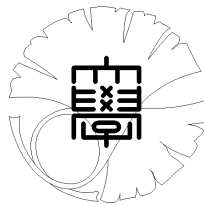


数理科学実践研究レター 2026-7 July 16, 2026

メッシュの単純化，構成とその解析

by

松本 晃二郎



UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

メッシュの単純化，構成とその解析

松本晃二郎¹（東京大学大学院数理科学研究科）

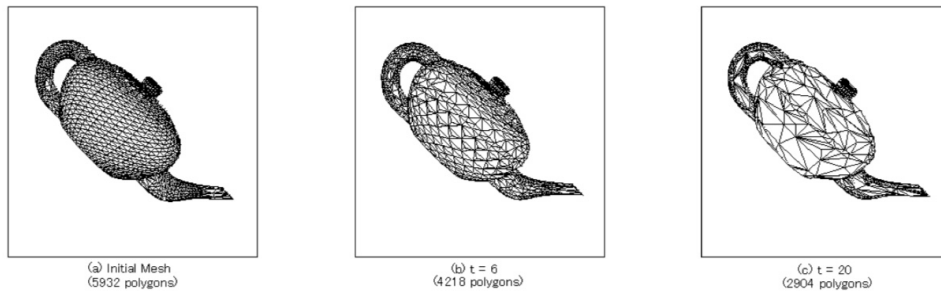
Kojiro Matsumoto (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概要

メッシュを効率よく単純化するためのアルゴリズムが数多く存在するが，その正当性は経験則や実験結果のみを根拠にしているものが多い．このレターでは [RLN24] CWF: Consolidating Weak Features in High-quality Mesh Simplification において導入されたアルゴリズムを修正したものを導入し，その数学的な裏付けを与える．

1 はじめに

3D 形状データの表現手段として，メッシュによる形状表現が現在主流になっている．直接モデリングされたメッシュあるいは三次元測定機などによって得られる点群データから自動的に生成されたメッシュはそのままでは扱いにくいので，形状特徴を失わないようにメッシュを単純化することは応用上重要なことである．（下の図は [HMU98] から引用した．）



2 動機

メッシュの単純化に関する既存の研究の問題点として以下のようなことが挙げられる．

- 既存の研究でよく用いられる [GH97] において導入された Quadric error metric (QEM) という手法ではサイズが小さい形状特徴が失われたり，極端に尖った角を持つような悪い形状の三角形が出てくるといった問題がある．
- さらに，その QEM の弱点を克服しようとしている研究が存在するが（例えば [RLN24] CWF: Consolidating Weak Features in High-quality Mesh Simplification など），基本的には実験結果のみを根拠としており，数学的な裏付けがなされていない．

したがって，今回の研究ではサイズが小さい特徴や三角形の品質まで保つことが期待できるようなメッシュ単純化や構成方法を導入し，それに対し数学的な裏付けを与えたい．

3 この研究のアルゴリズム

この研究のアルゴリズムは，先ほど述べた CWF の手法で用いられるエネルギー関数を，解析しやすいように少し修正したものである．

¹soccerkjr2121@gmail.com

アルゴリズム：与えられたメッシュ／曲面² $S \subset \mathbb{R}^3$ 上の N 個の点 $\{x_i\}_{i=1}^N$ を変数として、次のエネルギー関数 E を最小化する $\{x_i\}$ を求め、そのボロノイ分割の双対としてメッシュを得る。

$$E(\{x_i\}_{i=1}^N) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) \|x - x_i\|^2 dx.$$

ここで以下の記号や用語を用いた。

- $\Omega_i := \{x \in S \mid \|x - x_i\| = \min_j \|x - x_j\|\}$ は点 x_i のボロノイ領域である。
- $\rho : S \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は連続関数で $\inf_{x \in S} \rho(x) = 1$ と正規化されたものである。 $(\rho$ は数学的には任意のもので良いが、 S の形状特徴を反映し、「 ρ が大きい $\Leftrightarrow$ 形状特徴が強い」が成立するようなものを想定している。)
- 点 $\{x_i\}_{i=1}^N$ のボロノイ分割の双対とは、与えられた点を頂点とし、 $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$ の時に、 x_i と x_j を直線で結ぶことによって得られるメッシュである。(簡単のため、これが実際にメッシュになることを本稿では仮定する。)

