数理科学実践研究レター 2024–1 October 23, 2024

冷媒容器内で発生する多泡層の消滅メカニズムの解明のための簡易数理モデルの提案

by

磯部 伸

UNIVERSITY OF TOKYO
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
KOMABA, TOKYO, JAPAN

冷媒容器内で発生する多泡層の消滅メカニズムの解明のための簡易数理モデルの提案

磯部伸[*1]（東京大学大学院数理科学研究科）
Noboru Isobe (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概要

人々が現代的な生活を送る上で欠かせない空調機であるエアコンの内部では、冷媒物質が気体と液体の状態変化を経て使用されている．この過程で生じる多泡現象は，エアコンの故障を引き起こす可能性がある．この問題に対処するため，数理モデルによる数学解析やシミュレーションが行われている．本研究では泡の破膜現象をより容易にシミュレート可能な数理モデルの開発を目指す．提案される数理モデルは，既存のモデルを簡易化したものであり，多泡現象の簡易なシミュレーションを意図したものである．

1　はじめに

人々が現代的な生活を送る上で欠かせない空調機，特に，エア・コンディショナー（エアコン）は，冷凍サイクルと呼ばれる熱力学的サイクルによって作動している．この冷凍サイクルを物理的に実現するため、エアコン内部では冷媒物質を気体（液冷媒）と液体（冷媒ガス）の間で状態変化させている．

この状態変化で生じる工学的に重要な現象として，液冷媒と冷媒ガス，さらにエアコン内部の圧縮機の油冷に用いる油が，冷媒通路上で混ざり合い、多量の泡（多泡）を生成することがある．これらの泡は油が混ざり合っているために粘性が高く，中々破膜しない．そのため，泡が冷媒通路上を逆流してしまい，最悪の場合，圧縮機の故障を引き起こす可能性がある．したがって，安全なエアコンを設計・開発するためには，多泡の生成及び消滅（破膜）を制御することが求められる．しかし，精密なエアコン内部での多泡現象の観測は一般に困難であり，観測データに基づいた制御には限界がある．

以上のような課題に対して，多泡現象を数理モデルによる数学解析やシミュレーションによって理解しようとする試みが産業界や学界で行われている．その一つの例として，Saye–Sethian らの研究がある．彼らは薄膜方程式に基づく，動的に変化する領域上の偏微分方程式を用いた数理モデルをシミュレーションし，数個の泡が破膜する様子をシミュレーションで成功させている [1]．しかしながら，この数理モデルは莫大な計算コストを必要とし，多泡現象のシミュレーションには向いていない．

そこで、本研究では泡の破膜現象をより容易にシミュレート可能な数理モデルの開発を目指す。本研究で提案する数理モデルは，Saye–Sethian によって導入されたモデルの，簡易化として導入される．

2　モデルの導出

提案モデルの説明の前に，Saye–Sethian らによって導入されたモデルの一部を導入する．Saye–Sethian [1] は，泡の巨視的な時間発展を Navier–Stokes 方程式，泡の微視的な時間発展を薄膜方程式（lamella thin-film equation）

$$\partial_t h + \frac{1}{3\mu}\operatorname{div}_\Gamma\left(\sigma h^3 \nabla_\Gamma\left(\left(k_1^2+k_2^2\right)h + \Delta_\Gamma h\right) + \rho g_\Gamma h^3\right) = 0 \text{ in } \mathbb{R}\times\Gamma \tag{1}$$

を用いて表現する数理モデルを提案した．ここで，$\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ $(d=2,3)$ は，泡膜形状を表す曲線（または曲面），未知関数 $h\colon \mathbb{R}\times\Gamma \ni (t,x) \mapsto h(t,x) \in (0,+\infty)$ は泡膜の微小厚さを，図 1 に示すように表現している．また，∇_Γ と $\operatorname{div}_\Gamma$ は，Γ 上の表面勾配および表面発散作用素であり，$\Delta_\Gamma h := \operatorname{div}_\Gamma(\nabla_\Gamma h)$ である．つまり，$\nabla_\Gamma h = (1-nn^\top)\nabla h$, $\operatorname{div}_\Gamma F = \operatorname{div} F - n^\top(JF)n$ である．ここで，n は Γ の法線ベクトル，F は適当なベクトル場，JF はそのヤコビ行列である．さらに，$\rho > 0$ は密度，$\sigma > 0$ は表

