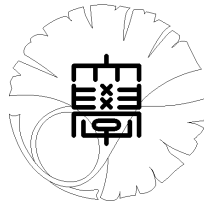


数理科学実践研究レター 2021-3 August 25, 2021

音響ブラックホールの形状最適化

by

岡本 潤



**UNIVERSITY OF TOKYO**  
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES  
KOMABA, TOKYO, JAPAN

## 音響ブラックホールの形状最適化

岡本潤<sup>1</sup> (東京大学数理科学研究科)

Jun Okamoto (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

## 概要

本レポートでは音響ブラックホールの形状最適化問題について、変分解析によるアプローチで考察する。本研究では屈曲波の到達時刻の汎関数構造に着目して、ある種の拘束条件を課すことにより、最適解が存在するための十分条件と最適解が満たすべき必要条件を導出した。

## 1 はじめに

音響ブラックホールとは、本来は流体に沿って流速が増加し、あるところで音速点を形成する装置のことであり、音の流れを一方向化する目的で使用される [2]。[1] では流体ではなく、弾性体でのモデルを提唱している。具体的には、弾性体の屈曲波を物体の厚さによってコントロールすることで、屈曲波が装置を横断する時間を無限大に漸近させることで弾性体での音響ブラックホールを実現している。本研究ではまず、定義域 1 次元における音響ブラックホールのモデルを導入し、屈曲波の横断時間を弾性体の厚さに対する汎関数としてみなした。これを拘束条件付きの関数空間上の汎関数最大化として最適化問題を定義し、変分解析により問題を考察した。さらに、定義域 2 次元における音響ブラックホールのモデルについて検証をし、1 次元モデルと同様に拘束条件付き最適化問題を考察した。

## 2 1 次元での音響ブラックホールモデル

本章では定義域 1 次元における音響ブラックホールの形状最適化問題について扱う。 $\rho$  を物体の密度、 $E$  を Young 率、 $\nu$  を Poisson 比、 $h(x)$  を座標  $x$  での物体の厚さとすると、座標  $x$  での屈曲波の音速は  $\frac{\sqrt[4]{E}\sqrt{h(x)}}{\sqrt[4]{\rho(1-\nu^2)}}$  となることが知られている。したがって、座標  $x_0$  から  $x_1$  までに屈曲波が到達する時間  $T_1$  は、物質のみに依存する定数  $C$  を用いて

$$T_1[h] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt[4]{\rho(1-\nu^2)}}{\sqrt[4]{E}\sqrt{h(x)}} dx = C \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{h(x)}} dx \quad (1)$$

となる。ここで、厚さ関数  $h$  を

$$h(x) = \frac{h_0 - h_1}{(x_1 - x_0)^n} (x_1 - x)^n + h_1$$

とすると、 $n \geq 2$  で、 $h_1 \rightarrow 0$  としたとき、 $T_1[h] \rightarrow \infty$  となる。しかし、現実世界の物質では  $h_1 = 0$  は実現できない。そこで  $h(x_0) = h_0 > 0$ 、 $h(x_1) = h_1 > 0$  という境界条件を固定して考察する。しかし、この状況下でも区間で厚さを 0 に漸近させることができるので本質的に問題としては変わらない。そこで、厚さ関数  $h$  に対して、何らかの拘束条件を課すことにより  $T_1[h]$  を最大化することを考える。本レポートでは  $h$  の微分に関する量を拘束することを考える。具体的には、 $h$  の  $p$ -Dirichlet エネルギーが定数  $m$  で抑えられている条件を課す。すなわち

$$\int_{x_0}^{x_1} |h'(x)|^p dx \leq m$$

という条件である。これは  $m$  が小さければ小さいほど  $h$  は平らな形状になるため、 $m$  のコントロールによって、より平らな形状でかつ屈曲波の到達が遅いものを構成できる。

<sup>1</sup>okamoto@ms.u-tokyo.ac.jp

## 2.1 汎関数 $T_1$ における Maximizer の存在定理

ここでは、拘束条件下における汎関数  $T_1$  の Maximizer が存在するための十分条件を与える。

**定理 1**  $I := (x_0, x_1)$ ,  $|I| := x_1 - x_0$ , 関数空間  $\mathcal{A}_m^p$  を

$$\mathcal{A}_m^p := \left\{ h \in W^{1,p}(I) \cap C(\bar{I}) \mid h(x_0) = h_0, h(x_1) = h_1, \int_I |h'|^p dx \leq m \right\},$$

汎関数  $T_1 : \mathcal{A}_m^p \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  を

$$T_1[h] := \int_I \frac{1}{\sqrt{|h(x)|}} dx$$

と定める。さらに  $1 < p < \infty$ ,  $|I|^{-(p-1)} |h_0 - h_1|^p \leq m < |I|^{-(p-1)} \left\{ \sqrt{|I|^2 + (h_0 + h_1)^2} - |I| \right\}^p$  とする。このとき、

$$T_1[\tilde{h}] = \max_{h \in \mathcal{A}_m^p} T_1[h]$$

となる  $\tilde{h} \in \mathcal{A}_m^p$  が存在する。

**証明** 任意の  $h \in \mathcal{A}_m^p$  に対して、

$$\begin{aligned} \int_I \sqrt{1 + |h'|^2} dx &\leq \int_I (1 + |h'|) dx \\ &= |I| + \int_I |h'| dx \\ &\leq |I| + \left( \int_I |h'|^p dx \right)^{1/p} |I|^{1-1/p} \\ &\leq |I| + m^{1/p} |I|^{1-1/p} < \sqrt{|I|^2 + (h_0 + h_1)^2} \end{aligned}$$

