数理科学実践研究レター　2024–7 November 01，2024

ハイパーグラフを入出力とする群作用同変なネットワークの学習について

by

小原 和馬

UNIVERSITY OF TOKYO
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
KOMABA, TOKYO, JAPAN

ハイパーグラフを入出力とする群作用同変なネットワークの学習について

小原和馬[1]（東京大学大学院数理科学研究科）
Kazuma Ohara (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概 要

ハイパーグラフをインプットおよびアウトプットにもつ関数に対して，対称群をはじめとしていくつかの種類の群についての対称性を考えることができる．群 G についての対称性を持つような関数の学習においては，G-同変な線型写像のなす空間を調べるということが重要な問題となる．本論文では現実世界で現れる様々な設定のもとで，これらの空間の基底を明示的に構成し，その次元を計算した．

1 はじめに

本レポートは社会数理実践研究における議論で得られた結果のサーベイである．本研究では重み付きハイパーグラフと呼ばれる対象をインプットおよびアウトプットにもつ関数を，群作用同変なネットワークを用いて学習するという問題を扱った．本論文では重み付きハイパーグラフを以下で定義する:

定義 1 重み付きハイパーグラフ $\mathcal{G}$ とは次の三つ組 $(V, E, \mathbf{X})$ のことである*:*

- V*:* 有限集合．$|V| = n$ と書く．ただしここで $|V|$ は V の濃度を表す．V のラベル付け，すなわち全単射 $V \simeq \{1, 2, \ldots, n\}$ を固定し，V の元を $\{1, 2, \ldots, n\}$ の元と同一視する．V の元を重み付きハイパーグラフ $\mathcal{G}$ の頂点と呼ぶ.
- $\mathcal{P}(V)$ で V のべき集合を表す．$E \subset \mathcal{P}(V)$*:* 部分集合．E の元を重み付きハイパーグラフ $\mathcal{G}$ のハイパーエッジと呼ぶ．$\{|e| \mid e \in E\}$ の最大値を k と書く.
- $\mathbf{X}$: $E \to \mathbb{C}$*:* 関数．$e \in E$ に対して $\mathbf{X}(e)$ を $\mathbf{X}_e$ と書き，頂点 e に付随する特徴量と呼ぶ.

以下では簡単のため，重み付きハイパーグラフを単にハイパーグラフと呼ぶことにする．

注意 2 *1)* 通常グラフといった際には E の任意の元 e に対して $|e| = 2$ が成り立つようなハイパーグラフを指す．このときハイパーエッジのことを単にエッジまたは辺と呼ぶ.

2) 特徴量を与える関数 $\mathbf{X}$ の値域を一般の $\mathbb{C}$-ベクトル空間 W に取り替えたものを考えることもできるが，その場合でも議論の本質は変わらないため，本論文では $W = \mathbb{C}$ の場合のみを扱う.

以下の例のように，現実世界における様々なデータはハイパーグラフとして解釈することができる．

例 3
- V*:* ソーシャルメディアのアカウントからなる集合.
- $E \subset V \times V$*:* フォロー・フォロワー関係（FF 関係）にあるアカウントの組からなる集合.
- $\mathbf{X}_e = (e$ の "親密度"*(e.g.* FF 関係である期間の長さ*)).*

ハイパーグラフをインプットおよびアウトプットにもつ関数の学習を行う際には，ハイパーグラフをベクトル空間の元とみなすことが有用である．ハイパーグラフ $\mathcal{G}$ から以下のようにして

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathcal{G}} \in \mathbb{C}^{n^k} \simeq (\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$$

を得ることができる．標準基底を取ることで $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ の元を関数

$$\{1, 2, \ldots, n\}^k \to \mathbb{C}$$

[1] kohara@ms.u-tokyo.ac.jp

と同一視する．このとき，$(i_1,\dots,i_k)\in\{1,2,\dots,n\}^k$ に対して

$$\mathbf{A}_{(i_1,\dots,i_k)}=\begin{cases}\mathbf{X}_e & (e=\{i_1,\dots,i_k\}\in E),\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

とすることで，$\mathbf{A}\in(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ を定める．この対応を通じて，ハイパーグラフをインプットおよびアウトプットにもつ関数を学習する問題は $n\in\mathbb{Z}_{>0},\ k,l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し連続関数

$$f\colon(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}\to(\mathbb{C}^n)^{\otimes l}$$

を学習する問題へと言い換えられる．本研究ではさらに次の条件をみたす連続関数 f を扱う．$\mathfrak{S}_n$ で n 次対称群を表す．任意の $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して自然な作用 $\mathfrak{S}_n\curvearrowright(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ が定まっていることに注意する．