*1 nobo0409@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

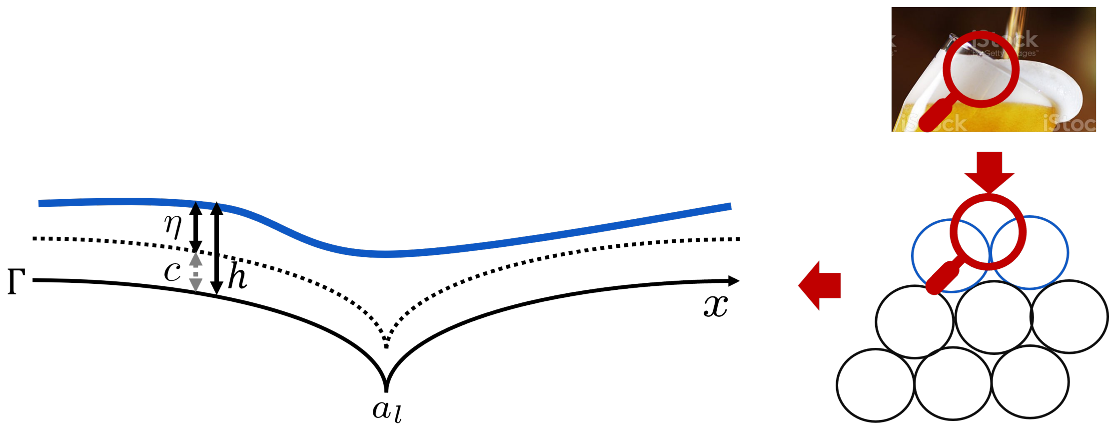

図 1　方程式中に出てくる未知関数の物理的意味

面張力，$\mu > 0$ は膜表面の液体の粘性係数を表す定数であり，$g_\Gamma > 0$ は，重力の，Γ の接線方向への射影，k_1, $k_2 > 0$ は Γ の主曲率である．
本研究では泡の微視的な動きのみ，つまり薄膜方程式に着目することとする．この方程式は，空間に対して 4 階の偏微分方程式となっているだけでなく，負の拡散項を含むために，数値計算，特に時空間の離散化の方法は全く自明ではない．また，曲面 Γ 上の方程式となっていることも，数値計算上の障害となっている．そこで，方程式 (1) に以下の仮定を課す：

1) 泡膜 Γ は曲線（$d = 2$）である．
2) Γ の曲率は無視でき，したがって $g_\Gamma \approx 0$ とみなせる．
3) 空間に関して周期境界条件，つまり，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $h(t, 0) = h(t, 1)$ が成り立つ．
4) 膜の厚さ h は代表厚さ $c > 0$ から微小にしか変動していない，したがって，方程式 (1) の線形化が可能である．
5) 泡厚さ h に比例して泡膜が蒸発し，その蒸発の効果で単位時間当たり αh $(\alpha > 0)$ だけ泡厚さが減少する．

以上の仮定に加えて，「破膜」を人為的に再現するために，方程式の外力項に

$$\sum_{l=1}^{K} c_l \delta_{a_l}$$

という項を加える．ここで，δ_x は点 $x \in [0, 1]$ に台をもつデルタ分布であり，$a_l \in [0, 1]$ と $c_l > 0$ $(l = 1, \ldots, K)$ は，それぞれ「泡の区切り」（図 1 を見よ）と「泡膜が区切りでなす角の大きさを制御する定数」を，人為的に表したものである．ここでは外力項に現れる定数の物理的意味は問わないことにする．
以上を踏まえ，本研究では，次の線形化方程式

$$\partial_t \eta + \frac{\sigma c^3}{3\mu} \partial_x^2 \left(k^2 \eta + \partial_x^2 \eta\right) + \alpha \eta - \sum_{l=1}^{K} c_l \delta_{a_l} + A = 0 \text{ in } \mathbb{T} \times [0, 1] \tag{2}$$

を泡膜の厚さの時間発展を記述する方程式として採用する．ここに，$\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は 1 次元平坦トーラスであり，$A := \sum_{l=1}^{K} c_l$ は質量 $\int_0^1 \eta(t, x)\, \mathrm{d}x$ を適切に時間変化させるための人為的な定数である．

