数理科学実践研究レター　2024–9 November 13, 2024

研削現象記述のための砥粒圧力計算モデル

by

小島 直泰

UNIVERSITY OF TOKYO
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
KOMABA, TOKYO, JAPAN

研削現象記述のための砥粒圧力計算モデル

小島直泰[1]（東京大学大学院工学系研究科）
Naoyasu Kojima (Graduate School of Engineering, The University of Tokyo)

概 要

研削作業とは，砥石を高速回転させ，工作物を削る加工法であり，その過程で砥石自身も削られその状態が変化することが特徴である．複雑な現象であるため，正確なモデリングが困難であり，様々な制御入力と研削量や砥石の状態変化の関係や，砥石の状態表現としてどのような量が必要であるかは明らかになっていない．本稿では，研削における砥粒の先端における局所圧力を計算する数理モデルを Hertz の接触理論に基づき作成した．また，その結果砥石の状態を表現するために必要である量が示唆された．砥粒先端圧力を説明変数とすることにより，研削量や砥粒の脱落等についての議論が見通しが良くなることが期待される．

1 はじめに

1.1 研削作業について

研削作業とは，砥石を高速回転させ，工作物を削る加工法であり，溶接加工による金属表面のでっぱり等を除去し，滑らかな表面に加工する目的等で用いられる．砥石は主に砥粒と結合剤から成り，研削作業の過程でその形状と表面状態を変化させる．その原因としては，1) 砥粒が摩耗し，切れ味が低下する目つぶれ現象，2) 砥粒が脱落する目こぼれ現象，3) 砥粒の間に切りくずが詰まり固着する目詰まり現象 等の現象が挙げられる．

このように砥石の状態が変化するため，そのほかの作動条件が同一であっても研削量が変化し，研削量の正確な予測は困難なものとなる．また，研削は上の様な砥石の状態変化や，工作物の状態，形状の変化を伴うとても複雑な現象であり，第一原理からの正確なモデル化は難しい．

1.2 研削現象のモデル化の課題

研削作業における制御パラメータは 1) 砥石を工作物に押し付ける押しつけ力 2) 砥石の回転数 3) 砥石を工作物の上を動かす速度である送り速度 等があるが，それらの入力と研削量および砥石の状態変化の関係を記述する明確なモデルは知られていない．そのため，これらの関係は砥石と工作物の種類ごとに実験的に調べられるが，そのためには総当たり的に多くの研削作業実験を行う必要があるが，これは手間がかかる作業となる．また，研削作業のモデル化のためには作業中に変化する砥石の状態を記述する必要があるが，どのような量が砥石の状態表現に必要かは明確でない．

以上のような課題に取り組むため，本稿では，砥粒における局所的な圧力で整理し，説明変数とすることで研削現象における入力と出力の関係の見通しが良くなることを期待し，砥石の状態変化による砥粒圧力を予測する数理モデルを構築する．その中で，砥石の表面状態を記述するために必要と考えられる物理量も導かれる．

2 砥粒圧力計算モデル

以下で Hertz の接触理論に基づいた砥粒圧力計算モデルの導出を行う．Hertz の接触理論は理想的な場合の接触についての理論であり，研削現象ではその仮定を満たさない点もあるが，簡易的なモデルとして用いる．研削現象に対して Hertz の理論を用いた例はいくつかあり [4, 5]，その利用が妥当であると言及されている．

また，Hertz の接触接触を粗い面に適用した理論は存在するが [3]，それは粗さを考慮したうえで平均化された圧力を求めるものであり，研削現象において重要であると考えられる各突起先端での局所的な圧力について考えるものではない．以下では砥粒の様な凹凸が存在する面において，その各砥粒先端での圧力の期待値を求めるモデルを導出する．

[1] kojima-naoyasu338@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

2.1 Hertz の接触理論

Hertz の接触理論 [1, 2] は理想的な状況で 2 つの弾性体が接触する際の圧力と変位を求める理論である．その仮定は以下の通りである．

1) 応力－ひずみ関係が Hooke 則に従う弾性変形である
2) 静的つり合い状態である
3) 摩擦はなく，接触中心の真上からまっすぐに力がかかる
4) 物体の曲率半径に比べ接触範囲が小さい

