数理科学実践研究レター　2021–4 August 25, 2021

等スペクトル問題を用いた
cloaking device 作成へのアプローチ

by

佐藤 謙

UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

等スペクトル問題を用いたcloaking device作成へのアプローチ

佐藤　謙*1（東京大学大学院数理科学研究科）
Ken Sato (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概要

物体を光学的に外部から知覚できなくするcloaking deviceの作成に関し，等スペクトル問題の観点からのアプローチを提起する．そして，Selberg跡公式を用いた4次元の等スペクトル多様体の構成について説明する．

1　はじめに

cloaking deviceとは所謂透明マントであり，設置することで電磁波の進路をねじ曲げ，内部に存在する物体を外部から光学的に知覚できなくする装置のことである．理論的には，[GKLU07]をはじめとする一連の論文において，非等方的な媒質，すなわち誘電率や透磁率が方向により変化するような媒質を用いると，cloaking deviceが構成できることが提唱された．そして，メタマテリアルと呼ばれる，物体の微細な構造を調節した素材を用いることで，波長が長いような電磁波については実験的にcloakingが可能であることが[SMJCPS06]で確かめられた．しかし可視光のように波長が短い電磁波に関してcloakingを行おうとすると，既存の構成では，ナノメートル単位で微細な構造を作る必要があり，工学的には現実的な構成とは言えない．そこで本スタディグループでは以下の問題に取り組んだ．

問題 1. cloaking deviceの新たな構成を考えよ．

もしcloaking deviceが存在したとすると，cloaking deviceが設置された空間は何もない空間と幾何学的な性質は異なるが，光学的には同じように振る舞う．そこで，本研究ではより一般的な問題として，

問題 2. 電磁気学的には同じような性質を持つが，幾何学的には異なる空間のペアを見つけよ．

という問題を考えることにした．非等方的な媒質中の電磁波の振る舞いは，誘電率や透磁率をテンソルで置き換えたMaxwell方程式を考える必要があり，一般的に記述するのは難しい．しかしながら，適切な座標変換を施すことで，(Euclid空間中の)非等方的な媒質中の電磁波が満たす方程式を，あるRiemann多様体上の波動方程式に帰着できることがある．これにより，“曲がった空間”であるRiemann多様体上の電磁波の振る舞いを，非等方的な媒質を用いて再現することができる，というのが[GKLU07]におけるcloaking deviceの構成の鍵になっていた．これは工学的にはTransformation Opticsと呼ばれるテクニックであり，本稿の2節で説明する．
Transformation Opticsにより，媒質中の電磁波の満たす方程式を，Riemann多様体M上の次のような形の方程式に帰着できたとする．

$$\partial_t^2 f + D(f) = 0 \tag{1}$$

ここでDはM上の時間に依存しない微分作用素であり，例えば例えば波動方程式の場合はDはLaplace-Beltrami作用素である．この時，元の媒質中の電磁波の振る舞いは，この微分作用素Dの性質によって決まる．そこで問題2は次の問題に帰着される．

問題 3. Riemann多様体M_1, M_2及びそれらの上の良い微分作用素D_1, D_2であって，M_1, M_2は等長的ではないが，D_1, D_2の性質は等しいようなペアを見つけよ．

D_1, D_2は異なる多様体上の微分作用素であるから，直接比較することはできない．そこで何かしらの不変量を比較することになる．本研究ではD_1, D_2がLaplace-Beltrami作用素のように，非負の対称

*1 satoken@ms.u-tokyo.ac.jp

作用素になるといった良い条件を仮定した上で，それらの微分作用素のスペクトルを比較することを考えた．これは等スペクトル問題と言われるタイプの問題であり，微分作用素が Laplace-Beltrami 作用素の時は古くから研究されてきた．本稿では 3 節において解説する．本研究では Laplace-Beltrami 作用素以外の微分作用素にも着目し，次の結果を得た．

定理 1. 次のような 2 つの 3 つ組 $(M_i, \Delta_i^{(1)}, \Delta_i^{(2)}) \quad (i = 1, 2)$ が存在する．

