簡約リー群の表現と冪零軌道

山下 博 述
阿部 紀行 記

はじめに

この講義録は，2005 年 12 月 12 日から 16 日にかけて，東京大学大学院数理科学研究科において行った「簡約リー群の表現と冪零軌道」についての集中講義の内容をまとめたものである．

この講義では，簡約リー群の無限次元表現について，リー代数上の Harish-Chandra 加群による代数的表現論を中心に解説を行った．とくに，随伴多様体・等方表現（cf. [Vog91]）といった，リー代数の冪零軌道が関わる Harish-Chandra 加群の幾何学的不変量に焦点をあて，エルミート型単純リー群のユニタリ最低ウェイト表現について，これらの幾何学的不変量を記述し，実際に活用してみせることに講義の主眼をおいた．

具体的には，等方表現を用いることによって，一方がコンパクトな簡約デュアルペアに関する Howe 双対性定理に新たなアプローチが得られることを示した．等方表現を経て，Weil 表現に対する Kashiwara-Vergne [KV78] の結果のある部分は，コンパクト群に対する Peter-Weyl の定理に帰着されるのである．さらに，この理論の枠組みで，ケーリー変換を通してユニタリ最低ウェイト表現の一般 Whittaker 模型を明瞭に記述することも可能になる．

なお，本書の内容は概ね初等的であり，第 5 節を除き，学部レベルの代数学（線形代数学，群論，可換環論など）に加え，リー代数・リー群とその表現論の初歩の知識があれば十分理解できるように著されている．とくに冒頭の第 1 節では 3 次元単純リー群 $SU(1,1)$ を例に既約表現の分類を具体的に与えるなど，他分野の研究者や学生の方々も近づきやすいように配慮した．

最後に，この集中講義の講師として招いてくださった大島利雄先生，並びに，織田孝幸先生，松本久義先生，関口英子先生をはじめとして講義に出席いただいたすべて方々にこの場を借りて感謝の意を表したい．とくに，阿部紀行氏は私の拙い手書きのノートを TEX で浄書し，講義録にとりまとめてくださった．その過程で阿部氏や伴克馬氏によって内容が改善されたところもある．厚くお礼を申し上げる．集中講義の際に提示したいくつかの演習問題（なかにはかなり高度な問題が含まれている）の解答は阿部氏によるものである．さらに，等方表現を用いた Howe 双対性定理の新証明

については，同氏の寄与による新知見を含めた共同研究［AbeYam］に結びついた.

平成 19 年 12 月　山下 博

目次

1. $SU(1,1)$ の表現の分類と不変量

1.1. 群の作用と表現

G を群とし，X を集合とする．G が X に**作用する**とは，写像

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

が定義されていて，

(1) $(gg') \cdot x = g \cdot (g' \cdot x)$,
(2) $e \cdot x = x \qquad (e$ は G の単位元$)$

が成り立つことである．G の X への作用が与えられている時，$G \curvearrowright X$ と書く．群の**表現**とは，ベクトル空間への作用であり，$g \in G$ に対し $x \mapsto g \cdot x$ が X の線形変換になっているものである．

G の作用を持つ X と $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V に対し

$$\mathcal{F}(X;V) = \{f : X \to V\}$$

を X 上の V 値関数全体のなすベクトル空間とする．また，V 上の線形変換全体のなすベクトル空間全体を $\mathrm{End}(V)$ で表す．

命題 1.1. $\rho : G \times X \to \mathrm{End}(V)$ に対し

$$(\pi_\rho(g)f)(x) = \rho(g,x)f(g^{-1} \cdot x) \quad (f \in \mathcal{F}(X;V),\ g \in G,\ x \in X)$$

により $\pi_\rho : G \to \mathrm{End}(\mathcal{F}(X;V))$ を定める．この時，$(\pi_\rho, \mathcal{F}(X;V))$ が G の表現を定めることと，ρ が次の二つを満たすことは同値である．

(1) $\rho(gg', x) = \rho(g,x)\rho(g', g^{-1} \cdot x)$.
(2) $\rho(e,x) = \mathrm{id}_V \qquad (\mathrm{id}_V$ は V 上の恒等変換$)$.

この条件を満たす ρ を X 上の V 値 **1-cocycle** という．

証明. まず，$f \in \mathcal{F}(X;V)$，$x \in X$ に対し

$$(\pi_\rho(gg')f)(x) = \rho(gg',x)f((gg')^{-1} \cdot x)$$

及び,

$$\begin{aligned}(\pi_\rho(g)(\pi_\rho(g')f))(x) &= \rho(g,x)(\pi_\rho(g')f)(g^{-1}\cdot x)\\ &= \rho(g,x)\rho(g',g^{-1}\cdot x)f((gg')^{-1}\cdot x)\end{aligned}$$

であるから

$$\pi_\rho(gg') = \pi_\rho(g)\pi_\rho(g') \iff \rho(gg',x) = \rho(g,x)\rho(g',g^{-1}\cdot x).$$

また,

$$(\pi_\rho(e)f)(x) = \rho(e,x)f(x)$$

から

$$\rho(e,x) = \mathrm{id}_V \iff \pi_\rho(e) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(X;V)}.$$

よって，π_ρ が表現であることと ρ が 1-cocycle であることは同値である． （証終）

X の G 軌道への分解に応じ，表現 $\mathcal{F}(X;V)$ も分解する．よって，「既約表現を作る」ということを考えると，G が X に推移的に作用する[*1]場合が基本的である．

従って，以下 G は X に推移的に作用しているとする．また，ρ は X 上の V 値 1-cocycle であるとする．$x_0 \in X$ とすると，G が X に推移的に作用しているので，$X = G\cdot x_0$ が成り立つ．

$$H = Z_G(x_0) = \{h \in G \mid h\cdot x_0 = x_0\} \subset G$$

を x_0 における固定部分群とする．写像 $gH \mapsto g\cdot x_0$ により集合として $G/H \simeq X$ である．

$h \in H$ に対し $\sigma(h) = \rho(h,x_0)$ と定めると,

$$\sigma\colon H \to \mathrm{End}(V)$$

は

$$\sigma(e) = \mathrm{id}_V$$

及び

$$\begin{aligned}\sigma(h_1h_2) = \rho(h_1h_2,x_0) &= \rho(h_1,x_0)\rho(h_2,h_1^{-1}\cdot x_0)\\ &= \rho(h_1,x_0)\rho(h_2,x_0) = \sigma(h_1)\sigma(h_2)\end{aligned}$$

[*1] 任意の $x,y \in X$ に対し $g\cdot x = y$ を満たす $g \in G$ が存在する．

を満たすので，H の V 上の表現を定める．

$f \in \mathcal{F}(X;V)$ に対し
$$\widetilde{f}\colon G \to V$$
を
$$\widetilde{f}(y) = \rho(y^{-1}, x_0) f(y \cdot x_0)$$
と定める．次が成り立つ．

(1) $\widetilde{f}(yh) = \sigma(h)^{-1}\widetilde{f}(y) \quad (y \in G,\ h \in H)$.

$\because$)
$$\begin{aligned}\widetilde{f}(yh) &= \rho((yh)^{-1}, x_0) f(y \cdot x_0)\\ &= \rho(h^{-1}y^{-1}, x_0) f(y \cdot x_0)\\ &= \rho(h^{-1}, x_0)\rho(y^{-1}, h \cdot x_0) f(y \cdot x_0)\\ &= \sigma(h)^{-1}\widetilde{f}(y).\end{aligned}$$

(2) $(\widetilde{\pi_\rho(g) f})(y) = \widetilde{f}(g^{-1}y) \quad (g \in G,\ y \in G)$.

$\because$)
$$\begin{aligned}(\widetilde{\pi_\rho(g) f})(y) &= \rho(y^{-1}, x_0)(\pi_\rho(g) f)(y \cdot x_0)\\ &= \rho(y^{-1}, x_0)\rho(g, y \cdot x_0) f(g^{-1}y \cdot x_0)\\ &= \rho(y^{-1}g, x_0) f(g^{-1}y \cdot x_0)\\ &= \widetilde{f}(g^{-1}y).\end{aligned}$$

ここで,
$$\begin{cases}\mathcal{F}(G;\sigma) = \{\varphi\colon G \to V \mid \varphi(yh) = \sigma(h)^{-1}\varphi(y) \quad (y \in G,\ h \in H)\}\\ (\varpi_\sigma(g)\varphi)(y) = \varphi(g^{-1}y)\end{cases}$$
とおくと，$(\varpi_\sigma, \mathcal{F}(G;\sigma))$ は G の表現となる．この表現を $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ と書き，H の表現 (σ, V) からの**誘導表現**という．

命題 1.2. 対応
$$\begin{array}{ccc}\mathcal{F}(X;V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(G;\sigma)\\ f & \longmapsto & \widetilde{f}\end{array}$$
は表現 $(\pi_\rho, \mathcal{F}(X;V))$ と $(\varpi_\sigma, \mathcal{F}(G;\sigma))$ との間の G-同型を定める．

証明. まず，
$$\mathrm{id}_V = \rho(e, x_0) = \rho(g, x_0)\rho(g^{-1}, g^{-1}\cdot x_0)$$
及び
$$\mathrm{id}_V = \rho(e, g\cdot x_0) = \rho(g^{-1}, g\cdot x_0)\rho(g, x_0)$$
から $\rho(g, x_0)$ は $\mathrm{End}(V)$ において逆元を持つことに注意する．$\varphi \in \mathcal{F}(G;\sigma)$ に対し $\hat{\varphi} \in \mathcal{F}(X;V)$ を
$$\hat{\varphi}(g\cdot x_0) = \rho(g^{-1}, x_0)^{-1}\varphi(g)$$
と定義する．$h \in H$ に対し
$$\begin{aligned}\rho((gh)^{-1}, x_0)^{-1}\varphi(gh) &= \rho(g^{-1}, h\cdot x_0)^{-1}\rho(h^{-1}, x_0)^{-1}\sigma(h)^{-1}\varphi(g)\\ &= \rho(g^{-1}, x_0)^{-1}\varphi(g)\end{aligned}$$
であるから，$\hat{\varphi}$ は well-defined である．$\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ は $f \mapsto \widetilde{f}$ の逆写像を与える．（証終）

1.2. $G = SU(1,1)$ の主系列表現

$g^* = {}^t\overline{g}$ とし，
$$\begin{aligned}G = SU(1,1) &= \left\{ g \in SL(2,\mathbb{C}) \;\middle|\; g^* \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} g = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \right\}\\ &= \left\{ g = \begin{pmatrix}\alpha & \overline{\beta}\\ \beta & \overline{\alpha}\end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}\end{aligned}$$
とおく．G は $\mathbb{T} = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| = 1\}$ に
$$g\cdot\zeta = \frac{\beta + \overline{\alpha}\zeta}{\alpha + \overline{\beta}\zeta} \quad \left(g = \begin{pmatrix}\alpha & \overline{\beta}\\ \beta & \overline{\alpha}\end{pmatrix} \in SU(1,1),\ \zeta \in \mathbb{T} \right)$$
により推移的に作用する．

注意. G の $\mathbb{T}$ への作用 $\circledcirc$ を
$$g \circledcirc \zeta = \frac{\alpha\zeta + \overline{\beta}}{\beta\zeta + \overline{\alpha}}$$
により定義すると，$g\cdot\zeta = \overline{(g \circledcirc \overline{\zeta})}$ が成り立つ．

補題 1.3. $\varepsilon \in \{0,1\}$ 及び $\nu \in \mathbb{C}$ に対し $\rho_{\varepsilon,\nu} : G \times \mathbb{T} \to \mathbb{C} = \mathrm{End}(\mathbb{C})$ を

$$\rho_{\varepsilon,\nu}(g,\zeta) = |\overline{\alpha} - \overline{\beta}\zeta|^{-\nu} \left(\frac{\overline{\alpha} - \overline{\beta}\zeta}{|\overline{\alpha} - \overline{\beta}\zeta|} \right)^{\varepsilon}$$

と定めると，$\rho_{\varepsilon,\nu}$ は $\mathbb{T}$ 上の 1-cocycle となる．従って，$G = SU(1,1)$ の表現

$$(\pi_{\varepsilon,\nu}, \mathcal{F}(\mathbb{T})) = (\pi_{\rho_{\varepsilon,\nu}}, \mathcal{F}(\mathbb{T};\mathbb{C}))$$

を得る.

問題 1.4. 補題 1.3 を証明し，$\pi_{\varepsilon,\nu}$ を誘導表現として実現せよ.

具体的には,

$$\left(\pi_{\varepsilon,\nu} \left(\begin{pmatrix} \alpha & \overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \right) f \right)(\zeta) = \left(\frac{\overline{\alpha} - \overline{\beta}\zeta}{|\overline{\alpha} - \overline{\beta}\zeta|} \right)^{\varepsilon} |\overline{\alpha} - \overline{\beta}\zeta|^{-\nu} f\left(\frac{-\beta + \alpha\zeta}{\overline{\alpha} - \overline{\beta}\zeta} \right)$$

となる．但し，このままでは $SU(1,1)$ の位相が全く反映されていないので，以下では $\mathcal{F}(\mathbb{T})$ を $\mathbb{T}$ 上の 2 乗可積分関数全体のなす Hilbert 空間

$$L^2(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{\mathbb{T}} |f(z)|^2 \, dz < \infty \right\}$$

におきかえたものを考える.

定理 1.5. $\varepsilon \in \{0,1\}$ 及び $\nu \in \mathbb{C}$ に対し

(1) $(\pi_{\varepsilon,\nu}, L^2(\mathbb{T}))$ は $G = SU(1,1)$ の連続な表現を与える．但しここで連続の意味は，写像 $G \times L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$, $(g,f) \mapsto \pi_{\varepsilon,\nu}(g)f$ が連続なことである.

(2) $\mathrm{Re}\,\nu = 1$ の時，$\pi_{\varepsilon,\nu}(g)$ $(g \in G)$ は $L^2(\mathbb{T})$ 上の unitary 作用素となる．つまり，$(\pi_{\varepsilon,\nu}, L^2(\mathbb{T}))$ は G の unitary 表現である.

(2) に関しては，次の測度の変換公式を使えばよい．$\zeta' = g^{-1} \cdot \zeta = e^{\sqrt{-1}\theta'}$, $\zeta = e^{\sqrt{-1}\theta}$ とおくと,

$$\frac{d\zeta'}{d\zeta} = \frac{1}{(\overline{\alpha} - \overline{\beta}\zeta)^2}$$

が成り立つので,

$$d\theta = |d\zeta| = |\overline{\alpha} - \overline{\beta}\zeta|^2 d\theta'$$

が成り立つ．

$\pi_{\varepsilon,\nu}$ ($\varepsilon \in \{0,1\}$, $\nu \in \mathbb{C}$) を G の**主系列表現**という．次の定理は，一般の簡約 Lie 群で成り立つ．

事実（Harish-Chandra, Casselman）． G の任意の「既約（許容）表現」はある主系列表現の閉不変部分空間上実現される．

従って，G の既約表現の分類は主系列表現の既約分解[*2]に帰着される．

1.3. $(\mathfrak{g}, K)$-加群

$$K = G \cap SU(2) = \left\{ k = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \,\middle|\, |\alpha| = 1 \right\} \simeq \mathbb{T}$$

とおく．K は G の極大コンパクト部分群である．$p \in \mathbb{Z}$ に対し $\tau_p(k) = \alpha^p$ とおくと，τ_p は K の 1 次元（従って既約）表現を与える．Fourier 展開から，

$$\begin{cases} L^2(\mathbb{T}) = \widehat{\bigoplus_{p \in \mathbb{Z}}} \mathbb{C}\zeta^p & \text{（Hilbert 空間としての直和）} \\ \pi_{\varepsilon,\nu}(k)\zeta^p = \tau_{2p-\varepsilon}(k)\zeta^p \end{cases}$$

となる．但し，ζ^p は $\zeta \mapsto \zeta^p$ という $\mathbb{T}$ 上の関数である．従って，K 表現として，

$$\pi_{\varepsilon,\nu}|_K \simeq \widehat{\bigoplus_{p \in \mathbb{Z}}} \tau_{2p-\varepsilon}$$

が成り立つ．次に，ζ の Laurant 多項式全体のなす空間

$$L^2(\mathbb{T})_K = \mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}] = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}\zeta^p$$

を考える．$L^2(\mathbb{T})_K$ は $L^2(\mathbb{T})$ の稠密な部分空間である．

(1) $L^2(\mathbb{T})_K$ は K-加群である．

[*2] 組成列を求めること．主系列表現が既約表現の直和に分解されるわけではない．

(2) Lie 環 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}$ を，

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}(G) &= \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid \text{全ての } t \in \mathbb{R} \text{ に対し } \exp(tX) \in G\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{-1}\,\theta & \gamma \\ \overline{\gamma} & -\sqrt{-1}\,\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R},\ \gamma \in \mathbb{C} \right\}, \\ \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &= \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}\, X = 0\}\end{aligned}$$

と定めると，$L^2(\mathbb{T})_K$ は $\mathfrak{g}$-加群となる．但し，$X \in \mathfrak{g}_0$ の作用は

$$Xf = \frac{d}{dt} \pi_{\varepsilon,\nu}(\exp tX) f \Big|_{t=0} \quad (f \in L^2(\mathbb{T})_K,\ X \in \mathfrak{g}_0)$$

で定め，$\mathfrak{g}$ の作用はそれを $\mathbb{C}$-線形にのばすこととする．

(3) $k \in K$, $Z \in \mathfrak{g}$, $f \in L^2(\mathbb{T})_K$ に対し $k \cdot Z \cdot k^{-1} \cdot f = (\mathrm{Ad}(k)Z) \cdot f$ が成り立つ．

この $L^2(\mathbb{T})_K = \mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]$ を表現 $\pi_{\varepsilon,\nu}$ に付随した $(\mathfrak{g}, K)$-加群という．

事実（Harish-Chandra）.

$$\begin{array}{ccc} \{\mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}] \text{ の } (\mathfrak{g}, K)\text{-部分加群}\} & \longrightarrow & \{(\pi_{\varepsilon,\nu}, L^2(\mathbb{T})) \text{ の } G\text{-不変閉部分空間}\} \\ W & \longmapsto & \overline{W} \end{array}$$

は全単射．

従って，主系列の分解は $(\mathfrak{g}, K)$-加群 $\mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]$ の分解に帰せられる．$\mathfrak{g}$ の基底を次のようにとる．

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) &= \mathbb{C}X_+ \oplus \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}X_-, \\ X_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

この時，$[H, X_+] = 2X_+$，$[H, X_-] = -2X_-$，$[X_+, X_-] = H$ が成り立つ．（一般に，複素 Lie 環の部分 Lie 環で $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ と同型なものを，**TDS**（Three-dimensional subalgebra）と呼ぶ．）

命題 1.6. 主系列 $\pi_{\varepsilon,\nu}$ の $(\mathfrak{g}, K)$-加群構造は次のようになる．まず，表現空間 $\mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]$ は

$$\mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}] = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}\zeta^p$$

と表せ，$\mathfrak{g}$ 及び K の作用は

$$\begin{cases} X_+ \cdot \zeta^p = \left(\dfrac{\nu-\varepsilon}{2}+p\right)\zeta^{p+1}, \\[2ex] X_- \cdot \zeta^p = \left(\dfrac{\nu+\varepsilon}{2}-p\right)\zeta^{p-1}, \\[2ex] H \cdot \zeta^p = (2p-\varepsilon)\zeta^p, \\[2ex] k \cdot \zeta^p = \alpha^{2p-\varepsilon}\zeta^p \quad \left(k = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in K\right) \end{cases}$$

となる．

証明（コメント）． X_+, H, X_- の作用は次のようにして計算できる．

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{-1}\,\theta & \gamma \\ \overline{\gamma} & -\sqrt{-1}\,\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R},\ \gamma \in \mathbb{C} \right\} = \mathrm{Lie}(G)$$

に注意する．

$$\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} = iH \in \mathfrak{g}_0 \qquad \begin{aligned} &\exp\left(t\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}\right) \\ &\qquad = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{-1}\,t} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\,t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_0 \qquad \exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{-1}}{2} & -\dfrac{\sqrt{-1}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{-1}}{2} & -\dfrac{\sqrt{-1}}{2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_0 \qquad \begin{aligned} &\exp\left(t\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{-1}}{2} & -\dfrac{\sqrt{-1}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{-1}}{2} & -\dfrac{\sqrt{-1}}{2} \end{pmatrix}\right) \\ &\qquad = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{\sqrt{-1}}{2}t & -\dfrac{\sqrt{-1}}{2}t \\ \dfrac{\sqrt{-1}}{2}t & 1-\dfrac{\sqrt{-1}}{2}t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

に注意して微分の定義に戻れば計算することができる． （証終）

この作用を見ることにより，次がわかる．

命題 1.7. $\nu-\varepsilon\notin 2\mathbb{Z}$ ならば，$(\mathfrak{g},K)$-加群 $\mathbb{C}[\zeta,\zeta^{-1}]$ は既約．よって，$(\pi_{\varepsilon,\nu},L^2(\mathbb{T}))$ は G の既約表現.

証明. W を $\mathbb{C}[\zeta,\zeta^{-1}]$ の不変部分空間とする．$v\in W$ を W の 0 でない元とし，$v=\sum_p c_p\zeta^p$ とする．$W'=\bigoplus_{c_p\neq 0}\mathbb{C}\zeta^p\subset\mathbb{C}[\zeta,\zeta^{-1}]$ とおき，$c_p\neq 0$ なる p に対し射影 $W'\to\mathbb{C}\zeta^p$ を考えると，これは H に関する固有空間への射影であるから，H の多項式で表せる．W は H の作用で閉じているから，$c_p\zeta^p\in W$ である．$\nu-\varepsilon\notin 2\mathbb{Z}$ から，ζ^p は $\mathfrak{g}$ 表現として $\mathbb{C}[\zeta,\zeta^{-1}]$ を生成する．従って $W=\mathbb{C}[\zeta,\zeta^{-1}]$. （証終）

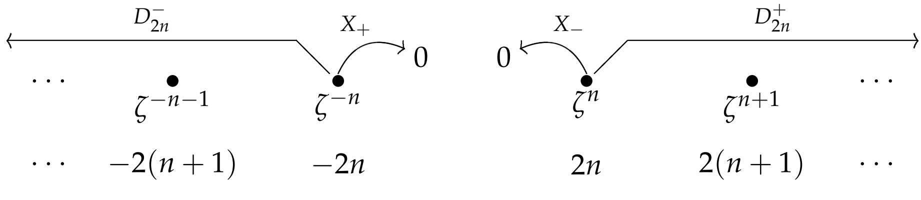
問題 1.8. $\nu-\varepsilon,\nu'-\varepsilon'\notin 2\mathbb{Z}$ とする．この時，$\pi_{\varepsilon,\nu}$ に対応する $(\mathfrak{g},K)$-加群と $\pi_{\varepsilon',\nu'}$ に対応する $(\mathfrak{g},K)$-加群が同型であることは，$\varepsilon'=\varepsilon$ かつ $\nu'\in\{\nu,2-\nu\}$ と同値であることを示せ.

残りは $\nu-\varepsilon\in 2\mathbb{Z}$ の場合である．まず，$\varepsilon=0$ の時を考える．この時，$n\in\mathbb{Z}$ で $\nu=2n$ なるものが存在し，Lie 環の作用は，

$$\begin{cases} X_+\cdot\zeta^p=(n+p)\zeta^{p+1},\\ X_-\cdot\zeta^p=(n-p)\zeta^{p-1},\\ H\cdot\zeta^p=2p\zeta^p \end{cases}$$

と書ける.

(1) $n>0$ のとき.

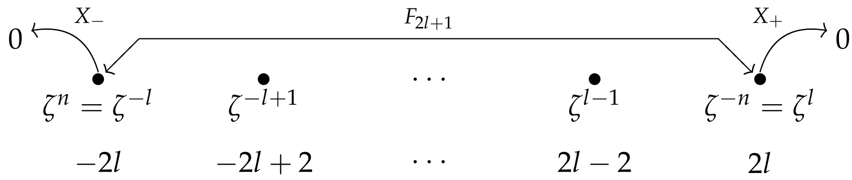


$X_+\cdot\zeta^{-n}=X_-\cdot\zeta^n=0$ であることから，

$$D_{2n}^{\pm}=\bigoplus_{k\geq n}\mathbb{C}\zeta^{\pm k}$$

は既約 $(\mathfrak{g},K)$-部分加群であることがわかる.

(2) $n = -l \leq 0$ のとき.



$X_+ \cdot \zeta^l = X_- \cdot \zeta^{-l} = 0$ であることから,

$$F_{2l+1} = \mathbb{C}\zeta^{-l} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\zeta^l$$

は $2l+1$ 次元既約 $(\mathfrak{g}, K)$-部分加群であることがわかる.

従って, 次の定理を得る.

定理 1.9 **($\varepsilon = 0$)**. **球主系列** $\pi_{0,\nu}$ の $(\mathfrak{g}, K)$-加群 $\mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]$ に対し次が成り立つ.

(1) $\nu \notin 2\mathbb{Z}$ と, $\mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]$ が既約であることは同値.