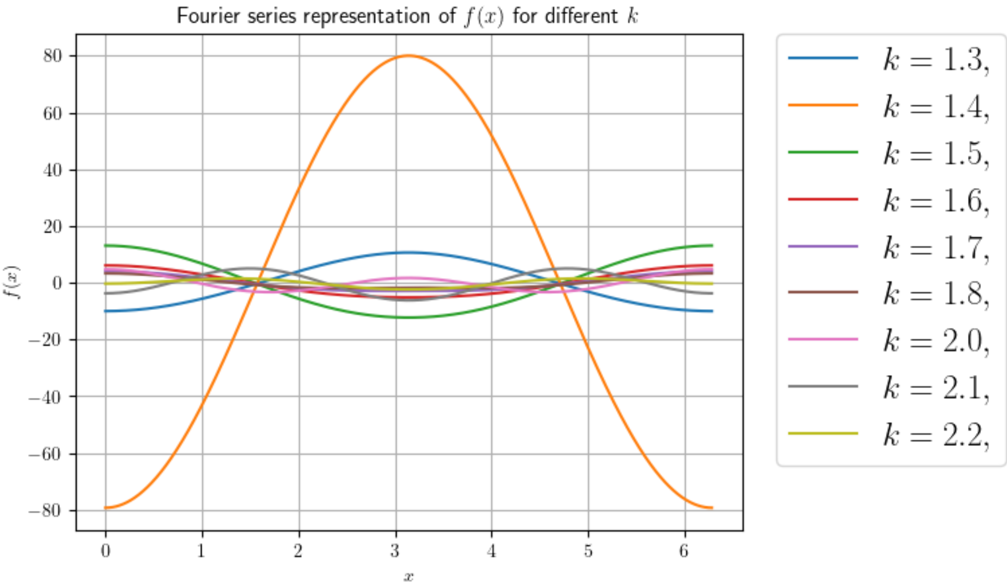

図 2　$\alpha/C = 1$, $K = 1$ の場合に，曲率パラメータ k のみを変化させて定常解 η^* を描画した．

3　数理解析

前節で導入した方程式 (2) に対し，破膜に準ずる挙動が確認できると予想される条件を，数理的に考察する．まず，発展方程式 (2) の定常解 $\eta^*\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を，Fourier 級数展開により形式的に求めると

$$\eta^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{K} \frac{c_l}{C\pi(n^4 - k^2 n^2 + \alpha/C)} \cos\left(n(x - a_l)\right) \tag{3}$$

を得る．ここで $C \coloneqq \sigma c^3/(3\mu)$ と置いた．この定常解の安定性について，次の結果が得られる．

定理 1　定常解 η^* は，条件

$$\alpha - \frac{\sigma c^3 k^2}{12\mu} > 0 \tag{4}$$

を満たすとき，安定である．つまり，方程式 (2) の任意の古典解 $\eta(t,x)$ は，$\lim_{t\to\infty} \|\eta(t,\bullet) - \eta^*\|_\infty = 0$ を満たす．

上記の定理より，条件 (4) を満たす場合は，定常解 (3) により，方程式 (2) の漸近挙動を予測することができる．例えば，図 2 で見られるように，パラメータによっては，安定定常解の振幅が大きくなる場合，つまり，泡膜が大きく膨らんでいる現象に対応する挙動が観察される．

4　シミュレーション

条件 (4) を満たさない不安定な場合や，泡の個数 K が 2 個以上の場合で生じる現象を調べるため，方程式 (2) を離散化し，シミュレーションを実施した．今回は，空間の離散化，すなわち ∂_x^2 の離散化として，二階中心差分を用いた．時間の離散化に関しては，適応的に時間刻み幅を決定するソルバー（`scipy.integrate.solve_ivp`）を用いた．また，なるべく実際の破膜現象にシミュレーション結果を近づけることを意図して，次のようなイベントを発生させる：ある時刻 $t_0 \in \mathbb{R}$ において，ある区間 $[a_k, a_{k+1}]$ $(k = 1, \ldots, K-1)$ における関数 $\eta(t,\bullet)$ の最小値がある閾値を下回ったとき，時刻