1. M_i, は 4 次元のコンパクトな Riemann 多様体で，M_1 と M_2 は等長的ではない．
2. $\Delta_i^{(1)}, \Delta_i^{(2)}$ は M_i 上の可換な微分作用素で，$\Delta_i^{(1)} + \Delta_i^{(2)}$ は M_i の Laplace-Beltrami 作用素．
3. 任意の $s, t \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して，$s\Delta_1^{(1)} + t\Delta_1^{(2)}$，$s\Delta_2^{(1)} + t\Delta_2^{(2)}$ のスペクトルは点スペクトルのみからなり，それらの点スペクトルは等しい．

定理 1 では，実 Lie 群 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^2$ のある離散部分群によって，G の等質空間 $X = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ を割ることによって上記の性質を持つ多様体を構成する．その際に鍵となるのは，Selberg 跡公式と呼ばれる，Laplace-Beltrami 作用素のスペクトルと離散部分群の群論的な情報を結びつける等式である．本稿では，Laplace-Beltrami 作用素を少し捻った $D = s\Delta^{(1)} + t\Delta^{(2)} \quad (s, t \in \mathbb{R}_{>0})$ という形の微分作用素に対しても Selberg 跡公式が利用できることを 4 節で説明する．5 節では，代数体上の四元数環の極大整環から構成した離散部分群について，Selberg 跡公式に現れる群論的な情報が，数論的な情報で表されることを見る．これを用いて，四元数環 H の 2 つの極大整環から作られる離散部分群 Γ, Γ' であって，$\Gamma\backslash X$ と $\Gamma'\backslash X$ が等長的でないが，$D = s\Delta^{(1)} + t\Delta^{(2)}$ のスペクトルは等しいものが存在するような条件を考察し，それらの条件を満たす H が存在することを示すことで定理 1 は示される．

2 Transformation Optics

本稿では Transformation Optics という用語を，Euclid 空間上の非等方的な媒質上の電磁波が満たす方程式を，ある Riemann 多様体のある微分作用素の満たす方程式に変換するテクニックという意味で用いる．以下の記号を用いる．

M を 3 次元 Riemann 多様体とする．M 上の C^∞ 級 k 形式からなるベクトル束を Ω_M^k とする．この時，外微分 $d : \Omega_M^k \longrightarrow \Omega_M^{k+1}$ 及び，計量に依存するその形式的随伴 $d^* : \Omega_M^k \longrightarrow \Omega_M^{k-1}$ が定義される．

電場 E，磁場 B はそれぞれ時間 t を変数とする $\Gamma(M, \Omega_M^1)$ 値，$\Gamma(M, \Omega_M^2)$ 値の関数とみなせ，M 上の誘電率 ε，透磁率 μ はそれぞれ

$$\begin{array}{ccc} \Omega_M^1 & \xrightarrow{\varepsilon} & \Omega_M^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & = & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Omega_M^2 & \xrightarrow{\mu} & \Omega_M^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & = & M \end{array} \tag{2}$$

を可換にするベクトル束の自己同型である．このとき，M 上の Maxwell 方程式は次のように表せる．

$$\begin{cases} d^*(\mu^{-1}B) - \partial_t(\varepsilon E) = 0 \\ dE + \partial_t B = 0 \\ d^*(\varepsilon E) = 0 \\ dB = 0 \end{cases} \tag{3}$$

ただし ∂_t は時刻 t に関する偏微分を表す．これにより，電場 E は

$$\begin{cases} \partial_t^2 E + \varepsilon^{-1} d^* \mu^{-1} dE = 0 \\ d^*(\varepsilon E) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

という方程式を満たすことがわかる．

定義 1. M を 3 次元 Riemann 多様体，D を M 上の微分作用素とする．$U \subset \mathbb{R}^3$ を 3 次元 Euclid 空間の開集合とし，計量は $\mathbb{R}^3$ から引き起こされるものを入れておく．この時，U およびその上の誘電率 ε，透磁率 μ の 3 つ組 (U, ε, μ) が (M, D) のtransformation mediumであるとは，微分同相 $f : M \longrightarrow U$ が存在して，f により方程式 (4) の解を引き戻した時，その解が方程式 (1) も満たすことを言う．

例 1. U 上の Hodge star 作用素を $*$，M 上の Hodge star 作用素を $*'$ とする．この時，U 上の誘電率，透磁率が $*\circ\varepsilon = \mu\circ*$ 及び $\varepsilon^{-1}\circ * = *'$ を満たすとする．ただし，2 つ目の式においては M 上の Hodge star 作用素を f^{-1} によって U に引き戻している．この時，(U, ε, μ) は (M, Δ_M) の transformation medium になっている．ここで，Δ_M は M 上の Laplace-Beltrami 作用素.