以下に Hertz の接触理論の結果を簡単にまとめる．

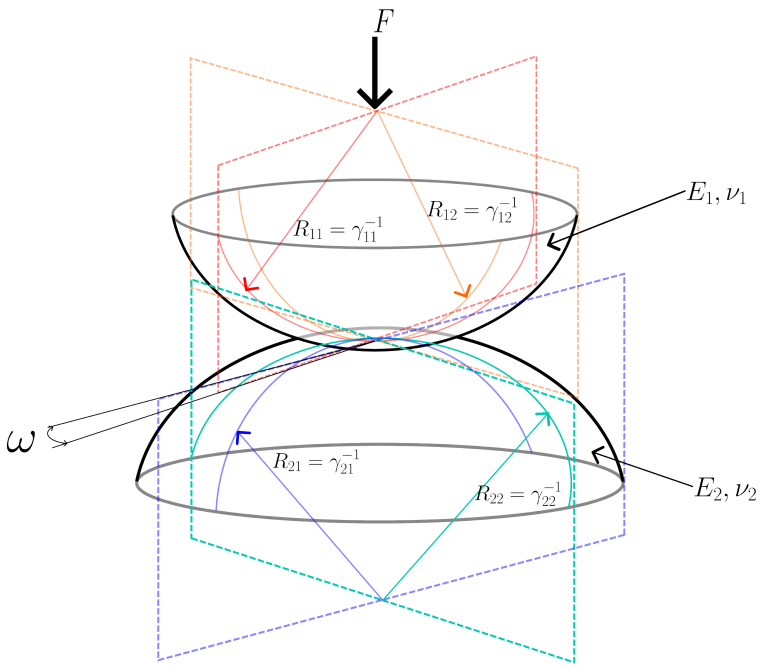

図 1: 接触する 2 物体

図 1 に示すように物体 $i = 1, 2$ の主曲率を γ_{i1}, γ_{i2}，ヤング率を E_i，ポアソン比を ν_i，2 つの物体の主方向のなす角を ω，押しつけ力を F とする．記号を以下の様に定める．

$$\gamma_4 = \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma_{11} - \gamma_{12})^2 + (\gamma_{21} - \gamma_{22})^2 + 2(\gamma_{11} - \gamma_{12})(\gamma_{21} - \gamma_{22})\cos 2\omega} \tag{1}$$

$$\gamma_5 = \frac{1}{2}(\gamma_{11} + \gamma_{12}) + \frac{1}{2}(\gamma_{21} + \gamma_{22}) \tag{2}$$

$$\tau = \arccos\left(\frac{\gamma_4}{\gamma_5}\right) \tag{3}$$

$$E_i^* = \frac{4}{3}\frac{E_i}{1 - \nu_i^2}, \quad E^{*-1} = (E_1^{-1} + E_2^{-1}) \tag{4}$$

また，係数 λ, μ, ν を

$$\frac{1 - k^2}{k^2}\frac{K(k^2) - E(k^2)}{E(k^2)} = \sin^2\frac{\tau}{2}$$

の解 k を用いて

$$\lambda\nu = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-k^2}K(k^2) \tag{5}$$

$$\mu^3 = \frac{2}{\pi(1-k^2)}E(k^2) \tag{6}$$

$$\nu^3 = \frac{2\sqrt{1-k^2}}{\pi}E(k^2) \tag{7}$$

とおく．このとき，接触領域は長半径 a，短半径 b の楕円となる (図 2).

$$\gamma_5 a = \left(\frac{F\gamma_5^2}{E^*}\right)^{\frac{1}{3}}\mu, \quad \gamma_5 b = \left(\frac{F\gamma_5^2}{E^*}\right)^{\frac{1}{3}}\nu \tag{8}$$