(2) $\nu = 2n$ $(n > 0)$ の時は, $D^+_{2n}, D^-_{2n} \subset \mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]$ が既約 $(\mathfrak{g}, K)$-部分加群であり,

$$\mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]/(D^+_{2n} \oplus D^-_{2n}) \simeq F_{2n-1}$$

は $2n-1$ 次元既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群である.

(3) $\nu = -2l$ $(l \geq 0)$ の時は, $F_{2l+1} \subset \mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]$ が既約 $(\mathfrak{g}, K)$-部分加群であり,

$$\mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]/F_{2l+1} \simeq D^+_{2(l+1)} \oplus D^-_{2(l+1)}$$

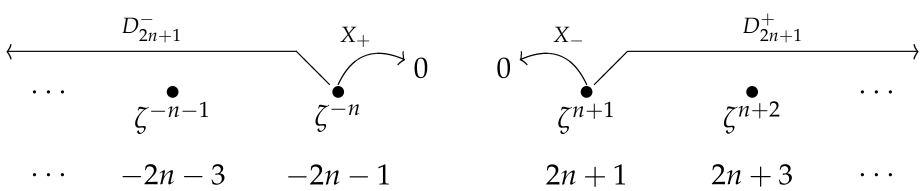
が成り立つ.

次に, $\varepsilon = 1$ とする. $n \in \mathbb{Z}$ で $\nu = 2n+1$ となるものが存在し, Lie 環の作用は,

$$\begin{cases} X_+ \cdot \zeta^p = (n+p)\zeta^{p+1}, \\ X_- \cdot \zeta^p = (n+1-p)\zeta^{p-1}, \\ H \cdot \zeta^p = (2p-1)\zeta^p \end{cases}$$

と書ける.

(1) $n \geq 0$ の時.



$X_+ \cdot \zeta^{-n} = X_- \cdot \zeta^{n+1} = 0$ であることから，

$$\begin{aligned} D^+_{2n+1} &= \mathbb{C}\zeta^{n+1} \oplus \mathbb{C}\zeta^{n+2} \oplus \cdots \\ D^-_{2n+1} &= \mathbb{C}\zeta^{-n} \oplus \mathbb{C}\zeta^{-n-1} \oplus \cdots \end{aligned}$$

は既約 $(\mathfrak{g}, K)$-部分加群であることがわかる．

(2) $n = -l < 0$ の時．

$$\begin{tikzcd}
0 & \zeta^{n+1}=\zeta^{-l+1} \arrow[l, bend right, "X_-"'] & \zeta^{-l+2} & \cdots & \zeta^{l-1} & \zeta^{-n}=\zeta^{l} \arrow[r, bend left, "X_+"] \arrow[llll, leftrightarrow, bend right, "F_{2l}"'] & 0 \\
& -(2l-1) & -(2l-3) & \cdots & 2l-3 & 2l-1 &
\end{tikzcd}$$

$X_- \cdot \zeta^{-l+1} = X_+ \cdot \zeta^{l} = 0$ であることから，

$$F_{2l} = \mathbb{C}\zeta^{-(l-1)} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\zeta^{l}$$

は $2l$ 次元既約 $(\mathfrak{g}, K)$-部分加群であることがわかる．

従って，次の定理を得る．

定理 1.10 ($\varepsilon = 1$). 非球主系列 $\pi_{1,\nu}$ の $(\mathfrak{g}, K)$-加群 $\mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]$ に対し次が成り立つ．

(1) $\nu \notin 2\mathbb{Z} + 1$ と，$\mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]$ が既約であることは同値．

(2) $\nu = 2n + 1$ $(n \geq 0)$ の時は，$D^+_{2n+1}, D^-_{2n+1} \subset \mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]$ が既約 $(\mathfrak{g}, K)$-部分加群であり，

$$\mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]/(D^+_{2n+1} \oplus D^-_{2n+1}) \simeq F_{2n}$$

は $2n$ 次元既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群である．

(3) $\nu = -2l + 1$ $(l > 0)$ の時は，$F_{2l} \subset \mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]$ が既約 $(\mathfrak{g}, K)$-部分加群であり，

$$\mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]/F_{2l} \simeq D^+_{2l+1} \oplus D^-_{2l+1}$$

が成り立つ．

以上から，既約表現 $(\mathfrak{g}, K)$-加群はおおまかに次のように分類できる．

(1) **既約主系列表現** $\pi_{\varepsilon,\nu}$ $(\varepsilon - \nu \notin 2\mathbb{Z})$.

K-type ： $2\mathbb{Z} + \varepsilon$.

(2) **最低 weight 加群** D_n^+ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$.

K-type ： $\{n, n+2, n+4, \ldots\}$.

(3) **最高 weight 加群** D_n^- $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$.

K-type ： $\{\ldots, -(n+4), -(n+2), -n\}$.

(4) **有限次元既約表現** F_l $(l = \dim F_l \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$.

K-type ： $\{-(l-1), -(l-3), \ldots, l-3, l-1\}$.

このおおまかな分類は，この後で定義される**随伴多様体**と対応することになる．

2. $(\mathfrak{g}, K)$-加群の随伴多様体と等方表現

2.1. 簡約 Lie 群とその Lie 代数

$G \subset GL(n, \mathbb{C})$ を閉部分群とする．G が**簡約**（reductive）であるとは，$g \in G$ ならば $g^* = {}^t\bar{g} \in G$ がなりたつことである．例えば，複素または実古典群

$$GL(n,\mathbb{C}), SL(n,\mathbb{C}), Sp(n,\mathbb{C}), O(n,\mathbb{C}),$$
$$U(p,q), SU(p,q), Sp(n,\mathbb{R}), O(p,q)$$

などは簡約な Lie 群の例となる．G の極大コンパクト部分群 K を

$$K = G \cap U(n) = \{g \in G \mid \Theta(g) = g\} \quad (\Theta(g) = (g^*)^{-1})$$

とし，G の Lie 環 $\mathfrak{g}_0$ を

$$\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}(G) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid \text{全ての } t \in \mathbb{R} \text{ に対し } \exp(tX) \in G\}$$

と定義する．G は連結な複素化 $G_{\mathbb{C}}$[*3]を持つと仮定し，$K_{\mathbb{C}}$ を K の $G_{\mathbb{C}}$ での複素化とする．

補題 2.1. $X \in \mathfrak{g}_0$ に対し $\theta(X) = -X^*$ とおく．

（1）θ は $\mathfrak{g}_0$ の対合的自己同型で，

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$$

が成り立つ．ただしここで，

$$\mathfrak{k}_0 = \{X \in \mathfrak{g}_0 \mid \theta(X) = X\} = \mathrm{Lie}(K),$$
$$\mathfrak{p}_0 = \{X \in \mathfrak{g}_0 \mid \theta(X) = -X\}$$

であり，

$$[\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_0] \subset \mathfrak{k}_0,\ [\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0] \subset \mathfrak{p}_0,\ [\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_0] \subset \mathfrak{k}_0$$

が成り立つ．

[*3] 複素 Lie 群 $G_{\mathbb{C}}$ は，$G \subset G_{\mathbb{C}}$ を満たし，かつそこから誘導される $\mathrm{Lie}(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}})$ が同型であるとき，G の複素化と呼ばれる．

(2) K は Ad により $\mathfrak{p}_0$ に作用する．つまり，$X \in \mathfrak{p}_0$，$k \in K$ に対し $\mathrm{Ad}(k)X = kXk^{-1} \in \mathfrak{p}_0$ が成り立つ．

証明. (1) $X \in \mathfrak{g}_0$ ならば，全ての $t \in \mathbb{R}$ に対し $\exp(tX) \in G$．G は Θ に関し閉じているので，$\Theta(\exp(tX)) = \exp(t\theta(X)) \in G$．よって，$\theta(X) \in \mathfrak{g}_0$ である．

また，$X \in \mathfrak{g}_0$ に対し

$$
\begin{aligned}
X \in \mathrm{Lie}(K) &\iff \text{全ての } t \in \mathbb{R} \text{ に対し } \Theta(\exp(tX)) = \exp(tX) \\
&\iff \text{全ての } t \in \mathbb{R} \text{ に対し } \exp(t\theta(X)) = \exp(tX) \\
&\iff \theta(X) = X \\
&\iff X \in \mathfrak{k}_0
\end{aligned}
$$

であるから，$\mathrm{Lie}(K) = \mathfrak{k}_0$．

最後に $X, Y \in \mathfrak{k}_0$ とすると, $\theta([X,Y]) = [\theta(X), \theta(Y)] = [X,Y]$ であるから $[X,Y] \in \mathfrak{k}_0$．よって $[\mathfrak{k}_0, \mathfrak{k}_0] \subset \mathfrak{k}_0$．$[\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0] \subset \mathfrak{p}_0$，$[\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_0] \subset \mathfrak{k}_0$ も同様.

(2) $k \in K$，$X \in \mathfrak{p}_0$ とする．この時，$k^* = k^{-1}$，$X^* = X$ であるから，

$$(kXk^{-1})^* = (k^{-1})^* X^* k^* = kXk^{-1}$$

である．従って $kXk^{-1} \in \mathfrak{p}_0$. (証終)

例 2.2. (1) $G = U(p,q) = \{g \in GL(n,\mathbb{C}) \mid g^* I_{p,q} g = I_{p,q}\}$，$n = p + q$ とする．但し，$I_{p,q} = \mathrm{diag}(\overbrace{1, \ldots, 1}^{p}, \overbrace{-1, \ldots, -1}^{q})$．この時,

$$
\begin{array}{l}
U(p) \times U(q) = K \subset G \subset G_{\mathbb{C}} = GL(n,\mathbb{C}) \\
\qquad\quad \cap \\
GL(p,\mathbb{C}) \times GL(q,\mathbb{C}) = K_{\mathbb{C}}
\end{array}
$$

となる．また,

$$
\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}(G) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \middle| \, A^* = -A,\ C^* = -C,\ B \in M_{p,q}(\mathbb{C}) \right\},
$$
$$
\mathfrak{k}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{p}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \right\}
$$

である.

(2) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ に対し，

$$Sp(n,\mathbb{K})=\{g\in GL(2n,\mathbb{K})\mid {}^tgJg=J\}\quad\left(J=\begin{pmatrix}0&1_n\\-1_n&0\end{pmatrix}\right)$$

とおき，

$$c=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1_n&-\sqrt{-1}\,1_n\\-\sqrt{-1}\,1_n&1_n\end{pmatrix}\in Sp(n,\mathbb{C})\cap U(2n)=:Sp(n)$$

に対し $G=c\,Sp(n,\mathbb{R})c^{-1}$ とおく．この時，

$$\begin{array}{lcl}
G_{\mathbb{C}}\simeq Sp(n,\mathbb{C}) & \supset & G\simeq Sp(n,\mathbb{R})\\
\cup & & \cup\\
K_{\mathbb{C}}\simeq GL(n,\mathbb{C}) & \supset & K=G\cap U(2n)\simeq U(n)\\
=\left\{\begin{pmatrix}g&0\\0&{}^tg^{-1}\end{pmatrix}\middle|\, g\in GL(n,\mathbb{C})\right\} & & =\left\{\begin{pmatrix}u&0\\0&\overline{u}\end{pmatrix}\middle|\, u\in U(n)\right\}
\end{array}$$

となる．また，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_0&=\left\{\begin{pmatrix}Z&W\\\overline{W}&\overline{Z}\end{pmatrix}\middle|\, Z,W\in M_n(\mathbb{C}),\ Z^*=-Z,\ {}^tW=W\right\},\\
\mathfrak{k}_0&=\left\{\begin{pmatrix}Z&0\\0&\overline{Z}\end{pmatrix}\right\},\quad \mathfrak{p}_0=\left\{\begin{pmatrix}0&W\\\overline{W}&0\end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

である．

2.2. $(\mathfrak{g},K)$-加群とその次数化

以下，簡単のため $\mathfrak{g}_0=\mathrm{Lie}(G)$ は半単純（つまり，単純イデアル[*4]の直和）であるとする．$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$，$\mathfrak{k}=\mathfrak{k}_0\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$，$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_0\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ とおく．直和分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ は**複素 Cartan 分解**と呼ばれる．

定義 2.3（$(\mathfrak{g},K)$-加群）． $(\mathfrak{g},K)$-**加群** $\mathbb{X}$ とは，次の条件を全て満たすベクトル空間のことである．

(1) $\mathbb{X}$ は $\mathfrak{g}$-加群である．つまり，Lie 環の間の準同型 $\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(\mathbb{X})$ が与えられている．

[*4] 非自明な部分イデアルを持たないイデアル．

(2) $\mathbb{X}$ は K-加群であり，また全ての $v \in \mathbb{X}$ に対し $\dim\langle K \cdot v \rangle_{\mathbb{C}} < \infty$ を満たす．ここで，$\langle K \cdot v \rangle_{\mathbb{C}}$ は $K \cdot v$ が生成する $\mathbb{X}$ の部分ベクトル空間である．

(3) 全ての $v \in \mathbb{X}$ と $Z \in \mathfrak{k}_0$ に対し

$$\frac{d}{dt} \exp(tZ) \cdot v \Big|_{t=0} = Z \cdot v$$

が成り立つ．但し，左辺の収束は有限次元空間 $\langle K \cdot v \rangle_{\mathbb{C}}$ における通常のノルム位相で考えることにする．

(4) 全ての $v \in \mathbb{X}$，$k \in K$，$Z \in \mathfrak{g}$ に対し $kZk^{-1}v = (\mathrm{Ad}(k)Z)v$ が成り立つ．

注意.

$$\begin{array}{ccc} G \text{ の既約許容表現} & \xrightarrow{K\text{-有限部分}} & \text{既約な } (\mathfrak{g}, K)\text{-加群} \\ \Uparrow & & \\ G \text{ の既約ユニタリ表現} & \xleftrightarrow{1:1} & \text{ユニタリ化可能な既約 } (\mathfrak{g}, K)\text{-加群} \end{array}$$

が成り立つことが知られている．

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g}) / \langle XY - YX - [X, Y] \mid X, Y \in \mathfrak{g} \rangle_{\text{イデアル}}$$

とおく．$U(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の**普遍包絡環**という．ここで $T(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ のテンソル代数である．

$\mathfrak{g}$-加群は $U(\mathfrak{g})$-加群と一対一に対応する．つまり，任意のベクトル空間 $\mathbb{X}$ と Lie 環としての準同型 $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathbb{X})$ に対し次を可換にする $\mathbb{C}$ 代数としての準同型 $U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(\mathbb{X})$ が一意に存在する．

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\forall\text{Lie alg. hom.}"] \arrow[d] & \mathrm{End}(\mathbb{X}) \\ U(\mathfrak{g}) \arrow[ur, dotted, "\exists!" near start, "\text{alg. hom.}"'] & \end{tikzcd} .$$

ここで，$\mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ は自然な写像である．

$$U_n(\mathfrak{g}) = \langle X_1 X_2 \cdots X_k \mid X_1, X_2, \ldots, X_k \in \mathfrak{g},\ k \le n \rangle_{\mathbb{C}} \subset U(\mathfrak{g}) \quad (n = 1, 2, \cdots),$$
$$U_{-1}(\mathfrak{g}) = 0, \qquad U_0(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}1$$

とおく．これは

$$0 = U_{-1}(\mathfrak{g}) \subset U_0(\mathfrak{g}) \subset U_1(\mathfrak{g}) \subset U_2(\mathfrak{g}) \subset \cdots$$

と自然な filtration を定める．この時，次が成り立つ．

(1) $U(\mathfrak{g}) = \bigcup_n U_n(\mathfrak{g})$.

(2) $U_n(\mathfrak{g})U_m(\mathfrak{g}) = U_{n+m}(\mathfrak{g}) \quad (m, n \geq 0)$.

$\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g})$ とおく．これは可換な次数環となる．

命題 2.4（Poincaré-Birkhoff-Witt）． $\mathbb{C}$-代数としての同型

$$\begin{array}{ccc} S(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g}) \\ X_1 X_2 \cdots X_n & \longmapsto & X_1 X_2 \cdots X_n + U_{n-1}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

が存在する．但しここで，

$$S(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\langle XY - YX \mid X, Y \in \mathfrak{g} \rangle_{\text{イデアル}}$$

は $\mathfrak{g}$ の対称線形環で，$S^n(\mathfrak{g})$ は $S(\mathfrak{g})$ の n 次斉次成分である．

$\mathbb{X}$ を有限生成な $(\mathfrak{g}, K)$-加群とする．この時，有限次元 K-不変ベクトル空間 V で，$\mathbb{X} = U(\mathfrak{g})V$ を満たすものが存在する．$\mathbb{X}_n = U_n(\mathfrak{g})V$ とおくことで，

$$0 = \mathbb{X}_{-1} \subset \mathbb{X}_0 \subset \mathbb{X}_1 \subset \cdots$$

と $\mathbb{X}$ の filtration を得る．これらは次を満たす．

(1) $\mathbb{X} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{X}_n$.

(2) $K \cdot \mathbb{X}_n = \mathbb{X}_n$.

(3) $U_n(\mathfrak{g})\mathbb{X}_m = \mathbb{X}_{m+n} \quad (m, n \geq 0)$.

定義・命題 2.5. $M_n = \mathbb{X}_n/\mathbb{X}_{n-1}$，$M = \mathrm{gr}(\mathbb{X}; V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ とおく．

(1) M は $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$ 上の次数加群である．

$$\begin{array}{ccc} U_m(\mathfrak{g})/U_{m-1}(\mathfrak{g}) \times M_n & \longrightarrow & M_{n+m} \\ (D + U_{m-1}(\mathfrak{g}), v + \mathbb{X}_{n-1}) & \longmapsto & Dv + \mathbb{X}_{n+m-1} \end{array}$$

(2) M は K-加群であり，$KM_n = M_n$ を満たす．

(3) $k \cdot D \cdot k^{-1} \cdot v = (\mathrm{Ad}(k)D) \cdot v \quad (k \in K,\ D \in S(\mathfrak{g}),\ v \in M)$.

この M を（V から定まる）$\mathbb{X}$ に**付随した** $(S(\mathfrak{g}), K)$**-加群**という．

2.3. 随伴多様体，随伴サイクル

$B\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式とする：$B(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y))$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$. $\mathfrak{g}$ が半単純であることから，B は非退化である[*5]．

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(\theta(X))\,\mathrm{ad}(\theta(Y))Z &= [\theta(X), [\theta(Y), Z]] \\ &= \theta([X, [Y, \theta^{-1}(Z)]]) \\ &= (\theta \circ \mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y) \circ \theta^{-1})(Z)\end{aligned}$$

であるから，$B(X, Y) = B(\theta(X), \theta(Y))$．特に $X \in \mathfrak{k}$ 及び $Y \in \mathfrak{p}$ に対し

$$B(X, Y) = B(\theta(X), \theta(Y)) = B(X, -Y) = -B(X, Y)$$

から $B(X, Y) = 0$．つまり $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$ である．特に B が $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ 上非退化であることから，B は $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$ 上非退化．また，

$$\{X \in \mathfrak{g} \mid B(X, \mathfrak{k}) = 0\} = \mathfrak{p}$$

であることに注意する．

$D = X_1 X_2 \cdots X_n \in S(\mathfrak{g})$ $(X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathfrak{g})$ に対し

$$D(Y) = B(X_1, Y) B(X_2, Y) \cdots B(X_n, Y) \quad (Y \in \mathfrak{g})$$

とおくことによって，D を $\mathfrak{g}$ 上の多項式と見なす：$S(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]$．

$M = \mathrm{gr}(\mathbb{X}; V)$ を $\mathbb{X}$ に付随した $(S(\mathfrak{g}), K)$-加群とする．

補題 2.6. (1) $M = S(\mathfrak{g}) M_0$，$M_0 = V$，$\mathfrak{k} M = 0$.

(2) $\mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})} M = \{D \in S(\mathfrak{g}) \mid$ 全ての $v \in M$ に対し $Dv = 0\}$ は $\mathrm{Ad}(K)$-不変な $S(\mathfrak{g})$ の次数イデアル．

(3) $\mathcal{V} = \{X \in \mathfrak{g} \mid$ 全ての $D \in \mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})} M$ に対し $D(X) = 0\}$ は $\mathrm{Ad}(K)$-不変な $\mathfrak{g}$ のアフィン代数多様体で，$\mathcal{V} \subset \mathfrak{p}$ が成り立つ．

[*5] Cartan criterion.

証明. (1) $M = S(\mathfrak{g})M_0$, $M_0 = V$ は明らかである．また，$\mathfrak{k}$ は各 $\mathbb{X}_n$ を保つので，$X \in \mathfrak{k}$, $v \in M_n$ に対し $Xv \in M_{n+1}$ は 0 である．

(2) 明らか．

(3) $\mathcal{V} \subset \mathfrak{p}$ 以外は明らかである．(1) より $\mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})} M \supset \mathfrak{k}$ であるから，

$$\mathcal{V} \subset \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{全ての } Y \in \mathfrak{k} \text{ に対し } B(X,Y) = 0\} = \mathfrak{p}$$

が成り立つ．　(証終)

$\mathcal{V} = \bigcup_{j=1}^{l} \mathcal{V}_j$ を $\mathcal{V}$ の既約分解とし，$I_j \in \mathrm{Spec}\, S(\mathfrak{g})$ を $\mathcal{V}_j$ に対応する素イデアルとする．この時，M の I_j における局所化として得られる $S(\mathfrak{g})_{I_j}$-加群 M_{I_j} は 0 ではなく，長さ有限の加群となる．$m_j = \mathrm{length}_{S(\mathfrak{g})_{I_j}} M_{I_j}$ とおく．

定義 2.7. (1) $\mathcal{V} = \bigcup_{j=1}^{l} \mathcal{V}_j$ を有限生成 $(\mathfrak{g}, K)$-加群 $\mathbb{X}$ の**随伴多様体**という．

(2) 形式和 $\sum_{j=1}^{l} m_j[\mathcal{V}_j]$ を $\mathbb{X}$ の**随伴サイクル**とよび，m_j を $\mathbb{X}$ における $\mathcal{V}_j$ の**重複度**とよぶ．

これらの概念は，V の取り方によらず $\mathbb{X}$ のみによって決まることが知られている [Vog91]．

例 2.8. $G = SU(1,1)$ の球主系列表現 $(\pi_{0,\nu}, L^2(\mathbb{T}))$ (但し，$\nu \notin 2\mathbb{Z}$) に付随した $(\mathfrak{g}, K)$-加群 $\mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]$ の随伴サイクルを考える．

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \langle X_+, H, X_- \rangle_{\mathbb{C}}.$$

ここで，

$$X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

各作用は，

$$\begin{cases} X_+ \cdot \zeta^p = \left(\dfrac{\nu}{2} + p\right) \zeta^{p+1}, \\[2ex] X_- \cdot \zeta^p = \left(\dfrac{\nu}{2} - p\right) \zeta^{p-1}, \\[2ex] H \cdot \zeta^p = 2p\zeta^p. \end{cases}$$

となる．$V = \mathbb{C}\cdot 1 = \mathbb{C}\zeta^0$ ととれ，$\mathbb{C}[\zeta,\zeta^{-1}] = U(\mathfrak{g})V$.

$$U_n(\mathfrak{g})V = \mathbb{C}\zeta^n + \mathbb{C}\zeta^{n-1} + \cdots + \mathbb{C}\zeta^{-n}$$

であるから，$M_n = U_n(\mathfrak{g})V/U_{n-1}(\mathfrak{g})V$ は $\mathbb{C}\zeta^n + \mathbb{C}\zeta^{-n}$ と自然に同一視される．$M = \mathrm{gr}(\mathbb{C}[\zeta,\zeta^{-1}];V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ とおく．

M への $S(\mathfrak{g})$ の作用は次のようになる．$n = 1, 2, \ldots$ に対し

$$\begin{aligned}
X_+\zeta^n &= \left(\frac{\nu}{2}+n\right)\zeta^{n+1}, & X_-\zeta^n &= 0,\\
X_-\zeta^{-n} &= \left(\frac{\nu}{2}+n\right)\zeta^{-(n+1)}, & X_+\zeta^{-n} &= 0,\\
H\zeta^n &= 0, & &\\
X_+1 &= \frac{\nu}{2}\zeta, & X_-1 &= \frac{\nu}{2}\zeta^{-1}.
\end{aligned}$$

（1）$\mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})} M = \mathfrak{k}S(\mathfrak{g}) + X_+X_-S(\mathfrak{g})$.

