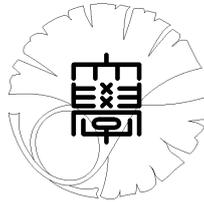


数理科学実践研究レター 2023-15 October 11, 2023

砥粒の脱落を考慮した **Grinding** 作業の数理モデルの構築
-断面負荷を用いて- 試験法編

by

李 公彦、佐藤 知正、高山 義弘、西田 真幸、今野 北斗



UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

砥粒の脱落を考慮した Grinding 作業の数理モデルの構築 -断面負荷を用いて- 試験法編

李公彦¹ (東京大学大学院数理科学研究科)

Kimihiko Li (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

佐藤知正 (東京大学大学院新領域創成科学研究科)

Tomomasa Sato (Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo)

高山義弘 (インテグレスター株式会社)

Yoshihiro Takayama (Integrestar Co.,Ltd.)

西田真幸 (三明機工株式会社)

Masaki Nishida (Sanmei Mechanical Inc.)

今野北斗 (東京大学大学院数理科学研究科)

Hokuto Konno (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概要

Grinding 作業とは、円盤砥石上にある無数の砥粒が工作物を削る作業で、この過程では削る側である砥粒も脱落・摩耗し続けることが特徴である。前稿では Grinding 作業の数理モデルを構成したが、このモデルを使用する場合、砥粒の脱落率の関数 $f(a)$ や、加圧力と断面負荷等の物理特性を把握しなければならない。本稿ではこれらを詳しく調べ、実際の研磨の状況をより正確に予測するための試験法を与える。

1 はじめに

Grinding 作業は、砥石に接着された砥粒が、加工物をはぎとっていく加工である。これは切削加工と違い、加工点が無数といっていいぐらい数多く存在し、作業の進行とともに、砥粒も脱落・摩耗し続ける。この作業のロボット化への要求は昔から存在し、その容易化のために、数理表現を与えることの重要性が高まっている。前稿 [2] では、図 1 のような一般的な研磨の姿勢において、Grinding 作業の数理モデルを与えた。時刻 t に関し、断面 D による単位時間当たりの除去面積を $S(D, t)$ 、断面 D において単位時間に研磨に関わる砥粒の総数を $N(D, t)$ 、切りくず長さを L' とすると、断面 D における断面負荷 $a(D, t)$ について

$$a(D, t) = \frac{S(D, t)}{N(D, t)L'(D, t)} \quad (1)$$

が得られる。砥石初期半径を R_0 、座標 (D, t) の断面の半径を $R(D, t)$ 、砥粒の脱落率の関数を $f(a)$ とすると、 $R(D, t)$ に関する微分方程式が得られる ($S(D, t), a(D, t)$ は半径 $R(D, t)$ に依存する。詳しくは [2] を参照):

$$\begin{cases} \frac{dR(D, t)}{dt} = -\frac{f(a(D, t))S(D, t)}{2\pi R(D, t)} \\ R(D, 0) = R_0. \end{cases} \quad (2)$$

この微分方程式から分かるように、脱落率の関数 $f(a)$ が砥石の変形を記述するため、脱落率の関数 $f(a)$ を精密に調べることが重要になってくる。しかし、 $f(a)$ については、 a が小さい時は恐らく単調増加であり、更に目こぼれ現象を反映するため、断面負荷 a がある程度大きいと $f(a)$ が急に増大することは予想されるが、どういう形をしているかは定かではない。また、断面負荷 a の公式は [2]

¹kimihiko@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

では速度 v 等を用いて記述されているが、ロボットが直接制御できるのは加圧力 F であり、 F と v または F と a の関係も明らかではない。

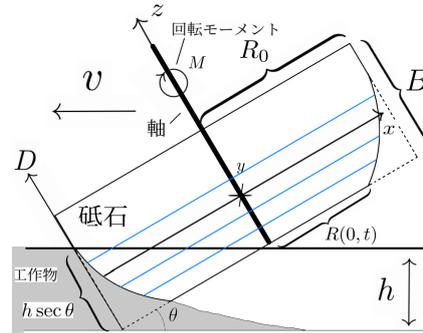


図 1: 一般的な研磨の姿勢 (試験法 3)