問題 3 の条件を満たす組 (M_1, D_1) 及び (M_2, D_2) が見つかったとし，さらに (M_i, D_i) に対応する transformation medium $(U_i, \varepsilon_i, \mu_i)$ が存在したとする．この時 1 節で述べたように，transformation optics によって U_1, U_2 上の電磁波の振る舞いが同じようになり，問題 2 の解が得られると期待できる．そのため以下では直接媒質中の電磁波の振る舞いを考えるのではなく，Riemann 多様体 M とその上の微分作用素 D について考えることにする．

3 等スペクトル問題

問題 3 を考えたいが，微分作用素を直接比較することが難しいため，1 節で述べたように本研究では微分作用素のスペクトルに注目し，問題 3 より弱い以下の問題を考える．以下では微分作用素は点スペクトルのみ持つと仮定する．

問題 4. Riemann 多様体 M_1, M_2 及びそれらの上の微分作用素 D_1, D_2 であって，M_1, M_2 は等長的ではないが，D_1, D_2 のスペクトルが等しいペアを見つけよ．

ここで，スペクトルとは D を L^2 クラスの関数 (またはより一般に微分形式) からなる Hilbert 空間上の非有界線形作用素と見た時の固有値のことである．問題 4 が cloaking device の構成に役立つのは (M_i, D_i) が対応する transformation medium を持つ場合のみであるが，以下では特にそのことについては考えない．問題 4 は，例えば例 1 で述べた $D = \Delta_M$ の場合は，M. Kac によって提起された

“Can one hear the shape of a drum?”(M. Kac, 1966)

という古典的な問題に他ならない．太鼓の音は膜の固有振動で決まり，それはつまり膜の図形の Laplace-Beltrami 作用素のスペクトルだから，上の問題はそのスペクトルから太鼓の形が復元できるか，ということを問うているわけである．この問題に対する反例，すなわち同じ Laplace-Beltrami 作用素のスペクトルを持ちながら，等長的でないような例の構成は古くから研究されていて，特に今回参考にしたのは，Vignéras による構成 [Vig80-1] である．

4 Selberg 跡公式

Vignéras による等スペクトル多様体の構成では Selberg 跡公式が鍵となっていた．本研究では，$G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^2$ の場合に，Selberg 跡公式の類似が成り立つことを証明し，定理 1 の構成に利用した．なお，Selberg 跡公式は実半単純 Lie 群に一般化されているが，以下の命題 1 はその特別な場合になっているように思われる．[*2]

G は上半平面 2 個の直積 $X = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ に推移的に作用し，X は G の等質空間とみなせる．X の第 1 成分及び第 2 成分に関する Laplace-Beltrami 作用素をそれぞれ $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}$ とおくと，$\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}$ は可換

[*2] 本節の結果の導出に当たっては，[Zog80] を参考にした．

な微分作用素であり，$\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)}$ は X 上の Laplace-Beltrami 作用素となる．Γ を G の離散部分群であり，$\Gamma\backslash X$ がコンパクトになるものとする．
さらに $-1 \in \Gamma$ かつ[*3]Γ の各元 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ が次のいずれかを満たすような Γ を考える．ただし，$C_\Gamma(\gamma)$ は γ の Γ における中心化群である．

1. γ_1, γ_2 はともに双曲的[*4]で，さらに $C_\Gamma(\gamma) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を満たす.
2. γ_1 は双曲的，γ_2 は楕円的．さらに $C_\Gamma(\gamma) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を満たす.
3. γ_1 は楕円的，γ_2 は双曲的．さらに $C_\Gamma(\gamma) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ をみたす.
4. $\gamma = \pm 1$.