（2）

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & z \\ w & 0 \end{pmatrix} = zX_+ + wX_- \;\middle|\; z, w \in \mathbb{C},\ zw = 0 \right\}\\
&= \mathcal{V}_+ \cup \mathcal{V}_-.
\end{aligned}$$

但し，

$$\mathcal{V}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{V}_- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

であり，$\mathcal{V}_\pm$ に対応する素イデアル $I_\pm$ は

$$I_\pm = \mathfrak{k}S(\mathfrak{g}) + X_\pm S(\mathfrak{g})$$

で与えられる．

（3）$M_\pm = \mathbb{C}\zeta^{\pm 1} + \mathbb{C}\zeta^{\pm 2} + \cdots \subset M$ とおくと，これは $(S(\mathfrak{g}), K)$-部分加群であり，

$$0 \subset M_+ \subset M_+ \oplus M_- \subset M$$

となる．

$$\begin{aligned}
&M_+ = S(\mathfrak{g})\zeta \simeq S(\mathfrak{g})/I_-,\\
&(M_+ \oplus M_-)/M_+ \simeq S(\mathfrak{g})/I_+,\\
&M/(M_+ \oplus M_-) \simeq \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

である（$\mathbb{C}$ は 1 次元自明表現）．$(S(\mathfrak{g})/I_+)_{I_+} = S(\mathfrak{g})_{I_+}/I_+S(\mathfrak{g})_{I_+}$ は 0 でない既約 $S(\mathfrak{g})_{I_+}$ 加群であり，また $(S(\mathfrak{g})/I_-)_{I_+} = \mathbb{C}_{I_+} = 0$ から，局所化が完全関手であることより $\operatorname{length}_{S(\mathfrak{g})_{I_+}} M_{I_+} = 1$ である．同様に $\operatorname{length}_{S(\mathfrak{g})_{I_-}} M_{I_-} = 1$ であるから，球主系列表現 $\pi_{o,\nu}$ の $(\mathfrak{g}, K)$-加群 $\mathbb{C}[\zeta, \zeta^{-1}]$ の随伴サイクルは $1 \cdot [\mathcal{V}_+] + 1 \cdot [\mathcal{V}_-]$ となる．

2.4. 等方表現

やや一般的な話から始める．R を Noether 環とし，M を有限生成 R-加群，$I \in \operatorname{Spec} R$ を $I \subset \operatorname{Ann}_R(M)$ となるものとする．

補題 2.9. （1）ある $f \in R \setminus I$ が存在し，M_f は自由 $(R/I)_f$-加群．

（2）R_I 加群 M_I の長さは $\operatorname{rank}_{(R/I)_f} M_f$ に等しい．

（3）$\mathfrak{m} \subset R$ を R の極大イデアルで $f \notin \mathfrak{m}$，$I \subset \mathfrak{m}$ を満たすものとする．この時，$\operatorname{rank}_{(R/I)_f} M_f = \dim_{R/\mathfrak{m}} M/\mathfrak{m}M$ が成り立つ．

証明. （1）M は Noether (R/I)-加群であるから，極大な M の自由 (R/I)-加群 M' が存在する．M' の基底を $x_1, x_2, \ldots, x_p$ とする．この時，$f \in R \setminus I$ で，$fM \subset M'$ なるものが存在することを示す．これが示されれば，$M_f = M'_f$ は自由 $(R/I)_f$ 加群となる．

$M = Ry_1 + Ry_2 + \cdots + Ry_m$ となる $y_1, y_2, \ldots, y_m \in M$ をとる．各 i に対し $f_i \in R \setminus I$ で $f_i y_i \in M'$ なるものが存在すれば，$f = f_1 f_2 \cdots f_m$ とおけばよい．よって，このような f_i の存在を示す．

そのような f_i が存在しないとする．この時，全ての $f \in R$ に対し $fy_i \in M'$ ならば $f \in I$ が成り立つ．従って，$x_1, x_2, \ldots, x_p, y_i$ は R/I 上一次独立となるが，これは M' の極大性に反する．

(2) $p = \operatorname{rank}_{(R/I)_f} M_f$ とおく．$M_f = (R/I)_f^p$ の両辺を I で局所化すると，$f \notin I$ より $M_I = (R/I)_I^p$ を得る．ここで $(R/I)_I = R_I/IR_I$ は既約 R_I-加群であるから，$\operatorname{length}_{R_I} M_I = p$.

(3) $M_f = (R/I)_f^p$ を $\mathfrak{m}$ で局所化することにより，$M_\mathfrak{m} = (R/I)_\mathfrak{m}^p = (R_\mathfrak{m}/IR_\mathfrak{m})^p$ を得る．よって，$\mathfrak{m}M_\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}/IR_\mathfrak{m})^p$．従って，$M/\mathfrak{m}M = M_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}M_\mathfrak{m} = (R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}R_\mathfrak{m})^p$ であるから，$\operatorname{rank}_{(R/I)_f} M_f = \dim_{R/\mathfrak{m}} M/\mathfrak{m}M$. （証終）

もとの設定に戻る．復習をしておこう．G を連結な複素化 $G_{\mathbb{C}}$ を持つ半単純（または簡約）Lie 群とする．この時，G の極大コンパクト部分群 K も複素化 $K_{\mathbb{C}}$ を持ち

$$\begin{array}{ccc} G & \subset & G_{\mathbb{C}} \\ \cup & & \cup \\ K & \subset & K_{\mathbb{C}} \end{array}$$

となる．$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を複素 Cartan 分解とする．

$\mathbb{X}$ を有限生成 $(\mathfrak{g}, K)$-加群とし，V を有限次元 K-不変部分空間で，$\mathbb{X} = U(\mathfrak{g})V$ なるものとする．$M = \mathrm{gr}(\mathbb{X}, V)$ は次数 $(S(\mathfrak{g}), K)$-加群となる．

注意. Weyl の unitary trick により，K の $\mathbb{X}, M$ 上への表現は，$K_{\mathbb{C}}$ の holomorphic な表現に自然に拡張される：“$(\mathfrak{g}, K)$-加群” = “$(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}})$-加群”.

$\mathbb{X}$ の随伴多様体 $\mathcal{V}$ は $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbb{X}) = \mathcal{V}(\mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})} M) \subset \mathfrak{p}$ と定義される．$\mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})} M$ は $\mathrm{Ad}(K_{\mathbb{C}})$ 不変であるから，$\mathcal{V}$ も $\mathrm{Ad}(K_{\mathbb{C}})$ 不変である．$\mathcal{V} = \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{V}_j$ を $\mathcal{V}$ の既約分解とし，$I_j \in \mathrm{Spec}\, S(\mathfrak{g})$ を $\mathcal{V}_j$ に対応する素イデアル，$m_j = \mathrm{length}_{S(\mathfrak{g})_{I_j}} M_{I_j}$ とした時，$\mathbb{X}$ の随伴サイクル C は

$$C = C(\mathbb{X}) = \sum_{j=1}^{m} m_j [\mathcal{V}_j]$$

により定義されるのであった．

$\mathbb{X}$ が長さ有限の $(\mathfrak{g}, K)$-加群であるとする．$Z(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})^{G_{\mathbb{C}}}$ を $U(\mathfrak{g})$ の中心とすると，Schur の補題[*6]より，

$$\text{全ての } v \in \mathbb{X} \text{ に対し } \dim Z(\mathfrak{g})v < \infty$$

が成り立つ．よって，V を更に $Z(\mathfrak{g})$ 不変にとることができる．

$$\begin{aligned} \mathrm{gr}\, Z(\mathfrak{g}) &= S(\mathfrak{g})^{G_{\mathbb{C}}} \\ &= \{D \in S(\mathfrak{g}) \mid \text{全ての } g \in G_{\mathbb{C}} \text{ に対し } \mathrm{Ad}(g)D = D\} \subset S(\mathfrak{g}) \end{aligned}$$

[*6] Dixmier による次の形の Schur の補題を用いる：$\mathfrak{g}$ の既約表現 U に対し $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U, U) = \mathbb{C}$．証明は次の通り．$U$ の既約性から $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U, U)$ は斜体．よって，$A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U, U)$ が $\mathbb{C}$ 上代数的であることを示せば良い．A が $\mathbb{C}$ 上超越的であるとすると，$\{(A - \alpha)^{-1} \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立．特に $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U, U) \geq \#\mathbb{C}$．また 0 でない $u \in U$ を固定し，$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U, U) \to U$ を $B \mapsto Bu$ と定義すると，これは $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U, U)$ が斜体であることから単射．従って，$\dim_{\mathbb{C}} U \geq \#\mathbb{C}$．一方，$U(\mathfrak{g}) \to U$ を $X \mapsto Xu$ で定めると，U の既約性よりこれは全射．よって $\dim_{\mathbb{C}} U \leq \dim_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g})$．$\dim_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g})$ は可算濃度であるからこれは矛盾．

であるから，

$$S(\mathfrak{g})_+^{G_\mathbb{C}} = S(\mathfrak{g})^{G_\mathbb{C}} \cap \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} S^n(\mathfrak{g})\right)$$

とおくと $S(\mathfrak{g})_+^{G_\mathbb{C}} \subset \mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})} M$．よって，$\mathcal{V} \subset \mathcal{V}(S(\mathfrak{g})_+^{G_\mathbb{C}})$ が成り立つ．ここで，次の事実が知られている．

$$\mathcal{V}(S(\mathfrak{g})_+^{G_\mathbb{C}}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{ある } N \text{ が存在し，} (\mathrm{ad}\, X)^N = 0\} \text{ ： } \mathfrak{g} \text{ の冪零元全体.}$$

$\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}$ の冪零元全体，$\mathcal{N}_\mathfrak{p} = \mathcal{N} \cap \mathfrak{p}$ とおく．$\mathcal{V} \subset \mathcal{N}_\mathfrak{p}$ である．

事実（Kostant-関口対応 [Sek87]）． $\mathcal{N}_\mathfrak{p}$ に含まれる $K_\mathbb{C}$ 軌道の数は有限であり，$\mathcal{N}_\mathfrak{p}/K_\mathbb{C}$ と $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}_0}/G_0$ の間には全単射が存在する．但し，$\mathcal{N}_{\mathfrak{g}_0}$ は $\mathfrak{g}_0$ の冪零元全体であり，G_0 は G の単位元を含む連結成分である．

$\mathbb{X}$ が長さ有限な $(\mathfrak{g}, K)$-加群ならば，$\mathcal{V}(\mathbb{X}) = \bigcup_{j=1}^{l} \mathcal{V}_j$，但しある冪零 $K_\mathbb{C}$ 軌道 $\mathcal{O}_j \subset \mathfrak{p}$ に対し $\mathcal{V}_j = \overline{\mathcal{O}_j}$ である．

$\mathbb{X}$ を有限生成 $(\mathfrak{g}, K)$-加群とし，$M = \mathrm{gr}(\mathbb{X}; V)$ とおく．次の仮定をする．

仮定． ある $K_\mathbb{C}$ 軌道 $\mathcal{O}$ が存在し，$\mathcal{V}(\mathbb{X}) = \overline{\mathcal{O}}$ が成り立つ．

I を $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbb{X})$（これは仮定から既約である）に対応する素イデアルとする．Hilbert の零点定理により $\sqrt{\mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})} M} = I$ であるから，ある n_0 が存在し，$I^{n_0} M = 0$ が成り立つ．従って，次のような $(S(\mathfrak{g}), K)$-部分加群の減少列を得る．

$$M = I^0 M \supset IM \supset I^2 M \supset \cdots \supset I^{n_0} M = 0.$$

各組成因子 $I^k M / I^{k+1} M$ には I が 0 で作用することに注意する．

命題 2.10． $X \in \mathcal{O}$ を一つ固定する．$\mathfrak{m}(X)$ を一点 $\{X\}$ に対応する極大イデアル，つまり

$$\mathfrak{m}(X) = \sum_{Y \in \mathfrak{g}} (Y - B(Y, X)) S(\mathfrak{g}) \subset S(\mathfrak{g})$$

とする．この時，

$$\mathrm{length}_{S(\mathfrak{g})_I} M_I = \sum_{j=0}^{n_0 - 1} \dim(I^j M / \mathfrak{m}(X) I^j M)$$

が成り立つ．

証明. $\mathrm{length}_{S(\mathfrak{g})_I} M_I = \sum_{j=0}^{n_0-1} \mathrm{length}_{S(\mathfrak{g})_I} (I^j M/I^{j+1}M)_I$ であるから,

$$\mathrm{length}_{S(\mathfrak{g})_I} (I^j M/I^{j+1}M)_I = \dim(I^j M/\mathfrak{m}(X)I^j M)$$

を示せばよい．$L = I^j M/I^{j+1}M$ とおく．$I \subset \mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})} L$ である．補題 2.9 より，ある $f \in S(\mathfrak{g}) \setminus I$ が存在し，$\mathfrak{m} \supset I$，$f \notin \mathfrak{m}$ なる $S(\mathfrak{g})$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対し

$$\mathrm{length}_{S(\mathfrak{g})_I} L_I = \dim L/\mathfrak{m}L = \dim I^j M/\mathfrak{m}I^j M$$

が成り立つ．$f \in S(\mathfrak{g}) \setminus I$ であるから，ある $X_0 \in \mathcal{O}$ が存在し $f(X_0) \neq 0$．この X_0 に対しまず $X_0 \in \mathcal{O} \subset \mathcal{V}(\mathbb{X})$ であるから，$\mathfrak{m}(X_0) \supset I$ である．また，$f(X_0) \neq 0$ より $f \notin \mathfrak{m}(X_0)$．従って，

$$\mathrm{length}_{S(\mathfrak{g})_I} L_I = \dim(I^j M/\mathfrak{m}(X_0)I^j M)$$

である．

一方，$I^j M$ は $K_{\mathbb{C}}$ 不変であり，よって $k \in K_{\mathbb{C}}$ に対し

$$k(\mathfrak{m}(X_0)I^j M) = \mathfrak{m}(\mathrm{Ad}(k)X_0)I^j M$$

であるから,

$$\dim(I^j M/\mathfrak{m}(X)I^j M)$$

は $X \in \mathcal{O}$ に対し一定である． (証終)

定義 2.11. $X \in \mathcal{O}$ に対し $K_{\mathbb{C}}(X) = \{k \in K_{\mathbb{C}} \mid \mathrm{Ad}(k)X = X\} \subset K_{\mathbb{C}}$ とおく．有限次元ベクトル空間

$$\mathcal{W} = \bigoplus_{j=0}^{n_0-1} (I^j M/\mathfrak{m}(X)I^j M)$$

上に自然に生じる $K_{\mathbb{C}}(X)$ の表現を, $\mathbb{X}$ に付随した**等方表現** (isotropy representation) とよび，$\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbb{X})$ と書く．

Vogan により，$K_{\mathbb{C}}(X)$-加群 $\mathcal{W}$ の指標は空間 V の取り方によらないことが示されている．つまり，$K_{\mathbb{C}}(X)_{\mathrm{red}}$（簡約部分）の表現としての $\mathcal{W}$ の組成列は $\mathbb{X}$ のみによる．

3. Weil 表現の基礎

この節では，Weil 表現に関する基礎的な事実を復習する．第 4 回整数論サマースクール報告集「Weil 表現入門」［整数］などが良い文献である．

3.1. Symplectic Lie 代数（群）

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1_n & -\sqrt{-1}\,1_n \\ -\sqrt{-1}\,1_n & 1_n \end{pmatrix}$$

とし，

$$\begin{array}{lcl} G = c\,Sp(n,\mathbb{R})c^{-1} & \subset & Sp(n,\mathbb{C}) = G_{\mathbb{C}} \\ \cup & & \cup \\ K \simeq U(n) & \subset & K_{\mathbb{C}} = \left\{ y = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^t g^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; g \in GL(n,\mathbb{C}) \right\} \end{array}$$

とおく．Symplectic 群 G に対する複素 Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ は，

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; B, C \in M_n(\mathbb{C}),\ {}^tB = B,\ {}^tC = C \right\} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$$

$$\mathfrak{p}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{p}_- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

で与えられる．この時，次が成り立つ．

- $\mathfrak{p}_\pm$ は $\mathrm{Ad}(K_{\mathbb{C}})$ 不変.
- $\mathrm{Ad}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^tg^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & gB\,{}^tg \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\mathrm{Ad}\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^tg^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ {}^tg^{-1}Cg^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

$$\widetilde{K_{\mathbb{C}}} = \{(\varepsilon, y) \in \mathbb{C}^\times \times K_{\mathbb{C}} \mid \varepsilon^2 = \det g\} \subset \mathbb{C}^\times \times K_{\mathbb{C}}$$

とおく．但し，$y = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^tg^{-1} \end{pmatrix}$ である．

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{K_{\mathbb{C}}} & \xrightarrow{\pi} & K_{\mathbb{C}} \\ \widetilde{y} = (\varepsilon, y) & \longmapsto & y \end{array}$$

は $K_{\mathbb{C}}$ の二重の被覆を与える．$\widetilde{K}=\pi^{-1}(K)$ とおくと，$\widetilde{K}$ は K の二重の被覆となる．これは，Metaplectic 群 $Mp(n,\mathbb{R})$[*7]の極大コンパクト部分群である．次の補題は線形代数の結果である．

補題 3.1. $\mathcal{O}_m=\left\{X\in\mathfrak{p}_- \,\middle|\, X=\begin{pmatrix}0&0\\C&0\end{pmatrix},\ \operatorname{rank}C=m\right\}$ とおく．

(1) $\mathfrak{p}_-=\coprod_{m=0}^{n}\mathcal{O}_m$ は $\mathfrak{p}_-$ の $K_{\mathbb{C}}$-軌道分解を与える．

(2) $\overline{\mathcal{O}_m}=\mathcal{O}_0\cup\cdots\cup\mathcal{O}_{m-1}\cup\mathcal{O}_m$.

(3) $Y_m=\begin{pmatrix}0&0\\C_m&0\end{pmatrix}$，$C_m=\begin{pmatrix}1_m&0\\0&0\end{pmatrix}$ とおくと，$Y_m\in\mathcal{O}_m$ で，

$$\begin{aligned}K_{\mathbb{C}}(Y_m)&=\left\{y=\begin{pmatrix}g&0\\0&{}^tg^{-1}\end{pmatrix}\,\middle|\, g^{-1}=\begin{pmatrix}g_{11}&0\\g_{21}&g_{22}\end{pmatrix},\ g_{11}\in O(m,\mathbb{C})\right\}\\&\simeq(O(m,\mathbb{C})\times GL(n-m,\mathbb{C}))\ltimes M_{n-m,m}(\mathbb{C}).\end{aligned}$$

問題 3.2. 補題 3.1 を証明せよ．

$\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ の基底を

$$\begin{cases}A_{ij}=\begin{pmatrix}E_{ij}&0\\0&-E_{ji}\end{pmatrix}\in\mathfrak{k}\quad(i,j=1,2,\ldots,n),\\[2ex] B_{ij}=\begin{pmatrix}0&E_{ij}+E_{ji}\\0&0\end{pmatrix}\in\mathfrak{p}_+\quad(1\le i\le j\le n),\\[2ex] C_{ij}=\begin{pmatrix}0&0\\E_{ij}+E_{ji}&0\end{pmatrix}\in\mathfrak{p}_-\quad(1\le i\le j\le n)\end{cases}$$

ととる．ここで，$E_{ij}=(\delta_{ik}\delta_{jl})_{1\le k,l\le n}$ は n 次の (i,j) 行列単位である．

[*7] $Sp(n,\mathbb{R})$ の二重被覆群.

3.2. Weil 表現

Weil 表現を定義する．整数 $k>0$ に対し $\mathbb{P}=\mathbb{C}[M_{n,k}]$ とおく．但し，

$$M_{n,k}=\left\{ z=\begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nk} \end{pmatrix} \middle| \, z_{jp}\in\mathbb{C} \right\}$$

であり，$\mathbb{P}$ の元は z_{jp} の多項式である．また，$z^{(i)}=(z_{i1},\ldots,z_{ik})$ を z の第 i 行とし，$\partial^{(j)}=(\partial_{j1},\ldots,\partial_{jk})$ とおく．但し，$\partial_{jp}=\dfrac{\partial}{\partial z_{jp}}$ である．

定義 3.3. （1）線形写像 $\varpi_k\colon\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(\mathbb{P})$ を

$$\begin{cases} \varpi_k(A_{ij})=z^{(i)}\,{}^t\partial^{(j)}+\dfrac{k}{2}\delta_{ij}=\displaystyle\sum_{p=1}^{k} z_{ip}\partial_{jp}+\dfrac{k}{2}\delta_{ij}, \\ \varpi_k(B_{ij})=\sqrt{-1}\,z^{(i)}\,{}^tz^{(j)}=\sqrt{-1}\displaystyle\sum_{p=1}^{k} z_{ip}z_{jp}, \\ \varpi_k(C_{ij})=\sqrt{-1}\partial^{(i)}\,{}^t\partial^{(j)}=\sqrt{-1}\displaystyle\sum_{p=1}^{k}\partial_{ip}\partial_{jp} \end{cases}$$

により定義する．

（2）$\varpi_k\colon\widetilde{K_{\mathbb{C}}}\to\mathrm{End}(\mathbb{P})$ を

$$(\varpi_k((\varepsilon,y))f)(z)=\varepsilon^k f({}^tgz)\quad\left(f\in\mathbb{P},\ y=\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^tg^{-1}\end{pmatrix},\ \varepsilon^2=\det g\right)$$

により定義する．

（3）$G'_{\mathbb{C}}=O(k,\mathbb{C})$ とし，$\pi\colon G'_{\mathbb{C}}\to\mathrm{End}(\mathbb{P})$ を

$$(\pi(g')f)(z)=f(zg')\quad(f\in\mathbb{P},\ g'\in G'_{\mathbb{C}})$$

により定義する．

命題 3.4. （1）$\mathbb{P}$ は ϖ_k により $(\mathfrak{g},\widetilde{K_{\mathbb{C}}})$-加群となる．

（2）$(\pi,\mathbb{P})$ は $G'_{\mathbb{C}}=O(k,\mathbb{C})$ の表現を与える．

（3）$\varpi_k(X)$ $(X\in\mathfrak{g})$ と $\pi(g')$ $(g'\in G'_{\mathbb{C}})$ は可換．

証明. （1）全ての $f \in \mathbb{P}$ が $\dim\langle \varpi_k(\widetilde{K_{\mathbb{C}}})f\rangle_{\mathbb{C}} < \infty$ を満たすことは，$\widetilde{K_{\mathbb{C}}}$ の作用が多項式の次数を保つことから従うので，ϖ_k が各基底の交換関係が保たれていることと $\widetilde{K_{\mathbb{C}}}$ の微分が $\mathfrak{g}$ の作用と一致することを示せばよい．（$\widetilde{K_{\mathbb{C}}}$ は連結であるから，定義 2.3 における（4）の条件はこれから自動的に従う）．

まずは各基底の交換関係が保たれることを示す．まず，$E_{ij}E_{lm} = \delta_{jl}E_{im}$ に注意すれば，基底の交換関係が次のようになることがわかる．但し，ここで δ_{jl} は Kronecker のデルタ記号である．

(A) $[A_{ij}, A_{lm}] = \delta_{jl}A_{im} - \delta_{im}A_{lj}$.
(B) $[A_{ij}, B_{lm}] = \delta_{jm}B_{il} + \delta_{jl}B_{im}$.
(C) $[A_{ij}, C_{lm}] = -\delta_{im}C_{jl} - \delta_{il}C_{jm}$.
(D) $[B_{ij}, C_{lm}] = \delta_{jl}A_{im} + \delta_{jm}A_{il} + \delta_{il}A_{jm} + \delta_{im}A_{jl}$.
(E) $[B_{ij}, B_{lm}] = 0$.
(F) $[C_{ij}, C_{lm}] = 0$.

