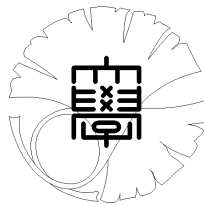


数理科学実践研究レター 2026-5 July 14, 2026

微細構造を有する境界を持つ流路における圧力場の近似

by

中江 優介



UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

微細構造を有する境界を持つ流路における圧力場の近似

中江優介¹ (東京大学大学院数理科学研究科)

Yusuke Nakae (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概要

本研究では、膨張弁近傍で生じる冷媒噴流音を背景として、粗い壁面をもつ流路における圧力場の近似可能性を数理的に考察した。具体的には、周期的な微細構造をもつ下壁を備えた 2 次元定常非圧縮 Navier–Stokes 方程式を考え、対応する平坦壁面上の問題との比較を行った。平坦化問題からの摂動方程式を解析することにより、1 周期分の有界領域において、速度のずれが $O(\varepsilon)$ 、圧力のずれおよび圧力勾配が $O(\sqrt{\varepsilon})$ で評価できることを示した。この結果は、粗い壁面を平坦化した簡略化モデルによっても、圧力場を一定の精度で近似できることを示すものであり、壁面粗さの影響を考慮した流体解析や、その先にある音響評価への理論的基礎を与える。

1 はじめに

本研究の出発点は、エアコン内部の膨張弁近傍で生じる冷媒噴流音を数理的に理解したい、という工学的要請であった。膨張弁では、冷媒が狭い流路を通過する際に急激な圧力低下を受け、噴流や渦、さらには相変化を伴う複雑な流れが生じる。このような状況では、乱流や渦に起因する圧力変動、あるいは気泡の生成・崩壊に起因する音源が、騒音の主要な要因になりうると考えられる。

研究の初期段階では、Lighthill 方程式による音響アナロジー、Rayleigh–Plesset 方程式や Cafilisch 型モデルによる気泡振動の記述、さらに電子膨張弁の CFD 解析に関する文献を調査し、噴流音そのものを記述する方針を検討した。しかし、噴流音を直接解析するためには、流体場の計算、音場への変換、相変化のモデル化を一体として扱う必要があり、理論的に一貫した形で議論するには課題が大きかった。

そこで本研究では、より限定されたが工学的含意を保つ問題として、粗い壁面が流れと圧力に与える影響に焦点を移した。膨張弁近傍の流路では、壁面の微細構造が局所的な流れの形状や壁面圧力分布に影響を与える可能性がある。もし粗い壁面上の解が平坦な壁面上の解で十分よく近似できるならば、粗い壁面を忠実に解像しない簡略化モデルを用いた数値計算の妥当性を、理論的に議論することができる。この観点は、粗面境界に対する wall law の理論、とくに定常流に対する Bucur–Dalibard–Gérard–Varet [BDGV12] や、非定常流に対する Higaki [Hig16] の研究とも自然に接続する。

以上を踏まえ、周期的な粗い壁面をもつ 2 次元定常非圧縮 Navier–Stokes 方程式を対象に、対応する平坦壁面上の問題からの摂動を解析する。その主眼は、粗い壁面をもつ流れにおいて、流速だけでなく圧力場も平坦化モデルでどの程度近似できるかを明らかにすることである。

2 問題設定と解析方針

本研究では、Bucur–Dalibard–Gérard–Varet [BDGV12] の枠組みに沿って、周期的な粗い下壁をもつ 2 次元チャンネル内の定常非圧縮粘性流体を考える。工学的な問題は本来これより複雑であるが、壁面粗さが流れと圧力に与える影響を理論的に考察するため、ここでは 2 次元・定常・非圧縮・粘性という設定に簡略化する。また、粗さが周期的であると仮定し、1 周期分のセル上で問題を定式化する。粗さのスケールを $\varepsilon > 0$ とし、最終的に $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考える。そして粗い壁面を表す関数 $\omega: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 0)$ を 2π 周期の C^2 -関数とし、粗い下壁

$$\Gamma^\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = \varepsilon\omega(x_1/\varepsilon)\}$$

を定める。このとき、チャンネル領域を

$$\Omega^\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon\omega(x_1/\varepsilon) < x_2 < 1\} \quad (1)$$

¹nakae@ms.u-tokyo.ac.jp

とし, 1 周期分の粗面チャネル領域を

$$\Omega_b^\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \mid \varepsilon\omega(x_1/\varepsilon) < x_2 < 1\}$$