仮定 4 連続関数 $f\colon(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}\to(\mathbb{C}^n)^{\otimes l}$ は $\mathfrak{S}_n$-同変であると仮定する．すなわち任意の $g\in\mathfrak{S}_n$, $v\in(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ に対して，以下が成り立つ:

$$f(g\cdot v)=g\cdot f(v).$$

注意 5 f が $\mathfrak{S}_n$-同変であるという仮定は，対応するハイパーグラフ間の写像が頂点のラベル付けに依らないという条件に対応しており，頂点のラベル情報がないハイパーグラフを入出力とする場合，これはみたされるべき条件である．

$\mathfrak{S}_n$-同変な連続関数の学習については，次が知られている：

定理 6 ([ZKR⁺17a, Theorem 9], [ZKR⁺17b]) $f\colon(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}\to(\mathbb{C}^n)^{\otimes l}$ を $\mathfrak{S}_n$-同変な連続関数とする．このとき，任意のコンパクト部分集合 $K\subset(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ と $\epsilon>0$ に対して，非負整数の列 $k=d_0,d_1,\dots,d_m=l$ および $\mathfrak{S}_n$-同変なアフィン関数の列 $f_i\colon(\mathbb{C}^n)^{\otimes d_i}\to(\mathbb{C}^n)^{\otimes d_{i+1}}$ が存在して

$$\|f\restriction_K-\sigma\circ f_m\circ\sigma\circ\cdots\circ\sigma\circ f_1\restriction_K\|_\infty<\epsilon.$$

が成り立つ．ただしここで σ は ReLU 関数を表す．

なお，[ZKR⁺17a] は [ZKR⁺17b] としても出版されているが，本論文が引用した定理は [ZKR⁺17b] においては削除されている．
定理 6 から，$\mathfrak{S}_n$-同変な連続関数の学習においては $n\in\mathbb{Z}_{>0},\ k,l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\mathfrak{S}_n$-同変な線型関数全体からなる空間

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k},(\mathbb{C}^n)^{\otimes l}\right)$$

を調べるということが重要な問題となる．以下ではこの問題について議論を行う．$\{e_i\mid i\in\{1,2,\dots,n\}\}$ を $\mathbb{C}^n$ の標準基底とする．$I=(i_1,\dots,i_k)\in\{1,2,\dots,n\}^k$ に対して $e_I\in(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ を

$$e_I=e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_k}$$

と定める．このとき $\{e_I\mid I\in\{1,2,\dots,n\}^k\}$ は $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ の基底となる．$I\in\{1,2,\dots,n\}^l$, $J\in\{1,2,\dots,n\}^k$ に対して $E_{I,J}\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k},(\mathbb{C}^n)^{\otimes l}\right)$ を

$$E_{I,J}(e_K)=\delta_{J,K}e_I$$

で定める．$\mathfrak{S}_n$ の $\{1,2,\dots,n\}^{k+l}$ への作用を，各成分への自然な作用によって定め，$\mathcal{O}^{\mathfrak{S}_n}_{k+l,n}$ で $\{1,2,\dots,n\}^{k+l}$ の $\mathfrak{S}_n$-軌道全体の集合を表す．このとき以下が成り立つ．

定理 7 ([Pea22, Theorems 7.1 and 7.2]) $O\in\mathcal{O}^{\mathfrak{S}_n}_{k+l,n}$ に対して $X_O\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k},(\mathbb{C}^n)^{\otimes l}\right)$ を

$$X_O=\sum_{I\in\{1,2,\dots,n\}^l,J\in\{1,2,\dots,n\}^k,(I,J)\in O}E_{I,J}$$

で定める．このとき $\{X_O \mid O \in \mathcal{O}^{\mathfrak{S}_n}_{k+l,n}\}$ は $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k}, (\mathbb{C}^n)^{\otimes l}\right)$ の基底を与える．さらに $n \geq k+l$ であるとき

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k}, (\mathbb{C}^n)^{\otimes l}\right)\right) = \mathrm{B}(l+k)$$

が成り立つ．ただしここで $\mathrm{B}(l+k)$ は $l+k$ 番目の Bell 数である．

本研究の目的は上記の定理のいくつかの変種を与えることである．

2 $\mathfrak{S}_k$-不変部分空間への制限

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ の $\mathfrak{S}_k$-不変部分空間

$$\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k}\right)^{\mathfrak{S}_k} = \left\{ v = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{1,2,\ldots,n\}^k} a_{i_1,\ldots,i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \mid a_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(k)}} = a_{i_1,\ldots,i_k}, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_k \right\}$$