ϖ_k がこの交換関係を保つことを順番に示していく．交換関係 $[\partial_{lm}, z_{ij}] = \delta_{il}\delta_{jm}$ に注意する．

(A)

$$
\begin{aligned}
[\varpi_k(A_{ij}), \varpi_k(A_{lm})] &= \sum_{p,q}[z_{ip}\partial_{jp}, z_{lq}\partial_{mq}] \\
&= \sum_{p,q}(z_{ip}\partial_{jp}z_{lq}\partial_{mq} - z_{lq}\partial_{mq}z_{ip}\partial_{jp}) \\
&= \sum_{p,q}(z_{ip}[\partial_{jp}, z_{lq}]\partial_{mq} + z_{lq}[z_{ip}, \partial_{mq}]\partial_{jp}) \\
&= \sum_{p,q}(\delta_{jl}\delta_{pq}z_{ip}\partial_{mq} - \delta_{im}\delta_{pq}z_{lq}\partial_{jp}) \\
&= \delta_{jl}\sum_{p=1}^{k} z_{ip}\partial_{mp} - \delta_{im}\sum_{p=1}^{k} z_{lp}\partial_{jp} \\
&= \delta_{kl}\varpi_k(A_{im}) - \delta_{im}\varpi_k(A_{lj}) = \varpi_k([A_{ij}, A_{lm}]).
\end{aligned}
$$

(B)

$$
\begin{aligned}
[\varpi_k(A_{ij}), \varpi_k(B_{lm})] &= \sqrt{-1}\sum_{p,q}[z_{ip}\partial_{jp}, z_{lq}z_{mq}] \\
&= \sqrt{-1}\sum_{p,q}(z_{ip}\partial_{jp}z_{lq}z_{mq} - z_{lq}z_{mq}z_{ip}\partial_{jp})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{-1}\sum_{p,q}(z_{ip}[\partial_{jp}, z_{lq}]z_{mq} + z_{ip}z_{lq}[\partial_{jp}, z_{mq}]) \\
&= \sqrt{-1}\sum_{p,q}(\delta_{jl}\delta_{pq}z_{ip}z_{mq} + \delta_{jm}\delta_{pq}z_{ip}z_{lq}) \\
&= \sqrt{-1}\delta_{jl}\sum_{p=1}^{k} z_{ip}z_{mp} + \sqrt{-1}\delta_{jm}\sum_{p=1}^{k} z_{ip}z_{lp} \\
&= \delta_{jl}\varpi_k(B_{im}) + \delta_{jm}\varpi_k(B_{jl}) = \varpi_k([A_{ij}, B_{lm}]).
\end{aligned}
$$

(C)

$$
\begin{aligned}
[\varpi_k(A_{ij}), \varpi_k(C_{lm})] &= \sqrt{-1}\sum_{p,q}[z_{ip}\partial_{jp}, \partial_{lq}\partial_{mq}] \\
&= \sqrt{-1}\sum_{p,q}(z_{ip}\partial_{jp}\partial_{lq}\partial_{mq} - \partial_{lq}\partial_{mq}z_{ip}\partial_{jp}) \\
&= \sqrt{-1}\sum_{p,q}([z_{ip}, \partial_{lq}]\partial_{mq}\partial_{jp} + \partial_{lq}[z_{ip}, \partial_{mq}]\partial_{jp}) \\
&= -\sqrt{-1}\sum_{p,q}(\delta_{il}\delta_{pq}\partial_{mq}\partial_{jp} + \delta_{im}\delta_{pq}\partial_{lq}\partial_{jp}) \\
&= -\sqrt{-1}\delta_{il}\sum_{p=1}^{k}\partial_{mp}\partial_{jp} - \sqrt{-1}\delta_{im}\sum_{p=1}^{k}\partial_{lp}\partial_{jp} \\
&= -\delta_{il}\varpi_k(C_{jm}) - \delta_{im}\varpi_k(C_{jl}) = \varpi_k([A_{ij}, C_{lm}]).
\end{aligned}
$$

(D)

$$
\begin{aligned}
&[\varpi_k(B_{ij}), \varpi_k(C_{lm})] \\
=& -\sum_{p,q}[z_{ip}z_{jp}, \partial_{lq}\partial_{mq}] \\
=& -\sum_{p,q}(z_{ip}z_{jp}\partial_{lq}\partial_{mq} - \partial_{lq}\partial_{mq}z_{ip}z_{jp}) \\
=& -\sum_{p,q}(z_{ip}[z_{jp}\partial_{lq}]\partial_{mq} + [z_{ip}, \partial_{lq}]z_{jp}\partial_{mq} + \partial_{lq}z_{ip}[z_{jp}, \partial_{mq}] + \partial_{lq}[z_{ip}, \partial_{mq}]z_{jp}) \\
=& \sum_{p,q}(\delta_{jl}\delta_{pq}z_{ip}\partial_{mq} + \delta_{il}\delta_{pq}z_{jp}\partial_{mq} + \delta_{jm}\delta_{pq}\partial_{lq}z_{ip} + \delta_{im}\delta_{pq}\partial_{lq}z_{jp}) \\
=& \delta_{jl}\sum_{p=1}^{k} z_{ip}\partial_{mp} + \delta_{il}\sum_{p=1}^{k} z_{jp}\partial_{mp} + \delta_{jm}\sum_{p=1}^{k}\partial_{lp}z_{ip} + \delta_{im}\sum_{p=1}^{k}\partial_{lp}z_{jp} \\
=& \delta_{jl}\sum_{p=1}^{k} z_{ip}\partial_{mp} + \delta_{il}\sum_{p=1}^{k} z_{jp}\partial_{mp} + \delta_{jm}\sum_{p=1}^{k} z_{ip}\partial_{lp} + \delta_{im}\sum_{p=1}^{k} z_{jp}\partial_{lp} + k\delta_{jm}\delta_{il} + k\delta_{im}\delta_{jl}
\end{aligned}
$$

$$=\delta_{jl}\varpi_k(A_{im})+\delta_{il}\varpi_k(A_{jm})+\delta_{jm}\varpi_k(A_{il})+\delta_{im}\varpi_k(A_{jl})=\varpi_k([B_{ij},C_{lm}]).$$

（E,F）の交換関係が保たれることは明らかである．

次に $\widetilde{K_{\mathbb{C}}}$ の微分が $\mathfrak{k}$ の作用と一致することを示す．

$$A=\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -{}^tX \end{pmatrix}\in \mathrm{Lie}(\widetilde{K})$$

とする．$X\in\mathfrak{u}(n)$ である．t が十分小さい時，$\exp tA=(\exp(t\operatorname{Tr}X/2),\exp tA)\in\widetilde{K}$ であることに注意する[*8]．

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\varpi_k(\exp tA)f)(z)\Big|_{t=0}\\
=&\ \frac{d}{dt}(\exp(tk\operatorname{Tr}X/2))f((\exp t\,{}^tX)z)\Big|_{t=0}\\
=&\frac{1}{2}k(\operatorname{Tr}X)f(z)+\sum_{p,q}\frac{d}{dt}((\exp t\,{}^tX)z)_{pq}\Big|_{t=0}(\partial_{pq}f)(z)\\
=&\frac{1}{2}k(\operatorname{Tr}X)f(z)+\sum_{p,q}({}^tXz)_{pq}(\partial_{pq}f)(z)\\
=&\frac{1}{2}k(\operatorname{Tr}X)+\sum_{p,q,r}X_{rp}z_{rq}(\partial_{pq}f)(z) \qquad\qquad (X_{ip}\ \text{は}\ X\ \text{の第}\ (r,p)\ \text{成分})\\
=&\sum_{r,p}X_{rp}\left(\frac{k}{2}\delta_{rp}f+\sum_{q}z_{rq}\partial_{pq}f\right)(z)\\
=&\sum_{r,p}X_{rp}(\varpi_k(A_{rp})f)(z)\\
=&(\varpi_k(X)f)(z)
\end{aligned}$$

であるから，$\widetilde{K_{\mathbb{C}}}$ の微分は $\mathfrak{k}$ の作用と一致する．

（2）明らか．

（3）$\pi(G'_{\mathbb{C}})$ と $\varpi_k(\widetilde{K_{\mathbb{C}}})$ が可換であることは明らか．よって，$\pi(G'_{\mathbb{C}})$ と $\varpi_k(\mathfrak{k})$ も可換．

$g'\in G'_{\mathbb{C}}$ とし，$\pi(g')$ と $\varpi_k(B_{ij}),\varpi_k(C_{ij})$ が可換であることを示す．まず，$(zg')^{(i)}=z^{(i)}g'$ であることに注意すると，

$$(\pi(g')(\varpi_k(B_{ij})f))(z)=(\varpi_k(B_{ij})f)(zg')$$

[*8] $\varepsilon^2=\det(\exp tX)$ の時 $\varepsilon=\pm\exp(t\operatorname{Tr}X/2)$ であるが，$\lim_{t\to 0}\exp tA=(1,1_{2n})$ であるから，t が十分小さい時 $\exp tA=(\exp(t\operatorname{Tr}X/2),\exp tA)$ である．

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{-1}(z^{(i)}g')\,{}^t(z^{(j)}g')f(zg') \\
&= \sqrt{-1}\,z^{(i)}g'\,{}^tg'\,{}^tz^{(j)}f(zg') \\
&= \sqrt{-1}\,z^{(i)}\,{}^tz^{(j)}f(zg') \\
&= (\omega_k(B_{ij})(\pi(g')f))(z)
\end{aligned}
$$

となり $\pi(g')$ と $\omega_k(B_{ij})$ は可換である．また，

$$
(\omega_k(C_{ij})(\pi(g')f))(z) = \sqrt{-1}\sum_{p=1}^{k}(\partial_{ip}\partial_{jp}(\pi(g')f))(z)
$$

であり，

$$
\begin{aligned}
(\partial_{jp}(\pi(g')f))(z) &= \sum_{q,r}\frac{d(zg')_{qr}}{dz_{jp}}(\partial_{qr}f)(zg') \\
&= \sum_{q,r}\frac{d(\sum_{s=1}^{k} z_{qs}g'_{sr})}{dz_{jp}}(\partial_{qr}f)(zg') \\
&= \sum_{q,r,s}\delta_{jq}\delta_{ps}g'_{sr}(\partial_{qr}f)(zg') \\
&= \sum_{r=1}^{k} g'_{pr}(\partial_{jr}f)(zg')
\end{aligned}
$$

から，

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-1}\sum_{p=1}^{k}(\partial_{ip}\partial_{jp}(\pi(g')f))(z) &= \sqrt{-1}\sum_{p,r,s}g'_{pr}g'_{ps}(\partial_{is}\partial_{jr}f)(zg') \\
&= \sqrt{-1}\sum_{r,s}({}^tg'g')_{rs}(\partial_{is}\partial_{jr}f)(zg') \\
&= \sqrt{-1}\sum_{r,s}\delta_{rs}(\partial_{is}\partial_{jr}f)(zg') \\
&= \sqrt{-1}\sum_{r=1}^{k}(\partial_{ir}\partial_{jr}f)(zg') \\
&= (\pi(g')(\omega_k(C_{ij})f))(z)
\end{aligned}
$$

となり，$\pi(g')$ と $\omega_k(C_{ij})$ も可換である． (証終)

従って，$\mathbb{P}$ は $(\mathfrak{g}, \widetilde{K}_{\mathbb{C}}) \times G'_{\mathbb{C}}$-加群の構造をもつ．$k = 1$ の時，$(\mathfrak{g}, \widetilde{K_{\mathbb{C}}})$-加群 $(\omega_1, \mathbb{P})$ を symplectic Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Weil 表現という．ω_k は Weil 表現 ω_1 の k 階テンソル積表現に他ならない．

$\mathbb{P}$ 上の正定値内積 $(\cdot,\cdot)$ を

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}\times\mathbb{P} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f_1,f_2) & \longmapsto & (f_1(\partial)\overline{f_2})(0) \end{array}$$

と定める．但し，$f\in\mathbb{P}$ に対し $\overline{f}(z)=\overline{f(\overline{z})}$．$\alpha=(\alpha_{ip})\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{nk}$ に対し $z^\alpha=\prod_{i,p} z_{ip}^{\alpha_{ip}}$ と定めると，$\left\{\dfrac{z^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}\right\}$ は正規直交基底となる．

補題 3.5. $W\subset\mathbb{P}$ を部分空間とする．この時，W が $(\mathfrak{g},\widetilde{K_{\mathbb{C}}})$-不変ならば，$W^\perp$ も $(\mathfrak{g},\widetilde{K_{\mathbb{C}}})$-不変である．

証明. $\mathbb{P}$ 上の作用素 A に対し A^* を内積 $(\cdot,\cdot)$ に関する随伴作用素とする．この時，$z_{ip}^*=\partial_{ip}$ である．従って，ϖ_k の定義から，

$$\varpi_k(\mathfrak{g})^*=\varpi_k(\mathfrak{g})$$

が成り立つ．よって，$f\in W^\perp$，$X\in\mathfrak{g}$ とすると，$\varphi\in W$ に対し

$$(\varpi_k(X)f,\varphi)=(f,\varpi_k(X)^*\varphi)=0$$

となり，従って $\varpi_k(X)f\in W^\perp$ である．また，群 $\widetilde{K_{\mathbb{C}}}$ は連結であり，$\widetilde{K_{\mathbb{C}}}$ の作用の微分は $\mathfrak{k}$ の表現と一致しているので，$W^\perp$ は $\widetilde{K_{\mathbb{C}}}$ 不変である． (証終)

4. Howe 双対性と等方表現

この節では，簡約デュアルペア $(Sp(n,\mathbb{R}),O(k))$ に対する Howe 双対性定理を等方表現を用いて証明する．

4.1. Howe 双対性（テータ対応）

$\widehat{G'_{\mathbb{C}}}$ を $G'_{\mathbb{C}} = O(k,\mathbb{C})$ の既約な有限次元 holomorphic 表現の同型類全体とする．Weyl の unitary trick により，$\widehat{G'_{\mathbb{C}}}$ は $G' = O(k)$ の既約ユニタリ表現の同型類全体と一致する．

$(\sigma, V_\sigma) \in \widehat{G'_{\mathbb{C}}}$ とする．

$$L(\sigma) = \mathrm{Hom}_{G'_{\mathbb{C}}}(V_\sigma, \mathbb{P})$$

は ϖ_k により $(\mathfrak{g}, \widetilde{K_{\mathbb{C}}})$-加群となる．この時，$(\mathfrak{g}, \widetilde{K_{\mathbb{C}}}) \times G'_{\mathbb{C}}$-加群として，

$$\mathbb{P} \simeq \bigoplus_{\sigma \in \widehat{G'_{\mathbb{C}}},\ L(\sigma) \neq 0} L(\sigma) \otimes V_\sigma$$

が成り立つ．

定理 4.1（Howe 双対性 [KV78, How89]）． （1）$L(\sigma) \neq 0$ のとき，$L(\sigma)$ は既約 $(\mathfrak{g}, \widetilde{K_{\mathbb{C}}})$-加群.

(2) $\sigma_1, \sigma_2 \in \widehat{G'_{\mathbb{C}}}$，$L(\sigma_1) \simeq L(\sigma_2) \neq 0$ ならば $V_{\sigma_1} \simeq V_{\sigma_2}$.

(3)
$$\{\sigma \in \widehat{G'_{\mathbb{C}}} \mid L(\sigma) \neq 0\} = \begin{cases} \widehat{G'_{\mathbb{C}}} & (k \leq n), \\ \{\sigma \in \widehat{G'_{\mathbb{C}}} \mid V_\sigma^{O(k-n,\mathbb{C})} \neq 0\} & (k > n). \end{cases}$$

但し，

$$O(k-n,\mathbb{C}) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \,\middle|\, g \in O(k-n,\mathbb{C}) \right\} \subset O(k,\mathbb{C}) = G'_{\mathbb{C}}$$

により $O(k-n,\mathbb{C})$ を $O(k,\mathbb{C})$ の部分群と見なす．

対応 $\sigma \mapsto L(\sigma)$ を **Howe 対応（テータ対応）** と呼ぶ．

この定理を等方表現を用いて証明するのがこの節の目的である．

4.2. 多重調和多項式

$$\mathcal{H} = \mathbb{P}^{\mathfrak{p}_-} = \{f \in \mathbb{P} \mid \omega_k(C_{ij})f = 0 \quad (1 \leq i \leq j \leq n)\}$$

とおく．$f \in \mathbb{P}$ に対し $f \in \mathcal{H}$ であることと，全ての $1 \leq i \leq j \leq n$ なる i, j に対し

$$\sum_{p=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial z_{ip} \partial z_{jp}} = 0$$

となることは同値である．従って，$n = 1$ の時 $\mathcal{H}$ は k 変数調和多項式のなす空間となる．$\mathcal{H}$ の元を**多重調和多項式**という．$\mathrm{Ad}(\widetilde{K_{\mathbb{C}}})\mathfrak{p}_- = \mathfrak{p}_-$ より，$\widetilde{K_{\mathbb{C}}}$ は $\mathcal{H}$ に作用する．また，$\omega_k(\mathfrak{p}_-)$ と $\pi(G'_{\mathbb{C}})$ は可換であるから，$G'_{\mathbb{C}}$ は $\mathcal{H}$ に作用する．従って，$\mathcal{H}$ は $\widetilde{K_{\mathbb{C}}} \times G'_{\mathbb{C}}$-加群の構造を持つ．

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[z\,{}^t\!z] &= \langle z^{(i)}\,{}^t\!z^{(j)} \mid 1 \leq i \leq j \leq n \rangle_{\mathbb{C}\text{-algebra}} \\ &= \omega_k(U(\mathfrak{p}_+)) \end{aligned}$$

とおく．

命題 4.2. (1)

$$\mathbb{P} = \mathbb{C}[z\,{}^t\!z]\mathcal{H} = \omega_k(U(\mathfrak{p}_+))\mathcal{H}.$$

(2) $\widetilde{K_{\mathbb{C}}}$ 不変な $L(\sigma)$ の部分空間 $U(\sigma)$ を $U(\sigma) = \mathrm{Hom}_{G'_{\mathbb{C}}}(V_\sigma, \mathcal{H})$ と定義すると，

$$L(\sigma) = \omega_k(U(\mathfrak{p}_+))U(\sigma).$$

(3) $\widetilde{K_{\mathbb{C}}} \times G'_{\mathbb{C}}$-加群として，

$$\mathcal{H} \simeq \bigoplus_{\sigma \in \widehat{G'_{\mathbb{C}}},\ U(\sigma) \neq 0} U(\sigma) \otimes V_\sigma.$$

証明. まずは，$\mathbb{P} = \mathbb{C}[z\,{}^t\!z]\mathcal{H}$ を証明する．$J = \left(\sum_{i,j} \mathbb{C} z^{(i)}\,{}^t\!z^{(j)}\right)\mathbb{P} \subset \mathbb{P}$ とおく．ま

ず，内積 $(\cdot,\cdot)$ に関し，

$$\begin{aligned}
f \in J^{\perp} &\iff \text{全ての } \varphi \in \mathbb{P},\ i,j \text{ に対し } (f, z^{(i)}\,{}^t z^{(j)}\varphi) = 0 \\
&\iff \text{全ての } \varphi \in \mathbb{P},\ i,j \text{ に対し } (\partial^{(i)}\,{}^t\partial^{(j)} f, \varphi) = 0 \\
&\iff \text{全ての } i,j \text{ に対し } \partial^{(i)}\,{}^t\partial^{(j)} f = 0 \\
&\iff f \in \mathcal{H}
\end{aligned}$$

であるから，$\mathcal{H} = J^{\perp}$．従って，$\mathbb{P} = \mathcal{H} \oplus J$ である．

$f \in \mathbb{P}$ とする．$f \in \mathbb{C}[z\,{}^t z]\mathcal{H}$ を f の次数に関する帰納法で示す．$\deg f = 0$ の時は自明であるから，$\deg f > 0$ とする．$\mathbb{P} = \mathcal{H} \oplus J$ であるから，$f \in J$ としてよい．J の定義から，$g_i \in \mathbb{C}[z\,{}^t z]$ 及び $h_i \in \mathbb{P}$ が存在し，$f = \sum g_i h_i$．$\deg h_i < \deg f$ であるから，帰納法の仮定より $h_i \in \mathbb{C}[z\,{}^t z]\mathcal{H}$．よって，$f \in \mathbb{C}[z\,{}^t z]\mathcal{H}$．以上により（1）が示された．

また，（2）は，

$$\begin{aligned}
L(\sigma) &= \mathrm{Hom}_{G'_{\mathbb{C}}}(V_\sigma, \varpi_k(U(\mathfrak{p}_+))\mathcal{H}) \\
&= \varpi_k(U(\mathfrak{p}_+))\,\mathrm{Hom}_{G'_{\mathbb{C}}}(V_\sigma, \mathcal{H}) \\
&= \varpi_k(U(\mathfrak{p}_+))U(\sigma)
\end{aligned}$$

より示される．

（3）は $\mathcal{H}$ の $G'_{\mathbb{C}}$-加群としての V_σ-等質成分が $U(\sigma) \otimes V_\sigma$（$\sigma \in \widehat{G'_{\mathbb{C}}}$）であることに対応している． (証終)

命題 4.3. $L(\sigma)$ が $(\mathfrak{g}, \widetilde{K_{\mathbb{C}}})$-加群として既約であることと，$U(\sigma)$ が $\widetilde{K_{\mathbb{C}}}$-表現として既約であることは同値である．

証明. 0 でない $v_0 \in V_\sigma$ を固定し，

$$\begin{array}{ccccc}
L(\sigma) & \simeq & L(\sigma)v_0 & \subset & \mathbb{P} \\
\cup & & & & \cup \\
U(\sigma) & \simeq & U(\sigma)v_0 & \subset & \mathcal{H}
\end{array}$$

により $L(\sigma) \subset \mathbb{P}$，$U(\sigma) \subset \mathcal{H}$ とみなす．

まず，$Q \subset U(\sigma)$ を 0 でも全体でもない $\widetilde{K_{\mathbb{C}}}$-部分加群とする．$Q' = Q^{\perp}$ とおく．Q' は $\widetilde{K_{\mathbb{C}}}$ 不変であり，$U(\sigma) = Q \oplus Q'$．これより，

$$L(\sigma) = \varpi_k(U(\mathfrak{p}_+))U(\sigma) = \varpi_k(U(\mathfrak{p}_+))Q + \varpi_k(U(\mathfrak{p}_+))Q'$$

であり，この和は内積 $(\cdot,\cdot)$ に関する直交分解となっている．一方，

$$\varpi_k(U(\mathfrak{p}_+))Q = \varpi_k(U(\mathfrak{g}))Q,$$
$$\varpi_k(U(\mathfrak{p}_+))Q' = \varpi_k(U(\mathfrak{g}))Q'.$$

であるので，$L(\sigma)$ は既約にはなりえない．

逆を示す．$U(\sigma)$ が $\widetilde{K_{\mathbb{C}}}$-表現として既約であるとする．$W \subset L(\sigma)$ を 0 でない $(\mathfrak{g}, \widetilde{K_{\mathbb{C}}})$-部分加群とする．$W$ の最も次数の低い元をとると，$\varpi_k(\mathfrak{p}_-)$ の作用は次数を下げるので，それは多重調和多項式になる．よって，$W \cap U(\sigma) \neq 0$ であるから，既約性から $W \supset U(\sigma)$．従って，

$$W \supset \varpi_k(U(\mathfrak{g}))U(\sigma) = L(\sigma).$$

より，$L(\sigma)$ は $(\mathfrak{g}, \widetilde{K_{\mathbb{C}}})$-加群として既約である．　（証終）

4.3. $\mathbb{P}, L(\sigma)$ の等方表現

$\psi\colon M_{n,k} \to \mathfrak{p}_-$ を

$$\psi(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z\,{}^t z & 0 \end{pmatrix}$$

により定義する．

$$y = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^t g^{-1} \end{pmatrix} \in K_{\mathbb{C}}$$

に対し $\psi(gz) = \mathrm{Ad}(y)\psi(z)$．また，$g' \in G'_{\mathbb{C}}$ に対し $\psi(zg') = \psi(z)$．

以下，記号の省略のために，$0 \le m \le s, t$ を満たす m, s, t に対し

$$E_m^{(s,t)} = \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{s,t}$$

とおく．補題 3.1（3）の冪零元 Y_m は

$$Y_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_m^{(n,n)} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}_-$$

である．

命題 4.4. $m = \min(n,k)$ とおく．

(1)
$$\operatorname{Im}\psi = \overline{\mathcal{O}_m} = \overline{\operatorname{Ad}(K_{\mathbb{C}})Y_m}.$$

(2)
$$\psi^{-1}(Y_m) = E_m^{(n,k)} G'_{\mathbb{C}} \simeq \begin{cases} O(k,\mathbb{C}) & (k \leq n), \\ O(k-n,\mathbb{C})\backslash O(k,\mathbb{C}) & (k > n). \end{cases}$$

証明. （1）$\operatorname{rank} z\,{}^t\!z \leq m$ であるから，$\operatorname{Im}\psi \subset \overline{\mathcal{O}_m}$．逆に，$j = 0, 1, \ldots, m$ に対し
$$\psi(E_j^{(n,k)}) = Y_j \in \mathcal{O}_j.$$
$\operatorname{Im}\psi$ は $\operatorname{Ad}(K_{\mathbb{C}})$-不変であるから，$\operatorname{Im}\psi = \overline{\mathcal{O}_m}$.