上記の 1.〜3. の各タイプの元で構成される Γ の共役類からなる集合を $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ とおく．
本稿で説明する Selberg 跡公式は，離散部分群内の共役類に関する量と，微分作用素 $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}$ を商空間 $\Gamma\backslash X$ に落としてきた微分作用素の固有値を用いて書ける無限和が等しいことを示す等式である．
Selberg 跡公式はテスト関数 k ごとに得られるので，以下急減少関数 $k : (\mathbb{R}_{\geq 0})^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を 1 つ固定して考える．k の Selberg 変換 g を

$$g(r_1, r_2) = 4 \int_{u_1=\sinh^2\left(\frac{r_1}{2}\right)}^{\infty} \int_{u_2=\sinh^2\left(\frac{r_2}{2}\right)}^{\infty} \frac{k(u_1, u_2) du_1 du_2}{\sqrt{u_1 - \sinh^2\left(\frac{r_1}{2}\right)}\sqrt{u_2 - \sinh^2\left(\frac{r_2}{2}\right)}} \tag{5}$$

で定める．$C \in \mathcal{C}_2$(resp. $\mathcal{C}_3$) とし，C の元 γ をとり，中心化群 $C_\Gamma(\gamma)$ を考える．$\alpha, -1$ が $C_\Gamma(\gamma)$ を生成するような α をとる．この時ある $\gamma_C, \alpha_C \in \mathbb{R}^\times - \{1\}, \omega_C, \theta_C \in (-\pi, \pi)$ が存在して，α, γ は<u>G 内で</u>次のように同時対角化できる. この時，必要なら α を α^{-1} で置き換えて，$|\alpha_C| > 1$ として良い．

$$\begin{aligned}\gamma &\sim \left(\begin{pmatrix}\gamma_C & 0 \\ 0 & \gamma_C^{-1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos\omega_C & -\sin\omega_C \\ \sin\omega_C & \cos\omega_C\end{pmatrix}\right) \left(\text{resp. } \left(\begin{pmatrix}\cos\omega_C & -\sin\omega_C \\ \sin\omega_C & \cos\omega_C\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\gamma_C & 0 \\ 0 & \gamma_C^{-1}\end{pmatrix}\right)\right) \\ \alpha &\sim \left(\begin{pmatrix}\alpha_C & 0 \\ 0 & \alpha_C^{-1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos\theta_C & -\sin\theta_C \\ \sin\theta_C & \cos\theta_C\end{pmatrix}\right) \left(\text{resp. } \left(\begin{pmatrix}\cos\theta_C & -\sin\theta_C \\ \sin\theta_C & \cos\theta_C\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_C & 0 \\ 0 & \alpha_C^{-1}\end{pmatrix}\right)\right)\end{aligned} \tag{6}$$

これを用いて $S(C)$ を次で定める．この $S(C)$ は代表元 γ や基底 α の取り方によらない．

$$\begin{aligned}S(C) &= \frac{2\log|\alpha_C|}{|\gamma_C - \gamma_C^{-1}|} \int_0^\infty \frac{\cosh\left(\frac{r}{2}\right) g(2\log|\gamma_C|, r)}{\sinh^2\left(\frac{r}{2}\right) + \sin^2\omega_C} dr \\ \Big(\text{resp. } &= \frac{2\log|\alpha_C|}{|\gamma_C - \gamma_C^{-1}|} \int_0^\infty \frac{\cosh\left(\frac{r}{2}\right) g(r, 2\log|\gamma_C|)}{\sinh^2\left(\frac{r}{2}\right) + \sin^2\omega_C} dr\Big)\end{aligned} \tag{7}$$

$C \in \mathcal{C}_1$ とする．$\gamma \in C$ をとり，$\alpha, \beta, -1$ が $C_\Gamma(\gamma)$ を生成するような α, β をとる．この時必要ならば α, β を取り替えることで，$\alpha_{C,1}, \alpha_{C,2}, \beta_{C,1}, \beta_{C,2}, \gamma_{C,1}, \gamma_{C,2} \in \mathbb{R}^\times - \{1\}$ が存在して，α, β, γ は<u>G 内で</u>次のように同時対角化できる．

$$\begin{aligned}&\gamma \sim \left(\begin{pmatrix}\gamma_{C,1} & 0 \\ 0 & \gamma_{C,1}^{-1}\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}\gamma_{C,2} & 0 \\ 0 & \gamma_{C,2}^{-1}\end{pmatrix}\right) \\ &\alpha \sim \left(\begin{pmatrix}\alpha_{C,1} & 0 \\ 0 & \alpha_{C,1}^{-1}\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}\alpha_{C,2} & 0 \\ 0 & \alpha_{C,2}^{-1}\end{pmatrix}\right) \quad \beta \sim \left(\begin{pmatrix}\beta_{C,1} & 0 \\ 0 & \beta_{C,1}^{-1}\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix}\beta_{C,2} & 0 \\ 0 & \beta_{C,2}^{-1}\end{pmatrix}\right)\end{aligned} \tag{8}$$

