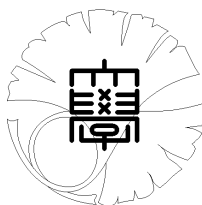


数理科学実践研究レター 2026-3 July 09, 2026

**Diffeological space 上の Sobolev 空間と
AllenCahn 方程式の定式化**

by

多寶 雅樹



UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

Diffeological space 上の Sobolev 空間と Allen–Cahn 方程式の定式化

多賀雅樹（東京大学大学院数理科学研究科）

Masaki Taho (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概要

本稿では、計量と Borel 測度を備えた diffeological space 上に Sobolev 空間を構成し、その上のエネルギー汎関数の微分を用いて Allen–Cahn 方程式を変分的に定式化する枠組みを述べる。Allen–Cahn 方程式は相転移や界面進化を記述する代表的な偏微分方程式であり、ユークリッド空間やリーマン多様体上では広く研究されている。これに対し、貼り合わせにより得られる空間など、古典的な多様体の枠組みだけでは扱いにくい対象も少なくない。本稿では diffeological space を用いることで、そのようなより柔軟な空間上でも変分的に定式化するための枠組みを与え、Allen–Cahn 型方程式を記述するための出発点とする。

1 はじめに

Allen–Cahn 方程式は、相転移や界面運動を記述する代表的な方程式であり、その解の幾何学的性質や極限挙動は多くの文脈で研究されてきた。特に閉多様体上の Allen–Cahn 方程式は、極小曲面論との関係も含めて重要な対象である [2]。

一方で、応用や幾何学の立場からは、考えたい空間が必ずしも滑らかな多様体であるとは限らない。たとえば特異な貼り合わせ空間、あるいは局所チャートによる取り扱いが自然でない対象では、通常の偏微分方程式論をそのまま適用することが難しい。このような背景から、本研究では可微分多様体の一般化概念である diffeological space [3] を用いて、Allen–Cahn 方程式を変分的に定式化することを目指す。

本稿の基本方針は次の通りである。まず、diffeological space X に計量 g と Borel 測度 μ を入れ、Dirichlet 型エネルギーを用いて Sobolev 空間 $H^1(X)$ を構成する。次に、double-well potential を持つエネルギー汎関数を $H^1(X)$ 上に定め、その微分を用いて Allen–Cahn 方程式を記述する。この立場では、微分作用素を座標表示で直接定義する代わりに、エネルギーと変分を通じて方程式を与えることになる。

本稿で述べる内容は、発表時点での到達点を整理したものであり、解の存在・一意性まで含む完全な理論を与えるものではない。しかし、diffeological space 上で Sobolev 空間とエネルギー汎関数に基づく時間発展の枠組みを整えることで、Allen–Cahn 方程式を従来より広い空間の上で議論するための出発点が得られる。

2 diffeological space 上の計量と Sobolev 空間

diffeological space とは、プロットと呼ばれる滑らかなパラメータ付けの族によって可微分構造を記述する空間である [3]。多様体は diffeological space の特別な場合であり、接空間や微分形式など多くの基本概念も拡張できる [1]。

以下、 X を diffeological space とし、各点 $x \in X$ における 1-形式の空間を $\Omega_x^1(X)$ と書く。また、 X には diffeology から定まる D -topology、すなわちすべてのプロットに関する終位相 (final topology) を入れる。diffeological リーマン計量とは、各点で内積

$$g_x: \Omega_x^1(X) \times \Omega_x^1(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

を与える族 $\{g_x\}_{x \in X}$ であって、プロットに沿って滑らかに変化するものとする。このとき各 1-形式 $\alpha_x \in \Omega_x^1(X)$ に対し、点ごとのノルム $|\alpha_x|_g$ が定まる。

さらに、 D -topology の Borel σ -algebra 上の測度 μ を固定する。このとき、滑らかな関数に対して Dirichlet 型エネルギー

$$\mathcal{E}(f, h) := \int_X g_x(df_x, dh_x) d\mu$$

を定めることができる．特に

$$D(\mathcal{E}) := \{f \in C^\infty(X) \cap L^2(X, \mu) \mid \mathcal{E}(f, f) < \infty\}$$

とおき,

$$(f, h)_{H^1} := \int_X f h d\mu + \mathcal{E}(f, h)$$

によって内積を入れる．このとき, $D(\mathcal{E})$ の完備化として Sobolev 空間

$$H^1(X) := \overline{D(\mathcal{E})}^{\|\cdot\|_{H^1}}$$

を定義する．さらに, この内積に関して $\mathcal{E}$ を $H^1(X)$ 上に延長して考え, 以後も同じ記号 $\mathcal{E}$ を用いる．本稿では, この完備化を diffeological space 上の Sobolev 空間の作業上の定義として採用する．この空間やエネルギー形式の解析的性質については, 今後さらに検討する必要がある．

この定義は, 多様体上での古典的な Sobolev 空間の定義を, 座標系ではなくエネルギー形式を通じて書き直したものとみなせる．したがって, X が通常のリーマン多様体であれば, ここで得られる $H^1(X)$ は標準的な Sobolev 空間と整合的である．一方, 多様体ではない空間でも, 適切な仮定のもとで計量と測度が与えられれば同様の構成が可能である点が本稿の出発点である．

