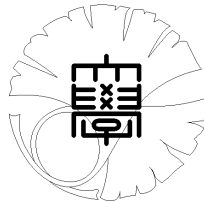


数理科学実践研究レター 2026-6 July 14, 2026

高次モーメントを考慮したポートフォリオの決定における
各モーメントの重み付けについて

by

渡部 匠



UNIVERSITY OF TOKYO
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
KOMABA, TOKYO, JAPAN

高次モーメントを考慮したポートフォリオの決定における各モーメントの重み付けについて

渡部匠¹ (東京大学大学院数理科学研究科)

Takumi Watanabe (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概要

平均、分散という低次のモーメントを用いてポートフォリオの決定を行うことは古典的にされてきたが、この二つだけでは正規分布のような理想的な市場にしか対応していない。実務に有効なポートフォリオの決定を行うには、高次のモーメントを考慮することが重要とされる。本論文では、高次のモーメントも考慮したポートフォリオの決定を行う際の、各モーメントの重み付けに注目して数値実験を行った。その結果、各モーメントの重み付けの最適化が与える影響が大きいことが示唆された。

1 はじめに

本論文では以下に示す設定を用いる。金融商品の個数を N 個とし、以下金融商品の順番を固定する。 $r \in \mathbb{R}^N$ を各金融商品のリターンを並べたものとし、 $w \in \mathbb{R}^N$ を各金融商品の全体に対する割合を並べたもの、つまりポートフォリオとする。このとき、 $\mathbf{1}^\top w = 1$ であり、また $W(w) := w^\top r$ が得られるリターンである。 r は市場によって決まるものであり、我々が動かすことはできない。一方で、ポートフォリオ w は自由に動かせる。つまり、 w を適切に定めることで、リターン $W(w)$ を大きくすることが目標である。最も基本的な考え方は、リターンの平均 $E(W(w)) = E(w^\top r)$ を最大にする w を選択することである。しかし得られる平均が大きくとも、大きな損失リスクを伴うポートフォリオは回避すべきである。そこで分散を小さくすることが求められる。これらを踏まえ、次の問題を考える。

問題 1 $\phi_1(w) := E(W(w))$, $\phi_2(w) := E\left((W(w) - E(W(w)))^2\right)$ としたとき、 $\phi_1(w) - \lambda_2 \phi_2(w)$ を最大にするような w を決定せよ。但し、 λ_2 は固定された 0 以上の実数とする。

これが古典的に考えられてきたポートフォリオの決定における問題である。この問題を解くことで、リターンの平均が大きく、かつ分散が小さいポートフォリオを決定できる。しかし、この二つだけでは、現実の市場に対応できない。例えば、リターン $W(w)$ が正規分布に従うなら平均と分散で十分であるが、実際の市場が正規分布に従うことはほとんどない。そこで、次に紹介する高次のモーメントも考慮することが重要である。

2 高次モーメント

第 n 中心モーメントを次で定義する。

定義 2 n を 2 以上の整数とする。このとき、 $W(w) := w^\top r$ の第 n 中心モーメントを

$$\phi_n(w) := E\left((W(w) - E(W(w)))^n\right)$$

で定める。但し、 $E(-)$ は平均を表す。また $\phi_1(w) := E(W(w))$ を $W(w)$ の平均とする。

なお、 $\phi_1(w)$ を $n \geq 2$ に対する $\phi_n(w)$ と同様に定義すると、恒等的に 0 となることに注意する。また $\phi_2(w)$ は $W(w)$ の分散に他ならない。

定義 3 $\phi_3(w)$, $\phi_4(w)$ をまとめて高次のモーメントと呼ぶ。

第 3 中心モーメントは分布の左右の非対称性を表す尺度である。図 1 が示すように、第 3 中心モーメントが大きいほど、分布のピークは左に寄る。また第 4 中心モーメントは分布の鋭さを表す尺度