4 基本的な観察

$\{x_i\}_{i=1}^N$ を上の E を最小化するものとする。§2 で述べたように今回の研究では、次の 2 つの問題を考える。

- (形状特徴の保持) 形状特徴が強い、すなわち ρ が大きくなっているような点はある x_i に十分近いことが証明できるか？特に、 $\rho = 1$ で取った場合よりも良い評価を与えることができるか？
- (良質な三角形の構成) 構成されたメッシュの最小角がある一定以上 (例えば 30 度以上) であることを証明できるか？

以上のような問題を考えるにあたって、以下の基本的な観察がある。

基本的な観察：三角形の最小角は $\min_{i \neq j} \|x_i - x_j\|$ と $\max_{x \in S} (\min_i \|x - x_i\|)$ を用いて下から抑えることができる。

証明：三角形の最小角を $\theta_{\min}$ 、その角の対辺の長さを $l_{\min}$ として、その外接円の半径を R とする。この時、 $\min_{i \neq j} \|x_i - x_j\| \leq l_{\min}$ と $\max_{x \in S} (\min_i \|x - x_i\|) \geq R$ が成立する。正弦定理から

$$\frac{R}{l_{\min}} = \frac{1}{2\sin\theta_{\min}}$$

が成立する。したがって、次が成立する。

$$\sin\theta_{\min} = \frac{l_{\min}}{2R} \geq \frac{\min_{i \neq j} \|x_i - x_j\|}{2\max_{x \in S} (\min_i \|x - x_i\|)}.$$

$\theta_{\min}$ は 60 度以下なので、

$$\theta_{\min} \geq \arcsin\left(\frac{\min_{i \neq j} \|x_i - x_j\|}{2\max_{x \in S} (\min_i \|x - x_i\|)}\right)$$

が成立する。■

したがって今回の研究では、次の 2 つの量を評価することを考える。

$$\min_{i \neq j} \|x_i - x_j\|, \min_i \|x - x_i\| (x \in S).$$

²§6 において、この S が満たすべき正確な条件を書く。

5 Optimal quantization

上で与えた E のようなエネルギー関数を最小化する $\{x_i\}_{i=1}^N$ に対して, $\min_{i \neq j} \|x_i - x_j\|$ と $\max_{x \in S} (\min_i \|x - x_i\|)$ を評価する研究として optimal quantization というものが存在する. それによると, 以下が成立する.

定理 1 ([GR04, §2])

S に関する mild な仮定のもとで (例えば §6 の仮定を満たすもの, 正確な仮定は [GR04, §2] を参照), ある N に依存しない正定数 c_1, c_2 が存在して, $\max_{x \in S} (\min_i \|x - x_i\|) \leq c_1 N^{-\frac{1}{2}}, \min_{i \neq j} \|x_i - x_j\| \geq c_2 N^{-\frac{1}{2}}$ が成立.

したがって §4 で行った基本的な観察から, $\theta_{\min} \geq \arcsin(\frac{c_2}{2c_1})$ を得る.

しかし [GR04, §2] においては, 主に漸近挙動にのみ興味を持っており, c_1 や c_2 はあまり具体的には与えられておらず, $\min_i \|x - x_i\| (x \in S)$ を評価するということもなされていない. したがって, 今回の研究では c_1 や c_2 をなるべく具体的に与え, さらに $\min_i \|x - x_i\| (x \in S)$ の評価も行う.

6 問題設定

ここでは, 正確な問題設定をおく.

$S : \mathbb{R}^3$ 内の連結コンパクトな 2 次元の C^∞ 多様体とする. (連結コンパクトなメッシュでも可.)