最大変位 δ，平均圧力 $P_{\rm avg}$ と最大圧力 $P_{\rm max}$ は

$$\delta = \left(\frac{F\gamma_5}{E^*}\right)^{\frac{2}{3}}\lambda \tag{9}$$

$$P_{\rm avg} = \frac{2}{3}P_{\rm max} = \frac{E^*}{\pi\mu\nu}\left(\frac{F\gamma_5^2}{E^*}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{10}$$

となる．ただし，$K(x), E(x)$ は第一種，第二種完全楕円積分である．

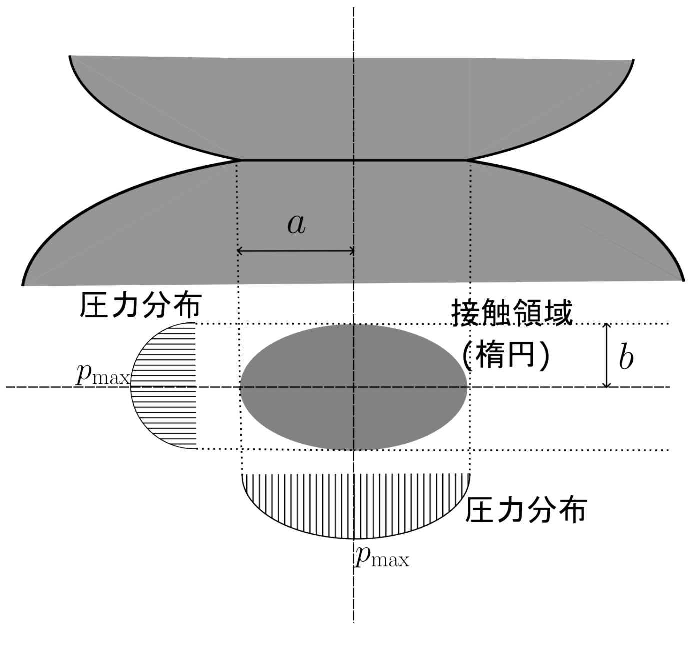

図 2: 接触領域と圧力分布

2.2 砥粒圧力計算モデル (凹凸平面－平面の場合)

１つの砥石のは形状にばらつきのある多くの砥粒からなり，研削中にその形状を変化させていくため，砥石の状態については確率モデルを用いて記述することとする．以下を仮定する．

1) Hertz の理論の仮定を満たす

2) 砥粒の最大高さの分布が正規分布に従う

3) 砥粒の曲率と砥粒高さの確率分布が独立である

N 個の砥粒が接触しており，砥石全体が力 F で押され，i 番目の砥粒が曲率 κ_i で高さ δ_i だけ圧縮されるとする．また，特定の砥粒 i に注目せず全体の分布を考えるときには添え字 i を省き，砥粒の曲率を κ，変位を δ と表す．
Hertz の接触理論から，砥粒 i の接触面積 A_i，砥粒 i にかかる力 f_i，砥粒 i での最大圧力 $p_i^{\max}$ はそれぞれ次のようになる．(各変数の説明を図 3 に示す．)

$$A_i = \frac{\pi\delta_i}{\kappa_i} \tag{11}$$

$$f_i = \frac{4}{3}E_*\kappa_i^{-\frac{1}{2}}\delta_i^{\frac{3}{2}} \tag{12}$$

$$p_i^{\max} = \frac{3F_i}{2A_i} = \frac{2E^*}{\pi}\kappa^{\frac{1}{2}}\delta_i^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

以上と力のつり合い条件

$$\sum_i^N f_i = F \tag{14}$$

の下で $p_i^{\max}$ の期待値を求める．砥粒高さ δ_i と砥粒曲率 κ_i の独立性を仮定すると，

$$\sum_i f_i = F \tag{15}$$

$$\langle f\rangle = \frac{F}{N}(\because \text{ 独立同一分布}) \tag{16}$$

$$\langle\delta^{\frac{3}{2}}\rangle = \frac{F}{N}\frac{3}{4E^*\langle\kappa^{-\frac{1}{2}}\rangle} \tag{17}$$

