $\mathcal{L}_3$  の基底となる. 因子  $n[O]$  が  $K$  上定義されているので,  $x, y$  は  $K$  の元にとれる [37].

このとき  $\mathcal{L}_6 \ni x^3, y^2, xy, x^2, y, x, 1$  が成立するが,  $\dim \mathcal{L}_6 = 6$  ゆえ線形関係

$$a_0 y^2 + a_1 xy + a_3 y = b_0 x^3 + b_2 x^2 + b_4 x + b_6$$

が存在する ( $a_i, b_i \in K$  とできる [37]).  $x^2 \in \mathcal{L}_4, xy \in \mathcal{L}_5$  なので  $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$  であり,  $x, y$  を定数倍することで一般 Weierstrass 方程式

$$y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 + b_2 x^2 + b_4 x + b_6$$

が得られる.  $K$  の標数が 2, 3 でないことから, さらに変数変換により

$$y^2 = x^3 + Ax + B$$

の形に変形することができる. このとき, 射

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ P & \longrightarrow & (x(P) : y(P) : 1) \\ O & \longrightarrow & (0 : 1 : 0) \end{array}$$

が  $E$  の  $\mathbb{P}^2$  への埋め込みを与え,  $E$  は  $\mathbb{P}^2$  において  $Y^2Z = X^3 + AXZ^2 + BZ^3$  の定める曲線と同型になることが示される. ■

楕円曲線  $E$  に対し  $\text{Pic}^0(E)$  を次数 0 の因子類群とすると, 写像

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \text{Pic}^0(E) \\ \Psi & & \Psi \\ P & \longmapsto & \text{cl}([P] - [O]) \end{array}$$

( $\text{cl}$  は  $\text{Pic}^0(E)$  における同値類を表す.) は Riemann-Roch の定理により集合としての全単射となり, これにより  $E$  に群構造を与えると同時に  $\text{Pic}^0(E)$  に代数曲線の構造を与えることができる.

(厳密には上の射は  $K'$ -有理点 ( $K'$  は  $K$  の任意の拡大体) での全単射であり, 全体として Abel 多様体としての同型となっている.)

$E \subset \mathbb{P}^2$  が定義 2.1 (3) のように方程式

$$y^2 = x^3 + Ax + B \tag{2.2}$$

で与えられているとする.  $E$  に上記の様に群構造を与えると,  $E$  上の一般の 3 点  $P_1, P_2, P_3$  に対して,  $P_1 + P_2 + P_3 = O$  を満たすことと  $P_1, P_2, P_3$  が同一直線上に存在することは同値である.  $O$  が変曲点 ( $E \cdot (Z = 0) = 3[O]$ ) であることに注意.

これにより, 2 点  $P_i = (x_i, y_i) \in E$  ( $i = 1, 2, P_1 \neq -P_2$ ) が与えられたとき, 点  $P_1 + P_2$  の座標を求めることができる:

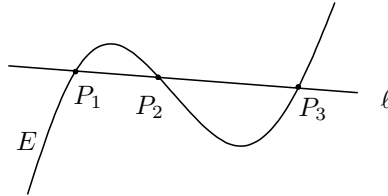
$P_1 \neq P_2$  の場合,  $P_1, P_2$  を通る直線  $\ell = \overline{P_1P_2}$  の方程式

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

と  $E$  の定義式 (2.2) を連立して,  $\ell$  上にあるもうひとつの点  $P_3 = (x_3, y_3)$  は

$$\begin{aligned} x_3 &= -x_1 - x_2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 \\ y_3 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1) + y_1 \end{aligned}$$

と求まる.



$P = (x, y)$  に対して  $-P = (x, -y)$  であるので, 加法公式

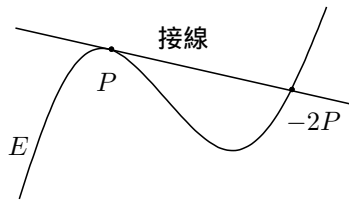
$$P_1 + P_2 = \left(-x_1 - x_2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2, -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1) - y_1\right)$$

を得る.

$P_2 = P_1$  の場合は接線

$$y - y_1 = \frac{3x_1^2 + A}{2y_1}(x - x_1)$$

を用いることで,



$P = (x, y)$  に対して同様に

$$2P = \left(-2x + \left(\frac{3x^2 + A}{2y}\right)^2, -\frac{3x^2 + A}{2y}(x_3 - x) - y\right)$$

と求まる.

### 楕円関数論との関係

複素平面  $\mathbb{C}$  上の有理型関数  $f$  が二重周期関数であるとき, 即ち実数体上 1 次独立な周期  $\omega_1, \omega_2$  が存在して

$$f(z + \omega_1) = f(z), f(z + \omega_2) = f(z) \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

を満たすとき  $f$  は楕円関数であるという.

$\omega_1, \omega_2$  を周期に持つ楕円関数の全体は, 複素トーラス  $\mathbb{C}/L$  上の有理型関数の全体  $\mathfrak{M}(\mathbb{C}/L)$  と 1:1 に対応する. ここで  $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  は  $\mathbb{C}$  において  $\omega_1, \omega_2$  の生成する格子である.

$\mathfrak{M}(\mathbb{C}/L)$  は Weierstrass の  $\wp$  関数とその微分

$$\wp(z; L) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \omega \in L} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

$$\wp'(z; L) = -2 \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z - \omega)^3}$$

で生成される (i.e.  $\mathfrak{M}(\mathbb{C}/L) = \mathbb{C}(\wp, \wp')$ ).

$\wp$  と  $\wp'$  の間には

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

なる関係がある.  $g_2, g_3$  は  $\tau = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} \in H$  ( $H$  は上半平面) に関するモジュラー形式である.

これにより,  $\forall z \in \mathbb{C}$  に対し  $(\wp(z), \wp'(z))$  は楕円曲線  $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$  上の点をパラメータ表示する. 上で求めた楕円曲線の  $x$  座標の加法公式は,  $\wp$  関数の加法公式

$$\wp(z_1 + z_2) = -\wp(z_1) - \wp(z_2) + \frac{1}{4} \left( \frac{\wp'(z_2) - \wp'(z_1)}{\wp(z_2) - \wp(z_1)} \right)^2$$

に対応している.

楕円曲線については, Silverman [48], Cassels [5] などすぐれた教科書があるので適宜参照されたい.

## 2.2 楕円曲線の整点と有理点

一般に, Abel 群  $E(K)$  は大きな群になる (例えば  $K = \mathbb{C}$  のとき  $E(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}/L$  となる) が,  $\mathbb{Q}$  (or  $\mathbb{Z}$ ) 上では次の 3 つの有限性定理が知られている:

(1) Mordell-Weil の定理

**定理 2.2** (Mordell の定理, Mordell [24])  $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線  $E$  に対し,  $E(\mathbb{Q})$  は有限生成アーベル群となる.

この定理は Weil により次のように拡張されている:

定理 2.3 (Weil [56])  $K$  を有限次代数体とする.

$K$  上の代数曲線  $\Gamma$  (種数は任意) に対し, そのヤコビ多様体を  $J$  とすると  $J(K)$  は有限生成アーベル群となる.

このころはまだ Abel 多様体の代数的理論はできていなかった. 1940 年代頃から Weil により [54], [55], [57] などが著されることとなる. ヤコビ多様体や Picard 多様体の代数的理論は 1950 年代頃から Weil, Chow, 松坂, 井草, 小平等によって研究される. Mordell-Weil の定理は Lang, Néron によって Abel 多様体に一般化されている [21].

(2) 整数点に関する定理

$E$  を  $\mathbb{Z}$  上の楕円曲線とする. このとき, affine 曲線としての  $E$  の整数点の集合

$$E_{\text{aff}}(\mathbb{Z}) := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y^2 = x^3 + Ax + B\}$$

は次の定理により有限集合となる. (Effectivity は Baker, Coates によって後に証明された [1].)

定理 2.4 (Siegel の定理, [50]) 種数が正の  $\mathbb{Z}$  上の affine 代数曲線  $\Gamma_{\text{aff}}$  に対し,  $\Gamma_{\text{aff}}(\mathbb{Z})$  は有限集合となる.

(3) Shafarevich の定理

定理 2.5 (Shafarevich の定理 [28])  $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$  を素数の有限集合とすると,

$$\{E/\mathbb{Z} \text{ 楕円曲線} \mid p_1, \dots, p_s \text{ と異なる任意の素数 } p \text{ に対して} \\ E \bmod p \text{ が } \mathbb{F}_p \text{ 上の楕円曲線}\} / \cong_{\text{isom.}}$$

は有限集合となる.

(この拡張として, 高次元 Abel 多様体に対する Faltings の定理が, Mordell 予想と同時に証明された.)

(2) を用いて Shafarevich の定理が証明される. 証明の idea は次の通り:

proof.

$$E = E_{A,B} : y^2 = x^3 + Ax + B \\ (A, B \in \mathbb{Z}, \Delta = 4A^3 + 27B^2 \neq 0)$$

を  $\mathbb{Z}$  上の楕円曲線の “minimal” な Weierstrass 方程式とする. 即ち,  $\ell^4 \mid A$ ,  $\ell^6 \mid B$  となる素数  $\ell$  は存在しない, と仮定する. このとき,  $p > 3$  ならば

$$E \bmod p : y^2 = x^3 + \bar{A}x + \bar{B} \quad (\bar{A}, \bar{B} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p)$$

が楕円曲線となるのは

$$\Delta \bmod p \neq 0$$

となるとき, すなわち

$$4A^3 + 27B^2 \not\equiv 0 \pmod{p}$$

であり, またそのときに限る.

さて, 除外する素数の有限集合  $\Sigma = \{p_1, \dots, p_s\}$  を, 素数 2, 3 を付け加えたもの  $\Sigma'$  でおきかえて証明すれば十分である. このとき  $p_1, \dots, p_s$  と異なる任意の  $p$  に対して  $E \bmod p$  が楕円曲線になることは, 判別式が

$$\Delta = p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$$

という形をしていることに同値である.

ここで, 組  $\{e_1, \dots, e_s\}$  をひとつ固定する毎に, 式

$$4A^3 + 27B^2 = \Delta$$

は affine 楕円曲線の方程式を与える ( $B^2 = \frac{-4}{27}A^3 + \frac{\Delta}{27}$  と書き直してみれば明らか). 故に (2) により  $\{(A, B) \in \mathbb{Z}^2 \mid 4A^3 + 27B^2 = \Delta\}$  は有限集合となる. ■

これらは  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  上で考えられているものであるが, これを一般の整域  $R$  とその商体  $K$  に一般化することを考える. 主に考えるのは代数曲線  $C/k$  の開集合  $U$  から定まる  $R = \Gamma(U, \mathcal{O}_C)$ ,  $K = k(C)$  の場合である.

前回の最後に話したのと同様に, 楕円曲線

$$E_{f,g} : y^2 = x^3 - 3fx - 2g \quad (f, g \in R)$$

に対して “Shafarevich partner”

$$\mathcal{E}_h : Y^2 = X^3 - h, \quad (h = f^3 - g^2)$$

を考えると

$$\Delta(E_{f,g}) = -108h$$

$$P = (f, g) \in \mathcal{E}_h(R) \text{ (i.e. } P \text{ は } \mathcal{E}_h \text{ の整点)}$$

なる関係がある. 逆に,  $h$  を与えて  $f, g$  を動かすことを考えれば

$$\begin{array}{ccc} \{E/R \mid \Delta(E) = \text{const} \cdot h\} & \longleftrightarrow & \mathcal{E}_h(R) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ E_{f,g} & \longleftrightarrow & P = (f, g) \end{array}$$

という全単射が得られる.

### 2.3 楕円曲面 (小平-Néron model)

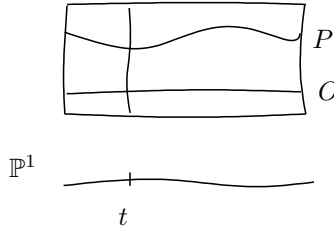
$C$  を代数閉体  $k$  上の非特異射影曲線,  $K = k(C)$  とし,  $K$  上の楕円曲線  $E/K$  を考える.  $k$  の標数は 2, 3 と異なるとし, 最も見易い  $C = \mathbb{P}_t^1, K = k(t)$  の場合で次の例を考える:

$$\text{楕円曲線 } E : y^2 = x^3 + t^2 - 1 / k(t), \quad O = \infty$$

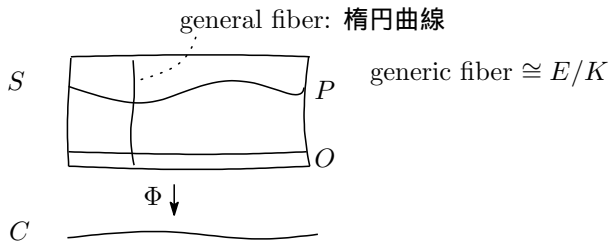
$E$  は  $k(t)$  上の楕円曲線であるが,  $t$  も変数と思うことで  $\mathbb{P}_t^1$  上の曲面とすることができる.

また, このとき  $E/k(t)$  の有理点, たとえば  $P = (1, t) \in E(k(t))$  は  $t$  が  $\mathbb{P}^1$  上をはしるとき一つの軌跡を描く.  $O$  もまた, 各  $t$  で  $(x, y) = (\infty, \infty)$  をとおる曲線を定める.





一般に楕円曲線  $E/K = k(C)$  に対応して, 小平-Néron model と呼ばれる  $k$  上の非特異射影曲面  $S$  からの fibration  $\Phi : S \rightarrow C$  (楕円曲面) が同型を除き一意に対応する.  $\Phi$  の general fiber  $F$  は楕円曲線となっており, また, generic fiber は  $E/K$  に同型である.



$\Phi$  のどの fiber も  $(-1)$ -curve を含まない (このとき relatively minimal であるという). また, 楕円曲線が点  $O$  を持つことから  $\Phi$  は少なくとも一つ section を持つ.  $E$  の  $K$ -有理点  $P$  と  $\Phi$  の section は  $1:1$  に対応する.

$$E(K) \xleftrightarrow{1:1} \{\sigma : C \rightarrow S \mid \Phi \circ \sigma = \text{id}_C\}$$

以降,  $P$  に対応する section を同じ文字  $P$  で表し,  $P : C \rightarrow S$  の像を  $(P)$  で表す.

小平-Néron model は実際には次のようにして構成される.

$k$  の標数は  $2, 3$  と異なるとし, 簡単のため  $C = \mathbb{P}_t^1$  のときに示す.  $E$  が Weierstrass form

$$y^2 = x^3 + A(t)x + B(t) \quad (A(t), B(t) \in k[t]) \quad (2.3)$$

で与えられているとする.