$r_0 > 0, \varepsilon \geq 1$: 正の定数であって以下の仮定を満たすもの.

任意の $x_0 \in S$ に対して, 微分同相射 (あるいは区分的微分同相射) $\psi_{x_0} : S \cap B_3(x_0, r_0) \xrightarrow{\sim} B_2(0, r_0)$ が存在して, 全ての $x \in S \cap B_3(x_0, r_0)$ に対して, 以下が成立する.

- $\varepsilon^{-1} \|\psi_{x_0}(x)\|_2 \leq \|x - x_0\|_3 \leq \varepsilon \|\psi_{x_0}(x)\|_2$.
- $\varepsilon^{-1} \int_{B_2(0, r_0)} f(x) dx \leq \int_{S \cap B_3(x_0, r_0)} f \circ \psi_{x_0}(x) dx \leq \varepsilon \int_{B_2(0, r_0)} f(x) dx$ が全ての $B_2(0, r_0)$ 上の非負実数値連続関数 f に対して成立する.

ここで以下の記号を用いた.

- 区別のため $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) 内のユークリッドノルムを $\|\cdot\|_2$ (resp. $\|\cdot\|_3$) と表している.
- $B_2(0, r_0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq r_0\}, B_3(x_0, r_0) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - x_0\|_3 \leq r_0\}$.

$l_0 := \max_{x, y \in S} \|x - y\|_3, \rho_{\max} := \max_{x \in S} \rho(x)$ とおく. $|S|$ によって, S の面積を表すことにする.

7 主結果

以上の設定のもとで主結果を述べる.

定理 2 (1) $N \geq \frac{12l_0^2 \int_S \rho(x) dx}{(2r_0)^4 \pi \varepsilon}$ なら,

$$\min_{i \neq j} \|x_i - x_j\| \geq \left(-\frac{8\varepsilon}{3} \sqrt{\frac{6\varepsilon \int_S \rho(x) dx}{\pi}} + \sqrt{\left(-\frac{8\varepsilon}{3} \sqrt{\frac{6\varepsilon \int_S \rho(x) dx}{\pi}} \right)^2 + \frac{|S|^2}{2^7 3^2 \varepsilon^7 \pi \rho_{\max} \int_S \rho(x) dx}} \right) N^{-\frac{1}{2}}$$

が成立する.

(2) $N \geq \frac{12l_0^2 \int_S \rho(x) dx}{(2r_0)^4 \pi \varepsilon}$ なら, $\max_{x \in S} \min_i \|x - x_i\| \leq 4\varepsilon \sqrt{\frac{6\varepsilon \int_S \rho(x) dx}{\pi}} N^{-\frac{1}{2}}$ が成立する.

(3) $x_0 \in S, s > 0, \rho_0 \geq 1$ が任意の $x \in S \cap B_3(x_0, s)$ に対して, $\rho(x) \geq \rho_0$ を満たしているとする.

この時, N が $\max(\frac{12l_0^2 \int_S \rho(x) dx}{(2r_0)^4 \pi \varepsilon}, \frac{24\varepsilon \int_S \rho(x) dx}{\pi s^2 \sqrt{\rho_0}})$ 以上ならば, $\min_i \|x_0 - x_i\| \leq 4\varepsilon \sqrt{\frac{6\varepsilon \int_S \rho(x) dx}{\pi \sqrt{\rho_0}}} N^{-\frac{1}{2}}$ が成立する.

Remark

- 1 と 2 の評価により, 単純化において用いられる N 個の点が近づきすぎないこと, ボロノイ領域の半径が大きくなりすぎないことがわかる. 3 の評価により, 形状特徴が強い, ρ が大きくっている点に対して, 単純化に用いられる点がより近くにすることがわかる.
- 3 の評価は $\sqrt{\rho_0}|S| \geq \int_S \rho(x)dx$ が成立する場合は, ρ を自明で取った場合よりも良い評価になっている.
- 3 の評価から S 上の任意の点 x_0 に対して, ρ をうまく取ることににより, ある x_i がいくらでも近くに存在するようにできることがわかる.
- $\min_{i \neq j} \|x_i - x_j\|$ の下からの bound はあまり良いものでなく, 上の結果は角度が 30 度以上を保証するものとは程遠い.