理論と実際の状況の関係を詳しく調べるために、本稿では3段階に分けて3つの試験法を提案する。なお、本稿では加圧力 F と速度 v の方向は必ず水平方向で、方向は常に一致していると仮定する。試験法 1 はかなり単純化された状況で、先ほどの疑問について検証するものである。状況については試験法 2, 試験法 3 で徐々に一般化され難しくなっていく、より複雑な状況下で F と a の関係について予想を立て、予想に基づき理論的に求まる結果と実際の結果との差を調べていく方針である。応用の一つとして、各試験法の状況に対応する F と a の関係の予想に基づき、加圧力 F が一定の場合出力される速度 $v(t)$ について、または一定の速度 v を出力するために与える必要のある加圧力 $F(t)$ について、純粋に数学的な議論で導出する。

2 試験法 1 (加圧力 F との関係や比例係数 $f(a)$ について)

2.1 目的

試験法 1 の目的は脱落率の関数 $f(a)$ や、加圧力 F と速度 v または加圧力 F と断面負荷 a の関係を調べることである。

今まで説明した通り、 $f(a)$ がある程度具体的にわからないと、砥石の消耗を正確に予測することは難しいが、 $f(a)$ を理論的に求めるのは容易ではない。また、[2] では、切り込み深さ h や移動速度 v が一定だと仮定していたが、実際の研磨において、正確に制御できるのは加圧力 F であり、加圧力 F に基づき研磨状況を予測する手法を考える必要がある。仮に、図 1 のような一般的な研磨の姿勢の場合、各断面の状況は一定ではない。また、[2] の通り、式 (2) に現れる $a(D, t), S(D, t)$ は積分で求める必要があるが、積分範囲には $\alpha(D, t)$ という、半径 $R(D, t)$ に複雑に依存する量が現れるので、前述の内容について直接調べることは困難である。よって、本節では前述の内容を詳しく調べるため、断面負荷 $a(D, t), S(D, t)$ 等の量が断面 D の取り方に依存せず、 $\alpha(D, t)$ のような複雑な量にも依存させないように、状況が単純化された試験法を与える。

2.2 試験法

試験法 1 は [2] の 2 節と同じく図 2, 図 3 の通りで、これは一般的な姿勢で $\theta = 0$ とした上、工作物をあらかじめ削っておき、削られた跡の形状が砥石と合致した状況を考える。これは各断面の状況が一定で、時刻 t に関する変化もある程度単純になるよう設定したものである。

水平方向の加圧力 F を入力とする。出力される、 F と同じ方向の速度 v を計測する状況を考える。[2] と同様、初期条件として砥石回転速さを M 、初期半径を R_0 、厚さを B 、砥粒直径を d_0 、砥粒率を V_g とする。本節の 1 回の試験として十分短時間の研磨を行ない、この間で出力される速度 v や、 v と初期条件を用いて計算される a に対応する脱落率 $f(a)$ はほぼ変わらないものとみる。[2] の考察

は各断面ごとに行なってきたので、加圧力 F を厚さ B で割ることより得られる“応力” $\sigma = F/B$ を考える。

2.2.1 入出力

この設定の下、他の初期条件 M, R_0, d_0, V_g を固定した場合、 σ を入力とし、速度 v が出力、計測される。本節では、同じ σ と他の初期条件 M, R_0, d_0, V_g の下では必ず同じ v を出力し、 σ と v は 1:1 に対応していると仮定する。この 1:1 関係は半径 R に依存し、 R は砥石の消耗に応じて変化するので、他の初期条件 M, d_0, V_g を固定した場合の、このように試験的に求まる 1:1 関係を関数 $v(\sigma, R)$ とし、表すことにする。