このとき, 特異ファイバーになる部分を除けば (2.3) は  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}_t^1$  内の affine 曲面を定める. この Zariski closure をとり特異点解消を行うことで, 非特異

射影曲面からの射  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{P}_t^1$  が得られる. このプロセスをより詳しくいうと次の通り:

(2.3) の多項式  $A(t), B(t)$  に対し,  $\ell^4|A(t), \ell^6|B(t)$  となる多項式  $\ell$  は定数に限ると仮定する. (両辺を  $\ell^6$  で割って  $x, y$  を  $x/\ell^2, y/\ell^3$  でおき換えればよい.)

まず (2.3) で定義される affine 曲面を  $X_1$  とする:

$$X_1 \subset \mathbb{A}_{(x,y)}^2 \times \mathbb{A}_t^1 = \mathbb{A}_{(x,y,t)}^3$$

(affine 空間の添字は座標を表す.) 射影による射  $\varphi_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{A}_t^1$  のファイバーは一般には affine 楕円曲線である. (2.3) を射影化した方程式により, 同様にして

$$\overline{X}_1 \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}_t^1, \quad \overline{\varphi}_1 : \overline{X}_1 \rightarrow \mathbb{A}_t^1$$

が定まる.

次に,  $\deg A(t) \leq 4n, \deg B(t) \leq 6n$  をみたす最小な正整数を  $n$  とする. (2.3) の両辺を  $t^{6n}$  で割り,

$$\overline{x} = \frac{x}{t^{2n}}, \quad \overline{y} = \frac{y}{t^{3n}}, \quad \overline{t} = \frac{1}{t} \tag{2.4}$$

と書き換えると, “ $\infty$ -model” ができる:

$$\overline{y}^2 = \overline{x}^3 + \overline{A}(\overline{t})\overline{x} + \overline{B}(\overline{t}). \tag{2.5}$$

ここで  $\overline{A}(\overline{t}) = A(t)/t^{4n}, \overline{B}(\overline{t}) = B(t)/t^{6n}$  は  $\overline{t}$  の多項式である. (2.5) の定義する affine 曲面を  $X_2$  とする:

$$X_2 \subset \mathbb{A}_{(\overline{x}, \overline{y})}^2 \times \mathbb{A}_{\overline{t}}^1 = \mathbb{A}_{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{t})}^3, \quad \varphi_2 : X_2 \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{t}}^1$$

上と同様に

$$\overline{X}_2 \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{A}_{\overline{t}}^1, \quad \overline{\varphi}_2 : \overline{X}_2 \rightarrow \mathbb{A}_{\overline{t}}^1.$$

今  $\overline{X}_1$  と  $\overline{X}_2$  を,  $(x, y, t)$  と  $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{t})$  が (2.4) をみたすとき同一視することにより, 貼り合わせて得られる曲面を  $W$  と書き, Weierstrass model とよぶ.  $W$  は  $\mathbb{A}_t^1 \cup \mathbb{A}_{\overline{t}}^1$  ( $t \cdot \overline{t} = 1$ ) への射  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{P}^1$  をもつ曲面で, この段階では一般にはまだ特異点を持っている. ( $W$  の特異ファイバーは Weierstrass form

の退化から分かるように, node 又は cusp をもつ 3 次曲線で, その node 又は cusp が曲面  $W$  の特異点になる可能性がある.)  $W$  からそれらの特異点の minimal resolution を行うことにより, 非特異曲面  $S$  が得られる.

本節初めで例示した式でいうと,  $\infty$ -model は

$$\bar{y}^2 = \bar{x}^3 + \bar{t}^4(1 - \bar{t}^2).$$

$\bar{t} = 0$  のファイバーは cusp  $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$  をもつ 3 次曲線  $\bar{y}^2 = \bar{x}^3$  である.  $\mathbb{A}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})}^3 \ni (0, 0, 0)$  において, (解析的または形式級数  $k[[\bar{t}]]$  で見ると) 上式は  $\bar{y}^2 = \bar{x}^3 + \bar{t}^4$  の定める特異点と同値である. これは  $E_6$ -特異点の標準形として知られる式で, 6 回の blow-up により (特異点を  $E_6$  型の Dynkin 図形をなす 6 個の  $\mathbb{P}^1$  で置き換えることにより) 非特異になる. このとき,  $t = \infty$  ( $\bar{t} = 0$ ) 上の  $S$  の特異ファイバーは  $IV^*$  型となる. (次頁の表参照.)

一般に, Weierstrass model の特異点はいわゆる  $A, D, E$  型の特異点であり, 特異点解消により得られる楕円曲面  $S$  の特異ファイバーの型は, 次項の分類表で与えられる. Tate のアルゴリズム [52] ([49] に再録) は, 実際に特異点の解消法を与える (ここで考えている幾何的な場合だけでなく, 数論的な状況に対しても適用できる方法で与えられている).

注意 2.6 上の説明に登場した正整数  $n$  は, 曲面  $S$  の arithmetic genus に一致する (定理 4.13).

### 特異ファイバーの分類

$\Phi: S \rightarrow C$  のファイバーは小平, Néron, Tate により次の表のように分類されている ([16] [17] [25] [52]).  $I_0$  は楕円曲線となる場合で, その他が特異ファイバーにあたる. 表によれば, 特異ファイバーは  $I_1, II$  型を除き可約であり, このとき各既約成分は  $\mathbb{P}^1$  に同型である. Dynkin type というのは後述する Dynkin 図形, あるいはルート格子の型を指し, また  $\text{ord}_v(\Delta)$ ,  $\text{ord}_v(j)$  は, 体  $k$  の標数が 2, 3 と異なるとき  $y^2 = x^3 + A(t)x + B(x)$  から得られる不変量

$$\begin{aligned} \Delta &= 4A^3 + 27B^2 \\ j &= \frac{4A^3}{\Delta} \end{aligned}$$

の  $v$  での位数を表す.  $k = \mathbb{C}$  の場合は小平 ([16, 17]) により局所 monodromy も計算されている.

fiber type	既約成分の個数	Dynkin type	$\text{ord}_v(\Delta)$	$\text{ord}_v(j)$	monodromy
$I_0$	1	-	0	$\geq 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$I_m$	$m$	$A_{m-1}$	$m$	$-m$	$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
II	1	-	2	$\geq 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
III	2	$A_1$	3	$\geq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
IV	3	$A_2$	4	$\geq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
$I_0^*$	5	$D_4$	6	$\geq 0$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$I_m^*$	$5 + m$	$D_{4+m}$	$6 + m$	$-m$	$\begin{pmatrix} -1 & -m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$IV^*$	7	$E_6$	8	$\geq 0$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$III^*$	8	$E_7$	9	$\geq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$II^*$	9	$E_8$	10	$\geq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
任意標数			標数 $\neq 2, 3$		$/\mathbb{C}$

それぞれのファイバーの様子を図で表すと以下のようになる:

$I_0$	$I_1$	$I_2$	$I_m (m \geq 3)$
橢円曲線	node		$m$ 本, 巡回的
II	III	IV	
cusp	接する		
$I_0^*$		$I_m^* (m \geq 1)$	
II*		III*	
IV*			

小平-Néron model を考えることには次のような利点がある.

楕円曲線 $E/K$	$\leftrightarrow$	楕円曲面 $S$
Mordell-Weil 群 $E(K)$	$\leftrightarrow$	Néron-Severi 群 $\text{NS}(S)$

以下, 格子 (lattice) に関しては Conway-Sloane の標準的な参考書 [7] 又は [37] を参照されたい.

曲面  $S$  に対する交点理論から Néron-Severi 群

$$\text{NS}(S) := \text{Div}(S) / \underset{\text{代数的同値}}{\approx}$$

上に交点形式が得られ, これにより  $\text{NS}(S)$  は格子となる. Trivial sublattice を

$$T := \langle (O), F \rangle \oplus \sum_{v \in \text{Red}(\Phi)} T_v \subset \text{NS}(S)$$

(但し  $\text{Red}(\Phi) := \{v \in C \mid \Phi^{-1}(v) : \text{可約}\}$ ) とおくと 同型

$$\text{NS}(S)/T \cong E(K)$$

が成立する (定理 3.2).

$v \in \text{Red}(\Phi)$  に対して fiber  $\Phi^{-1}(v)$  の既約因子分解を

$$\Phi^{-1}(v) = \sum_{i=0}^{m_v-1} \mu_{v,i} \Theta_{v,i}$$

( $m_v$  は既約成分の個数) とする.  $\Theta_{v,0}, \dots, \Theta_{v,m_v-1}$  のうち  $(O)$  と交わるものは  $\Theta_{v,0}$  であるとする.

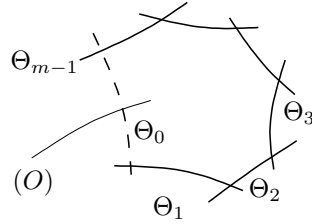
このとき, その他の既約因子により生成される格子を  $T_v$  とかく.  $T_v$  の交点行列

$$(\Theta_{v,i}, \Theta_{v,j})_{1 \leq i, j \leq m_v-1}$$

は負定置対称行列となる.

これにより交点行列の  $(-1)$  倍  $-(\Theta_{v,i}, \Theta_{v,j})$  は  $A, D, E$  型のルート格子 ([7, 第 4 章]) に対応する Gram 行列となる.

例 2.7 特異ファイバー  $I_m$



( $\Theta_{v,i}$  を  $\Theta_i$  と略した) の交点行列は

$$(\Theta_i, \Theta_j) = \begin{cases} -2 & (i = j) \\ 1 & (j = i + 1 \text{ (or } j = i - 1)) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

より

$$(-1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となり, 対応するルート格子はディンキン図形

$$A_{m-1} : \begin{array}{ccccccc} & \Theta_1 & \Theta_2 & \Theta_3 & & & \Theta_{m-1} \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \end{array}$$

から定義されるルート格子 (同じ記号  $A_{m-1}$  で表す) となる.

例 2.8 同様に, 特異ファイバー  $\Pi^*$  に対応するルート格子は

$$E_8 : \begin{array}{cccccccc} & & & & & & & \circ \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ & & & & & & & | & & & \end{array}$$

となる.  $E_8$  はランク 8 の整係数の正定値 *even unimodular lattice* であり, この性質のみで一意に定まる.

### 3 第三日

#### 3.1 複素代数曲面

$X$  を  $\mathbb{C}$  上の非特異射影曲面とする.  $X$  を,  $X(\mathbb{C})$  に実位相を入れたコンパクト複素曲面と同一視する.  $X$  上の正則関数の芽のなす層  $\mathcal{O}_X$  を  $\mathcal{O}$  と略記するとき, 層の完全列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^\times \rightarrow 0$$

$$\varphi \mapsto e^{2\pi i \varphi}$$

から, コホモロジーの長完全列

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^\times) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}) \quad (3.1)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cong & & \parallel & & \cup & & \cong \\ \mathbb{C}^q & & \text{Pic}(X) & & \text{NS}(X) & & \mathbb{C}^{p_g} \end{array}$$

が得られる ( $q$ : irregularity,  $p_g$ : geometric genus). ここで  $H^1(X, \mathcal{O})$  の  $H^1(X, \mathbb{Z})$  の像による商は  $X$  の Picard 多様体

$$\text{PicVar}(X) := \{D \in \text{Div}(X) \mid D \approx 0\} / \sim$$

( $\approx$ : algebraic equivalence,  $\sim$ : linear equivalence) に同型であり, 一方  $\delta$  の像は  $X$  の Néron-Severi 群

$$\text{NS}(X) := \text{Div}(X) / \approx$$

に同型になることから, 同型

$$\text{Pic}(X) / \text{PicVar}(X) \cong \text{NS}(X)$$

が得られる. さらに, Lefschetz-Hodge の定理により,

$$\text{NS}(X) = H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}$$

と分解できることが知られており,  $X$  の Picard 数  $\rho(X) = \text{rank}(\text{NS}(X))$  に対して不等式

$$\rho(X) \leq h^{1,1}(X) = b_2(X) - 2p_g$$



が成立する. 一般の体  $k$  上では, より弱い不等式

$$\rho(X) \leq b_2(X)$$

が成立する. これを Picard-Igusa の不等式という.

注意 3.1 前回, 交点理論を用いて  $\text{NS}(S)$  に格子の構造を与えたが,  $k = \mathbb{C}$  の場合  $\text{NS}(S) \xrightarrow{\delta} H^2(S, \mathbb{Z})$  から次のように導くこともできる.

*Poincaré duality* により, *cup product*

$$H^2(S, \mathbb{Z}) \times H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

は *torsion* を無視すると非退化, かつ  $H^2(S, \mathbb{Z})/\text{torsion}$  は *unimodular integral lattice* となる.  $\text{NS}(S)$  の格子構造は  $\delta$  に関してこれと可換である.

### 曲面の数値不変量

ここで, 曲面の数値不変量について記しておく. 定義により

$$q = \dim H^1(X, \mathcal{O})$$

$$p_g = \dim H^2(X, \mathcal{O})$$

であり,

$$\chi(\mathcal{O}_X) = p_g - q + 1 : \text{arithmetic genus}$$

なる関係がある. また  $p_g, q$  は  $X$  上の 正則 2-形式, 正則 1-形式のなすベクトル空間の次元にそれぞれ一致する.

Chern 数に関しては

$$c_2 = \text{Euler 数} = 2 - 2b_1 + b_2, \quad b_1 = 2q$$

$$c_1^2 = (K_X^2)$$

$$c_2 + c_1^2 = 12\chi \quad (\text{Noether の公式})$$

が成立する.

$X = S$  が section  $O$  をもつ楕円曲面

$$\begin{array}{c} X = S \\ \downarrow \Phi \\ C \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowright O \end{array}$$

の場合, canonical bundle formula (小平 [17]) から  $c_1^2 = 0$  が成立し,

$$c_2 = 12\chi = \sum_{F_v: \text{singular}} \varepsilon(F_v)$$

となる. ここで和はファイバー  $F_v := \Phi^{-1}(v)$  が特異ファイバーになる  $C$  の点  $v$  全体をはしるものとし,  $\varepsilon(F_v)$  は  $F_v$  の位相的 Euler 数とする.

### 3.2 Mordell-Weil 格子の formalism

$k$  を一般の体とする. 楕円曲面

$$\begin{array}{ccc} & O & \\ & \curvearrowleft & \\ \Phi: S & \longrightarrow & C \end{array}$$

の generic fiber  $E$  は  $K = k(C)$  上の楕円曲線となり,  $E$  の  $K$ -有理点と  $\Phi$  の section は 1:1 に対応する:

$$\begin{array}{ccc} E(K) & \xleftarrow{1:1} & \{\Phi: S \rightarrow C \text{ の section}\} \\ \Psi & & \Psi \\ P & \xleftarrow{\quad} & \sigma \end{array}$$

この対応で  $P$  と  $\sigma$  を同一視し,  $P$  の定める section による  $C$  の像を  $(P)$  で表す.