を考える．ハイパーグラフ $\mathcal{G}$ から前節で説明した方法により得られた $\mathbf{A}_{\mathcal{G}} \in (\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ については，$\mathfrak{S}_k$-不変部分空間 $\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k}\right)^{\mathfrak{S}_k}$ の元を定めているということがわかる．

注意 8 上の事実は E の元 e が単なる $\mathcal{P}(V)$ の部分集合であり，その要素に対して順序が定まっていないことに起因している．E を順序付きの V の部分集合からなる集合として定義した場合には，$\mathbf{A}_{\mathcal{G}}$ は $\mathfrak{S}_k$-不変部分空間に入るとは限らない．このことは無向グラフではなく有向グラフを考えるということに対応している．

本研究の主結果の一つ目は定理 7 の類似を Hom-空間

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left(\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k}\right)^{\mathfrak{S}_k}, \left((\mathbb{C}^n)^{\otimes l}\right)^{\mathfrak{S}_l}\right)$$

に対して与えることである．k 次対称群 $\mathfrak{S}_k$ の $\{1,2,\ldots,n\}^k$ への作用を成分の並べ替えによって定める．l 次対称群 $\mathfrak{S}_l$ の $\{1,2,\ldots,n\}^l$ への作用も同様に定める．さらに k 次対称群 $\mathfrak{S}_k$ および l 次対称群 $\mathfrak{S}_l$ の $\{1,2,\ldots,n\}^{k+l}$ への作用を後半の k 個の成分および前半の l 個の成分の並べ替えによって定める．$\mathcal{O}^{\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_l}_{k+l,n}$ で $\{1,2,\ldots,n\}^{k+l}$ の $\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_l$-軌道全体の集合を表す．また Π_{l+k} で $l+k$ の分割全体の集合を表す．Π_{l+k} への $\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_l$ の作用を上と同様に定める．

定理 9 $O \in \mathcal{O}^{\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_l}_{k+l,n}$ に対して $Y_O \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left(\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k}\right)^{\mathfrak{S}_k}, \left((\mathbb{C}^n)^{\otimes l}\right)^{\mathfrak{S}_l}\right)$ を

$$Y_O = \sum_{I\in\{1,2,\ldots,n\}^l, J\in\{1,2,\ldots,n\}^k, (I,J)\in O} E_{I,J}\restriction_{\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k}\right)^{\mathfrak{S}_k}}$$

で定める．このとき $\left\{Y_O \mid O \in \mathcal{O}^{\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_l}_{k+l,n}\right\}$ は $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left(\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k}\right)^{\mathfrak{S}_k}, \left((\mathbb{C}^n)^{\otimes l}\right)^{\mathfrak{S}_l}\right)$ の基底を与える．さらに $n \geq k+l$ であるとき

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left(\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k}\right)^{\mathfrak{S}_k}, \left((\mathbb{C}^n)^{\otimes l}\right)^{\mathfrak{S}_l}\right)\right) = |\Pi_{k+l}/\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_l|$$

が成り立つ．

証明 まず一つ目の主張を示す．線型空間の同型

$$(\mathbb{C}^n)^{\otimes k+l} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k}, (\mathbb{C}^n)^{\otimes l}\right) \tag{1}$$

を

$$e_{(I,J)} \mapsto E_{I,J}\ (I \in \{1,2,\ldots,n\}^l, J \in \{1,2,\ldots,n\}^k)$$

で定める．両辺への $\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_l$ の作用を $I\in\{1,2,\ldots,n\}^l$, $J\in\{1,2,\ldots,n\}^k$, $(\sigma_n,\sigma_k,\sigma_l)\in\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_l$ に対して

$$(\sigma_n,\sigma_k,\sigma_l)\cdot e_{(I,J)}=e_{(\sigma_n^{-1},\sigma_k^{-1},\sigma_l^{-1})\cdot(I,J)}$$

および

$$(\sigma_n,\sigma_k,\sigma_l)\cdot E_{I,J}=E_{(\sigma_n^{-1},\sigma_l^{-1})\cdot I,(\sigma_n^{-1},\sigma_k^{-1})\cdot J}$$

で定める．このとき同型 (1) は $\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_l$-同変である．ここで

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k},(\mathbb{C}^n)^{\otimes l}\right)^{\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_l}=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k},\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes l}\right)^{\mathfrak{S}_l}\right)$$