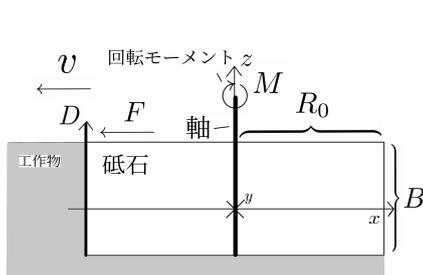


図 2: 試験法 1, 2(横から見た場合)

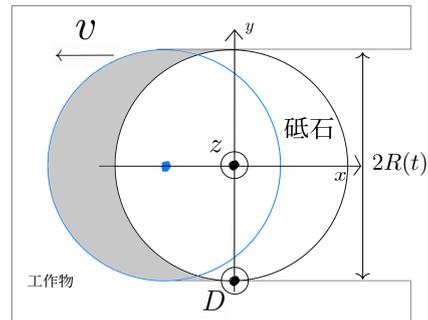


図 3: 試験法 1(上から見た場合)

2.3 理論

2.3.1 断面負荷等について

ある程度長時間で研磨を行なう場合、時刻 t とし、半径等の時刻 t に関する関数を $R(t)$ 等とする。まずは試験法 1 の場合の、断面負荷 $a(t)$ の公式と、 $R(t)$ に関する微分方程式を、[2] と同様の手法で求める。断面負荷は (1) で得られるのだった。 $N(t)$ は前稿と同様

$$N(t) = \frac{12V_g M R(t)}{d_0} \quad (3)$$

である。 $S(t)$ については図 3 の通り

$$S(t) = 2R(t)v(t) \quad (4)$$

である。

最後に切りくず長さ $L'(t)$ を求める。砥粒が描く曲線 l'_t は図 4 の通りで、変数 T による曲線の 1 変数パラメータで表すと (変数 T は曲線の表示を与えるパラメータであり、砥石の時刻 t とは異なることに注意)、 $0 \leq T \leq \pi$ 上で

$$l'_t : \left(-R(t) \sin T - v(t) \cdot \frac{T}{2\pi M}, -R(t) \cos T \right). \quad (5)$$

として与えられる。

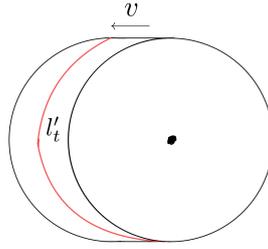


図 4: 曲線 l'_t

(5) を用いて、長さ $L'(t)$ を求めることができる:

$$\begin{aligned} L'(t) &= \int_0^\pi \sqrt{(R(t) \cos T + \frac{v(t)}{2\pi M})^2 + (R(t) \sin T)^2} dT \\ &= \int_0^\pi \sqrt{(R(t))^2 + \frac{v(t)R(t)}{\pi M} \cos T + \frac{(v(t))^2}{4\pi^2 M^2}} dT. \end{aligned} \quad (6)$$

式 (1), (3), (4) と (6) より、断面負荷 $a(t)$ が求まる:

$$a(t) = \frac{d_0 v(t)}{6V_g M L'(t)}. \quad (7)$$

また、式 (4) を (2) に代入すると、微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dR(t)}{dt} = -\frac{f(a(t))v(t)}{\pi} \\ R(0) = R_0 \end{cases} \quad (8)$$

が得られる。

2.3.2 σ と a または σ と v の関係

σ と断面負荷 a との関係について考える。2.2.1 節と同様、 σ と v は 1:1 に対応していると仮定する。断面負荷 a は、ある断面において砥粒に働く力に相当するので、断面全体に与える影響を考える場合、半径 R 分の長さをかけて考えるのが自然で、これが σ と直接関係していると予想することができる。便宜上初期条件 M, d_0, V_g を固定し、断面負荷 $a(v, R)$ を変数 v, R に関する関数として考える。自分は前述の考察に基づき、とある定数 k が存在し、次の式が成り立つという仮説を立てた:

$$a(v, R)R = k\sigma. \quad (9)$$

仮説 (9) は σ と a の 1:1 関係である。また、2.2.1 節では σ と v は 1:1 に対応すると仮定したので、これらの仮定がもし成り立つ場合、式 (7) による a と v の関係として 1:1 に対応していることがわかる。これらの仮定の下で、関数 $a(v, R)$ の変数 v についての逆関数を $v^*(a, R)$ とする。すると、入力 σ に対し、仮説 (9) により、速度

$$v = v^*\left(\frac{k\sigma}{R}, R\right) \quad (10)$$

が理論的に求まる。これと、2.2.1 節で述べた試験的に求まる速度 $v(\sigma, R)$ との比較を行なうことができる:

$$v(\sigma, R) = v^*\left(\frac{k\sigma}{R}, R\right). \quad (11)$$

ポイントとしては、仮説 (9) に基づき、理論的な速度 (10) が求まり、これと試験的に求まる速度 $v(\sigma, R)$ を (11) のように比較を行なうことができる。仮説 (9) は議論の都合上便宜上に与えたもので、この式自体は現実のデータに則しているわけではないが、仮により良い式 (9) のような仮説で、これに基づき得られる式 (10) の類似が高い精度で $v(\sigma, R)$ を再現するようなものを提唱できれば、出力 v については入力 σ と式 (10) の類似を用いて予測を行なうことができ、様々な状況ごとに数多くの実験を行ない $v(\sigma, R)$ を計測する手間を省くことができる。

試験法 1 の目的の一つは仮説 (9) のような関係の正確な形についての詳細を調べることである。

2.3.3 $f(a)$ について

試験法 1 のもう一つの目的は脱落率の関数 $f(a)$ について調べることである。前で述べた通り、十分短時間の研磨では $v, f(a)$ は変わらないものと見る。すると、(8) より、十分に短時間の研磨ならば、近似式

$$f(a) \approx \frac{\pi(R_0 - R(t))}{vt} \quad (12)$$

を仮定してよい。入力 σ に対し出力される v と、時刻 t での半径 $R(t)$ を計測できれば、(7), (12) より、対応する $a, f(a)$ が求まる。大量の試験により、様々な a に対応する $f(a)$ の値が求まるので、これらの計測により関数 $f(a)$ が近似される。

2.3.4 応用

最後に、今までの仮定や (9), (11) の仮定、今まで分かったことに基づき、次を導出する。

- 1) σ が一定の場合出力される速度 $v(t)$
- 2) 一定の速度 v を出力するために与える必要のある $\sigma(t)$

実用上制御しやすく、興味があるのは 1) の方で、出力される速度 $v(t)$ を時刻 t に関して積分すれば、砥石の進行方向の研磨距離が得られる。また、 $v(t)$ から (1), (2) を用いて砥石の消耗 $R(t)$ も計算される。

σ を一定にする場合、仮説 (9) より

$$a(t) = \frac{k\sigma}{R(t)} \quad (13)$$

である。一方、(10) より

$$v(t) = v^*\left(\frac{k\sigma}{R(t)}, R(t)\right) \quad (14)$$

である。式 (13), (14) を (8) に代入すると、 $R(t)$ について解くことができ、 $R(t)$ を (14) に代入すれば速度 $v(t)$ が求まる。

出力される速度 v を一定にしたい場合は、仮説 (9) より、

$$\sigma(t) = \frac{a(v, R(t))R(t)}{k} \quad (15)$$

である。(8) より得られる微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dR(t)}{dt} = -\frac{f(a(v,R(t)))v}{\pi} \\ R(0) = R_0 \end{cases} \quad (16)$$

から $R(t)$ について解くことができ、 $R(t)$ を (15) に代入すれば $\sigma(t)$ が求まる。

3 試験法 2(少し一般的なケース)

3.1 目的

図 2, 図 5 の通り, 試験法 1 と比べてより自然な状況を考え, 試験法 1 で得られた結果に基づき予測を行う。進行方向の研磨距離を $p(t)$ とする。図 5 を見ての通り, 試験法 2 は各断面の状況は一定であるが, 研磨状況は研磨距離 $p(t)$ に依存するため, 試験法 1 と比べてもう少し複雑な議論が必要である。