とする. 以下では, x_1 方向に 2π 周期境界条件を課し, 上壁 $x_2 = 1$ と下壁 Γ^ε の両方で no-slip 条件 (Dirichlet 境界条件) を課す. また, 流量を固定するため, 断面

$$\sigma^\varepsilon := \{(0, x_2) \mid \varepsilon\omega(0) < x_2 < 1\}$$

を用いて

$$\int_{\sigma^\varepsilon} u_1^\varepsilon dx_2 = \phi$$

を課す. このとき, 粗い壁面をもつ 2 次元チャネル上の定常 Navier–Stokes 方程式は

$$\begin{cases} -\Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = 0, & x \in \Omega_b^\varepsilon, \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0, & x \in \Omega_b^\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{x_2=1} = 0, & u^\varepsilon|_{\Gamma^\varepsilon} = 0, \\ u^\varepsilon \text{ は } x_1\text{-方向に } 2\pi \text{ 周期}, \\ \int_{\sigma^\varepsilon} u_1^\varepsilon dx_2 = \phi \end{cases} \quad (\text{NS}^\varepsilon)$$

と書ける.

比較対象として, 下壁を平坦化した領域

$$\Omega = (0, 2\pi) \times (0, 1)$$

上の定常 Navier–Stokes 方程式

$$\begin{cases} -\Delta u^0 + u^0 \cdot \nabla u^0 + \nabla p^0 = 0, & x \in \Omega, \\ \operatorname{div} u^0 = 0, & x \in \Omega, \\ u^0|_{x_2=1} = 0, & u^0|_{x_2=0} = 0, \\ u^0 \text{ は } x_1\text{-方向に } 2\pi \text{ 周期}, \\ \int_{\sigma} u_1^0 dx_2 = \phi, & \sigma := \{(0, x_2) \mid 0 < x_2 < 1\} \end{cases} \quad (\text{NS-Di})$$

を考える. 圧力 p^ε, p^0 は定数分だけ不定であるため, 以後はそれぞれ平均値が 0 となるように規格化しておく.

粗さのスケール $\varepsilon \rightarrow 0$ において, 粗い壁面上の解が平坦壁面上の解でどの程度近似できるかを調べるため, u^0 を Ω_b^ε 上へ適切に拡張したものを $\tilde{u}^0$ と書き, 摂動量

$$w^\varepsilon := u^\varepsilon - \tilde{u}^0, \quad q^\varepsilon := p^\varepsilon - p^0$$

を考える. ただし, 圧力摂動 q^ε は定数の違いを除いてのみ定まるため, まずはその勾配 ∇q^ε を評価対象とする. 以後は

$$\int_{\Omega_b^\varepsilon} q^\varepsilon dx = 0$$

となるように規格化して q^ε の代表元をとる. このとき, 領域差に由来する補正項 f^ε を導入すると, $(w^\varepsilon, q^\varepsilon)$ は形式的に

$$\begin{cases} -\Delta w^\varepsilon + \tilde{u}^0 \cdot \nabla w^\varepsilon + w^\varepsilon \cdot \nabla \tilde{u}^0 + w^\varepsilon \cdot \nabla w^\varepsilon + \nabla q^\varepsilon = f^\varepsilon, & x \in \Omega_b^\varepsilon, \\ \operatorname{div} w^\varepsilon = 0, & x \in \Omega_b^\varepsilon \end{cases} \quad (\text{Pert}^\varepsilon)$$