8 証明

まずは以下の補助定理を示す. これはボロノイ領域の半径が大きくなりすぎないことを保証するものである.

補助定理 3 $N \geq \frac{12l_0^2 \int_S \rho(x)dx}{(2r_0)^4 \pi \varepsilon}$ ならば, $\max_{x \in S} \min_i \|x - x_i\| \leq \sqrt[4]{\frac{12\varepsilon^3 l_0^2 \int_S \rho(x)dx}{\pi}} N^{-\frac{1}{4}}$ が成立する.

証明 $\gamma := \max_{x \in S} \min_i \|x - x_i\|$, $r_1 := \min\{\gamma, 2r_0\varepsilon\}$ とおく.

この時, ある x_0 と j が存在して, $r_1 = \min_i \|x_0 - x_i\|$, $\int_{\Omega_j} \rho(x)dx \leq \frac{\int_S \rho(x)dx}{N}$ が成立する. $\{x_i\}_i$ は E を最小にするものなので, 以下が成立する. ($B := B_3(x_0, \frac{r_1}{2\varepsilon}) \cap S$ とおく. $\{x'_i\} := \{x_0, x_i (i \neq j)\}$ とおいた.) $0 \leq E(\{x'_i\}) - E(\{x_i\})$. j とは異なる j' を一つ選ぶ. ボロノイ分割の定義から, S の分割 $\{\Omega'_j\} := \{\Omega'_j := B, \Omega'_i := \Omega_i \setminus B (i \neq j, j'), \Omega'_{j'} := (\Omega_{j'} \cup \Omega_j) \setminus B\}$ に対して, $E(\{x'_i\}) \leq \sum_j \int_{\Omega'_j} \rho(x) \|x - x'_i\|^2 dx$ が成立する. したがって以下を得る. (ただし, 3 行目の不等式では $0 \leq r_1 - \|x - x_0\| \leq \min_i \|x - x_i\|$ が任意の $x \in B$ に対して成立することを用いた.)

$$\begin{aligned}
 0 &\leq E(\{x'_i\}) - E(\{x_i\}) \\
 &\leq \int_B \rho(x) (\|x - x_0\|^2 - \min_i \|x - x_i\|^2) dx + \int_{\Omega_j \setminus B} \rho(x) (\|x - x_{j'}\|^2 - \|x - x_j\|^2) dx \\
 &\leq \int_B \rho(x) (\|x - x_0\|^2 - (\|x - x_0\| - r_1)^2) dx + \int_{\Omega_j \setminus B} \rho(x) l_0^2 dx \\
 &\leq \int_B \rho(x) (2\|x - x_0\| r_1 - r_1^2) dx + l_0^2 \frac{\int_S \rho(x) dx}{N} \\
 &\leq \int_B (2\|x - x_0\| r_1 - r_1^2) dx + l_0^2 \frac{\int_S \rho(x) dx}{N} \\
 &\leq \varepsilon^{-1} (2r_1 \varepsilon \int_{B_2(0, \frac{r_1}{2\varepsilon})} \|x\| dx - r_1^2 \int_{B_2(0, \frac{r_1}{2\varepsilon})} dx) + l_0^2 \frac{\int_S \rho(x) dx}{N} \\
 &= -\frac{1}{12\varepsilon^3} \pi r_1^4 + l_0^2 \frac{\int_S \rho(x) dx}{N}
 \end{aligned}$$