¹takumi0426@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

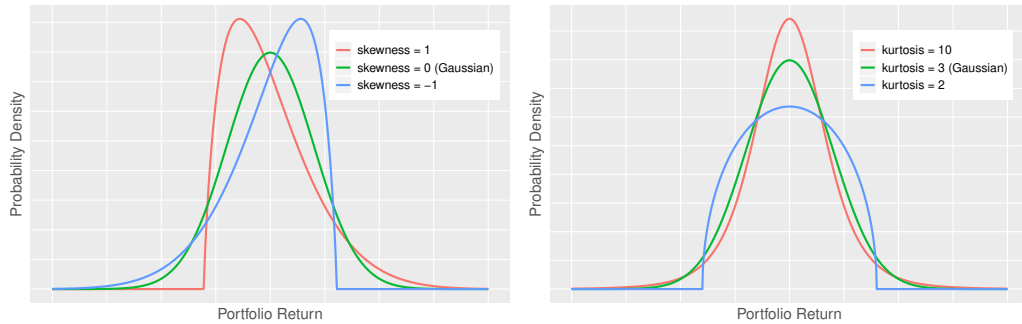


図 1: 第 3 中心モーメントの影響 ([7, Fig. 1] より引用) 図 2: 第 4 モーメントの影響 ([7, Fig. 2] より引用)

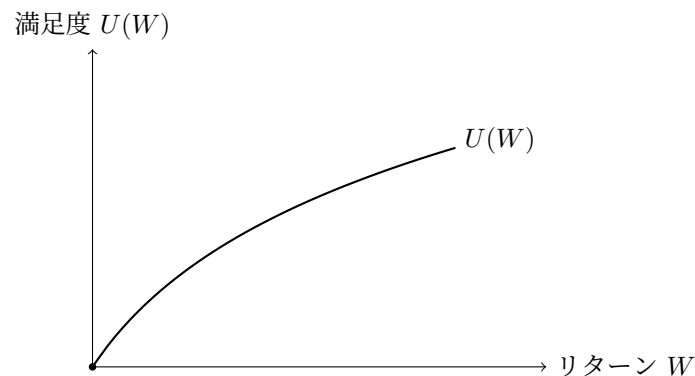
である．図 2 が示すように，第 4 中心モーメントが大きいほど，分布のピークは鋭くなる．しかし，ここで注目すべきは各図の左下部分，つまりリターンが少ない部分である．図 1 の左下を見てわかるように，第 3 中心モーメントが大きいほど，リターンが少なくなる確率が下がる．また図 2 の左下を見てわかるように，第 4 中心モーメントが小さいほど，リターンが少なくなる確率が下がる．一般に，偶数番目の中心モーメントは小さい方が望ましく，奇数番目の中心モーメントは大きいほど望ましいとされている（リターンの平均は大きい方が望ましく，分散は小さい方が望ましいことを思い出しておく．）．これは例えば [6] で論じられている．そこで，問題 1 の自然な拡張として，次の問題を考える．

問題 4 $\phi_1(w) - \lambda_2\phi_2(w) + \lambda_3\phi_3(w) - \lambda_4\phi_4(w)$ を最大にするような w を決定せよ．但し， $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ は固定された 0 以上の実数とする．

この問題を解くことで，高次のモーメントも考慮したポートフォリオの決定を行うことができる．問題 4 の結果は，重み付け $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ の選び方に依存している．従って，良い結果を得るためには，この定数の最適化が重要である．以下では，この問題について考える．まず，簡単のために次に説明する効用関数の考え方を採用し，問題を簡略化する．

3 効用関数

例えば得られるリターンが 0 円から 1000 万円に増えた時の満足感は大いだが，得られるリターンが 100 億円から 100 億 1000 万円に増えたとしても，満足感の増加は限定的であると考えられる．このようにリターンに対する満足度は線型でないと考えられるため，リターンに対して満足度を返す関数を考える．これが**効用関数**である．以下，効用関数は，実数に値をとる，上に凸な狭義単調増加関数であって，各点でテイラー展開可能なものとする．



この効用関数を用いて次のようにリスクの回避度を測る．

定義 5 U を効用関数とする。このとき、 U の相対的リスク回避度を

$$R(W) := -\frac{WU''(W)}{U'(W)}$$

で定める。

リスクを回避したい場合、リスクを賭けたとき、つまり W が変化したときに、なるべく大きな満足度を得たいと考える。従って、効用関数 $U(W)$ の曲がり具合が大きい方がリスクを回避していると言える。この考え方に基づいて相対的リスク回避度が定義されている。相対的リスク回避度の別の説明をする。 $W_{CE}(U) := U^{-1}(E(U(W)))$ と置く。これは平均的な満足度を与えるリターンである。なお、効用関数は狭義単調増加としたので、 $U^{-1}(-)$ は定義されている。 $W_{CE}(U)$ がリターンの平均 $E(W)$ と比べて小さいということは、少ないリターンでも満足することを意味する。これはリスクを回避しているといえる。そこで次のように定める。