3.2 試験法

試験法 2 は図 2, 図 5 の通りである。2.2 節と同様, 水平方向の加圧力 F を入力とする。出力される, F と同じ方向の速度 v を計測する状況を考える。初期条件として, 砥石回転速さを M , 初期半径を R_0 , 厚さを B , 砥粒直径を d_0 , 砥粒率を V_g とする。 $\sigma = F/B$ とする。

時刻 t について考える場合, $t = 0$ を, 砥石と工作物が接する時刻 (研磨が開始される時刻) とする。進行方向の研磨距離を $p(t)$ とする。研磨距離 $p(t)$ と, 砥石の消耗速度が十分小さい場合, 工作物の削られた跡の形状は円形で近似できることに注意し, 本節では常にこのことを仮定する。

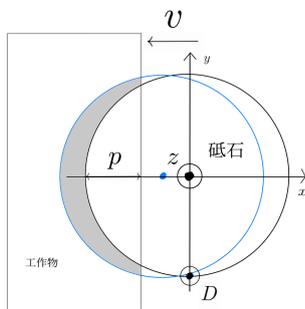


図 5: 試験法 2(上から見た場合)

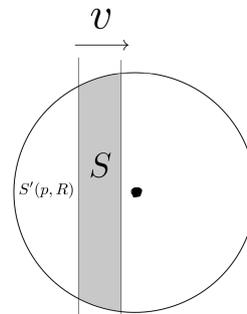


図 6: S は, 細い縦の線が右に v 移動する際生じる面積と考えることができる

3.2.1 入出力

他の初期条件 M, R_0, B, d_0, V_g 及びを研磨距離 p を固定した場合, σ を入力とし, 速度 v が出力, 計測される。2.2.1 節と同様, 本節では, 同じ σ と他の初期条件 M, R_0, B, d_0, V_g 及び p の下では必ず同じ v を出力し, σ と v は 1:1 に対応していると仮定する。他の初期条件 M, d_0, V_g を固定した場合の, 試験的に求まるこの 1:1 関係関数 $v(\sigma, p, R)$ として表すことにする。

3.3 理論

3.3.1 断面負荷について

試験法 2 の場合の, 断面負荷 a を求める。

N は式 (3) で与えられる。
 S については図 6 の通り、

$$\alpha(p, R) := \arccos \frac{R-p}{R} \quad (17)$$

$$S'(p, R) := R^2 \alpha(p, R) - R(R-p) \sin(\alpha(p, R)) \quad (18)$$

として定めると、 $S'(p, R)$ は図 6 の左の細い縦の線によって分断された左半分の面積に相当し、

$$S = S'(v+p, R) - S'(p, R) \quad (19)$$

で与えられる。

最後に切りくず長さ L' を求める。砥粒が描く曲線 l' を変数 T による曲線の 1 変数パラメータで表すと、[2] の 4 節の $l'_{D,t}$ と殆ど同様、 $-\alpha \leq T \leq \alpha$ 上で

$$l' : (R \cos T + \frac{v}{2\pi M}(T + \alpha), R \sin T) \quad (20)$$

として与えられる。

(20) を用いて、長さ L' を求めることができる:

$$\begin{aligned} L' &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{(-R \sin T + \frac{v}{2\pi M})^2 + (R \cos T)^2} dT \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{R^2 - \frac{vR}{\pi M} \sin T + \frac{v^2}{4\pi^2 M^2}} dT. \end{aligned} \quad (21)$$