したがって, $r_1^4 \leq \frac{12\varepsilon^3 l_0^2 \int_S \rho(x) dx}{\pi N}$. もし $(2r_0\varepsilon)^4 \geq \frac{12\varepsilon^3 l_0^2 \int_S \rho(x) dx}{\pi N}$ ($\Leftrightarrow N \geq \frac{12l_0^2 \int_S \rho(x) dx}{(2r_0)^4 \pi \varepsilon}$) なら, $\gamma \leq \sqrt[4]{\frac{12\varepsilon^3 l_0^2 \int_S \rho(x) dx}{\pi}} N^{-\frac{1}{4}}$ である. ■

主定理 2 の (2) の証明

$N \geq \frac{12l_0^2 \int_S \rho(x) dx}{(2r_0)^4 \pi \varepsilon}$ であることを仮定する. この時, $\frac{\gamma}{2\varepsilon} \leq r_0$ であることが補助定理からわかる. したがって, $r_1 = \gamma$ である. 証明の基本的な方針は上の補助定理と同じであるが, 上で任意の取った j' を

$\Omega_j \cap \Omega_{j'} \neq \emptyset$ となるようにとる. この時, $\|x_j - x_{j'}\| \leq 2\gamma$ が成立する. したがって, $\int_{\Omega_j \setminus B} \rho(x) (\|x - x_{j'}\|^2 - \|x - x_j\|^2) dx = \int_{\Omega_j \setminus B} \rho(x) (\|x_j - x_{j'}\|^2 + 2(x_j - x_{j'}) \cdot (x - x_j)) dx \leq 8\gamma^2 \frac{\int_S \rho(x) dx}{N}$ を得る. 上と同じ計算から, $\frac{\pi\gamma^4}{12\varepsilon^3} \leq 8\gamma^2 \frac{\int_S \rho(x) dx}{N}$ を得る. したがって, $\min_i \|x_0 - x_i\| = \gamma \leq 4\varepsilon \sqrt{\frac{6\varepsilon \int_S \rho(x) dx}{\pi}} N^{-\frac{1}{2}}$ を得る. ■

主定理 2 の (3) の証明

補定理や主定理の 2 の証明と方針は同じである. 再び, $N \geq \frac{12l_0^2 \int_S \rho(x) dx}{(2r_0)^4 \pi \varepsilon}$ であることを仮定する. $\gamma_1 := \min_i \|x_0 - x_i\|$, $r'_1 := \min\{\gamma_1, 2\varepsilon s\}$ とおく. ある j が存在して, $\int_{\Omega_j} \rho(x) dx \leq \frac{\int_S \rho(x) dx}{N}$ が成立する. 補定理や主定理の 2 と同じ計算から $0 \leq -\frac{\rho_0 \pi r_1'^4}{12\varepsilon^3} + 8\gamma^2 \frac{\int_S \rho(x) dx}{N} \Leftrightarrow r_1'^4 \leq \frac{12 \cdot 8\varepsilon^3 \gamma^2 \int_S \rho(x) dx}{N \pi \rho_0} \leq \frac{12 \cdot 8\varepsilon^3 \int_S \rho(x) dx}{N \pi \rho_0} \frac{6 \cdot (4\varepsilon)^2 \varepsilon \int_S \rho(x) dx}{\pi N} = \frac{2^{10} 3^2 \varepsilon^6 (\int_S \rho(x) dx)^2}{\rho_0 \pi^2 N^2}$ を得る. したがって, $(2\varepsilon s)^4 \geq \frac{2^{10} 3^2 \varepsilon^6 (\int_S \rho(x) dx)^2}{\rho_0 \pi^2 N^2} \Leftrightarrow N \geq \frac{2^4 \varepsilon \int_S \rho(x) dx}{\pi s^2 \sqrt{\rho_0}}$ ならば, $\gamma_1 := \min_i \|x_0 - x_i\| \leq 4\varepsilon \sqrt{\frac{6\varepsilon \int_S \rho(x) dx}{\pi \sqrt{\rho_0}}} N^{-\frac{1}{2}}$ を得る. ■