定理 3.2 楕円曲面  $S$  が仮定

$$\text{特異ファイバーが少なくとも一つ存在する} \quad (*)$$

を満たすとき, 同型

$$E(K) \cong \text{NS}(S)/T$$

が成立する. 但し,  $T$  は  $\{(O), F, \text{各可約ファイバーの既約成分}\}$  で生成される  $\text{NS}(S)$  の部分群であり,

$$T = U \oplus \sum_{\Phi^{-1}(v) \text{ は可約}} T_v \quad (\text{直交直和})$$

(但し  $U := \langle (O), F \rangle$ ) となる. ここで,  $T_v$  は  $v$  での可約ファイバーの既約成分  $\Theta_{v,0}, \Theta_{v,1}, \dots, \Theta_{v,m_v-1}$  のうち  $(O)$  と交わる  $\Theta_{v,0}$  を除いた  $\Theta_{v,1}, \dots, \Theta_{v,m_v-1}$  の生成する部分群である. また,  $T_v$  に  $\text{NS}(S)$  から誘導される格子の構造を入れるとき, *opposite lattice*  $T_v^-$  は  $\text{rank}(m_v - 1)$  の  $A, D, E$  型格子となる.

**proof.** 証明は [34], または [37] を見られたい. ここでは対応のみを述べることにする.  $E(K)$  から  $\text{NS}(S)/T$  への射は

$$\begin{array}{ccccc} E(K) & \longrightarrow & \text{NS}(S) & \longrightarrow & \text{NS}(S)/T \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P & \longmapsto & \text{cl}(P) & \longmapsto & (P) \bmod T \end{array}$$

で与えられる. ここで  $\text{cl}$  は因子の代数同値類を表す. また, 射

$$\begin{array}{ccc} \text{NS}(S) & \longrightarrow & E(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{cl}(D) & \longmapsto & \text{sum}(D|_E) \end{array}$$

( $\text{sum}$  は楕円曲線の群構造に関する点の和を表す) により  $T$  の生成元  $(O), F, \Theta_{v,i}$  は 0 に写るため, 逆射

$$\text{NS}(S)/T \rightarrow E(K)$$

が得られる. ■

もし準同型  $E(K) \rightarrow \text{NS}(S)$  であって像が  $T$  に直交するものが存在すればこの定理の同型を分解することができる. 実際には少し弱く, 次の補題が成立する:

**補題 3.3** 写像

$$\varphi : E(K) \rightarrow \text{NS}(S) \otimes \mathbb{Q}$$

が存在して, 任意の  $P \in E(K)$  に対して

$$\begin{aligned} \varphi(P) &\perp T \\ \varphi(P) &\equiv (P) \pmod{T \otimes \mathbb{Q}} \end{aligned}$$

を満たす.

**proof.**

$$\varphi(P) = (P) + a(O) + bF + \sum_{v \in R, i \geq 1} c_{v,i} \Theta_{v,i}$$

とおき、条件を満たすよう  $a, b, c_{v,i}$  をとればよい。ここで  $R$  はファイバーが可約となる点全体を表す。実際、

$$\begin{aligned} 0 &= (\varphi(P) \cdot F) = 1 + a \\ 0 &= (\varphi(P) \cdot (O)) = (P \cdot O) + a \cdot (O^2) \end{aligned}$$

から

$$a = -1, \quad b = -\chi - (P \cdot O)$$

となり、同様に  $\Theta_{v,i}$  との直交条件を考えることで、 $a, b, c_{v,i}$  は一意に求まる。

■

系 3.4  $\varphi$  は群準同型であり、 $\text{Ker}(\varphi) = E(K)_{\text{tor}}$  が成立する。

定義 3.5  $P, Q$  に対して、height pairing  $\langle P, Q \rangle$  を

$$\langle P, Q \rangle := -(\varphi(P) \cdot \varphi(Q))$$

で定義する。

このとき任意の  $P$  に対して  $\langle P, P \rangle := -(\varphi(P)^2) \geq 0$  が成立する。等号成立は  $\varphi(P) = 0$ , すなわち  $P \in E(K)_{\text{tor}}$  のときである。

$\text{NS}(S)$  の符号定数は  $(1, \rho - 1)$  であることが知られている (Hodge index theorem). いま、 $\text{NS}(S)$  の部分格子

$$T = ((O), F) \oplus \sum_{\Phi^{-1}(v) \text{ は可約}} T_v$$

において  $((O), F)$  の交点行列は  $\begin{pmatrix} -\chi & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  で行列式は  $-1$  であり、符号定数は  $(1, 1)$  である。従って  $(T^\perp) \otimes \mathbb{Q} (\supseteq \text{Im}(\varphi))$  は negative-definite となる。

以上により、次のことが示された:

定理 3.6 楕円曲線  $E$  が少なくとも一つ特異ファイバーを持つとする. このとき,

$$(E(K)/E(K)_{\text{tor}}, \langle, \rangle)$$

は正定値格子をなす. これを  $E$  の Mordell-Weil 格子 ( $MW$  格子,  $MWL$ ) という. また,  $E(K)$  の有限位数部分群

$$E(K)^0 := \{P \in E(K) \mid (P) \text{ と } (O) \text{ は任意の } v \text{ の fiber で同じ既約成分を通る}\}$$

をとると  $(E(K)^0, \langle, \rangle)$  は正定値 *even integral lattice* となる. これを  $E$  の narrow Mordell-Weil 格子という.

注意 3.7 任意の特異ファイバー  $F_v = \Phi^{-1}(v)$  に対して

$$F_v^\sharp := F_v \setminus \{\text{重複点}\}$$

は (単位元連結成分)  $\times$  (有限群) の形の群構造をもつ [17], [26].

$E(K)$  の任意の元は, この有限群の位数の (特異ファイバー全体での) 最少公倍数をかけると  $E(K)^0$  に入ることから,  $E(K)^0 \subset E(K)$  は有限位数といえる.

単位元連結成分は  $\mathbb{G}_m$  または  $\mathbb{G}_a$  に同型であり, 例えば  $I_m$  型では

$$\mathbb{G}_m \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},$$

$I_m^*$  型では

$$\begin{cases} \mathbb{G}_a \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & m : \text{odd} \\ \mathbb{G}_a \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & m : \text{even} \end{cases}$$

となっている.

$\varphi(P)$  の表示を用いて具体的にかき下すことで, height pairing の明示公式を得ることができる. ここで  $\text{contr}_v$  は  $v$  での local contribution と呼ばれる量で, ファイバーの type ごとに交点行列を使って求めることができる [37].

$$\langle P, Q \rangle = \chi - (PQ) + (PO) + (QO) - \sum_{v \in \text{Red}(\Phi)} \text{contr}_v(P, Q). \quad (3.2)$$

ここで,  $(PQ)$  は交点数  $((P) \cdot (Q))$  を略記した. この式で  $P = Q$  とすれば

$$\langle P, P \rangle = 2\chi + 2(PO) - \sum_{v \in \text{Red}(\Phi)} \text{contr}_v(P)$$

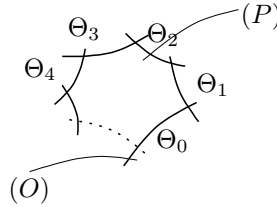
が得られる.

特に,  $P \in E(K)^0$  または  $Q \in E(K)^0$  のとき  $\langle P, Q \rangle \in \mathbb{Z}$  となる. また, 任意の  $O \neq P \in E(K)^0$  に対して  $\langle P, P \rangle \geq 2\chi$  となる. すなわち,

$$\text{minimal norm of } E(K)^0 \geq 2\chi$$

が成立する.

例 3.8  $v$  での特異ファイバーが  $I_m$  型 ( $m \geq 2$ ) であるとする. このとき lattice  $T_v^-$  の Dynkin type は  $A_{m-1}$  である. 各既約成分が図のように順序づけられているとき,



$(P)$  が  $\Theta_i$  と交わるとすると

$$\text{contr}_v(P) = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \frac{i(m-i)}{m} & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる.

### 3.3 有理楕円曲面

$S$  を有理楕円曲面 ( $\Phi : S \rightarrow C$ ) とする. ここで, 曲面  $X$  に対し,

$$\begin{aligned} X \text{ が有理曲面} &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} X \text{ は } \mathbb{P}^2 \text{ に双有理同値} \\ &\Leftrightarrow k(X) \cong k(\mathbb{P}^2) = k(\xi, \eta) \end{aligned}$$

である (但し,  $k(\xi, \eta)$  は  $k$  の純超越拡大). 従ってまた,  $p_g = q = 0$ ,  $\chi = 1$  が成立する. このとき,  $C \cong \mathbb{P}^1$  となる.

$k = \mathbb{C}$  の場合, (3.1) と  $\delta$  の全射性から

$$\mathrm{NS}(S) \cong H^2(S, \mathbb{Z})$$

であり,

$$c_2 = 12\chi = 12$$

$$b_1 = 2q = 0$$

$$\rho(S) = b_2 = c_2 - 2 = 10$$

となる.  $S$  の Néron-Severi lattice は  $\{(O), F\}$  の生成する部分格子  $U$  を用いて

$$\mathrm{NS}(S) = U \oplus V$$

と分解される.  $V$  は  $\mathrm{rk}(V) = 8$ ,  $\det(V) = 1$  を満たす negative-definite even integral lattice となり, 従って  $E_8^-$  に同型となる:

$$\mathrm{NS}(S) \cong U \oplus E_8^-.$$

部分格子  $T \subset \mathrm{NS}(S)$  は

$$T = U \oplus \left( \bigoplus_{v \in R} T_v \right)$$

と分解し, 各  $v$  で  $T_v^- \cong A_\ell, D_\ell, E_\ell$  ( $\ell = m_v - 1$ ) を満たす. ここで  $R$  は  $\Phi$  の fiber が可約になる点全体を表す.  $W := \left( \bigoplus_{v \in R} T_v \right)^-$  とおくと,  $W$  は  $A, D, E$  型格子の直和となる  $E_8$  の部分格子である.  $L$  を  $E_8$  における  $W$  の直交補空間とする.

このとき

定理 3.9 有理楕円曲面に対し,

$$E(K)^0 \cong L,$$

$$E(K)_{\mathrm{tor}} \cong W'/W,$$

$$E(K)/E(K)_{\mathrm{tor}} \cong L^*,$$

$$E(K) \cong L^* \oplus (W'/W)$$

が成立する. 但し,  $W'$  は  $W$  の *primitive closure*,  $L^*$  は  $L$  の双対格子

$$\begin{aligned} W' &:= \{\xi \in \text{NS}(S) \mid \exists m \in \mathbb{N}_{>0} \text{ such that } m\xi \in W\}, \\ L^* &:= \{y \in L \otimes \mathbb{Q} \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} (\forall x \in L)\} \end{aligned}$$

である [37, §6] または [34, §9,10].

### 可約ファイバーをもたない場合

まず  $W = \{0\}$ , 即ち全ての fiber が既約な場合を考えると,

$$E(K) \cong E_8, \quad r = 8$$

となる. 一般に

$$r = \rho - \text{rk}(T) = 8 - \text{rk}(W) \leq 8$$

であるため, この場合に  $r$  が最も大きくなっているが, 有理楕円曲面については, これが “一般的” な場合である.

さて,  $E_8$  は

minimal norm = 2

minimal vector の個数 (sphere packing でいう kissing number) = 240

を満たす格子であるので,  $\langle P, P \rangle = 2$  を満たす  $E(K)$  の点  $P$  が丁度 240 個存在することになる. そのうちの適当な 8 個が  $E(K)$  の生成元である.

可約ファイバーを持たないことと, 有理楕円曲面ゆえ  $\chi = 1$  であることから,  $O$  と異なる任意の  $P \in E(K)$  に対して (3.2) より

$$\langle P, P \rangle = 2 + 2(P O) \geq 2$$

となる. 等号成立は  $(P O) = 0$  となる場合であるので

$$\langle P, P \rangle = 2 \Leftrightarrow (P) \cap (O) = \emptyset$$

が成立する. 従って,  $E(K)$  は  $(P) \cap (O) = \emptyset$  を満たす  $P$  で生成されることになる.

条件  $(P) \cap (O) = \emptyset$  についてももう少し述べる.  $x(t), y(t) \in k(t)$  を用いて  $P = (x(t), y(t))$  と表す.  $(O)$  は  $\forall t \in \mathbb{A}_t^1$  において  $(\infty, \infty)$  をとおる section



であったので,  $(P) \cap (O) = \emptyset$  のとき  $x(t), y(t)$  は任意の  $t \in \mathbb{A}_t^1$  で有限. 従って  $x(t), y(t) \in k[t]$  となる.

また,  $y^2 = x^3 - 3f(t)x - 2g(t)$  の両辺を  $t^6$  で割ることで

$$Y^2 = X^3 - 3\frac{f(t)}{t^4}X - 2\frac{g(t)}{t^6} \quad (X = \frac{x}{t^2}, Y = \frac{y}{t^3})$$

が得られ,

$$\bar{P} = \left( \frac{x(t)}{t^2}, \frac{y(t)}{t^3} \right) \quad (3.3)$$

が任意の  $s = \frac{1}{t} \in \mathbb{A}^1$  で  $(\infty, \infty)$  を通らないことから

$$\deg(x(t)) \leq 2, \deg(y(t)) \leq 3$$

が従う. これらのことから

$$(P) \cap (O) = \emptyset \Leftrightarrow \begin{aligned} &x(t), y(t) \in k[t] \text{ かつ} \\ &\deg(x(t)) \leq 2, \deg(y(t)) \leq 3 \end{aligned}$$

となる.

### 3.4 有理楕円曲面の OS 分類 (小木曾・塩田 [26])

前節の定理と Dynkin による  $E_8$  の部分格子  $W$  の分類を用いて, 有理楕円曲面のモデル・ヴェイユ格子 (MWL) の構造は,  $\{W, L, M\}$  により完全に決定される. ここで,  $W \subset E_8$  は trivial lattice から定まる  $E_8$  の部分格子とその埋め込み,  $L$  は  $W$  の直交補空間,  $M = L^* \oplus W'/W$  であり,  $M, L$  はそれぞれ有理楕円曲面のモデル・ヴェイユ格子 (MWL) と narrow MWL に同型である.

小木曾・塩田 [26] により,  $\{W, L, M\}$  は以下の表のように 74 通りに分類される. ただし, 表の  $T$  はこれまでの  $W$  を意味する ([26] の記号にあわせた. [26] のミスプリは訂正済み). また, 74 通りのすべての場合の存在も確かめら

れている.