定義 6 U を効用関数とする。このとき、 U の相対的リスクプレミアムを

$$\pi_R(U) := 1 - \frac{W_{CE}(U)}{E(W)}$$

と定義する。

相対的リスクプレミアムが大きいほど、リスクを回避していると言える。 $U(W)$ を W に関して $W = E(W)$ の周りで 2 次までテイラー展開すると

$$U(W) \doteq U(E(W)) + U'(E(W))(W - E(W)) + \frac{1}{2}U''(E(W))(W - E(W))^2. \quad (1)$$

式 (1) の平均をとると

$$E(U(W)) \doteq U(E(W)) + \frac{1}{2}U''(E(W))\phi_2(w).$$

式 (1) に $W_{CE}(U)$ を代入して 2 次の項を無視すると

$$U(W_{CE}(U)) \doteq U(E(W)) + U'(E(W))(W_{CE}(U) - E(W)).$$

$U(W_{CE}(U)) = E(U(W))$ に注意してこれらを比べることで、

$$\frac{1}{2}U''(E(W)) \cdot \phi_2(w) \doteq U'(E(W)) \cdot (W_{CE}(U) - E(W)) = -U'(E(W)) \cdot E(W)\pi_R(U)$$

を得る。従って

$$\pi_R(U) \doteq -\frac{1}{2} \frac{E(W)U''(E(W))}{U'(E(W))} \cdot \frac{\phi_2(w)}{E(W)^2} = \frac{1}{2}R(E(W)) \cdot \frac{\phi_2(w)}{E(W)^2}$$

となり、 $R(E(W))$ が自然に出てくる。詳細は [4] や [5] を参照。

定義 7 定数相対リスク回避効用関数とは、相対的リスク回避度 $R(W)$ が定数となるような効用関数のこととする。具体的には、実数 λ に対して、相対的リスク回避度が定数 λ になる効用関数は

$$U_\lambda(W) = \begin{cases} \frac{W^{1-\lambda}}{1-\lambda} & (\lambda \neq 1 \text{ のとき}) \\ \log W & (\lambda = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

定数相対リスク回避効用関数は、リターンの大きさに関わらず、リスク回避の度合いを一定にするという考え方で用いられる効用関数である。以下では、 $\lambda \neq 1$ の場合の効用関数 $U_\lambda(W)$ を用いる。 $U_\lambda(W)$ を W に関して $W = E(W)$ の周りで 4 次までテイラー展開すると

$$\begin{aligned} U_\lambda(W) &\doteq U_\lambda(E(W)) + U'_\lambda(E(W))(W - E(W)) + \frac{1}{2}U''_\lambda(E(W))(W - E(W))^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}U'''_\lambda(E(W))(W - E(W))^3 + \frac{1}{24}U''''_\lambda(E(W))(W - E(W))^4 \end{aligned}$$

となり、この平均をとると

$$E(U_\lambda(W)) \doteq U_\lambda(E(W)) + \frac{1}{2}U''_\lambda(E(W))\phi_2(w) + \frac{1}{6}U'''_\lambda(E(W))\phi_3(w) + \frac{1}{24}U''''_\lambda(E(W))\phi_4(w) \quad (2)$$

$$= \frac{1}{1-\lambda}E(W)^{-\lambda}\phi_1(w) - \frac{\lambda}{2}E(W)^{-\lambda-1}\phi_2(w) \quad (3)$$

$$+ \frac{\lambda(\lambda+1)}{6}E(W)^{-\lambda-2}\phi_3(w) - \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{24}E(W)^{-\lambda-3}\phi_4(w) \quad (4)$$

を得る．詳細は [2] を参照．これを元に、問題 4 の簡略化として次の問題を考える．

問題 8

$$\phi_1(w) - \frac{\lambda}{2}\phi_2(w) + \frac{\lambda(\lambda+1)}{6}\phi_3(w) - \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{24}\phi_4(w) \quad (5)$$

を最大にするような w を決定せよ．但し、 λ は固定された 0 以上の実数とする．

注意 9 この問題は [7] で考えられている．定数相対リスク回避効用関数に由来して、各モーメントの重み付けを決めることは、[1, 2] で考えられた．これら二つの論文では、平均の寄与を無視している．つまり、式 (2) で $\phi_1(w) = E(W) = 1$ と簡略化すると、右辺は

$$\frac{1}{1-\lambda} - \frac{\lambda}{2}\phi_2(w) + \frac{\lambda(\lambda+1)}{6}\phi_3(w) - \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{24}\phi_4(w)$$