断面負荷 a は式 (3), (19), (21) を (1) に代入することより得られる。

3.3.2 σ と v の関係

便宜上初期条件 M, d_0, V_g を固定し、断面負荷 $a(v, p, R)$ を変数 v, p, R に関する関数として考える。2.3.2 節と同様の議論で、同じ p, R の下では a と v は 1:1 に対応するので、関数 $a(v, p, R)$ の変数 v についての逆関数を $v^*(a, p, R)$ とする。仮説 (9) を仮定した場合、入力 σ に対し、理論的に求まる速度 $v^*(\frac{k\sigma}{R}, p, R)$ は、本節最初で考えた試験的に求まる速度 $v(\sigma, p, R)$ と一致するはずである:

$$v(\sigma, p, R) = v^*(\frac{k\sigma}{R}, p, R). \quad (22)$$

3.3.3 応用

最後に、(22) 等の仮定に基づき、2.3.4 節と同じ内容について調べる。

$$\frac{dp(t)}{dt} = v(t) \quad (23)$$

であることに注意する。

σ を一定にする場合、式 (13) より

$$v(t) = v^*(\frac{k\sigma}{R(t)}, p(t), R(t)). \quad (24)$$

式 (13), (19), (24) を (2), (23) に代入することより得られる微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dR(t)}{dt} = -\frac{f(\frac{k\sigma}{R(t)})S(v^*(\frac{k\sigma}{R(t)}, p(t), R(t)), p(t), R(t))}{2\pi R(t)} \\ \frac{dp(t)}{dt} = v^*(\frac{k\sigma}{R(t)}, p(t), R(t)) \\ R(0) = R_0 \\ h(0) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

から $R(t)$ と $p(t)$ について解くことができ、これらを (24) に代入すれば速度 $v(t)$ が求まる。出力される速度 v を一定にしたい場合は、式 (23) より、

$$p(t) = vt \quad (26)$$

である。仮説 (9) と式 (26) より、

$$\sigma(t) = \frac{a(v, vt, R(t))R(t)}{k}. \quad (27)$$

式 (26) を (2) に代入することより得られる微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dR(t)}{dt} = -\frac{f(a(v, vt, R(t)))S(v, vt, R(t))}{2\pi R(t)} \\ R(0) = R_0 \end{cases} \quad (28)$$

から $R(t)$ について解くことができ、 $R(t)$ を (27) に代入すれば $\sigma(t)$ が求まる。

4 試験法 3(一般的な研磨のケース)

4.1 目的

図 1 の通り、一般的な研磨の姿勢を考え、今までで得られた結果に基づき予測を行う。また、応用の一つとして、一定の削り深さ H を実現する、砥石の速度 $v(t)$ や加圧力 $F(t)$ に対するフィードバックによる研磨を紹介する。

試験法 3 は各断面の状況、時刻 t に関する状況がいずれも一定ではないため、今までの試験法と比べて更に複雑な議論が必要である。

4.2 試験法

簡単のため、試験法 3 は図 1 の通り、入力する加圧力 F と、出力、計測される、 F と同じ方向の速度 v は必ず左方向であると仮定する²。[2] と同様、初期条件として、砥石回転速さを M 、初期半径を R_0 、厚さを B 、砥石と平面との角度を θ 、切り込み深さを h 、砥粒直径を d_0 、砥粒率 V_g を考え、軸方向の座標軸を D とする。

4.2.1 入出力

初期条件や、砥石と工作物の接触の仕方等、研磨状況を固定して考えた場合、加圧力 F を入力とし、速度 v が出力、計測される。2.2.1 節等と同様、本節では、同じ F と他の初期条件や研磨状況の下では必ず同じ v を出力し、 F と v は 1:1 に対応していると仮定する。

²実際の研磨の状況では垂直方向の加圧力 F と水平方向の速度 v を入力し、どの程度の削り深さ H を出力するかに興味を持つことが多いが、本稿ではこの状況については一切考慮しない。

4.3 理論

4.3.1 F と a または F と v の関係

試験法 3 において、加圧力 F との関係、つまり式 (9) の一般化をどのように行なえばよいのかは明らかではないが、2.2 節の σ を軸方向に厚さ B の長さ分積分したものが F なので、仮説 (9) を軸方向に厚さ B の長さ分積分したものとして、次の式を予想する：

$$F(t) = \frac{1}{k} \int_0^B a(D, t) R(D, t) dD. \quad (29)$$

(29) のような関係の詳細については明らかではないが、今はとりあえず (29) を前提にして議論を進める。以前と同様の方法で、断面負荷 $a(D, v, R)$ を変数 D, v, R に関する関数として考える。図 1 の状況で研磨を行なわせ、 $v(t)$ が出力された場合、(2) により得られる微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dR(D, t)}{dt} = -\frac{f(a(D, v(t), R(D, t)))S(D, t)}{2\pi R(D, t)} \\ R(D, 0) = R_0 \end{cases} \quad (30)$$