であることに注意すると，同型 (1) は次の同型を誘導する:

$$\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k+l}\right)^{\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_l}\simeq\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k},\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes l}\right)^{\mathfrak{S}_l}\right)^{\mathfrak{S}_k}.$$

$(\mathbb{C}^n)^{\otimes k+l}$ への $\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_l$-作用の入れ方から

$$\left\{\sum_{K\in O}e_K\mid O\in\mathcal{O}_{k+l,n}^{\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_l}\right\}$$

が $\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k+l}\right)^{\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_l}$ の基底を与えることがわかる．したがって以下を示せばよい:

主張 10 制限写像 $F\mapsto F\restriction_{\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k}\right)^{\mathfrak{S}_k}}$ はベクトル空間の同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k},\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes l}\right)^{\mathfrak{S}_l}\right)^{\mathfrak{S}_k}\simeq\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left(\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k}\right)^{\mathfrak{S}_k},\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes l}\right)^{\mathfrak{S}_l}\right)$$

を誘導する．

主張を示す．

$$p_k=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\sigma\colon\ (\mathbb{C}^n)^{\otimes k}\to\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k}\right)^{\mathfrak{S}_k}$$

を $\mathfrak{S}_k$-不変部分空間への射影とする．このとき

$$(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}=\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k}\right)^{\mathfrak{S}_k}\oplus(1-p_k)\cdot(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$$

であり，作用の定め方から

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k},\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes l}\right)^{\mathfrak{S}_l}\right)^{\mathfrak{S}_k}=\left\{F\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k},\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes l}\right)^{\mathfrak{S}_l}\right)\mid F\restriction_{(1-p_k)\cdot(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}}=0\right\}$$

が成り立つ．これで定理の一つ目の主張が示された．

次に $n\geq k+l$ を仮定する．このとき [Pea22, Theorem 7.2] の証明から全単射 $\Pi_{k+l}\simeq\mathcal{O}_{k+l,n}^{\mathfrak{S}_n}$ が存在する．この対応が $\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_l$-同変であることは簡単に確かめられ，このことと $\left\{Y_O\mid O\in\mathcal{O}_{k+l,n}^{\mathfrak{S}_n\times\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_l}\right\}$ が $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left(\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k}\right)^{\mathfrak{S}_k},\left((\mathbb{C}^n)^{\otimes l}\right)^{\mathfrak{S}_l}\right)$ の基底を与えることから，定理の二つ目の主張を得る．

3 一様ハイパーグラフの学習

$n\in\mathbb{Z}_{>0}$, $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ の部分空間 $D(n;k)$ を

$$D(n;k)=\mathrm{Span}\left\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_k}\mid i_1,\ldots,i_k\in\{1,\ldots,n\}:\mathrm{distinct}\right\}$$

で定める．ハイパーグラフ $\mathcal{G}$ から前節で説明した方法により得られた $\mathbf{A}_{\mathcal{G}}\in(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ が部分空間 $D(n;k)$ に含まれることは，任意の $e\in E$ に対して $|e|=k$ が成り立つことと同値である．このとき

ハイパーグラフ $\mathcal{G}$ は**一様**であるという．通常のグラフについては $k=2$ に対してこの性質がみたされている．
本研究の主結果の二つ目は定理 7 の類似を Hom-空間

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left(D(n;k), D(n;l)\right)$$

に対して与えることである．$\{1,2,\ldots,n\}^{k+l}$ の部分集合 $\mathrm{dist}(n;k,l)$ を

$$\mathrm{dist}(n;k,l) = \left\{(i_1,\ldots,i_{k+l}) \in \{1,2,\ldots,n\}^{k+l} \mid (i_1,\ldots,i_l) : \mathrm{distinct},\ (i_{l+1},\ldots,i_{k+l}) : \mathrm{distinct}\right\}$$

で定める．$\mathfrak{S}_n$ の $\{1,2,\ldots,n\}^{k+l}$ への作用は $\mathrm{dist}(n;k,l)$ を保つことに注意する．

定理 11 $O \in \mathrm{dist}(n;k,l)/\mathfrak{S}_n$ に対して $Z_O \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left(D(n;k), D(n;l)\right)$ を

$$Z_O = \sum_{I\in\{1,2,\ldots,n\}^l, J\in\{1,2,\ldots,n\}^k, (I,J)\in O} E_{I,J} \restriction_{D(n;k)}$$

で定める．このとき $\{Z_O \mid O \in O \in \mathrm{dist}(n;k,l)/\mathfrak{S}_n\}$ は $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left(D(n;k), D(n;l)\right)$ の基底を与える．さらに