これを用いて，R_C を $\begin{vmatrix}\log|\alpha_{C,1}| & \log|\alpha_{C,2}| \\ \log|\beta_{C,1}| & \log|\beta_{C,2}|\end{vmatrix}$ の絶対値と定め，さらに $S(C)$ を次で定める．

$$S(C) = \frac{4R_C \cdot g(2\log|\gamma_{C,1}|, 2\log|\gamma_{C,2}|)}{|\gamma_{C,1} - \gamma_{C,1}^{-1}||\gamma_{C,2} - \gamma_{C,2}^{-1}|} \tag{9}$$

$S(C)$ は代表元 γ や基底 α, β の取り方によらない．この時，Selberg 跡公式は次のように書ける．

[*3] I_2 を 2 次の単位行列とし，以下では $\pm(I_2, I_2)$ を ± 1 と略記する．
[*4] $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は，トレースの絶対値が 2 未満，または 2 より大きい場合にぞれぞれ楕円的，双曲的と呼ばれる．

命題 1. (Selberg 跡公式)

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2} \hat{g}\left(\sqrt{\lambda_1-\frac{1}{4}},\sqrt{\lambda_2-\frac{1}{4}}\right) = 2g(0,0)\mathrm{vol}(\Gamma\backslash X) + \sum_{C\in\mathcal{C}_1} S(C) + \sum_{C\in\mathcal{C}_2} S(C) + \sum_{C\in\mathcal{C}_3} S(C) \quad (10)$$

左辺の λ_1, λ_2 はそれぞれ微分作用素 $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}$ の固有値全体を動く．また，$\hat{g}$ は g の Fourier 変換である．一般には $\lambda_i - \frac{1}{4}$ は負の値もとるかもしれないが，$\hat{g}$ が偶関数になるためルートの取り方による不定性はない．また，右辺の第 1 項 $\mathrm{vol}(\Gamma\backslash X)$ は $\Gamma\backslash X$ の体積である．

以下では $s,t \in \mathbb{R}_{>0}$ を固定し，$D = s\Delta^{(1)} + t\Delta^{(2)}$ と表される $\Gamma\backslash X$ 上の微分作用素を考える．この作用素は点スペクトルのみを持ち，この微分作用素の固有値は上の Selberg 跡公式の左辺に現れる λ_1, λ_2 を用いて $s\lambda_1 + t\lambda_2$ と書ける．Selberg 跡公式を適切なテスト関数に対して用いることで，G 内の 2 つの離散部分群 Γ, Γ' について，右辺に現れる $|\gamma_C - \gamma_C^{-1}|$ や R_C といった群論的な不変量が等しければ，微分作用素 D のスペクトルが等しくなることがわかる．これを用いて，5 節では微分作用素 D のスペクトルが等しいが，$\Gamma\backslash X$ と $\Gamma'\backslash X$ が等長的にならないような離散部分群 Γ, Γ' を構成する．

注 1. 命題 1 の左辺について技術的な注意を述べる．$\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}$ は半正値な対称作用素であるから，一般の場合は左辺の収束性が問題となる．しかし，上記の Selberg 跡公式では，$\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}$ と可換な Hilbert-Schmidt 型の作用素の固有関数からなる $L^2(\Gamma\backslash X)$ の正規直交基底を構成し，それらが $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}$ の同時固有関数となっていることを用いて両辺が等しいことを導出しているため，両辺の値が収束することは Hilbert-Schmidt 型の作用素に関する性質から導かれる．

5 数論的部分群による等スペクトル多様体の構成

命題 2. K を実 2 次体とし，K 上の四元数環 H で次の 2 条件を満たすものを考える．

1. H は ± 1 以外の 1 のべき根を含まない．特に $H \not\simeq \mathrm{M}_2(K)$.
2. $H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ (2 次正方行列からなる行列環の直積).

H の極大整環 $\mathcal{O}$ に対し，その被約ノルムが 1 の元からなる乗法群を $\Gamma_{\mathcal{O}}$ とおくと，$\Gamma_{\mathcal{O}}$ は次を満たす.