$No.$	$r$	$rkT$	$T$	$L$	$M$
1	8	0	$\{0\}$	$E_8$	$E_8$
2	7	1	$A_1$	$E_7$	$E_7^*$
3	6	2	$A_2$	$E_6$	$E_6^*$
4			$A_1^{\oplus 2}$	$D_6$	$D_6^*$
5	5	3	$A_3$	$D_5$	$D_5^*$
6			$A_2 \oplus A_1$	$A_5$	$A_5^*$
7			$A_1^{\oplus 3}$	$D_4 \oplus A_1$	$D_4^* \oplus A_1^*$
8	4	4	$A_4$	$A_4$	$A_4^*$
9			$D_4$	$D_4$	$D_4^*$
10			$A_3 \oplus A_1$	$A_3 \oplus A_1$	$A_3^* \oplus A_1^*$
11			$A_2^{\oplus 2}$	$A_2^{\oplus 2}$	$A_2^{*\oplus 2}$
12			$A_2 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$(A_5 : A_1)$	$(A_5 : A_1)^*$
13			$A_1^{\oplus 4}$	$D_4$	$D_4^* \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
14			$A_1^{\oplus 4}$	$A_1^{\oplus 4}$	$A_1^{*\oplus 4}$
15	3	5	$A_5$	$A_2 \oplus A_1$	$A_2^* \oplus A_1^*$
16			$D_5$	$A_3$	$A_3^*$
17			$A_4 \oplus A_1$	$(A_4 : A_1)$	$(A_4 : A_1)^*$
18			$D_4 \oplus A_1$	$A_1^{\oplus 3}$	$A_1^{*\oplus 3}$
19			$A_3 \oplus A_2$	$(D_5 : A_2)$	$(D_5 : A_2)^*$
20			$A_2^{\oplus 2} \oplus A_1$	$A_2 \oplus \langle 6 \rangle$	$A_2^* \oplus \langle 1/6 \rangle$
21			$A_3 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$A_3$	$A_3^* \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
22			$A_3 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$A_1^{\oplus 2} \oplus \langle 4 \rangle$	$A_1^{*\oplus 2} \oplus \langle 1/4 \rangle$
23			$A_2 \oplus A_1^{\oplus 3}$	$A_1 \oplus \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$A_1^* \oplus \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$
24			$A_1^{\oplus 5}$	$A_1^{\oplus 3}$	$A_1^{*\oplus 3} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$No.$	$r$	$rkT$	$T$	$L$	$M$
25	2	6	$A_6$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ 1/7 & 4/7 \end{pmatrix}$
26			$D_6$	$A_1^{\oplus 2}$	$A_1^{*\oplus 2}$
27			$E_6$	$A_2$	$A_2^*$
28			$A_5 \oplus A_1$	$A_2$	$A_2^* \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
29			$A_5 \oplus A_1$	$A_1 \oplus \langle 6 \rangle$	$A_1^* \oplus \langle 1/6 \rangle$
30			$D_5 \oplus A_1$	$A_1 \oplus \langle 4 \rangle$	$A_1^* \oplus \langle 1/4 \rangle$
31			$A_4 \oplus A_2$	$\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2/15 & 1/15 \\ 1/15 & 8/15 \end{pmatrix}$
32			$D_4 \oplus A_2$	$A_1 \oplus \langle 6 \rangle$	$A_1^* \oplus \langle 1/6 \rangle$
33			$A_4 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/5 & 1/10 \\ 1/10 & 3/10 \end{pmatrix}$
34			$D_4 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$A_1^{\oplus 2}$	$A_1^{*\oplus 2} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
35			$A_3^{\oplus 2}$	$A_1^{\oplus 2}$	$A_1^{*\oplus 2} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
36			$A_3^{\oplus 2}$	$\langle 4 \rangle^{\oplus 2}$	$\langle 1/4 \rangle^{\oplus 2}$
37			$A_3 \oplus A_2 \oplus A_1$	$A_1 \oplus \langle 12 \rangle$	$A_1^* \oplus \langle 1/12 \rangle$
38			$A_3 \oplus A_1^{\oplus 3}$	$A_1 \oplus \langle 4 \rangle$	$A_1^* \oplus \langle 1/4 \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
39			$A_2^{\oplus 3}$	$A_2$	$A_2^* \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
40			$A_2^{\oplus 2} \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\langle 6 \rangle^{\oplus 2}$	$\langle 1/6 \rangle^{\oplus 2}$
41			$A_2 \oplus A_1^{\oplus 4}$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
42			$A_1^{\oplus 6}$	$A_1^{\oplus 2}$	$A_1^{*\oplus 2} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$

<i>No.</i>	<i>r</i>	<i>rkT</i>	<i>T</i>	<i>L</i>	<i>M</i>		
43	1	7	$E_7$	$A_1$	$A_1^*$		
44			$A_7$	$A_1$	$A_1^* \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$		
45			$A_7$	$\langle 8 \rangle$	$\langle 1/8 \rangle$		
46			$D_7$	$\langle 4 \rangle$	$\langle 1/4 \rangle$		
47			$A_6 \oplus A_1$	$\langle 14 \rangle$	$\langle 1/14 \rangle$		
48			$D_6 \oplus A_1$	$A_1$	$A_1^* \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$		
49			$E_6 \oplus A_1$	$\langle 6 \rangle$	$\langle 1/6 \rangle$		
50			$D_5 \oplus A_2$	$\langle 12 \rangle$	$\langle 1/12 \rangle$		
51			$A_5 \oplus A_2$	$A_1$	$A_1^* \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$		
52			$D_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\langle 4 \rangle$	$\langle 1/4 \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$		
53			$A_5 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\langle 6 \rangle$	$\langle 1/6 \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$		
54			$D_4 \oplus A_3$	$\langle 4 \rangle$	$\langle 1/4 \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$		
55			$A_4 \oplus A_3$	$\langle 20 \rangle$	$\langle 1/20 \rangle$		
56			$A_4 \oplus A_2 \oplus A_1$	$\langle 30 \rangle$	$\langle 1/30 \rangle$		
57			$D_4 \oplus A_1^{\oplus 3}$	$A_1$	$A_1^* \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$		
58			$A_3^{\oplus 2} \oplus A_1$	$A_1$	$A_1^* \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$		
59			$A_3 \oplus A_2 \oplus A_1^{\oplus 2}$	$\langle 12 \rangle$	$\langle 1/12 \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$		
60			$A_3 \oplus A_1^{\oplus 4}$	$\langle 4 \rangle$	$\langle 1/4 \rangle \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2}$		
61			$A_2^{\oplus 3} \oplus A_1$	$\langle 6 \rangle$	$\langle 1/6 \rangle \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$		
62			0	8	$E_8$	0	0
63					$A_8$	0	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
64	$D_8$	0			$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$		
65	$E_7 \oplus A_1$	0			$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$		
66	$A_5 \oplus A_2 \oplus A_1$	0			$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$		
67	$A_4^{\oplus 2}$	0			$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$		
68	$A_2^{\oplus 4}$	0			$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$		
69	$E_6 \oplus A_2$	0			$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$		
70	$A_7 \oplus A_1$	0			$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$		
71	$D_6 \oplus A_1^{\oplus 2}$	0			$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$		
72	$D_5 \oplus A_3$	0			$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$		
73	$D_4^{\oplus 2}$	0			$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$		
74	$A_3^{\oplus 2} \oplus A_1^{\oplus 2}$	0			$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$		

表の記号:

$r = \text{rk}E(K)$  : the Mordell-Weil rank

$T = \bigoplus_{v \in R} T_v^- \hookrightarrow E_8$

$L = E(K)^0 \simeq T^\perp$  : the narrow Mordell-Weil lattice

$M = E(K) \simeq L^* \oplus E(K)_{\text{tor}}$  : the Mordell-Weil lattice.

$A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$ : ルート格子.

$\langle m \rangle$  : rank 1 の格子  $\mathbb{Z}\xi$  で  $\langle \xi, \xi \rangle = m$  となるもの.

$I$  : Gram matrix  $I$  をもつ格子.

$(A : B)$  : 部分格子  $B \subset A$  の直交補空間.

とくに No.12, 17, 19 について:

$$(A_5 : A_1) \simeq \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A_5 : A_1)^* \simeq \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(A_4 : A_1) \simeq \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A_4 : A_1)^* \simeq \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(D_5 : A_2) \simeq \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad (D_5 : A_2)^* \simeq \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

## 4 第四日

### 4.1 Mordell-Weil の定理についての補足

はじめに, (関数体上の) Mordell-Weil の定理についての補足を行う. 参考として [18], [39] を挙げておく.

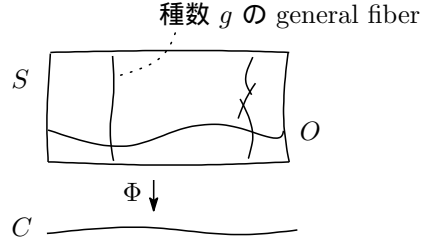
$k$  を任意標数の代数閉体,  $C$  を  $k$  上の代数曲線とし,  $K = k(C)$  を関数体とする.

$\Gamma$  を種数  $g > 0$  の  $K$  上の非特異代数曲線で, 仮定  $(A_0)$

$$\Gamma \text{ は } K \text{ 有理点 } O \in \Gamma(K) \text{ を持つ} \quad (A_0)$$

を満たすものとする.  $\Gamma/K$  の Jacobi 多様体を  $J$  で表す. これは  $K$  上の Abel 多様体となる.

この場合にも, 楕円曲線に対する小平-Néron モデルと同様に, 対応する非特異射影曲面  $S$  からの種数  $g$  の fibration  $\Phi : S \rightarrow C$  が得られる [29].



$\Phi$  は  $\Gamma$  を generic fiber に持ち, また, どの fiber も  $(-1)$ -curve を持たない (relatively minimal). 楕円曲面の場合と同様,  $\Phi$  の section と  $\Gamma$  の  $K$ -有理点とが 1:1 に対応する. Néron-Severi lattice  $NS(S)$  の trivial sublattice を  $T \subset NS(S)$  で表す.

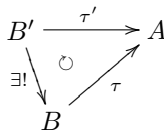
定義 4.1 ( $K/k$ -trace [18])  $A$  を  $K$  上の Abel 多様体とする.  $A/K$  の  $K/k$ -trace  $(\tau, B)$  とは,

$B : k$  上の Abel 多様体

$\tau : B \rightarrow A$ ,  $K$  上の Abel 多様体としての homomorphism

の組であって, 次の普遍性を満たすものをいう :

上の様な任意の組  $(\tau', B')$  に対して  $k$  上の Abel 多様体としての射  $B' \rightarrow B$  が一意に存在し,  $\tau$  及び  $\tau'$  と可換になる.



$K/k$ -trace の存在は Chow によって示されており ([6]), また  $\tau$  は radicial map になることが知られている.

以下,  $A$  を Jacobi 多様体  $J/K$  にとり,  $(\tau, B)$  を  $J/K$  の  $K/k$ -trace とする. このとき次の定理が成立する:

**定理 4.2** *Mordell-Weil* 群  $J(K)/\tau B(k)$  は  $\text{NS}(S)$  の  $T$  による商に自然に同型になる:

$$J(K)/\tau B(k) \cong \text{NS}(S)/T$$

Raynaud の定理 [39]

**定理 4.3 (Raynaud の定理)**  $k$  上の *Abel* 多様体の完全列

$$0 \rightarrow J_C \xrightarrow{\Phi^*} \text{PicVar}_S \rightarrow B \rightarrow 0$$

が得られる.

Raynaud の定理より次が従う.

**定理 4.4** 以下は同値.

- (i)  $B = \{0\}$
- (ii)  $\Phi^* : J_C \rightarrow \text{PicVar}_S$  は同型
- (iii)  $q(S) = g(C)$

これらの条件のどれか (従って全て) が満たされるとき,  $J(K)$  は有限生成 *Abel* 群となり, 同型

$$J(K) \cong \text{NS}(S)/T$$

が成立する.

特に,  $\Gamma$  の種数が 1 のとき, 仮定 (\*)のもとに  $B = 0$  であり, 楕円曲面の場合の *Mordell-Weil* 群と *Néron-Severi* 群に関する同型

$$E(K) \cong \text{NS}(S)/T$$

が復元できる.

## 4.2 楕円曲線の rank, torsion

話を楕円曲面の場合に戻す.  $S$  を楕円曲線  $E/K = k(t)$  に対応する  $C = \mathbb{P}^1$  上の楕円曲面で (\*) を満たすものとする. 楕円曲面を

$$\Phi : S \xleftarrow{O} C$$

とし,  $E(K)$  の rank, torsion, 特異ファイバーについて述べることにする.

### Rank

$r = \text{rk}(E(K))$  は有限であり,

$$\rho(S) = r + \text{rk}(T) = r + 2 + \sum_{v \in \text{Red}(\Phi)} (m_v - 1)$$

を満たす. この  $r$  の (非) 有界性に関する問題を論じる.

$K = k(t)$  の場合とは異なるが,  $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線に対してはこの問いは次のようになる:

問題 4.5  $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線  $E$  に対し,  $\text{rk}(E(\mathbb{Q}))$  は有界か?

これに関しては, フランスでは Mestre, 日本では Nagao 等により研究がなされており, 階数 23 くらいまで存在が知られている.<sup>2</sup>

問題 4.6  $k = \mathbb{C}$  の場合,  $\text{rk}(E(\mathbb{C}(t)))$  は有界か?

$r \leq 56$  の実例は

$$y^2 = x^3 + at^n x + bt^m \quad (ab \neq 0, a, b \in k, m, n \geq 0)$$

の形の式で与えることができる [33]. さらに  $r \leq 68$  の実例は

$$y^2 = x^3 + at^n + bt^m \quad (ab \neq 0, a, b \in k, m, n \geq 0)$$

の形の式で与えることができる. とくに  $y^2 = x^3 + t^{360} + 1$  の定める曲線は  $r = 68$  となる (塩田) が, これが現在知られている最大ランクである.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>後記 (III)



上記いずれの場合も, 有界ではないと信じられているが, 今のところ証明されてはいない.

### 正標数の場合との比較

$k$  の標数が正の場合に  $k(t)$  上の楕円曲線を考えると,  $r$  は有界とならない. このことは 1967 年 [31] では  $k$  が有限体  $\mathbb{F}_q$  の場合に supersingular Fermat curve を用いて, 1986 年 [33] では  $k$  が正標数の代数閉体の場合に supersingular Fermat 曲面を用いて示されている.

標数が 2, 3 と異なる代数閉体上で, 式

$$y^2 = x^3 + 1 + t^m$$

の定める楕円曲面  $S_m$  を考える. Lefschetz 数  $\lambda = b_2 - \rho$  は双有理不変量であり,  $S_m$  に対しては次の関係式を満たす [35]:

$$r + \lambda = \begin{cases} 2m - 4 & m \equiv 0 \pmod{6} \\ 2m - 2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\mathbb{P}^3$  内で  $d$  次式

$$\sum_{i=0}^3 x_i^d = 0$$

の定める曲面  $X_d^2$  を  $d$  次 Fermat 曲面という. 標数  $p$  の体  $k$  上で考える場合  $X_d^2(p) \subset \mathbb{P}_k^3$  とかくことにする.

命題 4.7 ある正整数  $e$  が存在して  $p^e \equiv -1 \pmod{d}$  を満たすとき,  $X_d^2(p)$  は unirational であり, 従って supersingular ( $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lambda = 0$ ) となる.