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left(D(n;k), D(n;l)\right)\right) = \sum_{m=0}^{\min\{k,l\}} \frac{k!l!}{(k-m)!(l-m)!m!}$$

が成り立つ．

証明　一つ目の主張の証明は定理 9 と同様である．二つ目の主張を示す．$\mathrm{dist}(n;k,l)/\mathfrak{S}_n$ の個数を数える．$0 \leq m \leq \min\{k,l\}$ に対して

$$\mathrm{dist}(n;k,l;m) = \{(i_1,\ldots,i_{k+l}) \in \mathrm{dist}(n;k,l) \mid |\{i_1,\ldots,i_l\} \cap \{i_{l+1},\ldots,i_{k+l}\}| = m\}$$

と定める．このとき各 m に対して $\mathrm{dist}(n;k,l;m)$ は $\mathfrak{S}_n$ の作用で保たれており，

$$|\mathrm{dist}(n;k,l;m)/\mathfrak{S}_n| = \binom{k}{m}\cdot\binom{l}{m}\cdot m! = \frac{k!l!}{(k-m)!(l-m)!m!}$$

である．したがって主張を得る．

4　$\mathfrak{S}_k$-不変部分空間に含まれる一様ハイパーグラフ

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$D(n;k)^{\mathfrak{S}_k} = D(n;k) \cap \left((\mathbb{C}^n)^{\otimes k}\right)^{\mathfrak{S}_k}$$

と定める．このとき次が成り立つ:

定理 12 $O \in \mathrm{dist}(n;k,l)/\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_l$ に対して $W_O \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left(D(n;k)^{\mathfrak{S}_k}, D(n;l)^{\mathfrak{S}_l}\right)$ を

$$W_O = \sum_{I\in\{1,2,\ldots,n\}^l, J\in\{1,2,\ldots,n\}^k, (I,J)\in O} E_{I,J} \restriction_{D(n;k)^{\mathfrak{S}_k}}$$

で定める．このとき $\{W_O \mid O \in O \in \mathrm{dist}(n;k,l)/\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_l\}$ は $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left(D(n;k)^{\mathfrak{S}_k}, D(n;l)^{\mathfrak{S}_l}\right)$ の基底を与える．さらに

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}\left(D(n;k)^{\mathfrak{S}_k}, D(n;l)^{\mathfrak{S}_l}\right)\right) = \min\{k,l\} + 1$$

が成り立つ．

証明　一つ目の主張の証明は定理 9，定理 11 と同様である．二つ目の主張は

$$|\mathrm{dist}(n;k,l;m)/\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_l| = 1$$

から従う．

5 終わりに

本研究ではハイパーグラフをインプットおよびアウトプットにもつ学習を行う際に用いられる様々な Hom-空間の基底を明示的に構成し，その次元の計算を行った．今後期待される進展としては以下の問題が挙げられる:

1) より特殊なハイパーグラフに関する学習に対して，用いる空間をさらに小さくし，その基底を明示的に計算する．

2) 今回得られた基底よりもより計算しやすい基底を構成する．

また，これらの問題に対して，純粋数学の分野で広く研究がなされている対称群の表現論を用いたアプローチが可能ではないかと期待している．

謝辞 研究に非常に有益なコメントをくださった Nikon の高山侑也氏，信田萌伽氏，そして東京大学数理科学研究科の野村亮介先生，鮑園園先生，森迪也先生に深く感謝申し上げます．また，建設的かつ詳細なフィードバックを提供してくださった査読者の方に心より感謝申し上げます．

参考文献

[Pea22] Edward Pearce-Crump, *Connecting Permutation Equivariant Neural Networks and Partition Diagrams*, arXiv e-prints (2022), arXiv:2212.08648.

[ZKR+17a] Manzil Zaheer, Satwik Kottur, Siamak Ravanbakhsh, Barnabas Poczos, Ruslan Salakhutdinov, and Alexander Smola, *Deep Sets*, arXiv e-prints (2017), arXiv:1703.06114.

[ZKR+17b] Manzil Zaheer, Satwik Kottur, Siamak Ravanbakhsh, Barnabas Poczos, Russ R Salakhutdinov, and Alexander J Smola, *Deep sets*, Advances in Neural Information Processing Systems (I. Guyon, U. Von Luxburg, S. Bengio, H. Wallach, R. Fergus, S. Vishwanathan, and R. Garnett, eds.), vol. 30, Curran Associates, Inc., 2017.