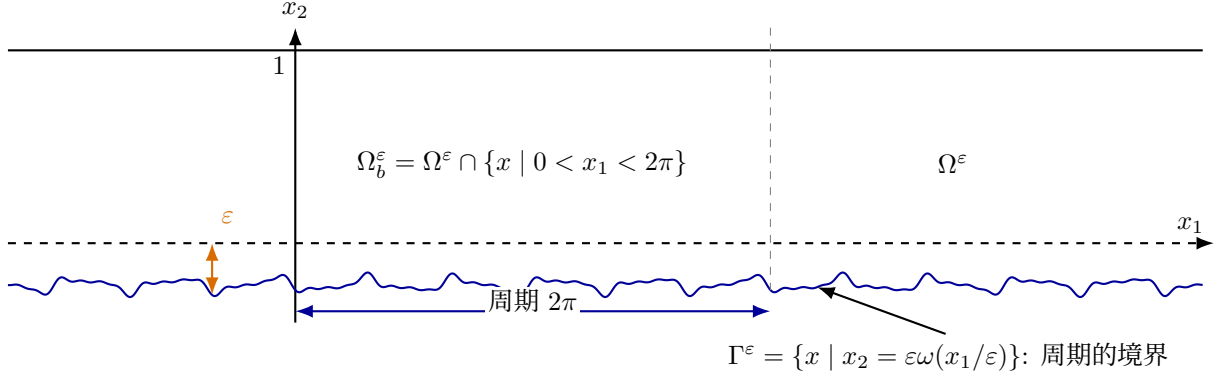


図 1: 粗い壁を持つ 2 次元チャネル型領域の概形

を満たす．本研究の目標は，この摂動方程式を通じて，速度摂動 w^ε だけでなく圧力摂動 q^ε およびその勾配を評価することである．

粗い壁面上の流れに対する wall law の理論では，粗さを直接解像した方程式の解を，平坦な壁面上に設定した有効方程式の解で近似することが目標となる．定常問題については Bucur–Dalibard–Gérard-Varet [BDGV12] が，周期性を仮定しない粗面境界のもとで速度場に対する $O(\varepsilon)$ 型の評価を与えている．また，非定常問題については Higaki [Hig16] が，周期的粗面をもつ非圧縮粘性流体に対し，Navier wall law に基づく高精度近似を示している．本研究は，これらの先行研究の流れを受けつつ，速度場だけでなく圧力場に対しても定量的な誤差評価を与えることを目指すものである．解析の方針は，摂動方程式 (Pert^ε) を Stokes 作用素の枠組みで捉え直し，非線形項と補正項を適切に評価することで， w^ε の正則性を高めながら ∇q^ε の L^2 評価を導く，というものである．この方針により，速度摂動の既知の評価と両立する形で，圧力摂動および圧力勾配に対する誤差評価を得ることを目指す．

3 得られた結果

前節で定めた 1 周期分の粗面チャネル領域 Ω_b^ε 上で，摂動方程式の解に対して次の評価が成り立つ．

命題 1 境界関数 ω が 2π 周期の C^2 関数であるとする．このとき，摂動方程式 (Pert^ε) の解 $(w^\varepsilon, q^\varepsilon)$ について

$$\|q^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_b^\varepsilon)} + \|\nabla q^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_b^\varepsilon)} = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (2)$$

$$\|w^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_b^\varepsilon)} = O(\varepsilon) \quad (3)$$

が成り立つ．ここで定数は ε に依存しない．

式 (3) における速度摂動の L^2 評価は，[BDGV12] の第 2.2 節で整理されている Dirichlet wall law の誤差評価に基づく．すなわち，補正項の L^2 評価，rescaled Poincaré 不等式，および Stokes/Oseen 問題の双対性議論により $O(\varepsilon)$ の L^2 誤差評価

$$\|w^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_b^\varepsilon)} = O(\varepsilon)$$

が得られる．

本研究の主な寄与は，既存研究と整合的な速度摂動の $O(\varepsilon)$ 評価に加えて，圧力摂動および圧力勾配に対しても評価を与えた点にある．特に，上式は，1 周期分の有界領域において，粗い壁面上の圧力が平坦壁面上の圧力によって L^2 の意味で $O(\sqrt{\varepsilon})$ の精度で近似できることを示している．

ここで重要なのは、圧力そのもののだけでなく、**圧力勾配も同じオーダーで制御できる点**である。工学的には、壁面圧力変動や音源評価との接続を見据える際に、圧力勾配の情報は有用である。また数学的には、速度摂動の評価にとどまらず、摂動方程式に現れる圧力摂動およびその勾配に対しても L^2 型の評価を与えた点に意義がある。

4 証明の概略

証明の中心は、摂動方程式を Stokes 作用素を用いて書き直し、非線形項を制御しながら $W^{2,2}$ 型正則性へ持ち上げる点にある。記号を簡単にするため $u := w^\varepsilon$, $p := q^\varepsilon$, $u^0 := \tilde{u}^0$, $f := f^\varepsilon$ と書く。 A を Ω_b^ε 上の Stokes 作用素, P を Helmholtz 射影とすると、弱解の満たす等式をテスト関数に対して整理することで

$$A^{-1/2}P\operatorname{div}(uu + 2uu^0) = A^{-1/2}Pf - A^{1/2}u \quad (4)$$

を得る。これは非線形項と外力項を Stokes 作用素の枠組みで比較するための基本式である。ここから、[Soh01] の議論を参考に次の三段階で議論を進めた。

- 1) $A^{1/2}u \in D(A^{1/4})$ を示し、 u に対して中間的な正則性を得る。
- 2) 続いて $u \in D(A)$ を示し、Stokes 作用素の定義域に入ることを確認する。
- 3) 最後に $D(A) \subset W^{2,2}(\Omega_b^\varepsilon)$ を用いて、 Δu と ∇p の L^2 評価へ帰着する。

この流れにより、最終的に

$$\|\Delta u\|_{L^2} + \|\nabla p\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} + C\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^3} = O(\sqrt{\varepsilon}) \quad (5)$$