（2）
$$\psi^{-1}(Y_m) = \{z \in M_{n,k} \mid z\,{}^t\!z = E_m^{(n,n)}\}$$
である．

まず $k \leq n$ とする．この時 $m = k$.
$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (z_1 \in M_{k,k},\ z_2 \in M_{(n-k),k})$$
とおくと，
$$z\,{}^t\!z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\!z_1 & {}^t\!z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1{}^t\!z_1 & z_1{}^t\!z_2 \\ z_2{}^t\!z_1 & z_2{}^t\!z_2 \end{pmatrix}$$
であるから，$\psi(z) = Y_m$ は
$$\begin{pmatrix} z_1{}^t\!z_1 & z_1{}^t\!z_2 \\ z_2{}^t\!z_1 & z_2{}^t\!z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
と同値である．更にこれは $z_1 \in O(k,\mathbb{C})$ かつ（この時 z_1 は可逆であるから,）$z_2 = 0$ と同値である．よって,
$$\psi^{-1}(Y_m) = \left\{ \begin{pmatrix} O(k,\mathbb{C}) \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = E_m^{(n,k)} G'_{\mathbb{C}} \simeq G'_{\mathbb{C}}$$
を得る．

次に $k > n$ とする．この時 $m = n$.
$$z = \begin{pmatrix} z^{(1)} \\ \vdots \\ z^{(n)} \end{pmatrix} \in \psi^{-1}(Y_m)$$

とすると, $z^{(i)}{}^t z^{(j)} = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$．この時, $z^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は $\mathbb{C}^k = M_{1,k}$ における正規直交系であり，それを拡張して $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(k)}$ を正規直交系とできる．それに対し

$$g' = \begin{pmatrix} z^{(1)} \\ \vdots \\ z^{(k)} \end{pmatrix}$$

とおくと，$g' \in G'_{\mathbb{C}} = O(k, \mathbb{C})$ であり，

$$z = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \end{pmatrix} g' = E_m^{(n,k)} g'$$

となる．従って，

$$\psi^{-1}(Y_m) = E_m^{(n,k)} G'_{\mathbb{C}} \simeq Z_{G'_{\mathbb{C}}}(E_m^{(n,k)}) \backslash G'_{\mathbb{C}} = O(n-k, \mathbb{C}) \backslash O(k, \mathbb{C})$$

を得る． (証終)

以下，$m = \min(n, k)$ とおく．

記号. $n \leq k$ に対し $O(n-k, \mathbb{C}) = \{e\}$ と約束する．

$\mathbb{P}$ に付随する $(S(\mathfrak{g}), \widetilde{K_{\mathbb{C}}})$-加群を求める．ここで，$\mathbb{P}$ は有限生成ではないので，一度既約分解を行い，各既約成分に付随する $(S(\mathfrak{g}), \widetilde{K_{\mathbb{C}}})$-加群をまとめあげたものを $\mathbb{P}$ に付随する $(S(\mathfrak{g}), \widetilde{K_{\mathbb{C}}})$-加群とすることとする．

$\mathbb{P}_j$ を j 次斉次式全体とする．$\mathbb{P} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}_j$ であり，

$$\mathbb{P}_j \xrightarrow{\mathfrak{p}_+} \mathbb{P}_{j+2}$$

$$\mathbb{P}_j \xrightarrow[\widetilde{K_{\mathbb{C}}}]{\mathfrak{k}} \mathbb{P}_j$$

$$\mathbb{P}_j \xrightarrow{\mathfrak{p}_-} \mathbb{P}_{j-2}$$

となる．

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{H}(\alpha)$$

を $\widetilde{K_{\mathbb{C}}}$-加群としての既約分解（$\Lambda$ は添え字集合）とする．この時，

$$\mathbb{P} = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \varpi_k(U(\mathfrak{p}_+))\mathcal{H}(\alpha)$$

は $(\mathfrak{g}, \widetilde{K_{\mathbb{C}}})$-加群としての既約分解となる．また，$\dim \mathcal{H}(\alpha) < \infty$ であるから，$\varpi_k(U(\mathfrak{g}))\mathcal{H}(\alpha)$ に対応する $(S(\mathfrak{g}), \widetilde{K_{\mathbb{C}}})$-加群は

$$\mathrm{gr}(\varpi_k(U(\mathfrak{g}))\mathcal{H}(\alpha), \mathcal{H}(\alpha)) = S(\mathfrak{p}_+)\mathcal{H}(\alpha)$$

となる．$\widetilde{K_{\mathbb{C}}}$ が $\mathbb{P}_j$ を保つことから，各 $\alpha \in \Lambda$ に対し整数 $j(\alpha)$ で $\mathcal{H}(\alpha) \subset \mathbb{P}_{j(\alpha)}$ なるものが存在することに注意しよう．これより，$\mathrm{gr}(\varpi_k(U(\mathfrak{g}))\mathcal{H}(\alpha), \mathcal{H}(\alpha))$ に $\mathfrak{k}$ 及び $\mathfrak{p}_-$ は 0 で作用する．一方，$\mathfrak{p}_+$ は ϖ_k を通じて作用する．

以上より，$\mathbb{P}$ に付随する $(S(\mathfrak{g}), \widetilde{K_{\mathbb{C}}})$-加群は，表現空間は $\mathbb{P}$ であり，$\mathfrak{p}_+$ は ϖ_k により，また $\mathfrak{k}, \mathfrak{p}_-$ は 0 で作用するものと同型であることがわかった．$\mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{p}_+)} \mathbb{P}$ を求よう．

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \xrightarrow{B} & \mathbb{C} \\ (X, Y) & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{-1}}{2} \mathrm{Tr}(XY) \end{array}$$

により $\mathfrak{g}$ 上の非退化対称双一次形式 B を定義し[*9]，これにより $S(\mathfrak{g})$ の各元を $\mathfrak{g}$ 上の多項式と見なすことにする．

補題 4.5. $I(\overline{\mathcal{O}_m}) = \{D \in S(\mathfrak{p}_+) \mid D|_{\overline{\mathcal{O}_m}} = 0\} \subset S(\mathfrak{p}_+)$ とおくと，全ての 0 でない $f \in \mathbb{P}$ に対し $\mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})} f = I(\overline{\mathcal{O}_m})$.

証明.

$$\begin{aligned} \varpi_k(B_{ij}) = \sqrt{-1} z^{(i)} {}^t z^{(j)} &= \sqrt{-1}(z\, {}^t z)_{ij} \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z\, {}^t z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} + E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= B(\psi(z), B_{ij}) \\ &= B_{ij}(\psi(z)) \end{aligned}$$

であるから，$D \in S(\mathfrak{p}_+)$ に対し

$$\varpi_k(D) = D(\psi(z))$$

[*9] Killing 形式とは定数倍しか違わない．

が成り立つ．従って，

$$\begin{aligned} D \in \operatorname{Ann}_{S(\mathfrak{g})} f &\iff \text{全ての } z \in M_{n,k} \text{ に対し } D(\psi(z))f(z) = 0 \\ &\iff D \in I(\overline{\mathcal{O}_m}) \end{aligned}$$

である． （証終）

一般に，有限生成な $U(\mathfrak{g})$-加群 $\mathbb{X}$ に対し $M = \mathrm{gr}(\mathbb{X}; V)$ を考え，$\mathcal{V}(\mathbb{X})$ が既約にとき，対応する素イデアル I に対し部分加群列

$$M \supset IM \supset \cdots \supset I^{n_0}M = 0$$

が等方表現を考える際に考えるものであった．今は，補題 4.5 から $n_0 = 1$ である．よって，定義 2.11 を考慮して，$\widetilde{K_{\mathbb{C}}}(Y_m)$ 加群

$$L(\sigma)/\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))L(\sigma), \quad \mathbb{P}/\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))\mathbb{P}$$

を考える[*10]．但しここで，

$$\mathfrak{m}(Y_m) = \sum_{X \in \mathfrak{p}_+} (X - B(X, Y_m))S(\mathfrak{p}_+) \subset S(\mathfrak{p}_+)$$

は一点 $\{Y_m\}$ に対応する $S(\mathfrak{p}_+)$ の極大イデアルである．

$$\begin{aligned} \varpi_k(X - B(X, Y_m)) &= X(\psi(z)) - X(Y_m) \\ &= X(\psi(z) - Y_m) \end{aligned}$$

であるから，$\mathbb{P}$ のイデアル $\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))\mathbb{P}$ は $\{X(\psi(z) - Y_m) \mid X \in \mathfrak{p}_+\}$ で生成される．従って，

$$\mathcal{V}(\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))\mathbb{P}) = \psi^{-1}(Y_m) \subset M_{n,k}$$

が成り立つ．

命題 4.6. $\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))\mathbb{P}$ は $\mathbb{P}$ の被約イデアルで，

$$\mathbb{P}/\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))\mathbb{P} \simeq \mathbb{C}[\psi^{-1}(Y_m)]$$

が成り立つ．従って，各 $\sigma \in \widehat{G'_{\mathbb{C}}}$ に対し，

$$L(\sigma)/\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))L(\sigma) \simeq \operatorname{Hom}_{G'_{\mathbb{C}}}(V_\sigma, \mathbb{C}[\psi^{-1}(Y_m)])$$

が得られる．

[*10] まだ $L(\sigma)$ の有限性などは何も示されていないため，これらを等方表現と呼ぶわけにはいかない．

証明. Weyl [Wey97] 及び [Yam01, Proposition 5.8] を参照. (証終)

$\widetilde{K_{\mathbb{C}}}(Y_m)$ の $\mathbb{C}[\psi^{-1}(Y_m)] \simeq \mathbb{C}[O(k-n,\mathbb{C})\backslash O(k,\mathbb{C})]$ 上への表現を書こう.
まず, $\widetilde{K_{\mathbb{C}}}(Y_m)$ は,

$$\widetilde{K_{\mathbb{C}}}(Y_m) = \left\{ (\varepsilon, y) \in \widetilde{K_{\mathbb{C}}} \;\middle|\; \begin{array}{l} y = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^t g^{-1} \end{pmatrix}, \\ g^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (g_{11} \in O(m,\mathbb{C})) \end{array} \right\}$$

となる．場合分けをする．$\widetilde{y} = (\varepsilon, y) \in \widetilde{K_{\mathbb{C}}}(Y_m)$ に対し $\varepsilon, g, g_{11}, g_{12}, g_{22}$ を上のようにとっておく.

(1) $k \leq n$ の時.

この時, $m = k$ であり,

$$f \in \mathbb{C}[\psi^{-1}(Y_m)] = \mathbb{C}\left[\begin{pmatrix} O(k,\mathbb{C}) \\ 0 \end{pmatrix}\right] \simeq \mathbb{C}[O(k,\mathbb{C})]$$

に対し

$$(\widetilde{y}f)(w) = \varepsilon^k f(g_{11}w) \qquad (w \in O(k,\mathbb{C})).$$

(2) $k > n$ の時.

この時, $m = n$ かつ $K_{\mathbb{C}}(Y_m) = O(n,\mathbb{C})$ であり,

$$f \in \mathbb{C}[\psi^{-1}(Y_m)] = \mathbb{C}\left[\begin{pmatrix} 1_n & 0 \end{pmatrix} G'_{\mathbb{C}}\right] \simeq \mathbb{C}[O(k-n,\mathbb{C})\backslash O(k,\mathbb{C})]$$

に対し

$$(\widetilde{y}f)(O(k-n,\mathbb{C})w) = \varepsilon^k f\left(O(k-n,\mathbb{C})\begin{pmatrix} g^{-1} & 0 \\ 0 & 1_{k-n} \end{pmatrix} w\right).$$

いずれの場合も,

$$\mathbb{C}[\psi^{-1}(Y_m)] = \mathrm{Ind}_{O(k-n,\mathbb{C})}^{O(k,\mathbb{C})}(1)$$

である．最後の項は Peter-Weyl の定理により,

$$\mathrm{Ind}_{O(k-n,\mathbb{C})}^{O(k,\mathbb{C})}(1) = \bigoplus_{\sigma \in \widehat{G'_{\mathbb{C}}},\ (V_\sigma^*)^{O(k-n,\mathbb{C})} \neq 0} (V_\sigma^*)^{O(k-n,\mathbb{C})} \otimes V_\sigma$$

となる[*11]．従って次を得る.

*11 尚, 条件 $(V_\sigma^*)^{O(k-n,\mathbb{C})} \neq 0$ は $(V_\sigma)^{O(k-n,\mathbb{C})} \neq 0$ と同値である.

定理 4.7. (1)

$$\mathbb{P}/\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))\mathbb{P} \simeq \bigoplus_{\sigma\in\widehat{G'_{\mathbb{C}}},\ (V_\sigma^*)^{O(k-n,\mathbb{C})}\neq 0} (V_\sigma^*)^{O(k-n,\mathbb{C})} \otimes V_\sigma.$$

(2) 全ての $\sigma \in \widehat{G'_{\mathbb{C}}}$ に対し

$$L(\sigma)/\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))L(\sigma) \simeq (V_\sigma^*)^{O(k-n,\mathbb{C})}.$$

特に，$k \leq n$ ならば右辺は V_σ^*.

但し，(1) (2) ともに $\widetilde{K_{\mathbb{C}}}(Y_m)$ は自然な全射準同型 $\widetilde{K_{\mathbb{C}}}(Y_m) \to O(m,\mathbb{C})$ を通じて $(V_\sigma^*)^{O(k-n,\mathbb{C})}$ に作用する.

4.4. 定理 4.1 の証明：Kashiwara-Vergne 再発見

(I) まずは $k \leq n$ とする．この時，全ての $\sigma \in \widehat{G'_{\mathbb{C}}}$ に対し

$$L(\sigma)/\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))L(\sigma) \simeq V_\sigma^*$$

である．特に，全ての $\sigma \in \widehat{G_{\mathbb{C}}}$ に対し $L(\sigma) \neq 0$.

$L(\sigma)$ が既約でないとする．この時，補題 3.5 により，ある 0 でない部分加群 L_1, L_2 が存在し，$L(\sigma) = L_1 \oplus L_2$．従って，

$$L(\sigma)/\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))L(\sigma) = L_1/\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))L_1 \oplus L_2/\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))L_2$$

であるが，左辺は定理 4.7 により既約であるから $L_1/\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))L_1 = 0$ または $L_2/\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))L_2 = 0$．$L_1/\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))L_1 = 0$ とする．中山の補題により，$L_{1\mathfrak{m}(Y_m)} = 0$．よって，$f \in L_1$ とすると，ある $D \in S(\mathfrak{p})_+$ で $D(Y_m) \neq 0$ かつ $\varpi_k(D)f = 0$ なるものが存在する．一方，$D(Y_m) \neq 0$ であるから，$D \notin I(\overline{O}_m) = \mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{p})_+} f$．従って，$\varpi_k(D)f = 0$ ならば $f = 0$ であり，$L_1 = 0$ となって矛盾．よって $L(\sigma)$ は既約である.

また，$L(\sigma_1) \simeq L(\sigma_2)$ とすると，$V_{\sigma_1}^* \simeq V_{\sigma_2}^*$ より，$\sigma_1 \simeq \sigma_2$.

(II) 次に，$k > n$ の時を示す．$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ を $\check{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sp}(k,\mathbb{C})$ に次のように埋め込んでおく.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & -{}^tA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\check{\mathfrak{g}} = \check{\mathfrak{k}} \oplus \check{\mathfrak{p}}$ を複素 Cartan 分解，$\widetilde{K_{\mathbb{C}}}^{\vee}$ を $K_{\mathbb{C}}^{\vee} = \left\{ \begin{pmatrix} g^{\vee} & 0 \\ 0 & {}^t(g^{\vee})^{-1} \end{pmatrix} \mid g^{\vee} \in GL(k, \mathbb{C}) \right\}$ の二重被覆群，$\check{A}_{ij}, \check{B}_{ij}, \check{C}_{ij}$ を $\check{\mathfrak{g}}$ の基底，$\check{\mathbb{P}} = \mathbb{C}[M_{k,k}]$，$\check{\omega}_k$ を $(\check{\mathfrak{g}}, \widetilde{K_{\mathbb{C}}}^{\vee})$ の Weil 表現とする．更に，埋め込み

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P} = \mathbb{C}[M_{n,k}] & \longrightarrow & \check{\mathbb{P}} = \mathbb{C}[M_{k,k}] \\ f & \longmapsto & \check{f} \end{array}$$

を

$$\check{f}\left(\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right) = f(z) \qquad (z \in M_{n,k},\ w \in M_{k-n,k})$$

と定める．これは $(\mathfrak{g}, \widetilde{K_{\mathbb{C}}}) \times G'_{\mathbb{C}}$-準同型.

補題 4.8. $f \in \mathbb{P}$ に対し

(1) 全ての $1 \leq i < j \leq n$ なる i, j に対し $\omega_k(A_{ij})f = 0$ ならば，全ての $1 \leq i < j \leq k$ に対し $\check{\omega}_k(\check{A}_{ij})\check{f} = 0$.

(2) 全ての $1 \leq i < j \leq n$ なる i, j に対し $\omega_k(C_{ij})f = 0$ ならば，全ての $1 \leq i < j \leq k$ に対し $\check{\omega}_k(\check{C}_{ij})\check{f} = 0$.

証明. $\check{f}$ は z_{ij} $(i > n)$ に関し定数であるから，$j > n$ ならば

$$\check{\omega}_k(\check{A}_{ij})\check{f} = z^{(i)}\,{}^t\partial^{(j)}\check{f} = 0,$$
$$\check{\omega}_k(\check{C}_{ij})\check{f} = \sqrt{-1}\partial^{(i)}\,{}^t\partial^{(j)}\check{f} = 0.$$

(証終)

補題 4.8 から，f が $\mathfrak{g}$ に関し最低ウェイトベクトルならば，$\check{f}$ は $\check{\mathfrak{g}}$ に関し最低ウェイトベクトルである．

$$\mathbb{P} = \bigoplus_{\sigma} L(\sigma) \otimes V_{\sigma} \quad \hookrightarrow \quad \check{\mathbb{P}} = \bigoplus_{\sigma} \check{L}(\sigma) \otimes V_{\sigma}$$

から，$L(\sigma) \subset \check{L}(\sigma)$ であり，ここで $\check{L}(\sigma)$ は $k \leq n$ の場合の結果から $(\check{\mathfrak{g}}, \widetilde{K_{\mathbb{C}}}^{\vee})$-加群として既約である．これと補題 4.8 から，$L(\sigma)$ の最低ウェイトベクトルは定数倍を除きただ一つである．従って，$L(\sigma)$ は既約.

また，$L(\sigma_1) \simeq L(\sigma_2)$ とし，f_1, f_2 をそれぞれ $L(\sigma_1), L(\sigma_2)$ の最低ウェイトベクトルとする．この時，補題 4.8 から $\check{f}_i$ は $\check{L}(\sigma_i)$ の最低ウェイトベクトルとなり，そのウェイトは等しい．従って，$\check{L}(\sigma_1) \simeq \check{L}(\sigma_2)$ が得られ，従って $\sigma_1 \simeq \sigma_2$ となる．

$L(\sigma)$ の等方表現[*12]は $(V_\sigma^*)^{O(n-k,\mathbb{C})}$ であるから，$k \leq n$ の場合の既約性の議論と同様にして，$L(\sigma) \neq 0$ と $(V_\sigma^*)^{O(n-k,\mathbb{C})} \neq 0$ は同値である．

以上により定理 4.1 の証明が完了した．同時に次も得られた．

定理 4.9. 既約 $(\mathfrak{g}, \widetilde{K_\mathbb{C}})$-加群 $L(\sigma) \neq 0$ に関し，次が成り立つ．

(1)
$$\mathcal{V}(L(\sigma)) = \overline{\mathcal{O}_m} \qquad (m = \min(n,k)).$$

(2)
$$\mathcal{W}(L(\sigma)) = (V_\sigma^*)^{O(n-k,\mathbb{C})}.$$

問題 4.10（発展問題）. 簡約デュアルペア $(U(p,q), U(k))$ 及び $(SO^*(2n), Sp(k))$ に関する Howe 双対性定理を等方表現を用いて示せ（参考：[Yam01]）．

[*12] 既約性が示されたので，今度は等方表現という言葉が使える．

5. 等方表現と一般 Whittaker 模型

この節では，等方表現を用いてユニタリ最低ウェイト表現に対応に対する一般 Whittaker 模型を記述する．

5.1. 一般 Gelfand-Graev 表現

G を連結半単純 Lie 群とし，K を G の極大コンパクト部分群とする．$\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}(G)$ とし，その他の記号は節 2.1 のものを用いる．

$\mathcal{O}'$ を $\mathfrak{g}_0$ における冪零 G-軌道とする．この時，川中［Kaw85］によりそれに付随する一般 Gelfand-Graev 表現 $\mathrm{Ind}_U^G(\eta)$ が定義・研究された．まずは次の定理から始める．

事実（Jacobson-Morozov の定理）． $Y' \in \mathfrak{g}_0$ を 0 でない冪零元とする．この時，$H', X' \in \mathfrak{g}_0$ で，

$$[H', X'] = 2X',\ [H', Y'] = -2Y',\ [X', Y'] = H'$$

を満たすものが存在する．つまり，

$$\mathfrak{g}_0 \supset \mathbb{R}X' + \mathbb{R}Y' + \mathbb{R}H' \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$$

である．

$Y' \in \mathcal{O}'$ とし，そのような X', H' を一つとり固定する．$\mathfrak{sl}(2)$ の表現論から，

$$\mathfrak{g}_0 = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_0(j),$$
$$\mathfrak{g}_0(j) = \{Z \in \mathfrak{g}_0 \mid [H', Z] = jZ\}$$

が成り立つ．また，$\mathfrak{g}_0$ の Killing 形式 B は $\mathfrak{g}_0(j) \times \mathfrak{g}_0(-j)$ 上非退化である．

補題 5.1.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_0(1) \times \mathfrak{g}_0(1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (Z, W) & \longmapsto & B(Y', [Z, W]) \end{array}$$

は $\mathfrak{g}_0(1)$ 上の symplectic form[*13]を定める．

[*13] 非退化交代双一次形式

証明. 交代性は明らかであるから，非退化であることを示せばよい．

$Z \in \mathfrak{g}_0(1)$ とし，$B(Y', [Z, \mathfrak{g}_0(1)]) = 0$ であるとする．この時，$B([Y', \mathfrak{g}_0(1)], Z) = 0$ である．$\mathfrak{sl}(2)$ の表現論から，$[Y', \mathfrak{g}_0(1)] = \mathfrak{g}_0(-1)$．よって，$B(\mathfrak{g}_0(-1), Z) = 0$．$B$ は $\mathfrak{g}_0(-1) \times \mathfrak{g}_0(1)$ 上非退化であるから，$Z = 0$．（証終）

$\mathfrak{X}$ を $\mathfrak{g}_0(1)$ の全等方的部分空間[14]とし，それに対し $\mathfrak{g}_0$ の冪零部分 Lie 代数 $\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{u}_0(1.5)$ を

$$\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{u}_0(1.5) = \mathfrak{X} \oplus \mathfrak{g}_0(2) \oplus \mathfrak{g}_0(3) \oplus \cdots$$

と定義する．この時，$B(Y', [\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_0]) = 0$．つまり

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{u}_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ Z & \longmapsto & B(Y', Z) \end{array}$$

は Lie 代数の準同型になる．

$U = \exp \mathfrak{u}_0 \subset G$ とおく．$\eta : U \to \mathbb{C}^\times$ を

$$\eta(\exp Z) = \exp(\sqrt{-1} B(Y', Z))$$

と定義すると，これは U の unitary 指標を与える．

定義 5.2. 誘導表現 $\mathrm{Ind}_U^G(\eta)$ を $\mathcal{O}' = \mathrm{Ad}(G)Y'$ に関する**一般 Gelfand-Greav 表現**という．

$\widetilde{\mathfrak{u}} = \mathfrak{g}_0(1) \oplus \mathfrak{g}_0(2) \oplus \cdots$ とし，$\widetilde{U}$ を $\widetilde{\mathfrak{u}}$ に対応する G の連結部分群とする．

$$\begin{array}{ccl} \widetilde{U} & \longleftrightarrow & \widetilde{\mathfrak{u}} = \mathfrak{g}_0(1) \oplus \mathfrak{g}_0(2) \oplus \cdots \\ \cup & & \cup \\ U & \longleftrightarrow & \mathfrak{u}_0 = \mathfrak{u}_0(1.5). \end{array}$$

Kirrilov の orbit method から，η からのユニタリ誘導表現 $L^2\text{-}\mathrm{Ind}_U^{\widetilde{U}}(\eta)$ は $\widetilde{U}$ の既約ユニタリ表現であり，この同型類は $\mathfrak{X}$ の取り方によらない．また，induction by stage $L^2\text{-}\mathrm{Ind}_U^G(\eta) = L^2\text{-}\mathrm{Ind}_{\widetilde{U}}^G(L^2\text{-}\mathrm{Ind}_U^{\widetilde{U}}(\eta))$ により，$L^2\text{-}\mathrm{Ind}_U^G(\eta)$ の同型類は $\mathcal{O}'$ のみにより定まる．

例 5.3. $G = KAN$ を岩澤分解とし，$\mathcal{O}'$ を最大次元の冪零 G-軌道（$\iff \dim \mathcal{O}' = 2\dim N$）とする．この時 $U \simeq N$．$\mathrm{Ind}_N^G(\eta)$ が（一般化されてない）**Gelfand-Graev 表現**である．

[14] $\mathfrak{g}_0(1)$ の部分空間で，$\dim \mathfrak{X} = \dim \mathfrak{g}_0(1)/2$，$B(Y', [\mathfrak{X}, \mathfrak{X}]) = 0$ を満たすもの．

事実（Shalika）． G が quasi-split ならば，$L^2\text{-}\mathrm{Ind}_N^G(\eta)$ は重複度自由である．

orbit が小さくなると，表現は大きくなる（例えば，$\{0\}$ に対応するのは $L^2(G)$ 上に生じる正則表現[*15]）．そのため，一般の $L^2\text{-}\mathrm{Ind}_U^G(\eta)$ が重複度自由であることは望めない．

ここでは，$L^2\text{-}\mathrm{Ind}_U^G(\eta)$ ではなく，次の C^∞ 誘導表現を考える．つまり，

$$\begin{cases} C^\infty(G;\eta) = \{f \in C^\infty(G) \mid f(gu) = \eta(u)^{-1} f(g) \quad (g \in G,\ u \in U)\}, \\ (\pi(g)f)(x) = f(g^{-1}x) \end{cases}$$

と $\mathrm{Ind}_U^G(\eta) = (\pi, C^\infty(G;\eta))$ が実現されているとする．

$$\Gamma_{\mathcal{O}'} = C^\infty(G;\eta)_K = \{f \in C^\infty(G;\eta) \mid \dim\langle \pi(K)f\rangle_{\mathbb{C}} < \infty\}$$

は $(\mathfrak{g}, K)$-加群となる．

定義 5.4. 既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群 $\mathbb{X}$ に対し，埋め込み

$$\mathbb{X} \hookrightarrow \Gamma_{\mathcal{O}'}$$

を $\mathbb{X}$ の $\Gamma_{\mathcal{O}'}$ に関する**一般 Whittaker 模型**とよぶ．

一般 Whittaker 模型の理論的研究は，Kostant，Lynch，松本などによって行われた．例えば次のような結果がある．

定理 5.5（松本 [Mat87, Mat88]）． （1）$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\mathbb{X}, \Gamma_{\mathcal{O}'}) \neq 0$ ならば $\mathcal{O}' \subset \overline{G_{\mathbb{C}}\mathcal{V}(\mathbb{X})}$．