標数  $p$  ( $\neq 2, 3$ ) の体上で考えた楕円曲面  $S_m$  を  $S_m(p)$  で表す.

$$d = 6m/(6, m)$$

とおくとき  $X_d^2(p)$  から  $S_m(p)$  への支配的有理写像が存在し,  $X_d^2(p)$  が supersingular なら  $S_m(p)$  も supersingular となる. これにより,  $S_m(p)$  の Mordell-Weil rank  $r$  は次のようになる:

命題 4.8  $m \in \mathbb{N}$ , ある正整数  $e$  が存在して  $p^e \equiv -1 \pmod{d}$  を満たすとき,

$$r = \begin{cases} 2m - 4 & m \equiv 0 \pmod{6} \\ 2m - 2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成立する.

問題 4.9  $E$  が  $\mathbb{Q}(t)$  上の楕円曲線の場合はどうか?<sup>3</sup>

現状では 14 が一番大きい値となっている (Kihara).  $t$  を  $a (a \in \mathbb{Q})$  に特殊化して得られる  $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線  $E^{(a)} := E|_{t=a}$  に対して

$$\text{rk}(E^{(a)}(\mathbb{Q})) \geq \text{rk}(E(\mathbb{Q}(t)))$$

がほとんどの  $a$  について成立する. このことを用いて,  $r = \text{rk}(E(\mathbb{Q}(t)))$  から出発して  $\text{rk}(E^{(a)}(\mathbb{Q}))$  の大きなものをみつける, というのが一般的な方法である.

$r = 8$  では, Mordell-Weil lattice を用いてランク 8 の  $E(\mathbb{Q}(t))$  をその生成元とともに構成することができる [36]. これは  $E_8$  型の代数方程式論に基づいている (cf. [37]).

#### Torsion

$E$  を  $C/k$  の関数体  $K = k(C)$  上で定義された楕円曲線とする.  $E(K)$  の torsion part の位数について Levin による次の結果が知られている [22]. Mordell-Weil の定理により  $E(K)$  は有限生成 Abel 群であり, 従って torsion part  $E(K)_{\text{tor}}$  は有限群となることに注意されたい.

定理 4.10  $E$  を  $K$  上の楕円曲線で,  $j(E)$  が  $k$  上超越的なものとするとき,  $E(K)_{\text{tor}}$  の位数は  $C$  の種数にのみ依存する (標数によらない) 定数を上界にもつ:

$$|E(K)_{\text{tor}}| \leq \text{const}_{g(C)} \quad (K = k(C))$$

---

<sup>3</sup>後記 (III)

この定理は Igusa により提案された方法に従い, 任意標数の modular 関数体の理論を用いて示された [22].

例 4.11  $k$  を任意標数の代数閉体,  $E$  を  $K = k(t)$  上の楕円曲線,  $S$  を対応する楕円曲面とする.  $S$  が有理的なとき, §3.4 で述べたように  $E(K)$  の構造を完全に決定し列挙することができる [26]. とくに  $E(K)_{\text{tor}}$  については, 次の 9 通りである:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad (n = 1, 2, \dots, 6), \quad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \quad ((n, m) = (2, 2), (2, 4), (3, 3))$$

楕円曲面  $S$  の有理性について少し補足する. (証明は [37] を参照.)

$k$  が標数が 2, 3 と異なる代数閉体のとき,  $E/k(t)$  は Weierstrass 標準形で

$$E_{f,g}: y^2 = x^3 - 3f(t)x - 2g(t) \quad (f, g \in k[t], f^3 - g^2 \neq 0) \quad (4.1)$$

と表せるが, その中で ‘minimal’ なものを次のように定義する.

定義 4.12 Weierstrass 標準形 (4.1) に対し,

$$\begin{cases} \ell^4 \mid f \\ \ell^6 \mid g \end{cases}$$

を満たす  $\ell(t) \in k[t]$  が定数しか存在しないとき, (4.1) は *minimal* であるという.

$\ell^4 \mid f$  かつ  $\ell^6 \mid g$  となる  $\ell(t)$  が存在すれば両辺を  $\ell^6$  で割り変数変換を行うことで, minimal な Weierstrass 標準形を得ることができる.

定理 4.13  $E/k(t)$ ,  $S$  を上のとおりとする.  $E$  が *minimal Weierstrass form*

$$E_{f,g}: y^2 = x^3 - 3f(t)x - 2g(t) \quad (f, g \in k[t], f^3 - g^2 \neq 0)$$

で表されるとき,

$$\min\{n \mid \deg(f) \leq 4n, \deg(g) \leq 6n\} = \chi(S)$$

が成立する. ここで  $\chi = \chi(S)$  は  $S$  の *arithmetic genus* を表す.

例 4.14

- ・  $\chi = 1$  のとき,  $S$  は *rational elliptic surface* となる.
- ・  $\chi = 2$  のとき,  $S$  は *elliptic K3 surface* となる.

### 4.3 楕円曲面の特異ファイバーの個数 (1)

$\Phi: S \rightarrow C = \mathbb{P}^1$  を section をもつ楕円曲面とし,

$$\text{Sing}(\Phi) := \{v \in C \mid \Phi^{-1}(v) : \text{singular}\}$$

とおく. これは  $\text{Red}(\Phi)$  を含む. (\*) を仮定しているので  $\text{Sing}(\Phi) \ni \infty$  としてよい.  $k$  の標数は 0 とする.

以下, 特異ファイバーの個数を  $N$  とする:

$$N := \#\text{Sing}(\Phi) \quad (\geq 1)$$

問題 4.15  $N$  を与えたとき, 特異ファイバーの個数が  $N$  となるような楕円曲面を決定せよ.

以下,  $N$  が小さなとき, 上の問題を考える.

$E$  を  $S$  の generic fiber とし,  $f(t), g(t) \in k[t]$  を用いて  $E = E_{f,g}, S = S_{f,g}$  と表す.  $h = f^3 - g^2$  とおくと  $\Delta(E) = -108h$  であり,  $\text{Sing}(\Phi) = h^{-1}(0) \cup \{\infty\}$  となる.

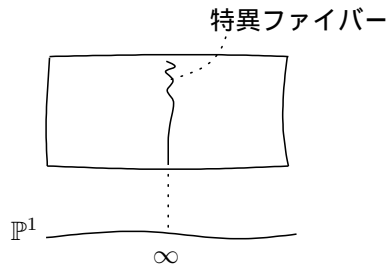
また, この  $h(t)$  を用いて定義される  $k(t)$  上の楕円曲線

$$\mathcal{E}_h: Y^2 = X^3 - h$$

を  $E$  の Shafarevich partner という.  $P = (f, g)$  は  $\mathcal{E}_h$  の整点 (i.e.  $P \in \mathcal{E}_h(k[t])$ ) であることに注意されたい.

$N = 1$

上述のように,  $\text{Sing}(\Phi) = \{\infty\}$  としてよい.



このとき  $h$  は  $\mathbb{A}^1$  上零点を持たないため定数関数となる.  $f^3 - g^2 = h$  を満たすような非定数関数  $f, g$  は存在せず, このような楕円曲面は存在しない. 実際, もし定数でない  $f, g$  で  $f^3 - g^2 = 1$  を満たすものが存在したとすると,  $\mathbb{P}^1$  から  $k$  上の楕円曲線  $E_0: Y^2 = X^3 - 1$  への全射正則写像

$$\mathbb{P}^1(k) \ni t \rightarrow (f(t), g(t)) \in E_0(k)$$

が存在することになり, これは  $g(E_0) = 1$  に反する.

$N = 2$

$\text{Sing}(\Phi) = \{0, \infty\}$  としてよい. このとき  $h = \text{const} \cdot t^n$  であり,  $E$  の Shafarevich partner は

$$\mathcal{E}_n: Y^2 = X^3 - t^n$$

の形をしている (変数変換により定数倍は無視した).

$\mathcal{E}_n$  の整点  $P = (f, g)$  を求めたい. この  $n$  により場合分けを行う. 定理 1.1'' より  $\deg(f) \leq 2(n-1)$ ,  $\deg(g) \leq 3(n-1)$  である. また,  $\Delta(S_{f,g}) = \text{const} \cdot h$  である.

$n$  を 6 で割った余りを  $n_0$  とし,  $n = 6q + n_0$  とする. このとき,

$$(X, Y) \rightarrow (X/t^{2q}, Y/t^{3q})$$

により  $\mathcal{E}_n$  は  $\mathcal{E}_{n_0}$  と  $k(t)$  上同型になるから,  $n = n_0 \leq 5$  のときを考えれば十分である. ただし, 上の同型対応で  $\mathcal{E}_n$  の  $k[t]$ -整点は,  $\mathcal{E}_{n_0}$  の  $k[t, 1/t]$ -整点にうつることに注意して,  $n \leq 5$  のときの  $\mathcal{E}_n$  の  $k(t)$ -有理点の全体, すなわち モーデル・ヴェイユ群  $\mathcal{E}_n(k(t))$  を定め,  $P = (f, g)$  から求める  $S = S_{f,g}$  を決定する.

$\mathcal{E}_n$  に対応する楕円曲面  $\mathcal{S}_n$  の特異ファイバーは, 判別式  $\Delta(\mathcal{E}_n)$  が定数倍を除いて  $t^{2n}$  に等しいこと, および  $j = 0$  であることから容易に定まる (42 ページの表参照). 以下, “trivial lattice”  $T$  は, これまでの記号でいうと  $\bigoplus_v T_v^-$  を指すこととする.

まず,  $n = 1$  のとき  $t = 0, \infty$  においてそれぞれタイプ II, II\* の特異ファイバーをもつ. ゆえに  $T \cong E_8$ . §3.4 の [OS.62] (OS-分類の No.62 の意, 以下同様) により,  $M = \{0\}$ , すなわち  $\mathcal{S}_1(k(t)) = \{0\}$ . よって,  $n = 1$  のとき  $S = S_{f,g}$  は存在しない.

次に,  $n = 2$  のとき  $t = 0, \infty$  においてそれぞれタイプ IV, IV\* の特異ファイバーをもつ. ゆえに  $T \cong A_2 \oplus E_6$ . [OS.69] により,  $M = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . 実際, 方程式  $Y^2 = X^3 - t^2$  の有理解として,  $(X, Y) = (0, \pm it)$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) の 2 つがある. すなわち,  $f = 0$  かつ  $g = ct$  ( $c$  は定数) に限る. よって,  $n = 2$  のとき求める  $S$  の標準形は

$$y^2 = x^3 - t$$

である. これは, (上の  $n = 1$  で見たように)  $t = 0, \infty$  においてタイプ II, II\* の特異ファイバーをもつ.

同様に,  $n = 3$  のとき  $t = 0, \infty$  においてタイプ  $I_0^*$  の特異ファイバーをもつ. ゆえに  $T \cong D_4^{\oplus 2}$ . [OS.73] により,  $M = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ . 実際, 方程式  $Y^2 = X^3 - t^3$  の有理解として,  $(X, Y) = (\omega^\nu t, 0)$  ( $\omega$  は 1 の原始 3 乗根,  $\nu = 0, 1, 2$ ) の 3 点がある. よって,  $n = 3$  のとき求める  $S$  の標準形は

$$y^2 = x^3 - tx$$

である. その特異ファイバーは, III, III\* の 2 本である.

$n = 4$  (または  $n = 5$ ) のとき,  $t = 0, \infty$  を入れ替える座標変換  $t \rightarrow 1/t$  により, 楕円曲線  $\mathcal{E}_n$  は  $\mathcal{E}_2$  (または  $\mathcal{E}_1$ ) と同型になり, 上記の  $n = 2$  (または  $n = 1$ ) の場合に帰着する.

以上から,  $n \equiv n_0 \pmod{6}$  かつ  $n_0 \neq 0$  なる任意の正整数  $n$  について,  $\mathcal{E}_n$  の  $k[t]$ -整点  $(f, g)$  が決定され,  $S = S_{f, g}$  の標準形が求められた.

最後に,  $n = 0$  のとき, 先に  $N = 1$  のところで見たと同じように  $Y^2 = X^3 - 1$  の  $k(t)$ -有理点はすべて “定数点”  $(X, Y) = (\alpha, \beta)$ , つまり  $\beta^2 = \alpha^3 - 1$  をみたす任意の定数  $\alpha, \beta \in k$  により与えられる. したがって,  $n = 6q, n_0 = 0$  のときは,  $\mathcal{E}_n$  の  $k[t]$ -整点は  $(f, g) = (\alpha t^{2q}, \beta t^{3q})$  として与えられる. ゆえに, 求める  $S = S_{f, g}$  は

$$y^2 = x^3 - 3\alpha t^{2q}x - 2\beta t^{3q}.$$

ここで, もし  $q$  が偶数ならば, 上式の両辺を  $t^{3q}$  で割って,  $q = 0$  の場合 (特異ファイバーのないとき) になるので矛盾.  $q$  が奇数のときは  $q = 1$  の場合に帰着するが, このときは確かに  $t = 0, \infty$  においてタイプ  $I_0^*$  の特異ファイバーをもつ.

以上で,  $\mathbb{P}^1$  上の section をもつ楕円曲面で特異ファイバーの個数が  $N = 2$  となるもの  $S$  は, 完全に決定された.

$N = 3$  の場合について述べる前に, 次の定理を記しておく.

**定理 4.16**  $f, g \neq 0$  により定まる楕円曲面  $S_{f,g}$  が  $j \neq \text{const}$  かつ次の条件 (red-1)

$$\begin{aligned} & N \text{ 個の } \textit{singular fiber} \text{ のうち高々一つを除いて} \\ & \textit{reduced (i.e. type } I_n, \text{ II, III, IV)} \end{aligned} \tag{red-1}$$

を満たすとき,

$$\begin{cases} \deg(f) \leq 2(N-2) \\ \deg(g) \leq 3(N-2) \end{cases}$$

が成立する.

これより少し弱い次の定理を示す.

**定理 4.17**  $f, g \neq 0$  により定まる楕円曲面  $S_{f,g}$  が次の条件 (ss-1)

$$\begin{aligned} & N \text{ 個の } \textit{singular fiber} \text{ のうち高々一つを除いて} \\ & \textit{semi-stable (i.e. type } I_n). \end{aligned} \tag{ss-1}$$

を満たすとき,

$$\begin{cases} \deg(f) \leq 2(N-2) \\ \deg(g) \leq 3(N-2) \end{cases}$$

が成立する.

**proof.**  $t = \alpha \neq \infty$  を  $h$  の零点 (i.e.  $t = \alpha$  で特異ファイバーをもつ) とする.  $\Phi^{-1}(v)$  が semi-stable であるので  $f(\alpha) \neq 0$  または  $g(\alpha) \neq 0$  となる. 従って,  $f(t), g(t)$  は共通零点をもたず互いに素である.

定理 1.8 と  $N_0(h) \leq N - 1$  より

$$\begin{aligned} \deg(f) & \leq 2(N_0(h) - 1) \leq 2(N - 2) \\ \deg(g) & \leq 3(N_0(h) - 1) \leq 3(N - 2) \end{aligned}$$

が従う. ■

系 4.18 楕円曲面  $S$  が条件「(red-1) かつ  $j \neq \text{const}$ 」 (または (ss-1)) を満たすとき,

$$2\chi \leq \begin{cases} N-2 & N: \text{偶数} \\ N-1 & N: \text{奇数} \end{cases}$$

が成立する.