1. $\Gamma_{\mathcal{O}}$ は $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^2$ 内の離散部分群になり，$\Gamma_{\mathcal{O}}\backslash X$ はコンパクトな 2 次元の複素多様体になる.
2. $\Gamma_{\mathcal{O}}$ の第 i 成分（$i = 1, 2$）への射影は稠密となる.
3. $\Gamma_{\mathcal{O}}$ は 4 節における離散部分群に関する仮定を満たす．特に命題 1 が適用できる.
4. $\mathrm{vol}(\Gamma_{\mathcal{O}}\backslash X)$ は極大整環の取り方によらず，H のみから定まる[*5].

上記の 1，2 および 4 は [Vig80-1] の Théorème 2 を参照のこと．3 は Dirichlet の単数定理を用いる．特に，2 の結果から，$\Gamma_{\mathcal{O}}$ がG 内の離散部分群として既約になることがわかる．以下 H は命題 2 の仮定を満たす K 上の四元数環とする．$\mathrm{Ram}(H)$ で H が分岐するような K の素イデアルの集合を表す．

命題 3.
1. H の極大整環 $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ について，$\Gamma_{\mathcal{O}}\backslash X$ と $\Gamma_{\mathcal{O}'}\backslash X$ が等長的であるための必要十分条件は，H の $\mathbb{Q}$ 多元環としての自己同型 σ が存在して，$\mathcal{O}' = \sigma(\mathcal{O})$ となることである．
2. K の類数が偶数であり，かつ $\mathrm{Ram}(H)$ が全て単項イデアルならば，H の極大整環 $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ で，H の K 多元環としての自己同型で移り合わないものが存在する．
3. $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ によって $\mathrm{Ram}(H)$ が不変でないならば，H の $\mathbb{Q}$ 多元環としての自己同型は全て K 多元環としての自己同型である．

上記の 1 は [Vig80-1] の Théorème 3 を，2，3 については [Vig80-1] の p.28 を参照のこと．

*5 具体的な式の形も知られている．[Vig80-1] を参照のこと．

系 1. K の類数が偶数で，$\mathrm{Ram}(H)$ が全て単項イデアルからなるとする．さらに素数 p があって K において $(p) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ と分解し，$\mathfrak{p}_1 \in \mathrm{Ram}(H)$ かつ $\mathfrak{p}_2 \notin \mathrm{Ram}(H)$ となるならば，H の極大整環 $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ で $\Gamma_{\mathcal{O}}\backslash X$ と $\Gamma_{\mathcal{O}'}\backslash X$ が等長的でないものが存在する．

上の系 1 の条件を満たすような H であって，任意の極大整環 $\mathcal{O}$ について $\Gamma_{\mathcal{O}}\backslash X$ 上の微分作用素 $D = s\Delta^{(1)} + t\Delta^{(2)}$（4 節の終わりで定義したもの）のスペクトルが等しいものを見つけてくれば定理 1 が示されることになる．

O_K で K の整数環を表す．集合 Ω を次のように定義する．

$$\Omega = \{B\ :\ L \text{ は } K \text{ の有限次拡大体，} B \text{ は } L \text{ の部分有限 } O_K \text{代数 }\}/(\text{同型}) \tag{11}$$

ただし，/(同型) は O_K 代数としての同型類を考えることを表している．同型類の代表元を固定しておく．H の極大整環 $\mathcal{O}$ をとり，群 $\Gamma_{\mathcal{O}}$ の共役類を 4 節のように分類しておく．$\Gamma_{\mathcal{O}}$ の共役類 $C \neq \{1\}, \{-1\}$ に対し，$\gamma \in C$ を取り，γ の被約トレースによる像を $t_C \in K$ とする．$K(\gamma) \cap \mathcal{O}$ と同型な O_K 代数が Ω にただ 1 つ存在するので，これを B_C とおく．t_C, B_C は γ の取り方によらない C の不変量である．

この時，自然数 $m_{\mathcal{O}}(u, B)$ を $t_C = u, B_C = B$ となる $\Gamma_{\mathcal{O}}$ の共役類の個数と定める．