(2) $\mathcal{O}'$ が最大次元の冪零軌道の時，$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\mathbb{X}, \Gamma_{\mathcal{O}'}) \neq 0$ と $\mathrm{Dim}\,\mathbb{X} = \dim N$ は同値．ただし，$\mathrm{Dim}\,\mathbb{X}$ は $\mathbb{X}$ の Gelfand-Kirillov 次元[*16]である．更に，$\dim \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\mathbb{X}, \Gamma_{\mathcal{O}'})$ は $\mathbb{X}$ の Bernstein 次数[*17]と一致する．

一方で，$\mathbb{X}$ が幾何学的に実現されている時，その実現を用いて一般 Whittaker 模型をより具体的に求めることも重要な問題であり，階数の低い古典群の場合に，おもに織田スクールによって研究がなされている．

[*15] ここでは定義してないが

[*16] 随伴多様体の次元．Vogan［Vog91］参照．

[*17] 随伴多様体の次数と等方表現の次元から定まる．

5.2. 誘導表現への埋め込み（一般論）

$\mathbb{X}$ を既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群とし，$\mathbb{X}^*$ を $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{X}, \mathbb{C})$ の K-有限なベクトル全体のなす空間とする．$\mathbb{X}^*$ はまた既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群となる．

(τ, V_τ) を K の既約表現とし，K 加群の埋め込み $\iota_\tau : V_\tau \hookrightarrow \mathbb{X}$ を一つ固定する．この時，τ は K-準同型 $\iota_\tau^* : \mathbb{X}^* \to V_\tau^*$ を自然に定める．

$$
\mathrm{Ind}_K^G(\tau^*) = \begin{cases} C_{\tau^*}^\infty(G) = \{F : G \xrightarrow{C^\infty} V_\tau^* \mid F(kg) = \tau^*(k)F(g)\ (k \in K,\ g \in G)\}, \\ (gF)(x) = F(xg) \end{cases}
$$

と誘導表現を定義する．Frobenius reciprocity により，

$$
\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_K(\mathbb{X}^*, V_\tau^*) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\mathbb{X}^*, C_{\tau^*}^\infty(G)) \\ \xi & \longmapsto & A_\xi \end{array}
$$

が成り立つ．ここで A_ξ は安直には

$$
(A_\xi(v^*))(g) = \xi(gv^*) \quad (g \in G,\ v^* \in \mathbb{X}^*)
$$

と定義したくなるが，このままでは gv^* は定義されていないためうまく機能しない．その代わり，G の既約許容表現 $(\pi, \mathbb{H}^*)$ で $\mathbb{H}_K^* = \mathbb{X}^*$ なるものと，ξ の唯一の連続な拡張 $\widetilde{\xi} : \mathbb{H}^* \to V_\tau^*$ をとって，

$$
(A_\xi(v^*))(g) = \widetilde{\xi}(\pi(g)v^*)
$$

と定義すればよい．$A_\tau = A_{\iota_\tau^*}$ とおく．

定理 5.6（[Yam01, Corollary 1.8.]）． $\mathscr{D}$ を $C_{\tau^*}^\infty(G)$ 上の G-不変微分作用素系で，$(\mathrm{Ker}\,\mathscr{D})_{K\text{-有限}} = A_\tau(\mathbb{X}^*)$ なるものとする．この時，ベクトル空間の同型

$$
\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\mathbb{X}, C^\infty(G;\eta)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ker}\,\mathscr{D} \cap (C^\infty(G;\eta) \otimes V_\tau^*) \\ W & \longleftrightarrow & F \end{array}
$$

が成り立つ．ここで対応は次のように与えられる．$W \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\mathbb{X}, C^\infty(G;\eta))$ に対し $F \in \mathrm{Ker}\,\mathscr{D} \cap (C^\infty(G;\eta) \otimes V_\tau^*)$ は

$$
\langle F(g), v \rangle_{V_\tau^* \times V_\tau} = W(\iota_\tau(v))(g)
$$

と定義される．

つまり，$(\mathfrak{g},K)$-加群の埋め込み

$$W\colon \mathbb{X} \hookrightarrow C^\infty(G;\eta) = \mathrm{Ind}_U^G(\eta)$$

は

$$\begin{cases} F(kgu) = \eta(u)^{-1}\tau^*(k)F(g) & (u \in U,\ k \in K,\ g \in G), \\ \mathscr{D}F = 0 \end{cases}$$

を満たす $F\colon G \to V_\tau^*$ と一対一に対応する．

定理 5.6 の証明のためには，$(\mathfrak{g},K)$-加群版 Peter-Weyl の定理ともいえる次の定理が重要である．

$C^\infty(G)$ を左移動 $(L_g f)(x) = f(g^{-1}x)$ 及び右移動 $(R_g f)(x) = f(xg)$ により $G\times G$ 表現と見なし，$C_K^\infty(G) \subset C^\infty(G)$ を両側 K 有限部分のなす両側 $(\mathfrak{g},K)$-加群とする．この時，既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群 $\mathbb{X}$ と $f \in C_K^\infty(G)$ に対し

$$L_{U(\mathfrak{g})}f \simeq \mathbb{X} \iff R_{U(\mathfrak{g})}f \simeq \mathbb{X}^*$$

が成り立つ [Yam01, Lemma 1.1].

定理 5.6 の証明. まずポイントとして書いた $(\mathfrak{g},K)$-加群版 Peter-Weyl の定理を証明しよう．どちらも証明は同様なので，$R_{U(\mathfrak{g})}f \simeq \mathbb{X}^*$ と仮定して $L_{U(\mathfrak{g})}f \simeq \mathbb{X}$ を導く．

まずは準同型 $\varphi\colon \mathbb{X} \to C^\infty(G)$ を次のようにして構成する．$(\pi,\mathbb{H})$ を G の既約許容表現で $\mathbb{H}_K = \mathbb{X}$ なるものとする．この時 $(\mathbb{H}^*)_K = \mathbb{X}^*$ である．$\varphi\colon \mathbb{X} \to C^\infty(G)$ を

$$\varphi(x)(g) = \langle f, \pi(g)^{-1}x\rangle$$

と定義する．ここで，同型 $R_{U(\mathfrak{g})}f \simeq \mathbb{X}^*$ を通して，$f \in \mathbb{X}^* \simeq (\mathbb{H}^*)_K$ と見なしている．

$\mathrm{Im}\,\varphi$ が f を含むことを示せば良い．f は K-有限であるから，$L_{U(\mathfrak{k})}f$ は有限次元 K 表現．これを (τ, V_τ) とおく．写像 $\Phi\colon \mathrm{Hom}_K(V_\tau, C^\infty(G)) \to C^\infty(G)$ を $\alpha \mapsto \alpha(f)$ と定義すると，V_τ は f により K 上生成されるので，これは単射な $(\mathfrak{g},K)$-加群の準同型を与える．($C^\infty(G)$ には右移動による $(\mathfrak{g},K)$-加群の構造を考える．) また，自然な埋め込み $V_\tau = L_{U(\mathfrak{k})}f \hookrightarrow C^\infty(G)$ の Φ による像は f であるから，$\mathrm{Im}\,\Phi$ は $\mathbb{X}^*$ を含む．従って，これより $\mathbb{X}^* \hookrightarrow \mathrm{Hom}_K(V_\tau, C^\infty(G))$ を得る．$\mathrm{Hom}_K(V_\tau, C^\infty(G)) \simeq C_{\tau^*}^\infty(G)$ であるから，$A_0\colon \mathbb{X}^* \hookrightarrow C_{\tau^*}^\infty(G)$ を得る．

ここで，Frobenius reciprocity

$$\mathrm{Hom}_K(\mathbb{X}^*, V_\tau^*) \simeq \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\mathbb{X}^*, C^\infty_{\tau^*}(G))$$

により A_0 に対応する $T_0^*\colon \mathbb{X}^* \to V_\tau^*$ をとり，これが導く $T_0\colon V_\tau = (V_\tau^*)^* \to (\mathbb{X}^*)^* = \mathbb{X}$ を考える．$x_0 \in \mathbb{X}$ を $x_0 = T_0(f)$ と定義した時，$\varphi(x_0) = f$ となることを示そう．$R_g f \in \mathbb{H}^*$，$T_0(f) \in \mathbb{H}$ と見，また T_0^* を $\mathbb{H}^*$ に拡張しておくと，

$$\begin{aligned}\varphi(x_0)(g) &= \langle f, \pi(g)^{-1}T_0(f)\rangle \\ &= \langle R_g f, T_0(f)\rangle \\ &= (T_0^*(R_g f))(f) \\ &= (A_0(R_g f)(e))(f)\end{aligned}$$

であり，これは A_0 の定義から $(R_g f)(e) = f(g)$ に等しい．

定理の証明にうつる．$\Psi\colon \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\mathbb{X}, C^\infty(G)) \to C^\infty_{\tau^*}(G)$ を $(\Psi(W)(g))(v) = W(\iota_\tau(v))(g)$ と定義した時，$\mathrm{Im}\,\Psi = \mathrm{Ker}\,\mathscr{D}$ を示せば十分である．$C^\infty_{\tau^*}(G)$ に微分まで込めた広義一様収束位相を入れ，$\overline{X}$ で $X \subset C^\infty_{\tau^*}(G)$ の閉包を表すこととする．次の二つを示せば良い．

(1) $\mathrm{Ker}\,\mathscr{D} = \overline{A_\tau(\mathbb{X}^*)}$.
(2) $\mathrm{Im}\,\Psi = \overline{A_\tau(\mathbb{X}^*)}$.

$\delta \in \hat{K}$ に対し，$Q_\delta\colon C^\infty_{\tau^*}(G) \to C^\infty_{\tau^*}(G)$ を次のように定義する．

$$Q_\delta(F) = (\dim\delta)\int_K \overline{\chi_\delta(k)} R_k F dk.$$

ここで χ_δ は δ の指標である．これは δ-isotypic component への射影を与える．Harish-Chandra の結果により，$\displaystyle\sum_{\delta\in\hat{K}} Q_\delta(F)$ は F に広義一様に絶対収束する．

$A_\tau(\mathbb{X}^*)_\delta = Q_\delta(A_\tau(\mathbb{X}^*))$ とおく．次に注意しよう．

$$\overline{A_\tau(\mathbb{X}^*)} = \{F \in C^\infty_{\tau^*}(G) \mid \text{全ての } \delta \in \hat{K} \text{ に対し } Q_\delta(F) \in A_\tau(\mathbb{X}^*)_\delta\}.$$

実際，$\displaystyle\sum_{\delta\in\hat{K}} Q_\delta(F)$ は F に広義一様に絶対収束するのだから，右辺は左辺に含まれる．一方，右辺は $\displaystyle\bigcap_{\delta\in\hat{K}} Q_\delta^{-1}(A_\tau(\mathbb{X}^*)_\delta)$ に等しく，$A_\tau(\mathbb{X}^*)_\delta$ は有限次元であるから閉．よって右辺は閉集合であるが，一方明らかに $A_\tau(\mathbb{X}^*)$ は右辺に含まれる．よって右辺は左辺を含み，両者は一致する．

まずは $\operatorname{Ker}\mathscr{D} = \overline{A_\tau(\mathbb{X}^*)}$ を示そう．$\operatorname{Ker}\mathscr{D}$ は閉集合であり，仮定から $A_\tau(\mathbb{X}^*)$ を含むので $\operatorname{Ker}\mathscr{D} \supset \overline{A_\tau(\mathbb{X}^*)}$．逆に $F \in \operatorname{Ker}\mathscr{D}$ とすると，$\mathscr{D}Q_\delta(F) = Q_\delta(\mathscr{D}F) = 0$ であり，$Q_\delta(F)$ は K-有限であるから，$Q_\delta(F) \in A_\tau(\mathbb{X}^*)$．よって $F \in \overline{A_\tau(\mathbb{X}^*)}$.

最後に，$\operatorname{Im}\Psi = \overline{A_\tau(\mathbb{X}^*)}$ を示す．まず $W \in \operatorname{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\mathbb{X}, C^\infty(G))$ とする．$\delta \in \hat{K}$ を固定し，$\xi\colon \mathbb{X} \to \mathbb{C}$ を

$$\xi(a) = (Q_\delta(W(a)))(e)$$

と定義する．この時，$D \in U(\mathfrak{g})$，$v \in V_\tau$ に対し

$$\begin{aligned}(L_D(Q_\delta(\Phi(W))))(e)(v) &= (L_D(Q_\delta(W(\iota_\tau(v)))))(e) \\ &= (Q_\delta(W(L_D(\iota_\tau(v)))))(e) \\ &= \xi(L_D\iota_\tau(v)) \\ &= L_D A_\tau(\xi)(e)(v)\end{aligned}$$

である．従って，$L_D(\Phi(W)_\delta)(e) = L_D(A_\tau(\xi))(e)$ が成り立ち，ここで $\Phi(W)_\delta$ と $A_\tau(\xi)$ は実解析的であるから，これより $\Phi(W)_\delta = A_\tau(\xi) \in A_\tau(\mathbb{X}^*)$ を得る.

逆に $F \in \overline{A_\tau(\mathbb{X}^*)}$ とする．$Q_\delta(F) \in A_\tau(\mathbb{X}^*)_\delta$．$\hat{K}$ の有限部分集合 S に対し，$Q_S = \sum_{\delta\in S} Q_\delta$ とおく．$v \in V_\tau \setminus \{0\}$ を固定し，$C^\infty_{\tau^*}(G) = \operatorname{Hom}_K(V_\tau, C^\infty(G))$ を $f \mapsto f(v)$ により $C^\infty(G)$ の部分加群と見なすこととする．$Q_S(F) \in A_\tau(\mathbb{X}^*)$ であるから，$R_{U(\mathfrak{g})}(Q_S(F)) \simeq \mathbb{X}^*$ である．従って $(\mathfrak{g},K)$-加群版 Peter-Weyl の定理から $L_{U(\mathfrak{g})}(Q_S(F)) \simeq \mathbb{X}$．$Q_S$ は左作用と可換であるから，$Q_S(L_{U(\mathfrak{g})}(F)) \simeq \mathbb{X}$ が成り立つ．S_1, S_2 を $\hat{K}$ の有限部分集合とし，$S = S_1 \cup S_2$ とおく．すると $Q_{S_i} = Q_{S_i}Q_S$ であり，$Q_{S_i}\colon Q_S(L_{U(\mathfrak{g})}(F)) \to Q_{S_i}(L_{U(\mathfrak{g})}(F))$ は既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群同士の非自明な準同型であるから，同型である．よって

$$\operatorname{Ker}(Q_{S_1}|_{L_{U(\mathfrak{g})}(F)}) = \operatorname{Ker}(Q_S|_{L_{U(\mathfrak{g})}(F)}) = \operatorname{Ker}(Q_{S_2}|_{L_{U(\mathfrak{g})}(F)})$$

であるから，

$$\operatorname{Ker}(Q_S|_{L_{U(\mathfrak{g})}(F)}) = \bigcap_{S'} \operatorname{Ker}(Q_{S'}|_{L_{U(\mathfrak{g})}(F)}) = 0$$

が成り立つ．これにより得る $W\colon \mathbb{X} \simeq L_{U(\mathfrak{g})}(F) \hookrightarrow C^\infty(G)$ から，$\Phi(W) = F$ となり，従って $F \in \operatorname{Im}\Phi$.　　（証終）

注意. $\mathbb{X}$ が離散系列またはユニタリ最高ウェイト加群であるとする．この時，$\mathscr{D}$ としては勾配型不変微分作用素がとれる.

また，$\mathscr{D}$ の原点における主表象を考えることで，$\mathbb{X}$ の等方表現の双対が特定可能である [Yam05].

5.3. ユニタリ最低ウェイト加群の一般 Whittaker 模型

G を Hermite 型実単純 Lie 群とし，その real rank を n とする．$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ と $K_{\mathbb{C}}$-加群として既約分解する．この時，$\mathfrak{p}_-$ の $K_{\mathbb{C}}$ 軌道は，$Sp(n,\mathbb{R})$ の場合と同じように

$$\mathfrak{p}_- = \coprod_{m=0}^{n} \mathcal{O}_m, \quad \overline{\mathcal{O}_m} = \mathcal{O}_0 \cup \mathcal{O}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{O}_m$$

となる．$Y_m \in \mathcal{O}_m$ をとる．$\mathcal{O}_m = \mathrm{Ad}(K_{\mathbb{C}})Y_m$.

L を G のユニタリ最低ウェイト $(\mathfrak{g}, K)$-加群とする．この時，次が成り立つ．

(1) ある $0 \leq m_0 \leq n$ なる m_0 が存在して，全ての 0 でない $f \in L$ に対し $\mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{p}_+)} f = I(\overline{\mathcal{O}_{m_0}})$ が成り立つ．
(2) $\mathcal{V}(L) = \overline{\mathcal{O}_{m_0}}$.
(3) $\mathfrak{m}(Y_{m_0}) \subset S(\mathfrak{p}_+)$ を $\{Y_{m_0}\}$ に対応する極大イデアルとすると，$\mathcal{W}(L) = L/\mathfrak{m}(Y_{m_0})L$.

$X_m \in \mathfrak{p}_+$，$H_m \in \mathfrak{k}$ を (H_m, X_m, Y_m) が $\mathfrak{sl}_2$-triple かつ $\overline{X_m} = Y_m$，$\overline{H_m} = -H_m$ となるようにとる[*18].

例えば $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ の時は，

$$X_m = \begin{pmatrix} 0 & E_m^{(n,n)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_m = \begin{pmatrix} E_m^{(n,n)} & 0 \\ 0 & -E_m^{(n,n)} \end{pmatrix}, \quad Y_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_m^{(n,n)} & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

$$\begin{aligned} X'_m &= \frac{\sqrt{-1}}{2}(H_m - X_m + Y_m), \\ H'_m &= X_m + Y_m, \\ Y'_m &= \frac{\sqrt{-1}}{2}(H_m + X_m - Y_m) \end{aligned}$$

[*18] $X \in \mathfrak{g}$ に対し，$\overline{X}$ は X の $\mathfrak{g}_0$ に関する共役を表す．

とおくと，(X'_m, Y'_m, H'_m) は $\mathfrak{g}_0$ における $\mathfrak{sl}_2$-triple を与える．Y'_m を通る冪零 G_0 軌道 $\mathcal{O}'_m$ は Kostant-関口対応により Y_m を通る冪零 $K_\mathbb{C}$-軌道 $\mathcal{O}_m$ に対応する．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_\mathfrak{p}/K_\mathbb{C} & \xleftrightarrow{\text{Kostant-関口対応}} & \mathcal{N}_{\mathfrak{g}_0}/G_0 \\ \mathcal{O}_m = \mathrm{Ad}(K_\mathbb{C})Y_m & \longleftrightarrow & \mathcal{O}'_m = \mathrm{Ad}(G_0)Y'_m \end{array}$$

となっている．一般 Gelfand-Greav 表現 $\Gamma_{\mathcal{O}'_m} = \mathrm{Ind}_U^G(\eta)$ を考える．

定理 5.7（[Yam01, Theorem 4.8, Theorem 4.9.]）． $\mathcal{V}(L) = \overline{\mathcal{O}_{m_0}}$ となるユニタリ最低ウェイト加群 L について，

$$\dim \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(L, \Gamma_{\mathcal{O}'_m}) = \begin{cases} \infty & (m < m_0) \\ \dim \mathcal{W}(L) & (m = m_0) \\ 0 & (m > m_0) \end{cases}$$

が成り立つ．

$m = m_0$ の時を考える．同型

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(L, \Gamma_{\mathcal{O}'_{m_0}}) \simeq \mathcal{W}(L)^*$$

を与えよう．$(\tau, V_\tau) \subset L$ を最低ウェイト K-type とする．$S(\mathfrak{p}_+) = \mathfrak{m}(Y_{m_0}) + \mathbb{C}1$ に注意すると，

$$L = S(\mathfrak{p}_+)V_\tau = \mathfrak{m}(Y_{m_0})L + V_\tau$$

が成り立つ．従って，

$$\mathcal{W}(L) = L/\mathfrak{m}(Y_{m_0})L = (\mathfrak{m}(Y_{m_0})L + V_\tau)/\mathfrak{m}(Y_{m_0})L \simeq V_\tau/(\mathfrak{m}(Y_{m_0})L \cap V_\tau)$$

であるから，$K_\mathbb{C}(Y_{m_0})$-準同型の完全列

$$V_\tau \to \mathcal{W}(L) \to 0$$

が存在する．これにより $\mathcal{W}(L)^* \subset V_\tau^*$ と見なす時，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(L, \Gamma_{\mathcal{O}'_{m_0}}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{W}(L)^* \subset V_\tau^* \\ W & \longmapsto & (v \mapsto W(v)(1)) \end{array}$$

と与えられる．

5.4. まとめ：三位一体

この講義では，最低ウェイトをもつユニタリ $(\mathfrak{g}, K)$-加群について，等方表現，Howe 双対性及び一般 Whittaker 模型の間に密接なつながりがあることを解説した．

$$\begin{tikzcd} \text{等方表現} \arrow[rr, leftrightarrow, "\S 5"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\S 4"'] & & \text{一般 Whittaker 模型} \arrow[dl, leftrightarrow, dotted] \\ & \text{Howe 双対性} & \end{tikzcd}$$

ただし，点線部分は直接的にはまだ行われてない部分である．また，上記の相互関係をより深く理解するために，（1）最低ウェイトを持つとは限らないより一般の $(\mathfrak{g}, K)$-加群を対象にし，（2）両方が非コンパクトな簡約デュアルペアに対する Howe 双対性定理を扱うことなどは，今後当然研究されるべき重要な課題といえよう．

A. 演習問題解答

5 ページ 問題 1.4

補題 1.3 を証明し，$\pi_{\varepsilon,\nu}$ を誘導表現として実現せよ．

解答. $\zeta \in \mathbb{T}$ とすると，定義から $\rho_{\varepsilon,\nu}(1_2,\zeta) = 1$ である．また，

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \quad g' = \begin{pmatrix} \alpha' & \overline{\beta'} \\ \beta' & \overline{\alpha'} \end{pmatrix}$$

をともに $SU(1,1)$ の元とし，一般に

$$j(g,\zeta) = \overline{\alpha} - \overline{\beta}\zeta$$

とおくと，

$$g^{-1} \cdot \zeta = \frac{-\beta + \alpha\zeta}{\overline{\alpha} - \overline{\beta}\zeta}$$

及び

$$gg' = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \overline{\beta}\beta' & \overline{\alpha'\beta + \overline{\alpha}\beta'} \\ \alpha'\beta + \overline{\alpha}\beta' & \overline{\alpha\alpha' + \overline{\beta}\beta'} \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{aligned} j(gg',\zeta) &= \overline{\alpha}\overline{\alpha'} + \beta\overline{\beta'} - (\overline{\alpha'}\overline{\beta} + \alpha\overline{\beta'})\zeta \\ &= \overline{\alpha'}(\overline{\alpha} - \overline{\beta}\zeta) - \overline{\beta'}(-\beta + \alpha\zeta) \\ &= (\overline{\alpha} - \overline{\beta}\zeta)\left(\overline{\alpha'} - \overline{\beta'}\frac{-\beta + \alpha\zeta}{\overline{\alpha} - \overline{\beta}\zeta}\right) \\ &= j(g,\zeta)j(g', g^{-1} \cdot \zeta) \end{aligned}$$

を得る．従って，

$$\begin{aligned} \rho_{\varepsilon,\nu}(gg',\zeta) &= |j(gg',\zeta)|^{-\nu}\left(\frac{j(gg',\zeta)}{|j(gg',\zeta)|}\right)^{\varepsilon} \\ &= |j(g,\zeta)j(g',g^{-1}\cdot\zeta)|^{-\nu}\left(\frac{j(g,\zeta)j(g',g^{-1}\cdot\zeta)}{|j(g,\zeta)j(g',g^{-1}\cdot\zeta)|}\right)^{\varepsilon} \\ &= \rho_{\varepsilon,\nu}(g,\zeta)\rho_{\varepsilon,\nu}(g',g^{-1}\cdot\zeta) \end{aligned}$$

となり，$\rho_{\varepsilon,\nu}$ は 1-cocycle である．

$1 \in \mathbb{T}$ の固定部分群 H は，

$$\begin{pmatrix} \alpha & \overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \cdot 1 = \frac{\beta + \overline{\alpha}}{\alpha + \overline{\beta}}$$

から，

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a+ci & b-ci \\ b+ci & a-ci \end{pmatrix} \;\middle|\; a^2 - b^2 = 1 \right\}$$

であり，$h = \begin{pmatrix} a+ci & b-ci \\ b+ci & a-ci \end{pmatrix} \in H$ に対し

$$\rho_{\varepsilon,\nu}(h,1) = |a-b|^{-\nu} \left(\frac{a-b}{|a-b|} \right)^{\varepsilon}$$

であるので，$\pi_{\varepsilon,\nu}$ の誘導表現としての実現は，表現空間

$$\left\{ f : G \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{c} f(xh) = |a-b|^{\nu} \left(\dfrac{a-b}{|a-b|} \right)^{\varepsilon} f(x) \\ \left(x \in G,\ h = \begin{pmatrix} a+ci & b-ci \\ b+ci & a-ci \end{pmatrix} \in H \right) \end{array} \right\}$$