定理 4.19 楕円曲面  $S \rightarrow \mathbb{P}^1$  が (ss) を満たすとき (すなわち, 全ての fiber が *semi-stable* のとき),

$$N \geq 2\chi + 2$$

が成立する.

**proof.** 上の定理及び,  $N = 2\chi + 1$  のとき  $t = \infty$  における fiber が *semi-stable* とならないことより従う. ■

系 4.20 (Beauville [2]) 楕円曲面  $S \rightarrow \mathbb{P}^1$  が (ss) を満たすならば  $N \geq 4$ .

$N = 4$  のときは (ss) を満たすものは同型を除き 6 種類である (cf. [13], [46]). 4 つの singular fiber はそれぞれ

$$\begin{aligned} & I_1, I_1, I_1, I_9 \quad (\text{DS-triple of order } 2) \\ & I_1, I_1, I_2, I_8 \\ & I_1, I_1, I_5, I_5 \\ & I_3, I_3, I_3, I_3 \\ & I_1, I_2, I_3, I_6 \\ & I_2, I_2, I_4, I_4 \end{aligned}$$

である. これらは全て elliptic modular surface となる [2].

Elliptic modular surface ([32])

Elliptic modular surface について大雑把に解説しておく.  $\Gamma \subset \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  を, torsion-free な有限位数部分群とする.  $S'$  を  $H \times \mathbb{C}$  の  $\Gamma \times \mathbb{Z}$  による quotient surface とし  $C' := H/\Gamma$  とおくと, (open) smooth elliptic surface  $S' \rightarrow C'$  が得られる.  $C'$  に有限個の cusp を付け加え, さらに cusp 上 type  $I_m, I_m^*$  の特異 fiber を  $S'$  に付け加えることで elliptic surface  $S \rightarrow C$  に拡張される.



これを  $\Gamma$  に付随する elliptic modular surface という (同型を除き一意に定まる). [2] には上記の  $N = 4$  の各場合に対応する  $\Gamma$  が明記されている.

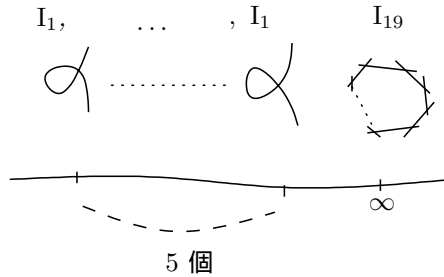
系 4.18 により, 楕円曲面が  $N = 3$  で (red-1) を満たすとき  $\chi = 1$  となり, 従って有理楕円曲面となる.  $N = 4$  で (red-1) を満たすときは  $\chi \leq 2$  となり, 有理楕円曲面または elliptic  $K3$  surface となる.

話を逆にして, 有理楕円曲面に対して singular fiber の configuration を全て決定せよという問題が考えられるが, これは Miranda, Persson 等によって幾何的な分類がなされている [23]. また, MWL による分類 [26] は 3.4 節で述べた.

例 4.21  $N = 6$  のとき, Hall の triplet  $\{f, g, h\}$  (11 ページの  $m = 4$  の  $DS$ -triple) により  $S_{f,g}$  を定めると, これは fiber type

$$I_1, I_1, I_1, I_1, I_1, I_{19}$$

を持つ楕円曲面を与える. また, このような楕円曲面は一意に定まる.



## 5 第五日

### 5.1 楕円曲面の特異ファイバーの個数 (2)

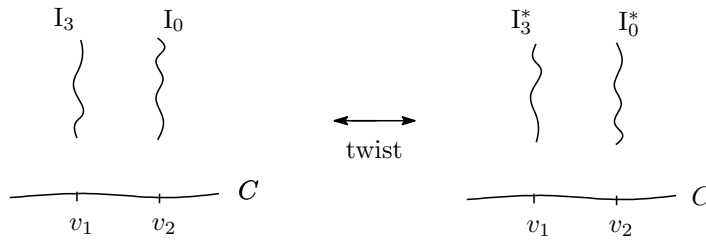
これまでと同様に  $E_{f,g}$  は  $y^2 = x^3 - 3f(t)x - 2g(t)$  ( $f(t), g(t) \in k[t]$ ) の定める楕円曲線,  $\Phi: S_{f,g} \rightarrow C$  は対応する楕円曲面とし, 今までと同じ記号を用いる.

$N = 2$  の場合の結果をまとめると, 得られる  $S_{f,g}$  は本質的に次の形のものとなる ( $(\alpha, \beta) \in E_0(k)$ ):

$S_{f,g}$	$t = 0, \infty$ での特異ファイバー
$y^2 = x^3 + t$	II, II*
$y^2 = x^3 + tx$	III, III*
$y^2 = x^3 + t^2$	IV, IV*
$y^2 = x^3 - 3\alpha t^2 x - 2\beta t^3$	$I_0^*, I_0^*$

いずれの場合も  $j$  は定数となっている. ( $N \geq 3$  のときは非定数もあり得る.)

ここで, twist と呼ばれる操作の証明をする. Twist とは base curve  $C$  の 2 点  $(v_1, v_2)$  上のファイバーの type をスイッチする操作であり, monodromy の符号を変えること ( $-1$  倍) に対応する.



Twist によりファイバーの type は次のように変化する:

$$\begin{aligned}
 I_n &\longleftrightarrow I_n^* \\
 \text{II} &\longleftrightarrow \text{IV}^* \\
 \text{III} &\longleftrightarrow \text{III}^* \\
 \text{IV} &\longleftrightarrow \text{II}^*
 \end{aligned}$$

$N = 2$  の例では,  $y^2 = x^3 - 3\alpha t^2 x - 2\beta t^3$  が, constant な楕円曲線  $y^2 = x^3 - 3\alpha x - 2\beta$  の twist である. 実際,  $C = \mathbb{P}^1$ ,  $v_1 = \alpha$ ,  $v_2 = \infty$  の場合,

$$S_{f,g} : y^2 = x^3 - 3f(t)x - 2g(t)$$

の twist は

$$S'_{f,g} : y^2 = x^3 - 3(t - \alpha)^2 f(t)x - 2(t - \alpha)^3 g(t)$$

で与えられる.

このとき

$$\begin{aligned} j(S'_{f,g}) &= j(S_{f,g}) \\ \Delta(S'_{f,g}) &= (t - \alpha)^6 \Delta(S_{f,g}) \end{aligned}$$

ゆえ, (小平-Néron-Tate の分類により) fiber の type は実際上記のように変化することがわかる.

Twist の繰り返しで, 与えられた  $N$  を持つ任意の  $S_{f,g}$  は, (red-1) を満たし特異ファイバーの個数  $N' \leq N$  なるものにつづる. (もともとの non-reduced fiber が偶数個のときは (red), すなわち全ての fiber が reduced にできる.)

これを踏まえて  $N \geq 3$  の場合に戻る.

$N = 3$

$N = 3$  のときは Schickler-Hirzebruch [27] により決定された. ボン大学の修士論文にあたるものだが,  $\mathbb{P}^1$  の 3 点  $0, 1, \infty$  に特異点をもつ超幾何関数の決定も取り扱っている. 我々の方法はより代数的で, 一般の  $N \geq 3$  の場合への拡張をも視野に入れて考える.

Twist により,  $S_{f,g}$  は条件 (red-1) を満たすとしてよい. また, 簡単のため  $j = \text{定数}$  となるものは除外する. (とくに, twist で  $N \leq 2$  に帰着するものは除外する.)  $0, 1, \infty$  で特異 fiber を持ち,  $0, 1$  上の fiber は被約であるとする. 定理 4.16 により,

$$\deg(f) \leq 2,$$

$$\deg(g) \leq 3,$$

$$S_{f,g} \text{ は有理楕円曲面 } (\chi = 1)$$

となる. これにより  $\deg(h) \leq 6$  が成立し,  $h$  は

$$h(t) = \text{const} \cdot t^n (t - 1)^m \quad (n + m \leq 6)$$

の形でかける. Shafarevich partner を今までどおり  $\mathcal{E}_h$  で表す:

$$\mathcal{E}_h : Y^2 = X^3 - h$$

$P = (f, g)$  は整点 (i.e.  $(f, g) \in \mathcal{E}_h(k[t])$ ) で次数の条件をみたすゆえ  $(P) \cap (O) = \emptyset$  であり, 従って height pairing の明示公式により  $\langle P, P \rangle \leq 2$  となる.

$n \geq m$  と仮定してよい. 考えられる  $(n, m)$  の組み合わせは

n	1	2	3	4	5	2	3	4	3
m	1	1	1	1	1	2	2	2	3

となる.

$(n, m) = (1, 1)$  のときに例証を行う. この議論をそれぞれの  $(n, m)$  の組で行うとよい. 定数倍は無視し  $h(t) = -t(t-1)$  とする. このとき  $\mathcal{E}_h$  は

$$\mathcal{E}_h : Y^2 = X^3 + t(t-1)$$

となり,  $\mathcal{E}_h$  の特異ファイバーは  $t = 0, 1$  で type II,  $t = \infty$  で type IV\* となる. この  $\mathcal{E}_h$  に対して [OS.27] により

$$\text{trivial lattice} : T = E_6,$$

$$\text{narrow MWL} : L = \mathcal{E}_h(k(t))^0 \cong (E_6 \subset E_8)^\perp \cong A_2,$$

$$\text{MWL} : M = \mathcal{E}_h(k(t)) \cong A_2^*$$

と求まる.  $A_2^*$  のグラム行列は

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である. この MWL において, minimal norm は  $\frac{2}{3}$ , 次に小さい norm は 2 であり, 各々 6 個存在する.

可約 fiber は  $t = \infty$  のみであるので, height pairing の明示公式により

$$\langle P, P \rangle = 2 + 2(P, O) - \text{contr}_\infty(P)$$

となる.  $t = \infty$  での fiber は IV\* 型ゆえ格子は  $E_6$  型であり, norm が  $\frac{2}{3}$ , 2 となるのはそれぞれ

$$\text{イ) } \text{contr}_\infty(P) = \frac{4}{3}$$

$$\text{ロ) } \text{contr}_\infty(P) = 2$$

となる場合である. ロ) の場合  $(P)$  は  $t = \infty$  で  $\Theta_0$  を通り, イ) の場合はそれ以外の既約成分を通る.

(P) が  $\infty$  で  $\Theta_0$  と異なる成分を通ることは  $\infty$ -model (cf. [37]) で (3.3)  $\bar{P} = (\frac{f(t)}{t^2}, \frac{g(t)}{t^3})$  が  $t = \infty$  で  $(0, 0)$  を通ることに同値であり,

$$\deg(f) \leq 1, \deg(g) \leq 2$$

が従う。これにより イ) の場合は

$$P_\nu = (\frac{\omega^{\nu-1}}{\sqrt[3]{4}}, t - \frac{1}{2}) \quad (\nu = 1, 2, 3),$$

ロ) の場合は、加法公式を用いて

$$Q = P_2 - P_3 = (-\frac{16t^2 - 16t + 1}{3\sqrt[3]{4}}, \frac{(2t-1)(32t^2 - 32t - 1)}{6\sqrt{-3}})$$

と求めることができる。

従って、イ) の場合

$$S_{f,g} : y^2 = x^3 - \frac{3\omega^{\nu-1}}{\sqrt[3]{4}}x - 2(t - \frac{1}{2})$$

となり、

$$\Delta = \text{const} \cdot t(t-1), \quad j = \frac{\text{const}}{t(t-1)}$$

から、 $t = 0, 1, \infty$  での fiber はそれぞれ  $I_1, I_1, II^*$  型となる。

ロ) の場合、

$$\Delta = \text{const} \cdot t(t-1), \quad j = \text{const} \cdot \frac{(16t^2 - 16t + 1)^3}{t(t-1)}$$

から、 $t = 0, 1, \infty$  での fiber はそれぞれ  $I_1, I_1, I_4^*$  型となる。

また、ロ) のとき  $\deg(f) = 2, \deg(g) = 3, \deg(h) = 2$  ゆえ、 $\{f, g, h\}$  は位数 1 の DS-triple である。実際、例 1.13 の  $f(t), g(t), h(t)$  に変数変換  $t' = -\frac{\sqrt{3}}{4}(t - \frac{1}{2})$  を施したものは定数倍を除き上で求めたものに一致する。

$N = 4$  のときは Herfurtner により分類されている [13]。これを上述の方法で再証明することはよい演習問題である。 $j \neq \text{定数}$  かつ (red-1) をみたく  $S = S_{f,g}$  は  $2\chi + 2 \leq N = 4$  より、このときも  $\chi = 1$ 、即ち  $S_{f,g}$  は有理楕円曲面のときを考えればよい。

$N \geq 5$  の場合については未解決の問題である。  $N = 5$  又は  $6$  のとき, 上と同様の意味で  $S_{f,g}$  が  $\chi \leq 2$ , 即ち有理楕円曲面と  $K3$  曲面の場合を考える必要がある。

今までのとおり,  $N$  は楕円曲面  $S_{f,g}$  の特異 fiber の個数を表すとする。 以前紹介した次の定理を remark しておく。

定理 5.1 楕円曲面  $S$  が条件「(red-1) かつ  $j \neq \text{const}$ 」 (または (ss-1)) を満たすとき,

$$2\chi \leq \begin{cases} N - 2 & N : \text{偶数} \\ N - 1 & N : \text{奇数} \end{cases}$$

が成立する。

以下, 上式で等号の成立する場合を考える。 まず  $N = 2\chi + 1$  のときは (ss) とはなり得ない。 このときは  $\infty$  に semi-stable でないファイバーがあるととしてよい。

定理 5.2 楕円曲面  $S \rightarrow \mathbb{P}^1$  の全ての fiber が semi-stable のとき (i.e. (ss) を満たすとき),

$$N \geq 2\chi + 2$$

が成立する。

定理 5.3  $\chi$  を任意に固定する。 このとき,

$$\{S \mid S \text{ は (ss) で, } N = 2\chi + 2 \text{ 個の特異 fiber をもつ}\} / \cong_{\text{isom}}$$

は有限集合となる。<sup>4</sup>

これは abc-extreme トリプルの有限性に対応している。

同様に, 次のことがいえる:

定理 5.4  $\chi$  を任意に固定する。 このとき,

$$\{S \mid S \text{ は (ss-1) で, } N = 2\chi + 1 \text{ 個の特異 fiber をもつ}\} / \cong_{\text{isom}}$$

は有限集合となる。<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>後記 (I)

### 例 5.5

- $\chi = 1, N = 3$  で (ss-1) の例:  $\{f, g, h\}$  を位数 1 の DS-triple とすると,  $S_{f,g}$  の各 fiber の type は  $I_1, I_1, I_4^*$  である.
- $\chi = 1, N = 4$  で (ss) の例:  $\{f, g, h\}$  を位数 2 の DS-triple とすると,  $S_{f,g}$  の各 fiber の type は  $I_1, I_1, I_1, I_9$  である.
- $\chi = 2, N = 5$  で (ss-1) の例:  $\{f, g, h\}$  を位数 3 の DS-triple とすると,  $S_{f,g}$  の fiber の type は  $I_1$  が 4 個と  $I_{14}^*$  が 1 個である.
- $\chi = 2, N = 6$  で (ss) の例:  $\{f, g, h\}$  が位数 4 の DS-triple のとき,  $S_{f,g}$  の fiber の type は  $I_1$  が 5 個と  $I_{19}$  が 1 個である.