が従う。ここで右辺第 1 項については、[BDGV12] と同様の粗面境界設定であるため、領域差に由来する補正項が

$$\|f^\varepsilon\|_{L^2} = O(\sqrt{\varepsilon})$$

と見積もられる。一方、非線形項

$$\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^3}$$

は同様のエネルギー評価から得られる $\|\nabla u\|_{L^2} = O(\varepsilon)$ と補間不等式により上の補正項を上回らないように制御される。したがって右辺全体は $O(\sqrt{\varepsilon})$ となる。さらに、圧力の平均値を 0 にとる規格化を施したうえで Poincaré 不等式を用いれば

$$\|p\|_{L^2} \leq C\|\nabla p\|_{L^2}$$

となり、式 (2) が従う。一方、速度摂動の評価 (3) は、既存のエネルギー評価を組み合わせることで得られる。

なお、 w^ε の H^1 評価については、

$$\|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_b^\varepsilon)} \leq C \left(\|w^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_b^\varepsilon)} + \|\nabla w^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_b^\varepsilon)} \right)$$

であるため、追加で必要となるのは $\|\nabla w^\varepsilon\|_{L^2}$ の評価である。[BDGV12] の第 2.2 節では、補正項 $\|f^\varepsilon\|_{L^2} = O(\sqrt{\varepsilon})$ から自然に $O(\sqrt{\varepsilon})$ の H^1 型評価が得られることが述べられている。したがって、本稿の設定でも

$$\|\nabla w^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_b^\varepsilon)} = O(\sqrt{\varepsilon})$$

に対応する評価が得られる。一方、式 (3) の L^2 評価 $O(\varepsilon)$ は、Stokes/Oseen 問題に対する双対性議論により得られるより鋭い評価であり、 H^1 評価とはオーダーが異なる。

ここでの技術的な肝は、粗い境界そのものを直接扱うのではなく、**摂動方程式を Stokes 作用素に乗せることで、非線形性と境界の寄与を分離しながら評価する点**にある。これにより、圧力項もふくめた一貫したノルム評価が可能になった。

5 終わりに

工学的な意味

本研究の結果は、粗い壁面をもつ流路に対して、平坦化したモデルを使った圧力予測に一定の理論的裏付けを与える。もちろん実際の膨張弁では乱流・圧縮性・相変化・三次元性が重要であり、本研究のモデルはそれらを大きく簡略化している。それでも、壁面粗さの効果をまず定常・非圧縮・2次元のレベルで切り出し、圧力誤差のオーダーを明示したことには意味がある。将来的に CFD や音響解析を行う際にも、どの簡略化がどの程度妥当かを考える一つの基準になる。

数学的な意味

数学的には、粗面境界に関する均質化・wall law の文脈で、流速差に加えて圧力差・圧力勾配まで評価したことがポイントである。特に、圧力は速度から従属的に決まる量とみなされがちだが、音や力学的応答との関係を考えてと独立に評価する意義がある。

今後の課題

今後の課題としては少なくとも次の三方向がある。第一に、本研究ではno-slip条件、すなわち Dirichlet 型の粗面境界しか扱っていないため、一般の Navier 型境界条件へ拡張する必要がある。第二に、定常流から非定常流への拡張である。これは Higaki の結果と接続する自然な方向であり、時間依存の圧力評価が得られれば、より音響的な議論に近づく。第三に、periodic という仮定を弱めて quasi-periodic や almost periodic な粗面に進む方向である。この部分は研究途中で検討したテーマでもあり、本論文では到達できなかったが、数学的には非常に興味深い。

本研究の当初の目標は「膨張弁の噴流音の発生機構を理解する」ことであった。最終成果はその全体像を直接与えるものではないが、音響解析に進む前提として、粗い壁面を持つ流れの圧力場をどう近似できるかを明確にしたという意味で、後続の研究へつなげる足場になったと考えている。

6 謝辞

本研究は WINGS-FMSP の助成を受けて行われました。

研究の過程で課題及び工学的な観点から知見を提供していただいたダイキン工業株式会社の木保康介様、高根沢悟様、鎌田正史様、布川賢一様、また、数学的なアドバイスを提供していただいた東京大学教員の坪内俊太郎先生、儀我美一先生、間瀬崇史先生、許本源先生にこの場を借りて感謝を述べさせていただきます。

参考文献

- [BDGV12] Dorin Bucur, Anne-Laure Dalibard, and David Gérard-Varet. Wall laws for viscous fluids near rough surfaces. In *Mathematical and numerical approaches for multiscale problem*, volume 37 of *ESAIM Proc.*, pages 117–135. EDP Sci., Les Ulis, 2012.
- [Hig16] Mitsuo Higaki. Navier wall law for nonstationary viscous incompressible flows. *J. Differential Equations*, 260(10):7358–7396, 2016.
- [Soh01] Hermann Sohr. *The Navier-Stokes equations*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2001. An elementary functional analytic approach, [2013 reprint of the 2001 original] [MR1928881].