に

$$(\pi_{\varepsilon,\nu}(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$$

により $SU(1,1)$ の作用を定めたものとなる．（解答終）

なお，

$$c = \begin{pmatrix} -\sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，$z \mapsto c \cdot z$ は単位円盤を上半平面に写す Cayley 変換を与える．これによる写像 $g \mapsto cgc^{-1}$ により，$SU(1,1)$ は $SL(2,\mathbb{R})$ と同型になり，この同型のもとで，H は上半三角行列全体のなす $SL(2,\mathbb{R})$ の部分群に対応する．

9 ページ 問題 1.8

$\nu - \varepsilon, \nu' - \varepsilon' \notin 2\mathbb{Z}$ とする．この時，$\pi_{\varepsilon,\nu}$ に対応する $(\mathfrak{g}, K)$-加群と $\pi_{\varepsilon',\nu'}$ に対応する $(\mathfrak{g}, K)$-加群が同型であることは，$\varepsilon' = \varepsilon$ かつ $\nu' \in \{\nu, 2-\nu\}$ と同値であることを示せ．

解答. まず，$\pi_{\varepsilon,\nu} \simeq \pi_{\varepsilon,2-\nu}$ を示す．$\nu' = 2-\nu$ とおく．線形写像 $\varphi\colon \mathbb{C}[\zeta,\zeta^{-1}] \to \mathbb{C}[\zeta,\zeta^{-1}]$ を

$$\varphi(\zeta^p) = \begin{cases} \zeta^0 & (p=0) \\ \left(\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} \frac{(\nu'-\varepsilon)/2+k}{(\nu-\varepsilon)/2+k}\right)\zeta^p & (p>0) \\ \left(\displaystyle\prod_{k=0}^{-p-1} \frac{(\nu+\varepsilon)/2+k}{(\nu'+\varepsilon)/2+k}\right)\zeta^p & (p<0) \end{cases}$$

と定義すると，定義から $\varphi(\pi_{\varepsilon,\nu}(H)\zeta^p) = \pi_{\varepsilon,\nu'}(H)\varphi(\zeta^p)$ 及び $k \in K$ に対し $\varphi(\pi_{\varepsilon,\nu}(k)\zeta^p) = \pi_{\varepsilon,\nu'}(k)\varphi(\zeta^p)$ が成り立つ．更に，$p \geq 0$ ならば $\varphi(\pi_{\varepsilon,\nu}(X_+)\zeta^p) = \pi_{\varepsilon,\nu'}(X_+)\varphi(\zeta^p)$ であり，$p \leq 0$ ならば $\varphi(\pi_{\varepsilon,\nu}(X_-)\zeta^p) = \pi_{\varepsilon,\nu'}(X_-)\varphi(\zeta^p)$ であることも明らかである．

$p>1$ の時,

$$\begin{aligned}\varphi(\pi_{\varepsilon,\nu}(X_-)\zeta^p) &= \left(\frac{\nu+\varepsilon}{2}-p\right)\varphi(\zeta^{p-1}) \\ &= \left(\frac{\nu+\varepsilon}{2}-p\right)\left(\prod_{k=0}^{p-2}\frac{(\nu'-\varepsilon)/2+k}{(\nu-\varepsilon)/2+k}\right)\zeta^{p-1} \\ &= \frac{(\nu+\varepsilon)/2-p}{(\nu'+\varepsilon)/2-p}\left(\prod_{k=0}^{p-2}\frac{(\nu'-\varepsilon)/2+k}{(\nu-\varepsilon)/2+k}\right)\pi_{\varepsilon,\nu'}(X_-)\zeta^p \\ &= \frac{((\nu+\varepsilon)/2-p)((\nu-\varepsilon)/2+(p-1))}{((\nu'+\varepsilon)/2-p)((\nu'-\varepsilon)/2+(p-1))}\pi_{\varepsilon,\nu'}(X_-)\varphi(\zeta^p)\end{aligned}$$

であるが,

$$\begin{aligned}&((\nu'+\varepsilon)/2-p)((\nu'-\varepsilon)/2+(p-1)) \\ =&((2-\nu+\varepsilon)/2-p)((2-\nu-\varepsilon)/2+(p-1)) \\ =&((\nu+\varepsilon)/2-p)((\nu-\varepsilon)/2+(p-1))\end{aligned}$$

であるから，$\varphi(\pi_{\varepsilon,\nu}(X_-)\zeta^p) = \pi_{\varepsilon,\nu'}(X_-)\varphi(\zeta^p)$ が成り立つ．$p=1$ でも同様にしてやはり成り立つ．$p<0$ の時 $\varphi(\pi_{\varepsilon,\nu}(X_+)\zeta^p) = \pi_{\varepsilon,\nu'}(X_+)\varphi(\zeta^p)$ も同様に示される．従って，$\pi_{\varepsilon,\nu} \simeq \pi_{\varepsilon,\nu'}$.

逆に $\pi_{\varepsilon,\nu} \simeq \pi_{\varepsilon',\nu'}$ であるとする．まず，$\pi_{\varepsilon,\nu}$ の K-type は $2\mathbb{Z}+\varepsilon$ であることから，$\varepsilon = \varepsilon'$．同型写像 $\varphi\colon \mathbb{C}[\zeta,\zeta^{-1}] \to \mathbb{C}[\zeta,\zeta^{-1}]$ を一つ固定する．すると，$-\varepsilon\varphi(1) =$

$\varphi(\pi_{\varepsilon,\nu}(H)1) = \pi_{\varepsilon,\nu'}(H)\varphi(1)$ であるから，$\varphi(1) = c1$ となる $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在する．この時,

$$\begin{aligned}\varphi(\pi_{\varepsilon,\nu}(X_-)\pi_{\varepsilon,\nu}(X_+)1) &= \left(\frac{\nu-\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{\nu+\varepsilon}{2}-1\right)\varphi(1) \\ &= c\left(\frac{\nu-\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{\nu+\varepsilon}{2}-1\right)1\end{aligned}$$

であるが，ここで左辺は

$$\pi_{\varepsilon,\nu'}(X_-)\pi_{\varepsilon,\nu'}(X_+)c1 = c\left(\frac{\nu'-\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{\nu'+\varepsilon}{2}-1\right)1$$

に等しい．これより,

$$\left(\frac{\nu'-\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{\nu'+\varepsilon}{2}-1\right) = \left(\frac{\nu-\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{\nu+\varepsilon}{2}-1\right)$$

である．従って，$\nu' = \nu$ または $2-\nu$. (解答終)

26 ページ 問題 3.2

補題 3.1 を証明せよ．

解答. 当該行列の左下ブロックのみを考えることにして，$\mathcal{S}^{(n)} = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^tX = X\}$ に $K_{\mathbb{C}} = GL(n,\mathbb{C})$ が $g \cdot X = {}^tg^{-1}Xg^{-1}$ により作用しているとしてよい．$\mathcal{S}^{(n)}_m = GL(n,\mathbb{C})C_m$ とおく．

(1) $X \in \mathcal{S}^{(n)}$，$m = \operatorname{rank} X$ とする．$X \in \mathcal{S}^{(n)}_m$ を m の帰納法で示す．$m = 0$ ならば $X = 0 \in \mathcal{S}^{(n)}_0$．$m > 0$ とする．$X \neq 0$ であるから，ある $v_1 \in \mathbb{C}^n$ で ${}^tv_1Xv_1 \neq 0$. この v_1 を用いて，$\widetilde{v} \in M_{n,n-1}(\mathbb{C})$ を $g = (v_1, \widetilde{v}) \in GL(n,\mathbb{C})$ となるようにとる．すると,

$${}^tgXg = \begin{pmatrix} {}^tv_1Xv_1 & {}^tv_1X\widetilde{v} \\ {}^t\widetilde{v} & {}^t\widetilde{v}X\widetilde{v} \end{pmatrix}$$

であるから，$\sqrt{{}^tv_1Xv_1}\,g^{-1}$ の作用を考えることにより，X の $(1,1)$ 成分は 1 であるとしてよい．この行列を

$$X = \begin{pmatrix} 1 & A \\ {}^tA & B \end{pmatrix} \quad (A \in M_{1,n-1},\ B \in M_{n-1,n-1})$$

と区分けする．この時,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -{}^tA & 1_{n-1} \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -A \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -{}^tAA+B \end{pmatrix}.$$

この式から $\mathrm{rank}(-{}^tAA+B) = m-1$ であり，よって帰納法の仮定から $-{}^tAA+B \in \mathcal{S}_{m-1}^{(n-1)}$．従って $X \in \mathcal{S}_m^{(n)}$．

（2）n を固定し，$\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_m^{(n)}$ とおく．$m_1 \le m \le n$ とする．$\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対し

$$X_\varepsilon = \mathrm{diag}(\overbrace{1,1,\dots,1}^{m_1},\overbrace{\varepsilon,\varepsilon,\dots,\varepsilon}^{m-m_1},\overbrace{0,0,\dots,0}^{n-m}) \in \mathcal{S}_m$$

とおく．すると，$\lim_{\varepsilon\to 0} X_\varepsilon = C_{m_1}$．従って，$C_{m_1} \in \overline{\mathcal{S}_m}$ であるから，$\mathcal{S}_{m_1} \subset \overline{\mathcal{S}_m}$.

一方，$\bigcup_{k=0}^{m} \mathcal{S}_k$ は階数が m 以下の対称行列全体であり，つまり固有多項式の x^k $(k = 0,1,\dots,m)$ の係数が 0 のもの全体である．従ってそれは閉集合．よって $\bigcup_{k=0}^{m} \mathcal{S}_k = \overline{\mathcal{S}_m}$.

（3）$g \in GL(n,\mathbb{C})$ が ${}^tgC_mg = C_m$ を満たす条件を求めればよい．g を次のように区分けする．

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

但し $g_{11} \in M_m(\mathbb{C})$，$g_{12} \in M_{m,n-m}(\mathbb{C})$，$g_{21} \in M_{n-m,m}(\mathbb{C})$，$g_{22} \in M_{n-m}(\mathbb{C})$ である．この時,

$$gC_m{}^tg = \begin{pmatrix} {}^tg_{11}g_{11} & {}^tg_{11}g_{12} \\ {}^tg_{12}g_{11} & {}^tg_{12}g_{12} \end{pmatrix}$$

であるから，$gC_m{}^tg = C_m$ は $g_{11} \in O(n,\mathbb{C})$，$g_{12} = 0$ と同値.　　（解答終）

44 ページ 問題 4.10

簡約デュアルペア $(U(p,q),U(k))$ 及び $(SO^*(2n),Sp(k))$ に関する Howe 双対性定理を等方表現を用いて示せ（参考：[Yam01]）.

解答. （1）$(G,G') = (U(p,q),U(k))$ の時.

$p \geq q$ として一般性を失わない．$n = p + q$ とおく．G の極大コンパクト部分群 K は

$$
\begin{aligned}
K &= \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, g_1 \in U(p),\ g_2 \in U(q) \right\} \\
&\simeq U(p) \times U(q)
\end{aligned}
$$

で与えられる．複素化 $K_{\mathbb{C}}$ は

$$
\begin{aligned}
K_{\mathbb{C}} &= \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, g_1 \in GL(p,\mathbb{C}),\ g_2 \in GL(q,\mathbb{C}) \right\} \\
&\simeq GL(p,\mathbb{C}) \times GL(q,\mathbb{C})
\end{aligned}
$$

である．$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ は $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ と同型であり，$\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathrm{Lie}(K_{\mathbb{C}})$ は

$$
\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, A_1 \in M_p(\mathbb{C}),\ A_2 \in M_q(\mathbb{C}) \right\}
$$

で与えられる．

$$
\mathfrak{p}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \right\}, \quad \mathfrak{p}_- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \right\}
$$

とおく．$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ の基底を次のようにとっておく．

$$
\begin{cases}
A_{ij} = \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & (i,j = 1,2,\dots,p), \\[2em]
A'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix} & (i,j = 1,2,\dots,q), \\[2em]
B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & (i = 1,2,\dots,p,\ j = 1,2,\dots,q), \\[2em]
C_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ij} & 0 \end{pmatrix} & (i = 1,2,\dots,q,\ j = 1,2,\dots,p).
\end{cases}
$$

$$
\widetilde{K_{\mathbb{C}}} = \{ (\varepsilon, y) \in \mathbb{C}^{\times} \times K_{\mathbb{C}} \mid \varepsilon^2 = \det(g_1)\det(g_2) \}
$$

とおく．但し，$y = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$ である．$(\varepsilon, y) \to y$ により $\widetilde{K_{\mathbb{C}}}$ は $K_{\mathbb{C}}$ の二重被覆群となる．またこの写像による $K \subset K_{\mathbb{C}}$ の引き戻し $\widetilde{K}$ は K の二重被覆群となる．

$m = 1, 2, \ldots, q$ に対し $Y_m = \sum_{l=1}^{m} C_{ll}$，$\mathcal{O}_m = \mathrm{Ad}(K_{\mathbb{C}})Y_m$ とおく．

補題 A.1. (1) $\mathfrak{p}_- = \coprod_{j=0}^{q} \mathcal{O}_m$ は $\mathfrak{p}_-$ の $K_{\mathbb{C}}$ 軌道分解を与える．

(2) $\overline{\mathcal{O}_m} = \mathcal{O}_0 \cup \mathcal{O}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{O}_m$.

(3) $K_{\mathbb{C}}(Y_m) = \left\{ \begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in K_{\mathbb{C}} \;\middle|\; g \in GL(m, \mathbb{C}) \right\}$.

$$\mathbb{P} = \mathbb{C}[M_{n,k}], \quad M_{n,k} = \left\{ z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pk} \\ y_{11} & \cdots & y_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{q1} & \cdots & y_{qk} \end{pmatrix} \right\}$$

とおいて，$\mathbb{P}$ 上の Weil 表現を次のように定義する．

$$\begin{cases} \varpi(A_{ij}) = \sum_{l=1}^{k} x_{il} \dfrac{\partial}{\partial x_{jl}} + \dfrac{k}{2}\delta_{ij}, \\ \varpi(A'_{ij}) = -\sum_{l=1}^{k} y_{jl} \dfrac{\partial}{\partial y_{il}} - \dfrac{k}{2}\delta_{ij}, \\ \varpi(B_{ij}) = \sqrt{-1} \sum_{l=1}^{k} x_{il} y_{jl}, \\ \varpi(C_{ij}) = \sqrt{-1} \sum_{l=1}^{k} \dfrac{\partial^2}{\partial x_{jl} \partial y_{il}}. \end{cases}$$

また

$$(\varpi((\varepsilon, y))f)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \varepsilon^{-k}(\det g_1)^k f\left(\begin{pmatrix} {}^t g_1 x \\ g_2^{-1} y \end{pmatrix}\right)$$
$$\left(f \in \mathbb{P},\ y = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \in K_{\mathbb{C}},\ \varepsilon^2 = \det(g_1)\det(g_2)\right)$$

により $\widetilde{K_{\mathbb{C}}}$ の作用を，

$$(\pi(g')f)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} xg' \\ y\,{}^t g'^{-1} \end{pmatrix}\right) \quad (f \in \mathbb{P},\ g' \in G'_{\mathbb{C}})$$

により $G'_{\mathbb{C}}$ の作用を定める．

命題 A.2. $\mathbb{P}$ は ϖ_k 及び π により $(\mathfrak{g}, \widetilde{K_{\mathbb{C}}}) \times G'_{\mathbb{C}}$-加群の構造を持つ．

Killing 形式 B を $B(X, Y) = \sqrt{-1}\,\mathrm{Tr}(XY)$ と正規化しておく．$\psi : M_{n,k} \to \mathfrak{p}_-$ を

$$\psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y\,{}^t x & 0 \end{pmatrix}$$

と定義する．$m = \min(n, q)$ とおく．次のように埋め込み $GL(k-q, \mathbb{C}) \hookrightarrow GL(k, \mathbb{C})$ を定めておく．

$$h \mapsto \begin{pmatrix} 1_q & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}.$$

$k - q \leq 0$ の時 $GL(k-q, \mathbb{C}) = \{e\}$ であるとしておく．

補題 A.3. (1)

$$\mathrm{Im}\,\psi = \overline{\mathcal{O}_m}.$$

(2) $\psi^{-1}(Y_m)$ は次のようになる．

(a) $k \leq q$ ならば，

$$\psi^{-1}(Y_m) = \begin{pmatrix} 1_k \\ 0 \\ 1_k \\ 0 \end{pmatrix} G'_{\mathbb{C}} \simeq G'_{\mathbb{C}}.$$

(b) $k > q = p$ ならば，

$$\psi^{-1}(Y_m) = \begin{pmatrix} 1_q & 0 \\ 1_q & 0 \end{pmatrix} G'_{\mathbb{C}} \simeq GL(k-q, \mathbb{C})\backslash G'_{\mathbb{C}}.$$

(c) $k > q$ かつ $p > q$ ならば $\psi^{-1}(Y_m)$ に $G'_{\mathbb{C}}$ は推移的に作用せず，

$$\widetilde{M}_{p-q,k-q} = \left\{ \widetilde{U} = \begin{pmatrix} 1_q & 0 \\ 0 & U \\ 1_q & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; U \in M_{p-q,k-q} \right\}$$

とおくと $\psi^{-1}(Y_m) = \widetilde{M}_{p-q,k-q} G'_{\mathbb{C}}$ が成り立つ．

証明. $\mathfrak{p}_-$ の左下の成分を取り出すことで，$\mathfrak{p}_-$ を $M_{q,p}$ と同一視する．

(1) 行列の基本変形によれば，$C \in M_{q,p} \simeq \mathfrak{p}_-$ が $\operatorname{rank} C = j$ を満たすならば，ある $g \in K_{\mathbb{C}}$ が存在し，$\operatorname{Ad}(g)C = Y_j$ となる．よって，$\mathcal{O}_j \simeq \{C \in M_{q,p} \mid \operatorname{rank} C = j\}$ であることに注意する．このことから，$\operatorname{Im}\psi \subset \overline{\mathcal{O}_m}$ は明らか．

逆に，$C \in \overline{\mathcal{O}_m}$ とする．補題 A.1 から，ある $j \leq m$ が存在し，$C \in \mathcal{O}_j$．$g = \operatorname{diag}(g_1, g_2) \in K_{\mathbb{C}}$ ($g_1 \in GL(p,\mathbb{C})$，$g_2 \in GL(q,\mathbb{C})$) を $\operatorname{Ad}(g)Y_j = C$ ととれば，

$$\psi\left(\begin{pmatrix} {}^t g_1^{-1} \begin{pmatrix} 1_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ g_2 \begin{pmatrix} 1_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\right) = C$$

である．

(2) (a) この時 $m = k$．$x = {}^t(x', x'')$, $y = {}^t(y', y'')$ ($x' \in M_{k,k}$, $x'' \in M_{p-k,k}$, $y' \in M_{k,k}$, $y'' \in M_{q-k,k}$) とおく．この時,

$$\psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y'\,{}^t x' & y'\,{}^t x'' \\ y''\,{}^t x' & y''\,{}^t x'' \end{pmatrix}$$

であり，これが $Y_m = Y_k$ に等しいとすると，$x', y' \in GL(k,\mathbb{C})$，$x' = {}^t y'^{-1}$，$x'' = 0$，$y'' = 0$．よって，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_k \\ 0 \\ 1_k \\ 0 \end{pmatrix} x'^{-1}$$

である．

(b) (c) この時 $m = q$ である．$x \in M_{p,k}$ を $x = {}^t(x', x'')$ ($x' \in M_{q,k}$, $x'' \in M_{p-q,k}$) と分解する．この時，$y \in M_{q,k}$ に対し

$$\psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (y\,{}^t x', y\,{}^t x'')$$

であるから，この値が $Y_m = Y_q$ であったとすると（a）の証明と同様にして $g \in GL(k,\mathbb{C})$ を，$x'g = (1_q, 0)$，$y\,{}^tg^{-1} = (1_q, 0)$ を満たすようにとることができる．$p = q$ ならばこれで証明完了である．$p > q$ の時は，$x''g = (x_1, x_2)$ ($x_1 \in M_{q,q}$, $x_2 \in M_{q,k-q}$) とすると，

$$y\,{}^tx'' = {}^tx_1$$

となり，従って ${}^t(x,y)g \in \widetilde{M}_{p-q,k-q}$ を得る． （証終）

Sp の場合と同様に，$\sigma \in \widehat{G'_{\mathbb{C}}}$ に対し $L(\sigma) = \mathrm{Hom}_{G'_{\mathbb{C}}}(V_\sigma, \mathbb{P})$ とおく．$\mathfrak{m}(Y_m) = \sum_{X\in\mathfrak{p}_+}(X - B(Y_m, X))S(\mathfrak{p}_+)$ を一点 $\{Y_m\}$ に対応する $S(\mathfrak{p}_+)$ の極大イデアルとする．この時，$(\varpi_k(X - B(Y_m, X))f)(z) = (B(\psi(z), X) - B(Y_m, X))f(z) = X(\psi(z) - Y_m)$ であるから，$\psi(\mathfrak{m}(Y_m))\mathbb{P}$ は $\{X(\psi(z) - Y_m) \mid X \in \mathfrak{p}_+\}$ で生成されるイデアルとなる．従って，

$$\mathcal{V}(\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))\mathbb{P}) = \psi^{-1}(Y_m)$$

であるが，更に次が成り立つ．

命題 A.4. $\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))\mathbb{P}$ は $\mathbb{P}$ の被約イデアルであり，

$$\mathbb{P}/\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))\mathbb{P} \simeq \mathbb{C}[\psi^{-1}(Y_m)],$$
$$L(\sigma)/\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))L(\sigma) \simeq \mathrm{Hom}_{G'_{\mathbb{C}}}(V_\sigma, \mathbb{C}[\psi^{-1}(Y_m)])$$

が成り立つ．

証明. Weyl［Wey97］参照． （証終）

補題 A.3 から，$k \leq q$ であるか，または $k > p = q$ ならば $\psi^{-1}(Y_m) \simeq GL(k-q,\mathbb{C})\backslash G'_{\mathbb{C}}$ である．更に，$k > q$ かつ $p > q$ の時には $\psi^{-1}(Y_m)/G'_{\mathbb{C}} \simeq \widetilde{M}_{p-q,k-q}/\,GL(k-q,\mathbb{C})$ が成り立つことも容易にわかる．

$L(\sigma)/\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))L(\sigma)$ は次のように与えられる．

（1）$k \leq q$ または $k > q = p$ の時．

$$L(\sigma)/\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))L(\sigma) \simeq (V_\sigma^*)^{GL(k-q,\mathbb{C})}$$

（2）$k > q$ かつ $p > q$ の時．

$$L(\sigma)/\varpi_k(\mathfrak{m}(Y_m))L(\sigma) \simeq (V_\sigma^* \otimes \mathbb{C}[\widetilde{M}_{p-q,k-q}])^{GL(k-q,\mathbb{C})}$$

（1）は本文中と同様に Peter-Weyl の定理から従う．（2）は非自明であると思われるので，ここに証明を与える．

（2）の証明.

$$\mathrm{Hom}_{G'_{\mathbb{C}}}(V_\sigma, \mathbb{C}[\psi^{-1}(Y_m)]) \to \mathrm{Hom}_{GL(k-q,\mathbb{C})}(V_\sigma, \mathbb{C}[\widetilde{M}_{p-q,k-q}])$$

を制限写像の誘導する写像であるとする．これが全単射であることを示せばよい．単射性は補題 A.3 から明らかである．

全射であることを示す．$f \in \mathrm{Hom}_{GL(k-q,\mathbb{C})}(V_\sigma, \mathbb{C}[\widetilde{M}_{p-q,k-q}])$ としよう．まず $\mathcal{O} = \{\widetilde{U} \in \widetilde{M}_{p-q,k-q} \mid \mathrm{rank}\, U = \min(p-q, k-q)\}$ とおく．$\mathcal{O}$ は $\widetilde{M}_{p-q,k-q}$ の稠密な部分集合である．また，$\mathcal{O}G'_{\mathbb{C}} \simeq \mathcal{O} \times GL(k-q,\mathbb{C})\backslash G'_{\mathbb{C}}$ であることが簡単に確かめられる．（$x \in \mathcal{O}$ に対し，$xg = x$ ならば $g \in GL(k-q,\mathbb{C})$ ことを確かめればよい．）従って，$\widetilde{f} \in \mathrm{Hom}_{G'_{\mathbb{C}}}(V_\sigma, \mathbb{C}[\mathcal{O}G'_{\mathbb{C}}])$ を $\widetilde{f}(v)(xg) = f(\sigma(g)v)(x)$ により定義することができる．

$\widetilde{f}$ が全体に伸びることを示せばよい．$\widetilde{f}$ を有理的に伸ばし，その極全体のなす集合を考えれば，それは $G'_{\mathbb{C}}$ 不変である．従って，$\widetilde{M}_{p-q,k-q}G'_{\mathbb{C}} = \psi^{-1}(Y_m)$ と $\widetilde{M}_{p-q,k-q}$ では正則であることを考えれば，$\widetilde{f}$ は全体で正則である． （証終）

次が $(U(p,q), U(k))$ における Howe 双対性定理である．

定理 A.5. （1）$L(\sigma) \neq 0$ のとき，$L(\sigma)$ は既約 $(\mathfrak{g}, \widetilde{K_{\mathbb{C}}})$-加群．
（2）$\sigma_1, \sigma_2 \in \widehat{G'_{\mathbb{C}}}$，$L(\sigma_1) \simeq L(\sigma_2) \neq 0$ ならば $V_{\sigma_1} \simeq V_{\sigma_2}$.
（3）

$$\begin{aligned}&\{\sigma \in \widehat{G'_{\mathbb{C}}} \mid L(\sigma) \neq 0\} \\ &\quad = \begin{cases} \widehat{G'_{\mathbb{C}}} & (k \leq q), \\ \{\sigma \in \widehat{G'_{\mathbb{C}}} \mid V_\sigma^{GL(k-q,\mathbb{C})} \neq 0\} & (k > q = p), \\ \{\sigma \in \widehat{G'_{\mathbb{C}}} \mid (V_\sigma^* \otimes \mathbb{C}[\widetilde{M}_{p-q,k-q}])^{GL(k-q,\mathbb{C})} \neq 0\} & (\text{それ以外}). \end{cases}\end{aligned}$$

証明. $(Sp(n,\mathbb{R}), O(k))$ の場合とほぼ同様である．$k \leq q$ の時は，次の事実に注意して $(Sp(n,\mathbb{R}), O(k))$ の場合と全く同様に証明できる．

補題 A.6. $k \leq q$ とする．$\psi^{-1}(Y_m)$ を補題 A.1 により $G'_{\mathbb{C}}$ と同一視する．この時，

$f \in \mathbb{C}[\psi^{-1}(Y_m)]$ への

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_1 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in K_{\mathbb{C}}(Y_m)$$

の作用は,

$$(gf)(g') = f({}^t g_1 g') \quad (g' \in G')$$

で与えられる.