## 5.2 DS-triple と楕円曲面

位数  $m$  の DS-triple とは  $f^3 - g^2 = h$  を満たす triplet  $\{f, g, h\}$  であって,  $\deg(f) = 2m, \deg(g) = 3m, \deg(h) = m + 1$  を満たすもののことであった.

定理 5.6  $m$  を 1 以上の整数とする.  $f^3 - g^2 = h$  を満たす triplet  $\{f, g, h\}$  に対し次の条件は同値である.

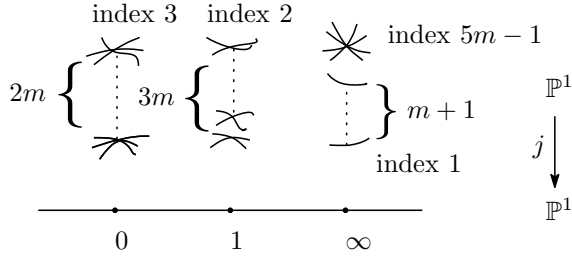
- (i)  $\{f, g, h\}$  は位数  $m$  の DS-triple.
- (ii)  $S_{f,g}$  は  $\chi(S) = [\frac{m+1}{2}]$  を満たし,  $t = \infty$  において maximal singular fiber

$$\begin{cases} I_{5m-1} & m : \text{even} \\ I_{5m-1}^* & m : \text{odd} \end{cases}$$

を持つ. 他のファイバーは必然的に  $I_1$  型 ( $m+1$  個) となる. ここで maximal というのは,  $\chi(S) = [\frac{m+1}{2}]$  を満たす楕円曲面の可約ファイバーの既約成分の個数がとりうる最大値 ( $5m-1$ ) をとることを意味する.

- (iii)  $\deg(h) = m + 1$  かつ,  $P = (f, g) \in \mathcal{E}_h(k[t])$  は maximum possible height  $\langle P, P \rangle = 2m$  を有する整点である.

- (iv)  $j = \frac{f^3}{h} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  は  $\{0, 1, \infty\}$  以外の点で分岐しない degree  $6m$  の分岐被覆であり, それぞれ,  $j^{-1}(0)$  の  $2m$  個の点で分岐指数 3,  $j^{-1}(1)$  の  $3m$  個の点で分岐指数 2,  $j^{-1}(\infty)$  の 1 個の点で分岐指数  $5m-1$ , そのほかの点で 1 となっている.



また,  $DS\text{-triple } \{f, g, h\}$  を与えることは次のいずれかを与えることにも同値である.

(v) 下の  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}_j^1$  の基本群の置換表現  $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}) \rightarrow \mathfrak{S}_{6m}$

$$\ell_0 \mapsto (3)^{2m}$$

$$\ell_1 \mapsto (2)^{3m}$$

$$\ell_\infty \mapsto (5m-1)(1)^{m+1}$$

において, その像は *transitive subgroup* を生成する. ここで  $\ell_0, \ell_1, \ell_\infty$  はそれぞれ  $0, 1, \infty$  の周りの正に向き付けられたループとし,  $(n)^k$  は長さ  $n$  の巡回置換  $k$  個の積を表すものとする.

(vi) 上の  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}_t^1$  の基本群のモノドロミー表現  $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  ( $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}, \infty\}$  の *fiber*) において  $\alpha_i$  のまわりのループの像を  $\gamma_i$ ,  $\infty$  のまわりのループの像を  $\gamma_\infty$  とするとき,  $\gamma_i, \gamma_\infty$  はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (-1)^m \begin{pmatrix} 1 & 5m-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

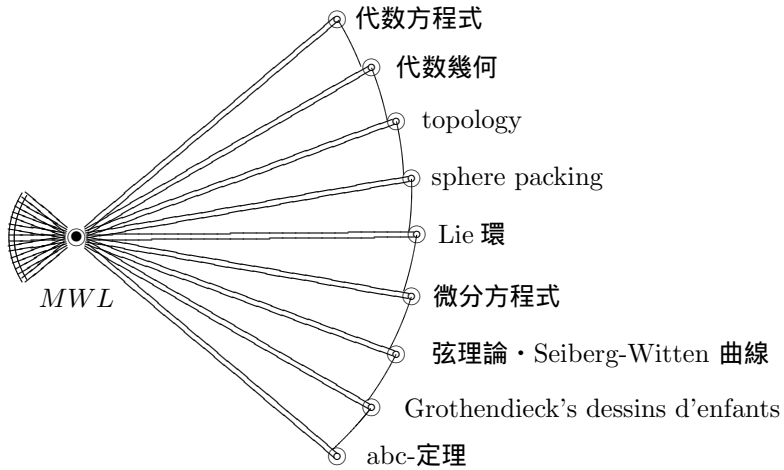
に共役である. また, 表現の像  $\Gamma$  は  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  の *torsion-free* 部分群となる.

任意の  $DS\text{-triple } \{f, g, h\}$  に対して,  $S_{f,g}$  は (vi) の  $\Gamma$  に付随する elliptic modular surface となる. 以上については文献 [42], [44] を参照されたい.



### 5.3 Mordell-Weil lattice の general scope

Mordell-Weil lattice (MWL) は、代数・幾何等の諸分野の一つの接点となる扇の要のような存在である。



#### General scope of MWL

	楕円曲線	種数 $g$ の曲線の Jacobian variety	一般の abelian variety
geometric case	$E/k(C) \leftrightarrow$ 楕円曲面 $\Phi: S \rightarrow C$	$\Gamma/k(C) \leftrightarrow$ fibration をもつ代数曲面, $J_\Gamma$	時 期 尚 早 ?
arithmetic case	$E/K,$ $[K:\mathbb{Q}] < \infty$	$\Gamma/K,$ $J_\Gamma$	

我々もつぱら geometric な場合を考えてきたのであるが、それは arithmetic な場合の、(より単純化された) モデルケースを与える。たとえば、楕円曲面の

理論は、 $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線  $E$  に対応する “arithmetic surface” を考える際に意味を持つであろう。

この表の「楕円曲面  $\Phi: S \rightarrow C$ 」の部分についてより詳しく見ると、

$genus(C)$	
0	$S \rightarrow \mathbb{P}^1$
1	$S \rightarrow B, B$ は楕円曲線
$\vdots$	

となっている。

$C$  の種数が 0, 即ち「 $S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 」の部分については

$\chi = 1$	有理楕円曲面	非常によく分かっている
$\chi = 2$	elliptic $K3$ surface	部分的に分かりつつある
$\chi = 3$		
$\vdots$		

と詳しく見ることができる。 $\chi \geq 3$  の場合はまだあまり知られていない。このノートの第 5 節や [46] はその場合に当たる。

さらに、 $\chi = 1$  については、ルート格子  $E_8$  によって統制された非常に豊かな数学的内容がある。分類については第 3.4 節で述べたが、その個々の場合、とくに  $r = 8, 7, 6$  については、 $E_r$  型代数方程式論の方法により、詳細な研究結果がある。たとえば [34], [36]。

複素数体上の有理楕円曲面の場合  $NS(S) = H^2(S, \mathbb{Z})$  が成立していたが、elliptic  $K3$  surface では  $NS(S) \subset H^2(S, \mathbb{Z})$  の直交補空間  $Trans(S)$  は階数 2 以上の格子となる。 $X$  上の超越サイクルのなす格子である。超越サイクルの存在 (あるいは周期の存在) が、 $K3$  の研究を、有理楕円曲面の場合に比べて困難にしている。

$K3$  surface について今一番面白いと思うものは次の予想である。

予想 5.7 (Shafarevich [30])  $\mathbb{Q}$  上の  $K3$  surface  $X$  に対して  $NS(X \otimes \mathbb{C})$  のタイプは同型を除いて有限個である。<sup>5</sup>

<sup>5</sup>後記 (III)

$\rho = 20$  のときこの予想は正しい。もう少し強く、有限次代数体  $K$  で  $[K : \mathbb{Q}] \leq$  一定 のものに対し、 $\{X/K \mid \rho(X) = 20\} / \cong_{\text{isom.}}$  が有限集合であることが [30] で示されている。

もう一つの面白い話として次のようなものがある。  $X$  を有限体  $\mathbb{F}_p$  上の曲面とすると、その zeta 関数の主要部

$$P_2(X/\mathbb{F}_p, u) = 1 + \cdots = \prod_{i=1}^{b_2} (1 - \alpha_i u) \in \mathbb{Z}[u]$$

は関数等式

$$P_2\left(\frac{1}{p^2 u}\right) = \pm P_2(u) / (pu)^{b_2}$$

を満たす ( $b_2 = 22$ ).  $X$  が abelian variety のときこの符号は  $+$  となるが、これが  $-$  となる例は存在するだろうか。<sup>6</sup>

上のはじめの表の「 $S \rightarrow B$ ,  $B$  は楕円曲線」の場合、 $n$  倍写像  $B^{(n)} \rightarrow B$  を考え  $E/k(B) \subset k(B^{(n)}) \subset \cdots$  とするときの rank の挙動などは面白いと思われる。

底が曲線でないもののお話としては、multi-dimensional base 上の elliptic fibration を考えることにより、Néron の結果を改良した

$$\text{rk}(J(k(t))) \geq 4g + 7$$

を満たす例を構成したことを挙げておく [40]。この例は寺杉氏との共著 [47] により改良されている。

---

<sup>6</sup>ある。後記 (III) にいう微妙なちがひ。

## 後記：その後の進展

講義の時点 (2005) から 3 年を経過したいま、講義で取り上げたいいくつかの話題についてのその後の発展を記し、補足としたい。

- (I) 定理 5.1 の等号を満たす楕円曲面について
- (II) Davenport の不等式の正標数での反例
- (III)  $K3$  曲面のピカル数と楕円曲線のランクについて

### (I) 定理 5.1 の等号を満たす楕円曲面について

定理 5.3, 5.4 で述べた結果を精密化して、次の定理を得る：

定理 ([46] 参照) 任意の正整数  $\chi$  に対し、

- (i)  $\mathbb{P}^1$  上の *semistable* な楕円曲面で算術種数  $\chi$  をもち、特異ファイバーの個数が最小  $N = 2\chi + 2$  となるものが存在する。
- (ii) そのような楕円曲面の同型類は有限個である。
- (iii) 各同型類は、代数体上に定義されるものを含む。
- (iv) これらの楕円曲面は *extremal* すなわち  $r = 0$  かつ  $\rho = h^{1,1}$  を満たす。

これにより、Beauville [2] や Miranda-Persson [23] の  $\chi = 1$  および  $\chi = 2$  についての結果が、任意の算術種数  $\chi$  の場合に拡張される。

証明の idea は、定理 5.1 の等号の場合に対応する楕円曲面を  $S = S_{f,g}$  とすると、

$$\deg(f) = 2(N_0(h) - 1), \quad \deg(g) = 3(N_0(h) - 1)$$

となること (すなわち、 $\{f^3, g^2, h\}$  が定義 1.10 の意味で abc-extreme となること) に注意して、Belyĭ の定理を用いる。

なお、(i) の存在については、(1.2 あるいは 1.3 節で述べた) DS-triples の存在から従うが、さらに次のように具体例を与えることもできる (M. Schütt の注意)。たとえば、 $t = 0, 1, \infty$  において 3 個の特異ファイバー  $I_1, I_1, I_4^*$  をもつ有理楕円曲面 ([OS.64]) をとり、底変換  $t = u^m$  により得られる  $\mathbb{P}_u^1$  上の楕円曲面  $S$  を考える。与えられた  $\chi$  に対し、 $m = 2\chi$  ととると、 $S$  は  $u^m = 1$  において  $m$  個の  $I_1$ 、 $u = 0$  において  $I_m$ 、 $u = \infty$  において  $I_{4m}$ 、のタイプの特異

ファイバーをもつ. ゆえにこの楕円曲面は semistable で,  $N = m + 2 = 2\chi + 2$  個の特異ファイバーをもち, オイラー数は  $6m$ , したがってその算術種数は  $m/2 = \chi$  に等しい.

上の定理と同様にして, 次も成立する:

定理 任意の正整数  $\chi$  に対し,

- (i)  $\mathbb{P}^1$  上の一つのファイバーを除けば semistable な楕円曲面で算術種数  $\chi$  をもち, 特異ファイバーの個数が最小  $N = 2\chi + 1$  となるものが存在する.
- (ii), (iii), (iv) は上と同じ.

## (II) Davenport の不等式の正標数での反例

東大での集中講義の翌年 (2006), ミラノ大学で 3ヶ月講義する機会があった. 博士コースの学生と若手研究者たちに「有理曲面と  $K3$  曲面の楕円ファイブレーション」をテーマにして話したが, なかなか充実した時間だった. 参加者のひとり M. Schütt がある日, Davenport の不等式の反例

$$\deg(f) = 2m, \quad \deg(g) = 3m, \quad \deg(h) \leq m \quad (h := f^3 - g^2 \neq 0)$$

が任意の正標数  $p > 3$  に対し構成できる, といってきた. 彼はそれ以前に,  $m \leq 4$  のとき (つまり  $K3$  の範囲までは) 反例は無いことを証明していた.

構成法は, 上記 (I) の存在でふれたのと似た idea である.  $p = 5$  で例示しよう.

まず,  $t = 0, 1, \infty$  において 特異ファイバー  $\text{III}^*, \text{II}, \text{I}_1$  をもつ有理楕円曲面  $S_0$  をとる: たとえば

$$f = t^3(t-1), \quad g = t^5(t-1), \quad h = -t^9(t-1)^2$$

として,  $S_0 = S_{f,g}$ . いま  $p = 5, q = p^2 = 25$  において, 純非分離な底変換  $t = u^q$  により得られる  $\mathbb{P}_u^1$  上の楕円曲面  $S_1$  を考える. すなわち,  $\{f, g\}$  を  $\{f^q, g^q\}$  で置き換え, 無駄のない表示にする:

$$f_1 = t^3(t-1)^9, \quad g_1 = t^{17}(t-1)$$

$S_1$  から twist して ( $t = 0$  と  $\infty$  の入れ換え)

$$f_2 = t(t-1)^9, \quad g_2 = t^{14}(t-1)$$

とすると,

$$[t(t-1)^9]^3 - [t^{14}(t-1)]^2 \equiv t^3(t-1)^2 \pmod{5}$$

これは,  $m = 5$  についての反例を与える.

