数理科学実践研究レター　2021–8 September 01, 2021

ロバストなネットワークの効率的構築およびそのリスク評価

by

李 泰憲

UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

ロバストなネットワークの効率的構築およびそのリスク評価

李泰憲[1] (東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻)
Yasunori Lee (Graduate School of Science, The University of Tokyo)

概 要

本研究では、攻撃に対する耐性の高い "ロバストな" ネットワークを最も効率的に構築する方法について簡単化した設定の下で考察し、その方法に則って構築したネットワークのコストパフォーマンスについて解析を行った。

1 はじめに

我々の身の回りには、交通網や電力網といったインフラをはじめとして、様々なネットワークが存在しているが、これらはいずれも破断によって機能不全に陥るリスクに晒されている。破断は、ランダムに発生する「故障」と、悪意のある「攻撃」の 2 種類に大別され、特に後者ではネットワークの脆弱な箇所から集中的に破断させられるため、被害の規模が大きくなりやすい。そのため、ネットワークを構築する際には、そうした攻撃に対する耐性の高さ (robustness) を考慮することが必要不可欠である。

2 準備

グラフ理論の基本的な用語・概念を導入する。グラフ (あるいはネットワーク) は

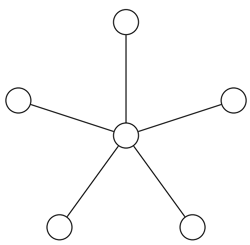
- 頂点 (vertex, node) の集合 V
- 辺 (edge, link) の集合 E

の組からなり、各辺 $e_{ij} \in E$ は 2 つの異なる頂点 $v_i, v_j \in V$ $(i \neq j)$ を結んでいる。本稿では、どの 2 つの頂点も高々 1 本の辺で結ばれているような単純 (simple) なグラフを考えることにする。

定義 1 任意の 2 頂点 $v_i, v_j \in V$ について、いくつかの辺を辿ることで互いに行き来が可能なとき、グラフ G は連結 *(connected)* である、と言う。

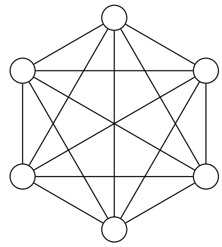
定義 2 どの $(k-1)$ 本の辺を取り除いても連結であるとき、グラフ G は k-辺連結 *(k-edge-connected)* であると言い、そのような k の中で最大のもの $k_{\max}$ をグラフ G の辺連結度 *(edge-connectivity)* と呼ぶ。

具体例として、以下の 2 つのグラフを考える。1 つ目は星型のスターグラフ (star graph) と呼ばれるもので、



上図の通り、ハブ (hub) と呼ばれる中心的な頂点が 1 つあり、その他の頂点はハブとだけ結ばれているような構造をとる。このグラフはどの辺を取り除いても非連結になるため、辺連結度は $k_{\max} = 1$ である。一方、どの 2 頂点も互いに辺で結ばれているようなグラフを完全グラフ (complete graph) と呼ぶ:

[1] yasunori.lee@ipmu.jp



このグラフを非連結にしようと思うと、頂点数を n としたときに、最低でも $n-1$ 本の辺を取り除く必要がある。つまり完全グラフの辺連結度は $k_{\max}=n-1$ である。

3 問題設定

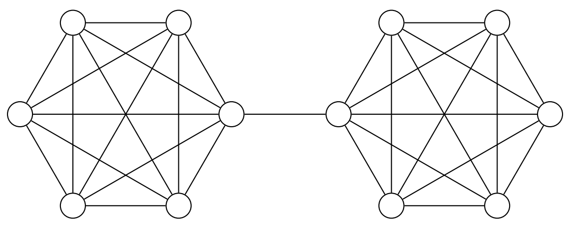
いくつかの頂点が与えられた時、これらの間に適切に辺を張ることで連結な単純グラフにすることを考える。理想的には完全グラフが最も robust であるが、現実的には構築にかけられるコストに上限がある。そこで、辺の数をなるべく抑えつつも、可能な限り robust なネットワークを実現したい。ここで、ネットワークの「破断」の自然な定義として「ネットワークが非連結になること」を採用し、ネットワークに対する「攻撃」として「辺の除去」を考える。すると、ネットワークの robustness はまさに辺連結度で表現されていることになり、より $k_{\max}$ の大きなグラフが、より robust なネットワークに対応する。本稿では、辺を張るのにかかるコストが辺に依らず一定であるような場合に、与えられたコストの下で (*i.e.* 与えられた辺の本数に対して) 実現可能な最も robust なネットワークを構築する方法について考察する。