$k > q$ の場合は，埋め込み

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P} & \longrightarrow & \mathbb{C}[M_{k+\max(p,k),k}] \\ f & \longmapsto & \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right) \right) \end{array}$$

を用いてやはり $(Sp(n,\mathbb{R}), O(k))$ の議論を用いることができる． （証終）

最後に，条件 $L(\sigma) \neq 0$ を最高ウェイトの形で述べることとする．最高ウェイト理論によれば，$GL(k,\mathbb{C})$ の有限次元既約表現は $\{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k,\ a_i \in \mathbb{Z}\}$ でパラメトライズされる．最高ウェイト λ を持つ $GL(k,\mathbb{C})$ の既約表現を $\sigma_{k,\lambda}$ と書こう．使うのは次の二つの事実である．証明に関しては，たとえば Howe [How95] を参照のこと．

定理 A.7（(GL, GL)-duality）． $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$\mathbb{C}[M_{k,l}]$ を $((g,g')f)(x) = f({}^t g^{-1} x g'^{-1})$ により $GL(k,\mathbb{C}) \times GL(l,\mathbb{C})$-表現と見なすこととする．この時, $\mathbb{C}[M_{k,l}]$ の既約分解は $m = \min(k,l)$ とおいた時,

$$\mathbb{C}[M_{k,l}] = \bigoplus_{a_1 \geq \cdots \geq a_m \geq 0} \sigma_{k,(a_1,\ldots,a_m,0\ldots,0)} \boxtimes \sigma_{l,(a_1,\ldots,a_m,0\ldots,0)}$$

となる．

定理 A.8． $\mathrm{Hom}_{GL(k-1,\mathbb{C})}(\sigma_{k-1,(c_1,\ldots,c_{k-1})}, \sigma_{k,(a_1,\ldots,a_k)}) \neq 0$ は，$a_1 \geq c_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq c_{k-1} \geq a_k$ と同値である．

これらの事実より，次が得られる．

定理 A.9. $L(\sigma_{k,\lambda}) \neq 0$ は λ が次の形をしていることと同値である．

$$\lambda = (a_1, \ldots, a_i, 0, \ldots, 0, -b_j, \ldots, -b_1).$$

ここで，$a_1 \geq \cdots \geq a_i \geq 0$，$b_1 \geq \cdots \geq b_j \geq 0$，$i \leq p$，$j \leq q$，$i + j \leq k$.

証明. 定理 A.7 から，ある $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_r \geq 0$ が存在し，$\sigma_{k,\lambda}|_{GL(k-q,\mathbb{C})} \supset \sigma_{k-q,(a_1,\ldots,a_r,0,\ldots,0)}$ となるための条件を調べれば良い．ただし，$r = \min(k-q, p-q)$ である．

まず，$\lambda = (a_1, \ldots, a_i, 0, \ldots, 0, -b_j, \ldots, -b_1)$ が定理で述べられていた形をしているとする．この時，$\lambda_s = (a_1, \ldots, a_{i-s}, 0, \ldots, 0, -b_{j-s}, \ldots, -b_1) \in \mathbb{Z}^{k-s}$ とおくと，定理 A.8 から $\sigma_{k-s,\lambda_s}|_{GL(k-s-1,\mathbb{C})} \supset \sigma_{k-s-1,\lambda_{s-1}}$．これより最初に述べた条件が満たされる．

逆に最初に述べた条件が満たされているとしよう．$\lambda = (c_1, \ldots, c_k)$ とおく．この時，ある $\lambda_s = (c_1^{(s)}, \ldots, c_s^{(s)})$ $(s \geq k-q)$ が存在し，$c_1^{(s)} \geq c_1^{(s-1)} \geq c_2^{(s)} \geq \cdots \geq c_{s-1}^{(s-1)} \geq c_s^{(s)}$，$c_i^{(k)} = c_i$，$c_i^{(k-q)} \geq 0$，$c_j^{(k-q)} = 0$ $(j > p-q)$ が成り立つ．従って，$i > p$ ならば $c_i = c_i^{(k)} \leq c_{i-1}^{(k-1)} \leq \cdots \leq c_{i-q}^{(k-q)} = 0$ である．また，$i \leq k-q$ ならば $c_i = c_i^{(k)} \geq c_i^{(k-1)} \geq \cdots \geq c_i^{(k-q)} \geq 0$ である．よって，λ は定理の形をしていなければならない．（証終）

（2）$(G, G') = (SO^*(2n), Sp(k))$ の場合.

G の極大コンパクト部分群 K は

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^t g^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; g \in U(n) \right\} \simeq U(n)$$

で与えられる．複素化 $K_{\mathbb{C}}$ は

$$K_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^t g^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; g \in GL(n,\mathbb{C}) \right\} \simeq GL(n,\mathbb{C})$$

となり，$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)_{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$ である．但し，$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$ は次のように実現しておく．

$$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & -{}^t A \end{pmatrix} \;\middle|\; A, B, C \in M_n(\mathbb{C}),\ {}^t B = -B,\ {}^t C = -C \right\}.$$

$\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathrm{Lie}(K_{\mathbb{C}})$ は

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in M_n(\mathbb{C}) \right\}$$

である．$\mathfrak{p}_\pm \subset \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ を

$$\mathfrak{p}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \right\}, \quad \mathfrak{p}_- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \right\}$$

と定める．$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ の基底を

$$\begin{cases} A_{ij} = \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & -E_{ji} \end{pmatrix} & (1 \le i, j \le n), \\ \\ B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} - E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & (1 \le i < j \le n), \\ \\ C_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ij} - E_{ji} & 0 \end{pmatrix} & (1 \le i < j \le n) \end{cases}$$

とする．$Y_m = \displaystyle\sum_{l=1}^{m} C_{l,l+m}$，$\mathcal{O}_m = \mathrm{Ad}(K_{\mathbb{C}})Y_m$ とおく．

補題 A.10. （1）$\mathfrak{p}_- = \displaystyle\coprod_{m=0}^{n} \mathcal{O}_m$ は $\mathfrak{p}_-$ の $K_{\mathbb{C}}$-軌道分解を与える．

(2) $\overline{\mathcal{O}_m} = \mathcal{O}_0 \cup \mathcal{O}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{O}_m$.

(3) $K_{\mathbb{C}}(Y_m) = \left\{ \begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^tg^{-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \;\middle|\; g \in Sp(m, \mathbb{C}) \right\}$.

$$\mathbb{P} = \mathbb{C}[M_{n,2k}],$$

$$M_{n,2k} = \left\{ z = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & y_{11} & \cdots & y_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nk} & y_{n1} & \cdots & y_{nk} \end{pmatrix} \right\}$$

とおいて，$\mathbb{P}$ 上の Weil 表現を次のように定義する．

$$\begin{cases} \varpi_k(A_{ij}) = \displaystyle\sum_{p=1}^{k} x_{ip}\frac{\partial}{\partial x_{jp}} + \sum_{p=1}^{k} y_{ip}\frac{\partial}{\partial y_{jp}} + k\delta_{ij} & (1 \leq i, j \leq n), \\ \varpi_k(B_{ij}) = \sqrt{-1}\displaystyle\sum_{p=1}^{k}(x_{ip}y_{jp} - x_{jp}y_{ip}) & (1 \leq i < j \leq n), \\ \varpi_k(C_{ij}) = \sqrt{-1}\displaystyle\sum_{p=1}^{k}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_{ip}\partial y_{jp}} + \frac{\partial^2}{\partial x_{jp}\partial y_{ip}}\right) & (1 \leq i < j \leq n). \end{cases}$$

また

$$\left(\varpi_k\left(\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^t g^{-1} \end{pmatrix}\right) f\right)(z) = (\det g)^k f({}^t g z) \quad \left(\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^t g^{-1} \end{pmatrix} \in K_{\mathbb{C}}\right)$$

により $K_{\mathbb{C}}$ の作用を，

$$(\pi(g')f)\left(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} xg' & yg' \end{pmatrix}\right) \quad (g' \in G'_{\mathbb{C}})$$

により $G'_{\mathbb{C}}$ の作用を定める．

補題 A.11. (ϖ_k, π) は $\mathbb{P}$ の $(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}}) \times G'_{\mathbb{C}}$-加群の構造を定める．

Killing 形式 B を $B(X,Y) = \sqrt{-1}\,\mathrm{Tr}(XY)$ と正規化しておく．$\psi\colon M_{n,2k} \to \mathfrak{p}_-$ を

$$\psi(z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ zJ_k{}^t z & 0 \end{pmatrix}$$

と定める．但し，

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1_k \\ -1_k & 0 \end{pmatrix} \in M_{2k}$$

である．r を $n/2$ を越えない最大の整数[*19]とし，$m = \min(r,k)$ とおく．次のように埋め込み $Sp(k-r,\mathbb{C}) \hookrightarrow Sp(k,\mathbb{C})$ を定めておく．

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & 1_r & 0 \\ 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{pmatrix}.$$

$k - r \leq 0$ の時 $Sp(k-r,\mathbb{C}) = \{e\}$ であるとしておく．

[*19] $SO^*(2n)$ の real rank.

命題 A.12. （1）

$$\operatorname{Im}\psi = \overline{\mathcal{O}_m}.$$

（2）$\psi^{-1}(Y_m)$ は次のようになる．

（a）$k \leq r$ の時．

$$\psi^{-1}(Y_m) = \begin{pmatrix} 1_{2k} \\ 0 \end{pmatrix} G'_{\mathbb{C}} \simeq G'_{\mathbb{C}}.$$

（b）$k > r$ かつ n が偶数の時．

$$\psi^{-1}(Y_m) = \begin{pmatrix} 1_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_r & 0 \end{pmatrix} G'_{\mathbb{C}} \simeq Sp(k-r,\mathbb{C}) \backslash Sp(k,\mathbb{C})$$

（c）$k > r$ かつ n が奇数の時．$z = (z_1, z_2) \in M_{1,2(k-r)}$ に対し

$$\tilde{z} = \begin{pmatrix} 1_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_r & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & z_2 \end{pmatrix} \in M_{n,2k}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(Y_m) &= (0,0,\dots,0)\tilde{\ } G'_{\mathbb{C}} \amalg (1,0,\dots,0)\tilde{\ } G'_{\mathbb{C}} \\ &\simeq (Sp(k-r,\mathbb{C}) \backslash Sp(k,\mathbb{C})) \amalg (Sp(k-r-1,\mathbb{C}) \backslash Sp(k,\mathbb{C})) \end{aligned}$$

である．

証明. 左下の成分を取り出すことにより，$\mathfrak{p}_-$ を $n \times n$ の交代行列全体のなす空間と同一視しておく．

（1）交代行列の標準化によれば，$\mathcal{O}_j$ は $\operatorname{rank} C = 2j$ なる交代行列全体と一致する．このことより，$\operatorname{Im}\psi \subset \overline{\mathcal{O}_m}$ が従う．逆の包含関係は，

$$\psi\left(\begin{pmatrix} 1_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = Y_j$$

であることと，$\operatorname{Im}\psi$ が $K_{\mathbb{C}}$ の作用に関して閉じていることから従う．

（2）（a）$z = {}^t(z_1, z_2)$（$z_1 \in M_{2k,2k}$，$z_2 \in M_{2k-n,2k}$）とおけば，$\psi(z) = Y_m$ から $z_1 \in Sp(2k,\mathbb{C})$，$z_2 = 0$ が成り立つ．よって，$z = {}^t(1_{2k}, 0) z_1$ である．

（b）（c）$Z = {}^t(x, y, z')$（$x, y \in M_{r,2k}$，$Z' \in M_{n-2r,2k}$）とおく．$\psi(Z) = Y_m$ とすれば，x, y の各行は symplectic basis の一部をなす．それを延長し symplectic basis

を作ることで，ある $x', y' \in M_{2k-r,2k}$ が存在し，$\tilde{x} = {}^t(x, x')$，$\tilde{y} = {}^t(y, y')$ とおけば $g = {}^t(\tilde{x}, \tilde{y}) \in Sp(2k, \mathbb{C})$ となる．よって $n = 2r$ ならば

$$Z = \begin{pmatrix} 1_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_r & 0 \end{pmatrix} g$$

を得る．$n = 2r+1$ ならば，$Zg \in \psi^{-1}(Y_m)$ であることから $Z = \tilde{z}$ の形である ($z \in M_{1,2(k-r)}$)．更に，下でやるように $Sp(k-r, \mathbb{C})$ を $Sp(k, \mathbb{C})$ に埋め込んでおくと，$g \in Sp(k-r, \mathbb{C})$ に対し $\tilde{z}g = \widetilde{zg}$ であるので，後は $M_{1,2(k-r)}$ における $Sp(2(k-r), \mathbb{C})$ 軌道が 0 とそれ以外であることに注意すればよい． (証終)

$\sigma \in \widehat{G'_{\mathbb{C}}}$ に対し $L(\sigma) = \mathrm{Hom}_{G'_{\mathbb{C}}}(V_\sigma, \mathbb{P})$ とおく．$\mathfrak{m}(Y_m) = \sum_{X \in \mathfrak{p}_+} (X - B(Y_m, X))S(\mathfrak{p}_+)$ を一点 $\{Y_m\}$ に対応する $S(\mathfrak{p}_+)$ の極大イデアルとする．この時，$(\omega_k(X - B(Y_m, X))f)(z) = (B(\psi(z), X) - B(Y_m, X))f(z) = X(\psi(z) - Y_m)$ であるから，$\psi(\mathfrak{m}(Y_m))\mathbb{P}$ は $\{X(\psi(z) - Y_m) \mid X \in \mathfrak{p}_+\}$ で生成されるイデアルとなる．従って，

$$\mathcal{V}(\omega_k(\mathfrak{m}(Y_m))\mathbb{P}) = \psi^{-1}(Y_m)$$

であるが，更に次が成り立つ．

命題 A.13. $\omega_k(\mathfrak{m}(Y_m))\mathbb{P}$ は $\mathbb{P}$ の被約イデアルであり，

$$\mathbb{P}/\omega_k(\mathfrak{m}(Y_m))\mathbb{P} \simeq \mathbb{C}[\psi^{-1}(Y_m)],$$
$$L(\sigma)/\omega_k(\mathfrak{m}(Y_m))L(\sigma) \simeq \mathrm{Hom}_{G'_{\mathbb{C}}}(V_\sigma, \mathbb{C}[\psi^{-1}(Y_m)])$$

が成り立つ．

証明. Weyl［Wey97］を参照． (証終)

$k > r$ かつ r が奇数の時

$$\widetilde{M}_{1,2(k-r)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_r & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & z_2 \end{pmatrix} \middle|\ z_1, z_2 \in M_{1,k-r} \right\}$$

とおく．この時，$L(\sigma)/\omega_k(\mathfrak{m}(Y_M))L(\sigma)$ は次のように与えられる．

(1) $k \leq r$ または r が偶数の時

$$L(\sigma)/\omega_k(\mathfrak{m}(Y_m))L(\sigma) \simeq (V_\sigma^*)^{Sp(k-r,\mathbb{C})}.$$

(2) $k>r$ かつ r が奇数の時.

$$L(\sigma)/\omega_k(\mathfrak{m}(Y_m))L(\sigma)\simeq (V_\sigma^*\otimes\mathbb{C}[\widetilde{M}_{1,k-r}])^{Sp(k-r,\mathbb{C})}.$$

証明は $(U(p,q),SU(k))$ の時と全く同様である．次が $(SO^*(2n),Sp(k))$ における Howe 双対性定理である.

定理 A.14. (1) $L(\sigma)\neq 0$ のとき，$L(\sigma)$ は既約 $(\mathfrak{g},K_{\mathbb{C}})$-加群.
(2) $\sigma_1,\sigma_2\in\widehat{G'_{\mathbb{C}}}$，$L(\sigma_1)\simeq L(\sigma_2)\neq 0$ ならば $V_{\sigma_1}\simeq V_{\sigma_2}$.
(3)

$$\{\sigma\in\widehat{G'_{\mathbb{C}}}\mid L(\sigma)\neq 0\}=$$
$$\begin{cases}\widehat{G'_{\mathbb{C}}} & (k\leq r),\\ \{\sigma\in\widehat{G'_{\mathbb{C}}}\mid V_\sigma^{Sp(k-r,\mathbb{C})}\neq 0\} & (k>r\text{ かつ }n\text{ が偶数}).\\ \{\sigma\in\widehat{G'_{\mathbb{C}}}\mid (V_\sigma^*\otimes\mathbb{C}[\widetilde{M}_{1,2(k-r)}])^{Sp(k-r,\mathbb{C})}\neq 0\} & (k>r\text{ かつ }n\text{ が奇数}).\end{cases}$$

証明. 証明はやはり $(Sp(2n),O(k))$ の場合とほぼ同様である．$k\leq r$ の時は今度は次の事実に注意し，$(Sp(2n),O(k))$ の場合と全く同様に証明される.

補題 A.15. $k\leq r$ とする．$\psi^{-1}(Y_m)$ を補題 A.10 により $G'_{\mathbb{C}}$ と同一視する．この時，$f\in\mathbb{C}[\psi^{-1}(Y_m)]$ への

$$g=\begin{pmatrix}g_1&0&0&0\\ *&*&0&0\\ 0&0&{}^tg_1^{-1}&*\\ 0&0&0&*\end{pmatrix}\in K_{\mathbb{C}}(Y_m)$$

の作用は

$$(gf)(g')=f({}^tg_1g')\quad(g'\in G')$$

で与えられる.

$l>r$ の場合は，埋め込み

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}[M_{n,2k}]&\longrightarrow&\mathbb{C}[M_{2k,2k}]\\ f&\longmapsto&\left(\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}\mapsto f(z_1)\right)\end{array}$$

を使うことにより，やはり $(Sp(2n),O(k))$ と同様に証明できる． (証終)

最後に，条件 $L(\sigma) \neq 0$ を最高ウェイトの言葉で言い換えることにしよう．最高ウェイト理論により，$Sp(k,\mathbb{C})$ の有限次元既約表現は $\{(a_1,a_2,\ldots,a_k) \mid a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 0,\ a_i \in \mathbb{Z}\}$ でパラメトライズされる．($(U(p,q),U(k))$ の場合と記号が重なるが，) 最高ウェイト λ を持つ $Sp(k,\mathbb{C})$ の既約表現を $\sigma_{k,\lambda}$ と書く．$(U(p,q),U(k))$ の時と同様に，次の二つの定理を用いる．証明はやはり Howe [How95] を参照．

定理 A.16. $\mathbb{C}[\mathbb{C}^{2k}]$ を $(gf)(x) = f({}^t gx)$ により $Sp(k,\mathbb{C})$ 表現と見なすと，その既約分解は

$$\mathbb{C}[\mathbb{C}^{2k}] = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \sigma_{k,(n,0,\ldots,0)}$$

となる．

定理 A.17. $\mathrm{Hom}_{Sp(k-1,\mathbb{C})}(\sigma_{k-1,(c_1,\ldots,c_{k-1})},\sigma_{k,(a_1,\ldots,a_k)}) \neq 0$ は，$a_1 \geq c_1 \geq a_3$, $a_2 \geq c_2 \geq a_4$，…，$a_{k-2} \geq c_{k-2} \geq a_k$, $a_{k-1} \geq c_{k-1}$ と同値である．

これらより次を得る．

定理 A.18. $L(\sigma_{k,\lambda}) \neq 0$ は λ が次の形をしていることと同値である．

$$\lambda = (a_1,a_2,\ldots,a_n,0,\ldots,0).$$

ここで，$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$.

証明. 定理 A.16 から，ある a が存在し $\sigma_{k,\lambda}|_{Sp(k-r,\mathbb{C})} \supset \sigma_{k-r,(a,0,\ldots,0)}$ となる条件を調べればよい．ただし，ここでもし r が偶数ならば，$a=0$ である．

λ が定理にあるような形をしているとして，$\lambda_s = (a_1,\ldots,a_{2s-2k+n},0,\ldots,0)$ と $Sp(s,\mathbb{C})$ の最高ウェイトを定義すると，定理 A.17 から $\sigma_{s,\lambda_s}|_{Sp(s-1,\mathbb{C})} \supset \sigma_{s-1,\lambda_{s-1}}$ である．よって最初に述べた条件が従う．

逆に最初に述べた条件が満たされているとすると，$Sp(s,\mathbb{C})$ の最高ウェイト $\lambda_s = (a_1^{(s)},\ldots,a_s^{(s)})$ が存在して $\sigma_{s,\lambda_s}|_{Sp(s-1)} \supset \sigma_{s-1,\lambda_{s-1}}$，$\lambda_k = \lambda$，$\lambda_{k-r} = (a,0,\ldots,0)$ (r が偶数なら $a=0$)．よって $i > n$ とすると，$a_i^{(k)} \leq a_{i-2}^{(k-1)} \leq \cdots \leq a_{i-2r}^{(k-r)} = 0$ より $a_i^{(k)} = 0$. よって $\lambda = \lambda_k$ は定理に述べた形をしていなければならない．　(証終)

(解答終)

なお，簡約デュアルペア $(Sp(n,\mathbb{R}),O(k))$ の場合についても，上の議論と同様にして $L(\sigma) \neq 0$ なる $\sigma \in \widehat{G'_{\mathbb{C}}}$ を具体的に特定することができる（詳細は [AbeYam]を

参照).

参考文献

［AbeYam］ N. Abe and H. Yamashita, *Howe duality correspondence and isotropy representations for unitary highest weight modules (tentative)*, in preparation.

［How89］ R. Howe, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), no. 2, 539–570.

［How95］ R. Howe, *Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity-free actions and beyond*, The Schur lectures (1992) (Tel Aviv), Israel Math. Conf. Proc., vol. 8, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1995, pp. 1–182.

［Kaw85］ N. Kawanaka, *Generalized Gel′fand-Graev representations and Ennola duality*, Algebraic groups and related topics (Kyoto/Nagoya, 1983), Adv. Stud. Pure Math., vol. 6, North-Holland, Amsterdam, 1985, pp. 175–206.

［KV78］ M. Kashiwara and M. Vergne, *On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials*, Invent. Math. **44** (1978), no. 1, 1–47.

［Mat87］ H. Matumoto, *Whittaker vectors and associated varieties*, Invent. Math. **89** (1987), no. 1, 219–224.

［Mat88］ H. Matumoto, *Whittaker vectors and the Goodman-Wallach operators*, Acta Math. **161** (1988), no. 3-4, 183–241.

［Sek87］ J. Sekiguchi, *Remarks on real nilpotent orbits of a symmetric pair*, J. Math. Soc. Japan **39** (1987), no. 1, 127–138.

［Vog91］ D. A. Vogan, Jr., *Associated varieties and unipotent representations*, Harmonic analysis on reductive groups (Brunswick, ME, 1989), Progr. Math., vol. 101, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991, pp. 315–388.

［Wey97］ H. Weyl, *The classical groups*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, Their invariants and representations, Fifteenth printing, Princeton Paperbacks.

[Yam01] H. Yamashita, *Cayley transform and generalized Whittaker models for irreducible highest weight modules*, Astérisque (2001), no. 273 "Nilpotent orbits, associated cycles and Whittaker models for highest weight representations", 81–137.

[Yam05] H. Yamashita, *Isotropy representation for Harish-Chandra modules*, Infinite Dimensional Harmonic Analysis (2005), 325–351.

[整数] 高瀬幸一編，第 4 回整数論サマースクール報告集「Weil 表現入門」，1996.

[松本] 松本久義，Enveloping algebra 入門，東京大学数理科学セミナリーノート 11，1995.

[平井・山下] 平井武，山下博，表現論入門セミナー，遊星社，2003.

[大島・小林] 大島利雄，小林俊行，リー群と表現論，岩波書店，2005

索引