主定理 2 の (1) の証明

再び, $N \geq \frac{12l_0^2 \int_S \rho(x) dx}{(2r_0)^4 \pi \varepsilon}$ であることを仮定する. $\gamma := \min_{i \neq j} \|x_i - x_j\|$ とおき, j と j' を $\gamma = \|x_j - x_{j'}\|$ を満たすものとする. $\frac{|S|}{N} \leq |\Omega_k|$ を満たす k が存在する. $d := \max_{x \in \Omega_k} \|x - x_k\|$ とおく. この時, $|S|/N \leq |\Omega_k| \leq \int_{S \cap B_3(x_k, d)} dx \leq \varepsilon \pi d^2$ が成立する. $y \in \Omega_k$ を $d = \|y - x_k\| = \max_{x \in \Omega_k} \|x - x_k\|$ を満たすものとする. 補定理や主定理 2 の証明の中で, x_0 を y , r_1 を d に置き換えて同じ計算をすると $(\min_i \|x - x_i\| \geq d - \|x - y\| \geq 0$ が任意の $x \in B := S \cap B_3(y, d)$ に対して成立することに注意する), $0 \leq \varepsilon^{-1} (-\frac{\pi d^4}{12\varepsilon^2}) + 2\gamma \int_{\Omega_j \setminus B} \rho(x) \|x - x_j\| dx + \gamma^2 \int_{\Omega_j \setminus B} \rho(x) dx$ を得る. $C := 4\varepsilon \sqrt{\frac{6\varepsilon \int_S \rho(x) dx}{\pi}}$ とおくと, $\int_{\Omega_j \setminus B} \rho(x) dx \leq \rho_{\max} \varepsilon \int_{B_2(0, CN^{-\frac{1}{2}})} dx = \rho_{\max} \varepsilon \pi C^2 N^{-1}$, $\int_{\Omega_j \setminus B} \rho(x) \|x - x_j\| dx \leq \rho_{\max} \varepsilon \pi \frac{2}{3} C^3 N^{-\frac{3}{2}}$ が成立する. したがって, $0 \leq \gamma^2 + 2\frac{2}{3} C N^{-\frac{1}{2}} \gamma - \frac{|S|^2}{12\rho_{\max} \varepsilon^6 \pi^2 C^2 N}$ を得る. これを解くことにより欲しい評価を得る. ■

9 今後の展望

今後の展望として, 以下のような問題を考えることができる.

- 1 $\min_{i \neq j} \|x_i - x_j\|$ のもっと良い下からの bound を与えることができるか?
- 2 実際に最小角が 30 度以上になるための条件を与えることができるか?
- 3 与えられた多様体やメッシュから形状特徴をとらえる ρ を構成する方法を与えることができるか?

10 謝辞

研究に非常に有益なコメントをくださった株式会社ニコンの青木大志氏, 信田萌伽氏, 高山侑也氏, 岩佐昭生氏そして東京大学数理科学研究科の森迪也先生, 浅井聡太先生に深く感謝申し上げます.

参考文献

[RLN24] Rui Xu, Longdu Liu, Ningna Wang, Shuangmin Chen, Shiqing Xin, Xiaohu Guo, Zichun Zhong, Taku Komura, Wenping Wang and Changhe Tu, CWF: Consolidating Weak Features in High-quality Mesh Simplification, 2024, arXiv.2404.15661.

[HMU98] 早野勝之・松岡司・植田健治「特徴抽出と稜線操作によるポリゴンメッシュの簡単化」『情報処理学会研究報告 グラフィクスと CAD (CG)』1998 巻 16 号 (1997-CG-089), 37 - 42 頁, 1998 年.

[GR04] Peter M. Gruber, Optimum quantization and its applications, Advances in Mathematics, 186, 2, 456-497, 2004, 0001-8708.

[GH97] Garland, Michael and Heckbert, Paul S., Surface simplification using quadric error metrics, 1997, ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., USA, Proceedings of the 24th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, 209-216, 8.