ここで，$\langle x\rangle$ で x の期待値を表し，砥粒の曲率の期待値を $\langle\kappa\rangle$ 等と表す．
δ が正規分布に従うなら，$\langle\delta^{\frac{3}{2}}\rangle$ は δ の平均と分散で表される．よって，δ の分散が既知であれば $\langle\delta^{\frac{3}{2}}\rangle$ から $\langle\delta\rangle$ を求め，さらに $\langle\delta^{\frac{1}{2}}\rangle$ を求めることができる．なお，δ はもともとの砥粒高さから全体が圧縮されたものなので，その分散は変形前の砥粒高さ h の分散に等しい．
以上から，

$$\langle p_i^{\max}\rangle = \frac{2E^*}{\pi}\langle\kappa^{\frac{1}{2}}\rangle\langle\delta^{\frac{1}{2}}\rangle \tag{18}$$

が求められる．なお，(17) は変位と力の関係式，(18) は変位と圧力の関係式であると考えられる．

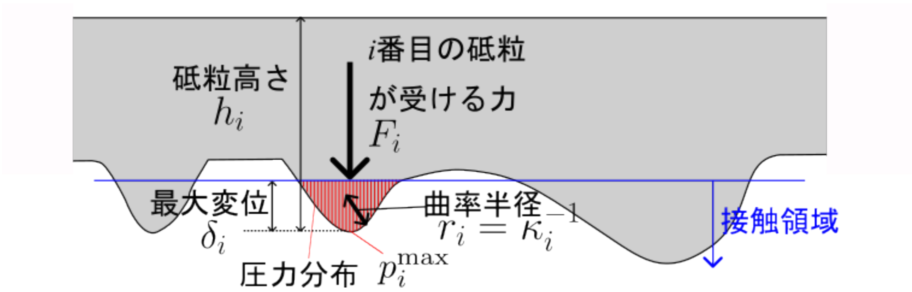

図 3: 砥粒圧力計算モデルにおける変数

2.3 砥粒圧力計算モデル (凹凸曲面 – 曲面の場合)

全体の曲率がある凹凸曲面の接触の場合，簡単な式を得ることは難しいが，[3] にある方法で平均的なバルク変位を求め，接触砥粒の数 N を接触面積×数密度で見積り，平面の場合で $\delta_i \to d_i - w_b$ とすれば同様の議論で砥粒圧力を計算することができる．しかし，d_i が正規分布であっても $d_i - w_b$ は正規分布にはならないので，$\langle\delta^{\frac{3}{2}}\rangle$ から $\langle\delta^{\frac{1}{2}}\rangle$ を陽に求めることはできず，複雑な関係式が得られるにとどまる．

2.4　砥粒圧力計算モデルのまとめ

上では，研削における砥粒先端の圧力の期待値を求める数理モデルを Hertz の接触理論に基づき作成した．このモデルでは，

- 押しつけ力 F
- 砥石の主曲率 γ_1, γ_2
- 砥粒の数密度 n
- 砥粒の曲率の平方根とその逆数の平均値 $\langle \kappa^{\frac{1}{2}} \rangle, \langle \kappa^{-\frac{1}{2}} \rangle$
- 砥粒高さ（砥粒の最大高さ）の分散 $V(h)$
- 砥石および工作物のヤング率，ポアソン比 E, ν

から砥粒先端の圧力の期待値を求めることが可能になった．
さらにその結果，砥石の状態表現には以下の量が必要であることが示唆された．

- 全体の形状を表す接触点における主曲率 γ_1, γ_2,
- 表面状態を記述する
  - 砥粒の平均曲率 $\langle \kappa \rangle$
  - 砥粒の高さ分布の分散 $V(h)$
  - 砥粒の数密度 n
- 物性を表すヤング率およびポアソン比 E, ν