### (III) $K3$ 曲面のピカル数と楕円曲線のランクについて

複素数体上の  $K3$  曲面のピカル数は,  $\rho = 1, 2, \dots, 20$  ( $h^{1,1} = 20$ ) の範囲にある全ての値をとることが知られている.  $K3$  の Torelli の定理の帰結である. 定理 3.2 より, 楕円曲面のピカル数は

$$\rho = r + 2 + \sum_v (m_v - 1)$$

( $r$  はモデル・ヴェイユ ランク,  $m_v$  は可約ファイバーの既約成分の個数) に等しい. これから, 楕円  $K3$  曲面のランクは  $r = 0, 1, 2, \dots, 18$  の範囲にあるが, そのすべての値が生ずることも知られている (D. Cox).

さて, ピカル数が最大  $\rho = 20$  となる  $K3$  曲面は (歴史的理由から) “singular” (特異  $K3$  曲面) とよばれる. 特異  $K3$  曲面  $X$  に対し, その超越的サイクルの格子  $T_X$  ( $\text{NS}(X) \subset H^2(X, \mathbb{Z})$  の直交補空間) はランク 2 の正定値な偶格子になり, 自然な向き付け (orientation) をもつ. 対応  $X \rightarrow T_X$  は, 特異  $K3$  曲面の同型類の集合から 2 次の正定値対称行列の  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ -同値類の集合への 1 : 1 対応を与える (猪瀬・塩田 [14]). とくに, 特異  $K3$  曲面は, 楕円曲線における CM (虚数乗法) 型のものと同じように振舞い, 可算無限個あり, 有限次代数体上に定義される. さらに両者にはより密接な関係があることが知られている.

楕円  $K3$  曲面が最大ランク  $r = 18$  をもつような  $K3$  は, 特異  $K3$  曲面に限る. 逆に, 特異  $K3$  曲面  $S$  が与えられたとき, その上の楕円ファイブレーション  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  が  $r = 18$  になる条件は可約なファイバーをもたないことである. そのような組  $\{S, \Phi\}$  は (可算無限個) 存在する. 1 例をあげると :

$$E : y^2 = x^3 + \left(t^5 - \frac{1}{t^5} - 11\right).$$

このランク 18 の  $E(\mathbb{C}(t))$  の最小分解体 (その生成元が実現される最小の定義体) は

$$\mathbb{Q}(\omega, \zeta_5, \sqrt[3]{10})$$

である (ここに  $\omega, \zeta_5$  は 1 の原始 3 乗根, 5 乗根) [45].

一般に楕円曲線  $E/\mathbb{Q}(t)$  に対し,  $\mathbb{Q}(t)$ -有理点の群  $E(\mathbb{Q}(t))$  を考えると, そのランクはもちろん  $E(\mathbb{C}(t))$  のランク以下である. とくに  $K3$  曲面から生ずる  $E/\mathbb{Q}(t)$  に対しては, そのランクは 18 以下である.

私事を述べて恐縮だが, かつて私は上記のランクは  $< 18$  である, と主張したことがある. その理由は, 有理数体上定義される  $K3$  曲面の  $\mathbb{Q}$ -ピカル数 (すなわち,  $\text{NS}(S/\mathbb{Q})$  のランク) は  $< 20$  である, と考えたからである [38]. ところが 10 年ほど経ったころ, 当時ドイツのハノーバー大学の学生だった M. Schütt から,  $K3$  曲面の  $\mathbb{Q}$ -ピカル数は  $= 20$  となりうるのでは, と指摘された. しかも彼は, 私の別の論文 [42] に出てくる  $K3$  がその例を与える, という. 恥ずかしい次第であるが, 訂正文を出した [43]. ミスの原因は,  $K3$  とアーベル曲面のきわめて微妙な違いを見逃したことにあった.

しかし, この頃から  $\mathbb{Q}$  上 (あるいは代数体上) 定義された  $K3$  曲面に興味をもつ人達が増えたようである. (一つの背景として, A. Wiles の画期的な仕事の後, 楕円曲線から  $K3$  曲面や他の代数多様体に目を移す動きがあったのかもしれない.) そして最近この方向で, Elkies [9] によって著しい進展があったことを記して, このノートを閉じることにしよう.

Elkies は,  $K3$  曲面から生ずる楕円曲線  $E/\mathbb{Q}(t)$  に対して, その最大ランクは  $r = 17$  に等しいことを示し, またそのような  $E$  の定義方程式を具体的に与えた. 証明の方法は, まず  $\mathbb{Q}$  上定義され  $\mathbb{Q}$ -ピカル数が 20 の特異  $K3$  曲面については,  $\text{NS}$  の判別式が 163 (= 類数 1 の虚 2 次体の判別式の最大値) で抑えられること, これから  $r \neq 18$  を導く. 他方  $r = 17$  の存在を  $K3$  の moduli 空間内の modular curve を用いて構成する.

さらに応用として,  $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線のランクについて  $r = 28$  (正確にはそれ以上) が得られることを示し, 記録を大幅に更新した. これらの見事な結果は, 2007 年 8 月末名古屋大学で行われた研究集会とそれに続く慶応大学でのセミナー (金銅教授および小木曾教授主催) で報告された. [9] を参照されたい.

もう一つ, Schütt からの私信によると, 彼と Elkies により,  $\mathbb{Q}$  上の特異  $K3$

曲面の分類が最近完成された, とのことである.

おまけにもう一つ, 48 ページ末で述べたランク 68 の例は, 現在でも記録が更新されていない. ごく最近, この楕円曲線  $y^2 = x^3 + t^{360} + 1$  のモデル・ヴェイユ格子の構造が, 碓井 [53] により完全に決定された. たとえば, 格子の  $\det = 2^{136}3^{102}5^{40}$ .

(2008 年 4 月 18 日)



## 参考文献

- [1] A. BAKER, J. COATES, Integer points on curves of genus 1, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **67** (1970) 595–602.
- [2] A. BEAUVILLE, Les familles stables de courbes elliptiques sur  $\mathbb{P}^1$  admettant quatre fibres singulières, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **294** (1982) no.19, 657–660.
- [3] G.V. BELYĬ, On Galois extensions of a maximal cyclotomic field, *Math. USSR Izvestija* **14** (1980) no.2, 247–256.
- [4] B.J. BIRCH, S. CHOWLA, M. HALL, A. SCHINZEL, On the difference  $x^3 - y^2$ , *Norske Vid. Selsk. Forh.* (Trondheim) **38** (1965) 65–69.
- [5] J.W.S. CASSELS, Lectures on Elliptic Curves, *London Mathematical Society Student Texts* **24**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1991).
- [6] W.L. CHOW, Abelian varieties over function fields, *Trans. Amer. Math. Soc.* **78** (1955) 253–275.
- [7] J.H. CONWAY, N.J.A. SLOANE, Sphere Packings, Lattices and Groups, *Springer-Verlag*, New York, 2nd ed.(1993); 3rd ed.(1999).
- [8] H. DAVENPORT, On  $f^3(t) - g^2(t)$ , *Norske Vid. Selsk. Forh.* (Trondheim) **38** (1965) 86–87.
- [9] N.D. ELKIES, Elliptic surfaces and curves of high rank, Transparency texts and diagrams, *Seminar at Keio Univ.* Sept. (2007).
- [10] G. FALTINGS, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. *Invent. Math.* **73** (3) (1983) 349–366.
- [11] D. GOLDFELD, Modular forms, elliptic curves and the ABC-Conjecture, in *A Panorama in Number Theory or the view from Baker's garden* (Zürich 1999), 128–147, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2002).

- [12] M. HALL, The Diophantine equation  $x^3 - y^2 = k$ , in *Computers in Number Theory* 173–198, *Academic Press* (1971).
- [13] S. HERFURTNER, Elliptic surfaces with four singular fibres, *Math. Ann.* **291** (1991) no.2, 319–342.
- [14] H. INOSE, T. SHIODA, On singular  $K3$  surfaces, in *Complex Analysis and Algebraic Geometry (dedicated to Kodaira)* 119–136, *Iwanami Shoten*, Tokyo (1977).
- [15] K. KODAIRA, On compact analytic surfaces, in *Analytic functions* 121–135, *Princeton Univ. Press*, Princeton, N.J. (1960).
- [16] K. KODAIRA, On compact analytic surfaces, II, *Ann. of Math. (2)* **77** (1963) 563–626.
- [17] K. KODAIRA On compact analytic surfaces, III, *Ann. of Math. (2)* **78** (1963) 1–40.
- [18] S. LANG, Fundamentals of Diophantine geometry, *Springer-Verlag*, New York (1983).
- [19] S. LANG, Old and new conjectured diophantine inequalities, *Bull. AMS* **23** (1990) 37–75.
- [20] S.K. LANDO, A.K. ZVONKIN, Graphs on surfaces and their applications, *Encyclopedia of mathematical sciences, Low-dimensional topology II*, *Springer-Verlag*, Berlin (2004).
- [21] S. LANG, A. NÉRON, Rational points of abelian varieties over function fields, *Amer. J. Math.* **81** (1959) 95–118.
- [22] M. LEVIN, On the group of rational points on elliptic curves over function fields, *Amer. J. Math.* **90** (1968) 456–462.
- [23] R. MIRANDA, U. PERSSON, Configurations of  $I_n$  fibers on elliptic  $K3$  surfaces, *Math. Z.* **201** (1989) no.3, 339–361.

- [24] L.J. MORDELL, On the rational solutions of the indeterminate equations of the third and fourth degrees, *Proc. Camb. Philos. Soc.* **21** (1922) 179–192.
- [25] A. NÉRON, Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, *Publ. Math. I.H.E.S.* **21** (1964).
- [26] K. OGUISO, T. SHIODA, The Mordell-Weil lattice of a rational elliptic surface, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **40** (1991) 83–99.
- [27] U. SCHMICKLER-HIRZEBRUCH, Elliptische Flächen über  $\mathbb{P}_1\mathbb{C}$  mit drei Ausnahmefasern und die Hypergeometrische Differentialgleichung, *Diplomarbeit, Univ. Bonn* (1978).
- [28] I.R. SHAFAREVICH, Algebraic number fields, in *Proc. Internat. Congr. Mathematicians* (Stockholm 1962), *Inst. Mittag-Leffler, Djursholm* (1963) 163–176.
- [29] I.R. SHAFAREVICH, Lectures on minimal models and birational transformations of two dimensional schemes, *Notes by C. P. Ramanujam, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics*, No. 37, *Tata Institute of Fundamental Research, Bombay* (1966).
- [30] I.R. SHAFAREVICH, On the arithmetic of singular  $K3$ -surfaces, in *Algebra and analysis* (Kazan, 1994), 103–108, *de Gruyter, Berlin* (1996).
- [31] I.R. SHAFAREVICH, J. TATE, The rank of elliptic curves, (Russian) *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **175** (1967) 770–773.
- [32] T. SHIODA, On elliptic modular surfaces, *J. Math. Soc. Japan* **24** (1972) 20–59.
- [33] T. SHIODA, An explicit algorithm for computing the Picard number of certain algebraic surfaces, *Amer. J. Math.* **108** (1986) no. 2, 415–432.

- [34] T. SHIODA, On the Mordell-Weil lattices, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **39** (1990) 211–240.
- [35] T. SHIODA, Mordell-Weil lattices and sphere packings, *Amer. J. Math.* **113** (1991) no. 5, 931–948.
- [36] T. SHIODA, Construction of elliptic curves with high rank via the invariants of the Weyl groups, *J. Math. Soc. Japan* **43** (1991) 673–719.
- [37] 塩田徹治, Mordell-Weil Lattice の理論とその応用, 東京大学数理科学セミナーノート (1993).
- [38] T. SHIODA, On the rank of elliptic curves over  $\mathbb{Q}(t)$  arising from K3 surfaces, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **43** (1994) 117–120.
- [39] T. SHIODA, Mordell-Weil lattices for higher genus fibration over a curve, in *New trends in algebraic geometry* (Warwick, 1996) 359–373, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **264**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1999).
- [40] T. SHIODA, Constructing curves with high rank via symmetry, *Amer. J. Math.* **120** (1998) 551–566.
- [41] T. SHIODA, Integral points and Mordell-Weil lattices, in *A Panorama in Number Theory or the view from Baker’s garden* 185–193, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2002).
- [42] T. SHIODA, The elliptic K3 surfaces with a maximal singular fibre, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **337** (2003) no. 7, 461–466.
- [43] T. SHIODA, On K3 surfaces defined over  $\mathbb{Q}$ , Correction to: “On the rank of elliptic curves over  $\mathbb{Q}(t)$  arising from K3 surfaces” [*Comment. Math. Univ. St. Pauli* **43** (1994), no. 1, 117–120], *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **54**, 87–89 (2005).
- [44] T. SHIODA, Elliptic surfaces and Davenport-Stothers triples, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **54** (2005) 49–68.

- [45] T. SHIODA, The Mordell-Weil lattice of  $y^2 = x^3 + t^5 - 1/t^5 - 11$ , *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **56** (2007) 45–70.
- [46] T. SHIODA, The abc-theorem, Davenport’s inequality and elliptic surfaces, *Proc. Japan Acad. Ser. A*, (2008) 51–56.
- [47] T. SHIODA, T. TERASOMA, Existence of simple Jacobian varieties of genus  $g$  with rank at least  $4g + 5$ , *Amer. J. Math.* **121** (1999) 65–72.
- [48] J. SILVERMAN, The arithmetic of elliptic curves, *Graduate Texts in Mathematics* **106** Springer-Verlag, New York (1986).
- [49] J. SILVERMAN, Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves, *Graduate Texts in Mathematics* **151** Springer-Verlag, New York (1994).
- [50] C.L. SIEGEL, Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, *Abh. Preuss. Akad. Wiss.* **1** (1929), in *Collected Works* 66–68, Springer-Verlag, Berlin (1966).
- [51] W.W. STOTHERS, Polynomial identities and Hauptmoduln, *Quart. J. Math. Oxford* (2) **32** (1981) 349–370.
- [52] J. TATE, Algorithm for determining the type of a singular fiber in an elliptic pencil, in *Modular functions of one variable, IV (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, 1972)* 33–52, *Lecture Notes in Math.*, Vol. 476, Springer, Berlin (1975).
- [53] H. USUI, On the Mordell-Weil lattice of the elliptic curve  $y^2 = x^3 + t^m + 1$ , I, II, III, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **49** (2000) 71–78; **50** (2001) 65–87; **55** (2006) 173–194; IV (to appear).
- [54] A. WEIL, Foundations of Algebraic Geometry, *American Mathematical Society Colloquium Publications* vol. 29, *American Mathematical Society*, New York (1946); 2nd ed.(1962).

- [55] A. WEIL, Variétés abéliennes et courbes algébriques, *Actualités Sci. Ind.*, no.1064 = *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg* **8** (1946). Hermann & Cie., Paris, (1948).
- [56] A. WEIL, Number of solutions of equations over finite fields, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949) 497–508.
- [57] A. WEIL, Variétés abéliennes, *Algèbre et théorie des nombres, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique*, no. 24, 125–127, *Centre National de la Recherche Scientifique*, Paris (1950).