となり、式 (5) から $\phi_1(w)$ を除いたものが現れる．重要な点は平均の寄与をなくしていることだが、[7] ではそこにリターンの平均 ϕ_1 を単純に足して問題 8 を導いているように思われる．この方法だと、もはや相対定数リスク回避効用関数に由来していると言えないが、本論文では [7] に倣い問題 8 を採用することにする．

先に述べたように問題 8 は [1, 2, 7] などと考えられてきた問題であるが、重み付けである λ は [1] では $\lambda = 5, 10$, [2] では $\lambda = 1, 5, 10, 15$, そして [7] では $\lambda = 10$ とされている．これらの選び方に対する根拠は書かれていない．そこでこの λ の選び方が与える影響について数値実験を行う．

4 実験の概略

[3] に基づき、R のパッケージ `highOrderPortfolios` を用いてバックテスト、つまり過去のデータを用いた数値実験を行う．使用するデータは S&P500 である．各バックテストで S&P500の中からランダムに 10 銘柄を選ぶ．いずれの実験においても、ルックバックは 1 年、ポートフォリオの最適化は 20 日、売買は 5 日ごとに行う．最適化をする際に用いる ϕ_n は、過去のデータから skewed t 分布を用いた推定をして求める．詳しくは [3] を参照．結果の指標はシャープレシオとドローダウンを用いる．シャープレシオはリターンを標準偏差で割ったもので、ポートフォリオの効率を測る指標の一つである．これは値が大きいほど望ましい．ドローダウンは最大リターンからの下落率のことで、この値は小さい方が望ましい．

5 実験 1

大まかな λ の値を見積もるため、 $\lambda = 0, 1, \dots, 10$, $\lambda = 0, 10, \dots, 100$, $\lambda = 0, 100, \dots, 1000$ でバックテストを行う．使用したデータは 2015 年 1 月 1 日から 2020 年 1 月 1 日である．その結果、 $\lambda = 0, 1, \dots, 10$, $\lambda = 0, 100, \dots, 1000$ での結果はあまり変わらず、 $\lambda = 0, 10, \dots, 100$ での変化が最も大きかった．図 3, 図 4, 図 5 を参照．そこで、実験 2 ではこの範囲に絞って調べる．