4 効率的構築

頂点同士を比較した時に、その脆弱性に差がある場合、攻撃側は最も脆弱な頂点を非連結にするのがしばしば最適戦略となる。ゆえに、ネットワーク側はなるべく頂点の脆弱性が均等になるような構築を採ることが望ましい。具体的には、ある頂点を非連結にして孤立させるためには、その頂点から生えている辺を全て取り除けば良い。すなわち、頂点の脆弱性は「その頂点から生えている辺の本数 (degree)」で表現される。そこで、なるべく各頂点の degree が均一になるように辺を張っていくのが基本的な方針となる。また、以上の議論から辺連結度は

$$k_{\max} \leq \min\left\{\deg(v) \,|\, v \in V\right\} \tag{1}$$

で上から抑えられているが、各頂点の degree が十分大きくても、他と比べて “弱い” 辺があると、それを取り除くことでより容易に非連結にできる場合があるため、注意を要する。例えば下図の通り:



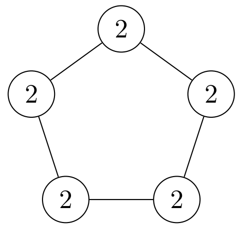
各頂点の degree はいずれも 5 以上であるが、真ん中の辺を 1 本取り除くだけで非連結になる。
さて、式 (1) の帰結として、辺連結度が $2 \leq k_{\max} (\leq |V|-1)$ であるようなグラフは

$$|E| \geq \left\lceil \frac{|V| \cdot k_{\max}}{2} \right\rceil \tag{2}$$

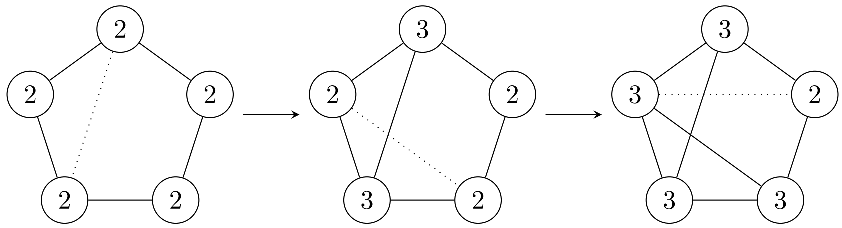
を満たす (ここで $|\cdot|$ は集合の元の個数を表す)。

観察 式 (2) の等号を満たすようなグラフであって、追加でうまく辺を張ることで辺連結度を $k'_{\max} = k_{\max} + 1 \leq |V| - 1$ にしても式 (2) の等号を満たすものは、存在する。

まず、頂点を環状に結ぶとどの頂点も degree は 2 であり、辺はちょうど $|V|$ 本である。この時、どの辺を 1 本取り除いても連結なのでグラフは 2-辺連結であり、確かに式 (2) の等号を満たす。例として $|V| = 5$ の場合を下図に示した。頂点に書かれた数字は degree を表している。



さらに、張る辺をうまく選ぶことで $k'_{\max} = 3$ にしても式 (2) の等号を満たすように出来る。再び $|V| = 5$ の場合を下図に示す:



同様の操作は $k_{\max} = |V| - 1$ まで繰り返すことができ、これが与えられた robustness を最も効率的に実現する方法である。

5　リスク評価

ネットワークからちょうど l 本の辺を取り除くような攻撃が発生する確率を $p_A(l)$ とする。より大規模な攻撃は起こりにくく、より小規模な攻撃は起こりやすいと思われるため、$p_A(l)$ は適当な指数 a に対する power law

$$p_{\mathrm{A}}(l) \propto l^{-a} \tag{3}$$

に従うと考えるのが自然な設定であるが、任意の確率分布を考えて構わない。このとき、先の section で紹介した方法で構築した k-辺連結なネットワークが攻撃を受けた時に非連結になる確率は

$$p_{\mathrm{down}}(k) = 1 - \frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{k-1} p_{\mathrm{A}}(l)}{\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} p_{\mathrm{A}}(l)} \tag{4}$$

と表すことが出来る。このことを利用すると、辺 1 本を構築するのに必要なコスト c の情報と、ネットワークが破断したときに生じる損害 d (破断の仕方・規模に依らないものとする) の情報から、当該ネットワークにおいて採用すべき最適な robustness を算出することができる。すなわち

$$d \cdot p_{\mathrm{down}}(k) \leq c \cdot \left\lceil \frac{|V| \cdot k}{2} \right\rceil \tag{5}$$

を満たす最小の k である。より一般に、あるネットワークに対する「左辺と右辺の差」は当該ネットワークが潜在的に抱えるリスクの定量的な指標として機能する。

6　おわりに

今回は辺を張るのにかかるコストが一定であるような簡単化した状況を考えたが、より現実的には、辺によって張るのにかかるコストは必ずしも一定とは限らない。そのような非自明な重み付きネットワークについても、同様の解析が出来れば非常に興味深いと考える。また、さらなる一般化としては、攻撃として「辺の除去」だけでなく「頂点の除去」を含むことなどが挙げられる。

謝辞

本研究にあたって多くの有益な助言をくださった、東京海上日動リスクコンサルティング株式会社の矢野良輔氏、東京大学数理科学研究科の柏原崇人氏に感謝します。