から $R(D, t)$ について解くことができ、 $a(D, t) = a(D, v(t), R(D, t))$ も定まる。式 (29) より $F(t)$ も求まる。この対応により定まる、関数に関する写像

$$\begin{aligned} \{ [0, \infty) \text{ 上の実数値関数} \} &\rightarrow \{ [0, \infty) \text{ 上の実数値関数} \} \\ v(t) &\mapsto F(t) \end{aligned} \quad (31)$$

は仮定により全単射であり、逆写像として関数 $F(t)$ を入力して関数 $v(t)$ を出力させる写像

$$\begin{aligned} \{ [0, \infty) \text{ 上の実数値関数} \} &\rightarrow \{ [0, \infty) \text{ 上の実数値関数} \} \\ F(t) &\mapsto v(t) \end{aligned} \quad (32)$$

を考察することができる。

4.3.2 応用

(29) 等の仮定に基づき、2.3.4 節と同じ内容について調べる。

F を一定にする場合、定数関数 $F(t) \equiv F$ を (32) で対応させることより $v(t)$ が得られる。 $v(t)$ を (30) に代入すると、 $R(D, t)$ についても解くことができる。

出力される速度 v を一定にしたい場合は、(2) より、 $R(D, t)$ について解くことができる。 $R(D, t)$ と $v(t) \equiv v$ を (29) に代入することより、

$$F(t) = \frac{1}{k} \int_0^B a(D, v, R(D, t)) R(D, t) dD \quad (33)$$

が求まる。

4.3.3 フィードバックによる研磨 (一定の削り深さ H の実現)

最後に、今までの理論を応用して、砥石の速度 $v(t)$ や加圧力 $F(t)$ に対するフィードバックにより、工作物を一定の削り深さ H で研磨する手法を紹介する。

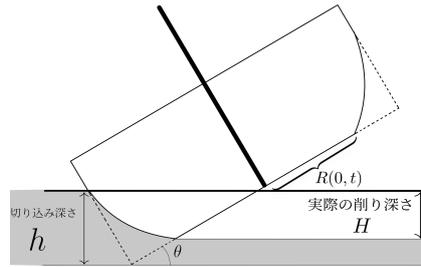


図 7: 試験法 3(一般的な研磨) 切り込み深さ h と実際の削り深さ H は一致しない

図 7 を参照しながら説明する。[2] の 4 節で設定した通り、切り込み深さ h は砥石が全く消耗されていない状態で考えた場合の深さであって、時刻 $t = 0$ の場合は実際の削り深さ H と一致するが、同じ切り込み深さ h で砥石が消耗した場合、実際の削り深さ $H(t)$ は $h - (R_0 - R(0, t)) \sin \theta$ となり、消耗に応じて徐々に浅くなる。よって、時刻 t に応じて砥石を下に $(R_0 - R(0, t)) \sin \theta$ 分動かす、つまり

$$h(t) = h(0) + (R_0 - R(0, t)) \sin \theta \quad (34)$$

とすれば、図 8 のように、実際の削り深さを $H(t) \equiv h(0)$ と常に一定にすることができる。式 (34) を (2) に代入すると、 $R(D, t)$ について解くことができ、得られた $R(0, t)$ を (34) に代入すると、 $h(t)$ が求まる。砥石を垂直方向に $h(t)$ の通りに調整すればよい。