3　本モデルの応用の展望

本稿での砥粒圧力計算モデルにより，統計的な情報から砥粒先端での最大圧力の期待値を求めることが可能になると考えられる．これは，全体的の平均的な圧力ではなく，実際に研削を行う部分の圧力を計算するものであるため，より研削の物理に直接関係する量であることが予想される．これにより，全体での押しつけ力や砥石の形状のみから直接記述する，研削現象における研削量や砥粒の脱落や摩耗にのモデル化よりもより見通しの良い議論が可能になることが期待される．
すなわち，図 4 に示すように，局所的な砥粒先端での圧力を説明変数として導入することにより，局所的な破壊の物理に基づいた局所的な圧力と研削量の関係を考察することが可能になる．これにより単純に押しつけ力と砥石の状態で整理するよりも見通しの良い関係が得られることが期待される．
砥粒の脱落等についても同様で，本モデルを用いることで砥粒一つにかかる力の期待値を求めることが可能になり，これにより砥粒の脱落等についてもより議論が行いやすくなると考えられる．
また，本モデルにより砥石の状態表現に必要な物理量が示唆された．これを応用することで砥石の状態の記述が明確になり，砥石の状態推定等にも役立つ可能性があると考えられる．

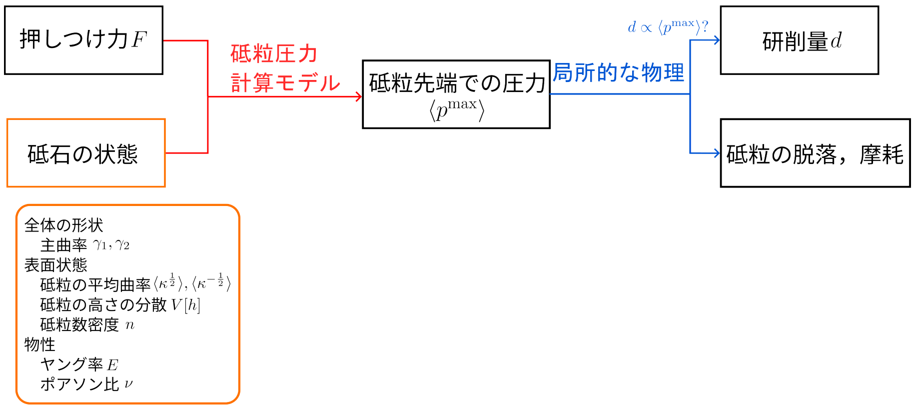

図 4: 本モデルの位置づけと展望

4 終わりに

本稿では Hertz の接触理論に基づき砥粒での圧力を計算するモデルを構築した．これにより，砥粒先端での圧力を中間的な説明変数とすることで見通しの良い議論につながると期待される．また，本モデルにより砥石の状態表現に必要な物理量が示唆され，砥石の状態の記述や推定にも役立つ可能性があると考えられる．

なお，本モデルの正確性については十分な検証ができておらず，有限要素解析等を用いた検証が必要であると考えられる．また，砥粒先端圧力を潜在的な中間変数とすることで研削の記述やモデル化が容易になるというのは予想であり，実際に砥粒先端圧力が研削量や砥粒の脱落量とどのような関係があるかは未解明である．これを明らかにするためには，実験を行い，研削量等と本モデルにより計算された砥粒先端圧力との関係を調べる必要がある．

参考文献

[1] Heinrich Hertz. Ueber die berührung fester elastischer körper. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 92, pp. 156–171, 1882.

[2] Heinrich Rudolf Hertz. Über die berührung fester elastischer körper und über die härte. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes, Berlin : Verein zur Beförderung des Gewerbefleisses, pp. 449 – 463, 1882.

[3] Kenneth Langstreth Johnson. Contact mechanics. Cambridge university press, 1987.

[4] W B Rowe, M N Morgan, H S Qi, and H W Zheng. The effect of deformation on the contact area in grinding. CIRP Ann., Vol. 42, No. 1, pp. 409–412, January 1993.

[5] Y J Wang, Y Huang, Y X Chen, and Z S Yang. Model of an abrasive belt grinding surface removal contour and its application. Int. J. Adv. Manuf. Technol., Vol. 82, No. 9, pp. 2113–2122, February 2016.