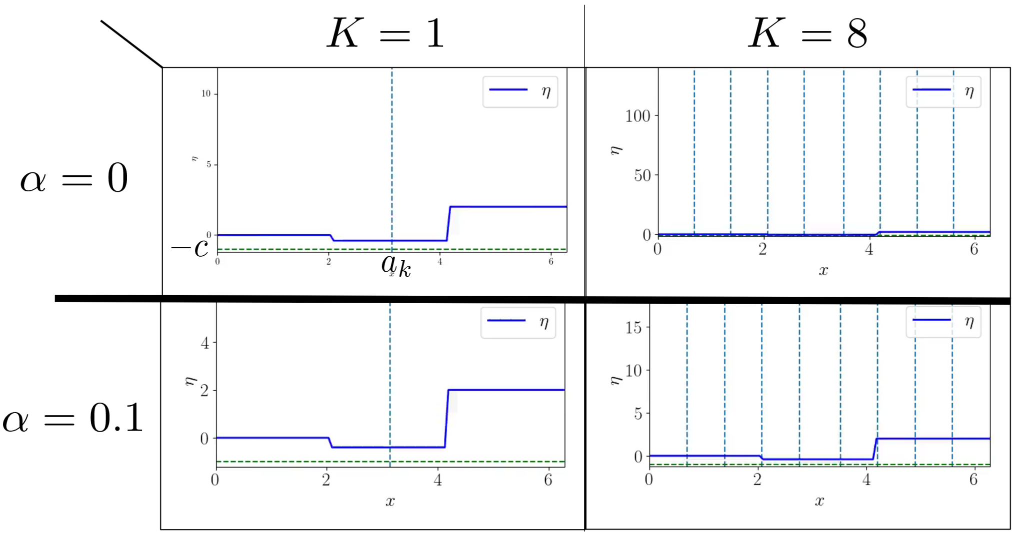

図 3　α と K を変化させたときの方程式 (2) の解のシミュレーションの初期値．この初期値から時間発展させた様子は，こちらのリンクから閲覧可能である．また，実験に用いたコードはこちらのリンクから閲覧可能である．

$t_0^+ = t_0 + 0$，区間 $[a_k, a_{k+1}]$ における関数 η の値は

$$\eta\left(t_0^+, x\right) = \eta_{\mathrm{a}}, \quad a_k < x < a_{k+1} \tag{5}$$

を満たすように初期化する．ここで，$\eta_{\mathrm{a}} > 0$ は，泡膜の厚さの初期値を表す人為的な定数である．
以上の設定の下，数値シミュレーションを行った．その結果を図 3 に示す．時間発展の様子から，α が小さいほど，または，K が小さいほど，上記のイベントが生じる回数が大きいことが分かった．

5　おわりに

今回の研究では，薄膜方程式 (1) を線形化し，さらに人為的なパラメータをいくつか加えることで，数理解析やシミュレーションが実行可能な数理モデル (2) を導出できた．数理解析の結果，パラメータが条件 (4) を満たすときは力学系として安定になり，定常解の形によって，「破膜」，つまり，イベント (5) が生じやすい形が作り出せることが分かった．また，シミュレーションにより，安定定常解を持たない場合であっても，パラメータを変化させることでイベントを発生させる頻度を変化させることができることが分かった．
今後の課題として，多泡の消泡を詳細に解析可能な数理モデルの構築が望まれる．

謝辞

本研究課題は，ダイキン工業株式会社の高根沢悟様，木保康介様，谷本啓介様から提供を受けた．また，本研究に対しては，東京大学大学院数理科学研究科の儀我美一先生，儀我美保先生，許本源先生，間瀬崇史先生からは，毎回の会合で多くの助言をいただいた．特に，北海道大学電子科学研究所の上田祐暉先生には，一対一で研究に対する貴重なコメントをいただいた．先生方に対し，深く感謝申し上げる．

参考文献

[1] R. I. Saye and J. A. Sethian. “Multiscale Modeling of Membrane Rearrangement, Drainage, and Rupture in Evolving Foams”. In: *Science* 340.6133 (2013), pp. 720–724. eprint: https:

//www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.1230623. URL: https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1230623 (cit. on p. 1).