3 Allen–Cahn 型エネルギー汎関数と時間発展の定式化

$W: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を滑らかな double-well potential とする．典型例として

$$W(u) = \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2$$

を考える． $\varepsilon > 0$ に対し, 右辺が有限となる $u \in H^1(X)$ のエネルギーを

$$E_\varepsilon(u) := \frac{\varepsilon}{2} \mathcal{E}(u, u) + \frac{1}{\varepsilon} \int_X W(u) d\mu$$

で定める．第 1 項は Dirichlet 型の正則化項であり, 第 2 項は $u = \pm 1$ を安定相として好むポテンシャル項である．一般の空間では, ポテンシャル項の有限性にも追加の仮定が必要になる可能性があり, この点は今後の課題とする．

以下では, $H^1(X)$ にベクトル空間としての fine diffeology [3] を入れて考える．このとき内部接空間 [1] は各点で自然に

$$T_u H^1(X) \cong H^1(X)$$

と同一視される．したがって, 形式的には, 各 $u \in H^1(X)$ における E_ε の微分

$$dE_\varepsilon(u): T_u H^1(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

は, この同一視を通じて $(H^1(X))^*$ の元とみなされる．

他方, 時間依存関数 $u: [0, 1] \rightarrow H^1(X)$ に対し, その時間微分も $L^2(X, \mu)$ の pairing を用いて $(H^1(X))^*$ の元として解釈する．すなわち, 各時刻 t に対し, 任意の $\varphi \in H^1(X)$ に対して

$$\varphi \mapsto \frac{d}{dt} \int_X u(t) \varphi d\mu$$

で与えられる線形汎関数を $\partial_t u(t)$ とみなす．

この準備のもとで, 本稿では diffeological space 上の Allen–Cahn 方程式を

$$\partial_t u(t) = -dE_\varepsilon(u(t))$$

によって定式化する．ここで両辺はともに $(H^1(X))^*$ の元として理解される．

次に、この定式化が閉リーマン多様体の場合に古典的な Allen–Cahn 方程式と一致することを確認する。 X が閉リーマン多様体であり、 g と μ がそれぞれ通常のリーマン計量と体積測度から誘導されるものとする。このとき滑らかな関数 u, φ に対し、

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} E_\varepsilon(u + s\varphi) = \varepsilon \int_X g_x(du, d\varphi) d\mu + \frac{1}{\varepsilon} \int_X W'(u)\varphi d\mu$$

が成り立つ。さらに、部分積分により

$$\int_X g_x(du, d\varphi) d\mu = - \int_X (\Delta u)\varphi d\mu$$

であるから、

$$dE_\varepsilon(u)(\varphi) = -\varepsilon \int_X (\Delta u)\varphi d\mu + \frac{1}{\varepsilon} \int_X W'(u)\varphi d\mu$$

を得る。

したがって、本稿の定式化

$$\partial_t u(t) = -dE_\varepsilon(u(t))$$

は

$$\frac{d}{dt} \int_X u(t)\varphi d\mu = \varepsilon \int_X (\Delta u)\varphi d\mu - \frac{1}{\varepsilon} \int_X W'(u)\varphi d\mu$$

を与える。これは古典的な Allen–Cahn 方程式

$$\partial_t u = \varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} W'(u)$$

の通常の弱形式にほかならない。したがって、ここで与えた定式化は、少なくともリーマン多様体の場合に古典的な Allen–Cahn 方程式を復元している。

また、同様の考え方は Allen–Cahn 方程式に限られない。Dirichlet エネルギーのみを用いれば熱方程式に対応する定式化が得られ、ポテンシャル項を変更すれば他の反応拡散型方程式についても類似の定式化が考えられる。この意味で、diffeological space 上のエネルギー形式の構成は、時間依存の方程式を変分的に定式化するための候補を与える。

4 まとめと今後の課題

本稿では、計量と Borel 測度を備えた diffeological space 上に Sobolev 空間 $H^1(X)$ を構成し、Allen–Cahn 型エネルギー汎関数の微分を用いて Allen–Cahn 方程式を定式化する枠組みを述べた。この構成により、従来の多様体の枠組みに収まりきらない空間に対しても、変分法に基づく偏微分方程式論を導入するための一つの見通しが得られる。

今後の課題として、まず、どのような計量 g と測度 μ を自然なものとして採用すべきかを精査する必要がある。また、測度距離空間上の Sobolev 空間論との関係を整理することも今後の課題である。さらに、解の存在・一意性や長時間挙動をどこまで示せるかも明確にする必要がある。加えて、diffeological space における他のリーマン計量の定義との比較や、貼り合わせの空間、タイリング空間など具体例への適用も今後の課題である。これらを通じて、非古典的な空間上の時間依存の方程式を扱う理論をさらに発展させたい。

謝辞 本研究は、社会数理実践研究・駆動班における活動の一環として行われた。課題設定および議論の機会をいただいた東京海上ディーアール株式会社の佐藤一郎様、矢野良輔様に感謝申し上げる。また、本研究および発表内容について有益なコメントをくださった田中雄一郎先生、柏原崇人先生に深く感謝する。

参考文献

- [1] J. Daniel Christensen and Enxin Wu, Tangent spaces and tangent bundles for diffeological spaces, *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.*, **57** (2016), no. 1, 3–50.
- [2] Pedro Gaspar and Marco A. M. Guaraco, The Allen–Cahn equation on closed manifolds, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **57** (2018), Paper No. 101, 42 pp.
- [3] Patrick Iglesias-Zemmour, *Diffeology*, Mathematical Surveys and Monographs, 185, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.