命題 4.
1. $S(C)$ は t_C 及び B_C を用いて表せる．
2. H の極大整環 $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ が，任意の $u \in K, B \in \Omega$ について $m_{\mathcal{O}}(u, B) = m_{\mathcal{O}'}(u, B)$ となるならば $\Gamma_{\mathcal{O}}\backslash X$ と $\Gamma_{\mathcal{O}'}\backslash X$ 上の微分作用素 $D = s\Delta^{(1)} + t\Delta^{(2)}$ のスペクトルは等しい．
3. $\mathrm{Ram}(H)$ に属する単項イデアルが少なくとも 1 つ存在すれば，任意の $u \in K, B \in \Omega$ について $m_{\mathcal{O}}(u, B) = m_{\mathcal{O}'}(u, B)$ となる．

上記の 1 は環論的な考察からわかり，2 は 4 節の終わりで述べたことから従う．3 は [Vig80-1] の p.31 を参照のこと．これにより，上で述べた条件を全て満たす 2 次体 K 及び四元数環 H を取ってくれば，H の極大整環 $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ であって，$\Gamma_{\mathcal{O}}\backslash X$ と $\Gamma_{\mathcal{O}'}\backslash X$ が等長的でないが，D のスペクトルが等しいようなものが存在することがわかり，定理 1 がわかる．

例 2. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{10})$ とし，H を有限素点では $7, 11 + 3\sqrt{10}$ のみで分岐し，無限素点では不分岐な四元数環[*6]とすると，上の条件を全て満たす．このような四元数環の極大整環で，K 上の自己同型でうつり合わないものを見つけてくれば，定理 1 の例が得られる．

6 終わりに

今回示した定理 1 は [Vig80-1] の結果に大半を依存しているが，ポイントとしては，Laplace-Beltrami 作用素のスペクトル以外の微分作用素のスペクトルに注目し，同じスペクトルを持つ微分作用素が M_1, M_2 上に少なくとも 2 次元分存在することに着目したことにある．これにより等スペクトル問題の例がパラメーターを変化させることにより無数に得られる．このように自由度を持っていることは，cloaking device の構成をより柔軟に行えることに繋がり，問題 1 へのアプローチとしても望ましいと思われる．ただし，定理 1 は 4 次元の Riemann 多様体に関する主張であり，cloaking device の構成に直接応用できるわけではないので，3 次元で同様の構成を考えることは今後の課題である．さらに今回考察したのは関数に作用する微分作用素に関して等スペクトルな多様体であり，電場に作用する微分作用素，すなわち1 形式に作用する微分作用素に関しては別途考える必要がある．

[*6] 例えば [Vig80-2] の Théorème 3.1(p.74) よりこのような四元数環は存在する．

7 謝辞

本研究にあたり，課題提供および毎回のスタディグループの議論に積極的に参加していただいた日産自動車株式会社の三浦進氏に心より感謝申し上げます．また，スペクトルに関する方向性を提示し，関連文献を提示してくださった金井雅彦先生，及び数学的な議論に関して多くの有益なアドバイスを頂き，本スタディグループの調整役をして頂いた間瀬崇史先生に大変感謝いたします．また，本スタディグループにおいて議論してくださった，福嶌翔太氏，高瀬裕志氏，岡本潤氏，関澤昊氏にも感謝いたします．また，本レターの作成にあたり，レフェリーの方にも有益なコメントをいただいたため，この場を借りて感謝申し上げます．本研究は東京大学数物フロンティア・リーディング大学院プログラム (FMSP) による助成を受けています．

参考文献

[GKLU07] A. Greenleaf, Y. Kurylev, M. Lassas and G. Uhlmann, Full-wave invisibility of active devices at all frequencies. Comm. Math. Phys. 275 (2007), no. 3, 749–789.

[Iwa02] H. Iwaniec, Spectral methods of automorphic forms. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 53. American Mathematical Society, Providence, RI; Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, 2002. xii+220 pp.

[Koy18] 小山信也, セルバーグ・ゼータ関数　リーマン予想への架け橋, 日本評論社（2018）

[SMJCPS06] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr and D. R. Smith, Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies, Science 10 Nov 2006, Vol. 314, Issue 5801, pp. 977–980.

[Vig80-1] M. Vignéras, Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques. Ann. of Math. (2) 112 (1980), no. 1, 21–32.

[Vig80-2] M. Vignéras, Arithmétique des algèbres de quaternions. Lecture Notes in Mathematics, 800. Springer, Berlin, 1980. vii+169 pp.

[Zog80] P. G. Zograf, The Selberg trace formula for the Hilbert modular group of a real quadratic algebraic number field. Analytic number theory and the theory of functions, 3. Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 100 (1980), 26–47, 173.