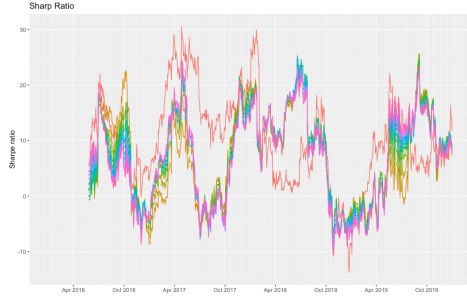


図 3: $\lambda = 0, 1, \dots, 10$, シャープレシオ

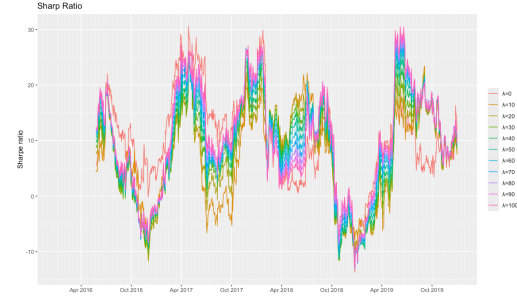


図 4: $\lambda = 0, 10, \dots, 100$, シャープレシオ

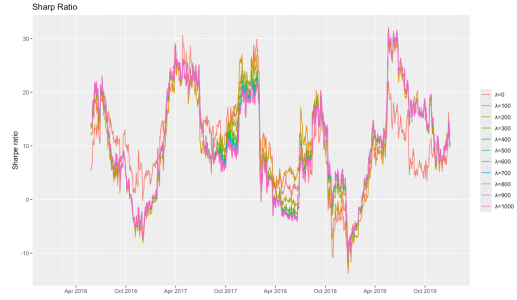


図 5: $\lambda = 0, 100, \dots, 1000$, シャープレシオ

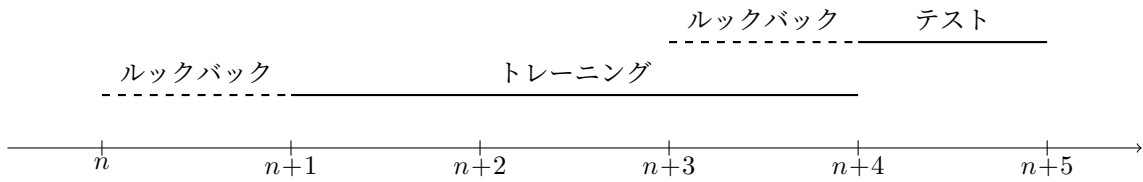


図 6: トレーニング期間とテスト期間

6 実験 2

実験 1 の結果を元に, $\lambda = 0, 10, \dots, 100$ で調べる. 5 年間を決め, その中で図 6 のように**トレーニング期間**と**テスト期間**を定める. トレーニングの 3 年間でシャープレシオ, ドローダウンが最も良い λ を求める. また, 第 3 中心モーメント, 第 4 中心モーメントの寄与を調べるため,

$$\phi_1(w) - \frac{\lambda}{2}\phi_2(w)$$

に対しても同様のバックテストを行う. 期間は, 2005 年 1 月 1 日から 2010 年 1 月 1 日, 2010 年 1 月 1 日から 2015 年 1 月 1 日, 2015 年 1 月 1 日から 2020 年 1 月 1 日, 2020 年 1 月 1 日から 2025 年 1 月 1 日で行う. その結果の一部が図 7 から図 14 である. まず, どのグラフにおいても赤線と緑線, 並びに水色線と紫線はほぼ重なっているため, 高次のモーメントが与える影響は小さいとわかる. また変化が出たときも, その良否に一貫した規則性は認められない. 例えば図 10 では, トレーニング期間もテスト期間も高次のモーメントを考慮した方が良いシャープレシオを得ているが, 図 14 ではトレーニング期間もテスト期間も高次のモーメントを無視した方が良いシャープレシオを得ている. いずれにしても, λ の値が与える影響の方が大きいことはどのグラフからも見てとれる. また図 10 のトレーニング期間や図 13 や図 14 のテスト期間などに顕著であるように, $\lambda = 0$ での挙動は他と比べて不規則である. これは分散を考慮することの重要性を示唆している. 最後に, λ を変化させた時のドローダウンの変化の仕方は, シャープレシオの変化の仕方に比べて, トレーニング期間とテスト期間で似ることが多かった. 故にトレーニング期間でドローダウンが最小となる λ を用いると, テスト期間でも良い結果が比較的得やすいことが示唆された.