今までは砥石の消耗を考慮した理論がなかったため、適当に加圧力を加えて研磨を行なうことになり、正確に削れたかどうかは研磨を行なった後で確かめるしかない。しかし本稿の結果を用いると、加圧力 $F(t)$ が得られた場合は (32) から $v(t)$ が定まり、 $v(t)$ が得られた場合は (1), (2) を用いて砥石の消耗 $R(D, t)$ 等が計算され、 $R(0, t)$ から $h(t)$ が求まる。このような議論に基づいて主体的に砥石を操作し研磨を行なわせることにより、工作物をより高い精度で指定した形状に仕上げることが可能となる。

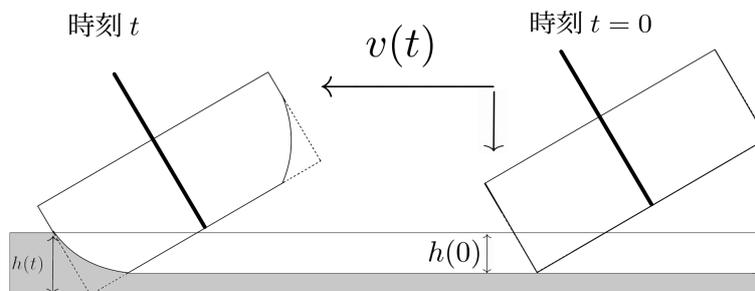


図 8: $v(t)$ や $F(t)$ に対するフィードバックによる研磨 (一定の削り深さ $H \equiv h(0)$ の実現)

5 終わりに

前稿 [2] と本稿で断面負荷の理論を構成したが、これらの理論が実際の状況とそのまま合致しているとは考えにくい。ただ、砥石の消耗を考慮したモデルを初めて構成しようと試みたことや、仮説 (9) 等についての詳細がどの程度分かれば、何が明確に計算出来て何ができるのか、これらの議論の道筋を与えたことが、今まで出した成果の中で特に重要なことだと筆者は思う。

今後の課題の候補をいくつかあげておく。まず、本稿では加圧力 F は常に水平方向としたが、垂直方向の F と水平方向の v を入力して削り深さ H を出力する状況の予測方法も考える必要がある。また、断面負荷 a と、 $R(D, t)$ に関する微分方程式を理論上正確に表すことができたが、解くのは易しくなく、解の存在や一意性の問題についても正確には不明瞭である。これらの式を、より簡略化さ

れた式で近似できれば、より少ない手間で現実の状況の予測を行なうことが期待される。また、研磨状況についてのより深い工学的な分析を行なえば、断面負荷の公式及び仮説 (9) 等の改良を行なえる可能性がある。

その他、砥粒がすぐには脱落せず、摩耗して切れ味が鈍る現象である目つぶれ現象はまだ考慮していない。こういった現象も断面負荷 a や切りくず長さ L' を用いて記述できるはずである。更に、砥石や工作物の物性についての分析が行なえた場合、脱落率の関数 $f(a)$ の性質や、目つぶれ現象についてより精密に記述することも可能かもしれない。

それ以外にも、脱落率の関数 $f(a)$ の性質については現時点で殆どわからず、かなり高い精度で $f(a)$ を把握する必要があるが、 $f(a)$ や仮説 (9) 等を調べるための試験法 1 はそのまま現実で行うのは困難と言われている。より高度な解析、シミュレーション手法を用いて、より効率的に脱落率 $f(a)$ や仮説 (9) 等を調べるための試験法を提唱することも、今後解決すべき課題の一つである。

6 謝辞

研磨班において議論して下さったトキワシステムテクノロジーズの今井倫太郎氏、東京海上ディーアール株式会社の矢野良輔氏に心より感謝申し上げます。本研究は東京大学数物フロンティア・リーディング大学院プログラム (FMSP) による助成を受けています。

参考文献

- [1] 奥山繁樹. (2015). 若手技術者のための研削工学 (第 4 回) 研削加工の幾何学. 砥粒加工学会誌, 59(5), p278–281.
- [2] 李公彦, 佐藤知正, 高山義弘, 西田真幸, 今野北斗. (2023). 砥粒の脱落を考慮した Grinding 作業の数理モデルの構築 -断面負荷を用いて- 理論編, 数理科学実践研究レター 2023