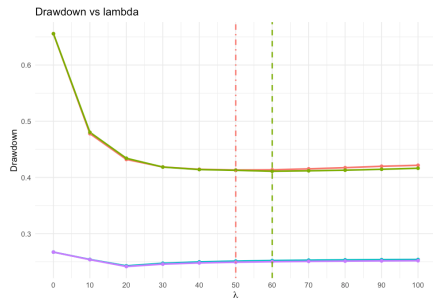


図 7: 2005–2010, ドローダウン

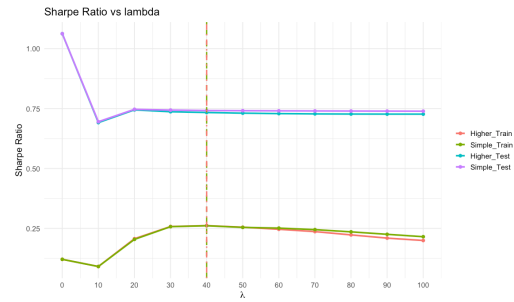


図 8: 2005–2010, シャープレシオ

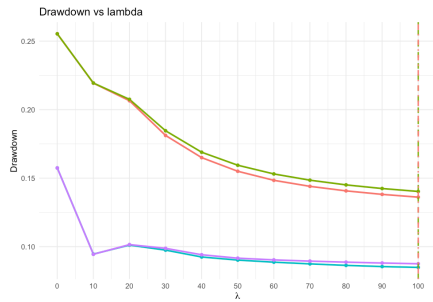


図 9: 2010–2015, ドローダウン

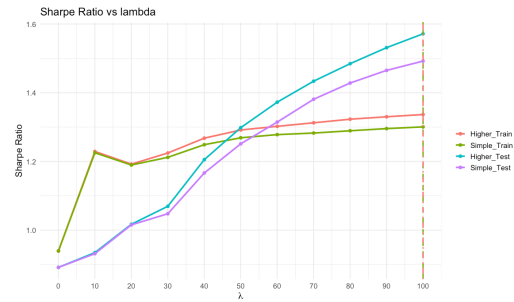


図 10: 2010–2015, シャープレシオ

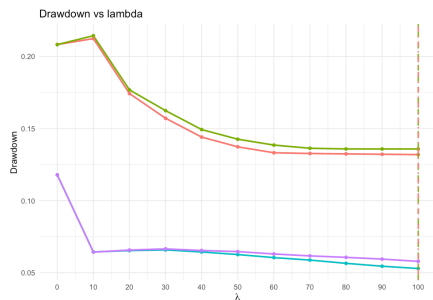


図 11: 2015–2020, ドローダウン

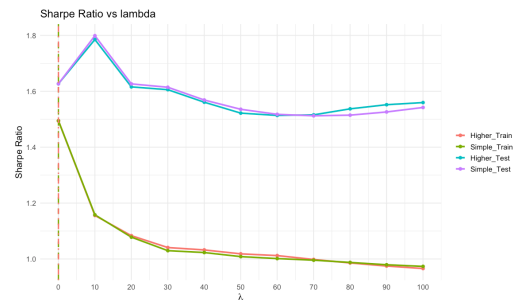


図 12: 2015–2020, シャープレシオ

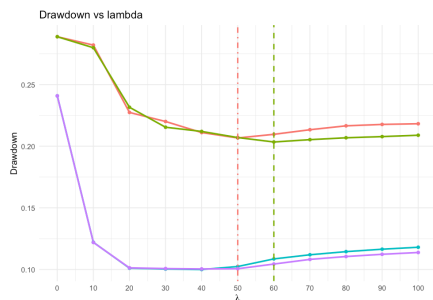


図 13: 2020–2025, ドローダウン

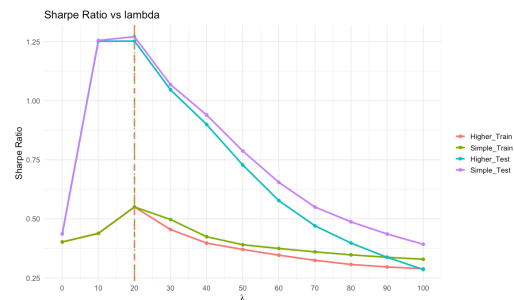


図 14: 2020–2025, シャープレシオ

横軸が λ , 縦軸がシャープレシオもしくはドローダウン. 赤線がトレーニング期間で高次のモーメントを加味したもの, 緑線がトレーニング期間で高次のモーメントを無視したもの, 水色線がテスト期間で高次のモーメントを加味したもの, 紫線がテスト期間で高次のモーメントを無視したものを表す. 赤の縦線はトレーニング期間で高次のモーメントを加味したもののうち, 最も優れた λ を表し, 緑の縦線はトレーニング期間で高次のモーメントを無視したもののうち, 最も優れた λ を表す.

7 終わりに

本研究で、高次のモーメントの寄与よりも、各モーメントの重み付けの最適化が結果に与える影響が大きいことが示唆された。今回の数値実験では重み付けを1変数に単純化したため、今後の課題として、各重み付けを個別に最適化することが考えられる。

謝辞 本研究の遂行に際し、多くの助言を賜りました株式会社三菱 UFJ 銀行の上田慎一郎様、荻野卓啓様、島田耕平様、中島卓也様に深く感謝申し上げます。またセミナーなどでご支援いただいた齊藤宣一教授、浅井聡太特任助教、坪内俊太郎特任助教、澤谷一磨様にも厚くお礼申し上げます。

参考文献

- [1] Kris Boudt, Wanbo Lu, and Benedict Peeters. Higher order comoments of multifactor models and asset allocation. *Finance Research Letters*, 13:225–233, 2015.
- [2] Lionel Martellini and Volker Ziemann. Improved estimates of higher-order comoments and implications for portfolio selection. *The Review of Financial Studies*, 23(4):1467–1502, 2010.
- [3] Daniel P. Palomer. R code for Portfolio Optimization Chapter 9 - High-Order Portfolios. <https://portfoliooptimizationbook.com/R-code/R-high-order-portfolios.html>.
- [4] John W. Pratt. Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica*, 44(2):420–420, 1976.
- [5] Ashwin Rao. Understanding risk-aversion through utility theory. https://web.stanford.edu/class/cme241/lecture_slides/UtilityTheoryForRisk.pdf.
- [6] Robert C. Scott and Philip A. Horvath. On the direction of preference for moments of higher order than the variance. *The Journal of Finance*, 35(4):915–919, 1980.
- [7] Rui Zhou and Daniel P. Palomar. Solving high-order portfolios via successive convex approximation algorithms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 69:892–904, 2021.