より、 $xy$  平面上のグラフ  $y = h(x)$  の弧長は  $\sqrt{|I|^2 + (h_0 + h_1)^2}$  より真に小さい  $h$  に依らない定数で上から評価される。ここで、 $\sqrt{|I|^2 + (h_0 + h_1)^2}$  は  $(x_0, h_0), (x_1, h_1)$  を境界に持ち、 $x$  軸に到達する曲線の最短弧長であることから、 $\inf_{h \in \mathcal{A}_m^p} \min_{x \in I} h(x) > 0$  となる。したがって、

$$\sup_{h \in \mathcal{A}_m^p} T_1[h] = \sup_{h \in \mathcal{A}_m^p} \int_I \frac{1}{\sqrt{h(x)}} dx < \infty$$

となる。

ここで、 $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_m^p$  を、 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_1[h_n] = \sup_{h \in \mathcal{A}_m^p} T_1[h] < \infty$  なるものとする。さらに  $g \in \mathcal{A}_m^p$  を一つ固定する。 $h_n - g \in W_0^{1,p}(I)$  より、Poincaré の不等式から、

$$\begin{aligned} \|h_n\|_{L^p} &\leq \|h_n - g\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \\ &\leq \|h'_n - g'\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \\ &\leq \|h'_n\|_{L^p} + \|g'\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \leq m^{1/p} + \|g'\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|h_n\|_{W^{1,p}} < \infty$  となり、Banach-Alaoglu の定理から、 $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  の適切な部分列を取るにより、ある  $\tilde{h} \in W^{1,p}(I)$  が存在して、 $h_n$  は  $\tilde{h}$  に弱収束する。さらに Mazur の補題から  $\tilde{h} \in \mathcal{A}_m^p$  であることも分かる。また、Rellich-Kondrachov の定理から、 $h_n$  は  $\tilde{h}$  に  $L^p$  収束することが分かり、さらに  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  の適切な部分列を取ることで *a.e.*  $x \in I$  で  $h_n(x)$  は  $\tilde{h}(x)$  に収束する。また、ある定数  $C$  が存在して、任意の  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in I$  に対して、 $0 < C < h_n(x)$  であるから、

$$\frac{1}{\sqrt{h_n(x)}} < \frac{1}{\sqrt{C}} \in L^1(I)$$

となる。したがって Lebesgue の優収束定理から

$$T_1[\tilde{h}] = \lim_{n \rightarrow \infty} T_1[h_n] = \sup_{h \in \mathcal{A}_m^p} T_1[h]$$

となり、 $\tilde{h}$  は  $T_1$  の Maximizer であることが分かる。

## 2.2 汎関数 $T_1$ における Maximizer が満たすべき微分方程式

ここでは汎関数  $T_1$  の Maximizer が満たすべき必要条件を Lagrange の未定乗数法を用いて導出する。未定乗数付き汎関数  $\mathcal{E}_\lambda^1 : W^{1,p}(I) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  を

$$\mathcal{E}_\lambda^1[h] := \int_I \left( \frac{1}{\sqrt{|h(x)|}} - \lambda |h'(x)|^p \right) dx$$

と定める。  $\mathcal{E}_\lambda^1$  の第一変分の  $L^2$  表現は  $\frac{\delta \mathcal{E}_\lambda^1[h]}{\delta h} = \lambda p(p-1)|h'|^{p-2}h'' - h^{-3/2}$  より、  $\mathcal{E}_\lambda^1$  の Euler-Lagrange 方程式は

$$\lambda p(p-1)|h'|^{p-2}h'' - h^{-3/2} = 0 \quad (2)$$

となる。さらに、  $h$  が Maximizer であるための必要条件として、 Legendre 条件がある。すなわち、  $\mathcal{L}_\lambda(h', h) := \frac{1}{\sqrt{|h|}} - \lambda |h'|^p$  として、  $\frac{\partial^2}{\partial h'^2} \mathcal{L}_\lambda \leq 0$  を満たす必要がある。このことから  $\lambda \geq 0$  となることが分かる。  $p = 2$  の場合、微分方程式 (2) の解は具体的に表示することが出来て、ある定数  $C_1, C_2$  を用いて

$$\left\{ \frac{3}{4C_1^{5/2}} \log \left( -2C_1\sqrt{h} - 2\sqrt{C_1^2h - C_1\sqrt{h} + 1} \right) + \frac{1}{2C_1^2} \frac{\sqrt{C_1h^2 - \sqrt{h}(2C_1h + 3\sqrt{h})}}{h} \right\} \sqrt{\lambda} = x + C_2$$

となる。

## 3 2次元での音響ブラックホールモデル

本章では定義域 2次元における音響ブラックホールの形状最適化問題について扱う。[1] では、2次元定義域の音響ブラックホールを 1次元音響ブラックホールの回転体としてモデル化している。本レポートでは定義域を半径  $R$  の円領域で考察する。  $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < R\}$  とし、2次元音響ブラックホールの厚さを  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  とする。ここでは簡単のために角度を固定した各直線方向の屈曲波の到達時間の平均を考える。  $\mathcal{H}^1$  を 1次元 Hausdorff 測度として、経路  $C_\theta := \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \Omega \mid 0 \leq r < R\}$  に制限したとき、  $\Omega$  の境界から原点まで屈曲波が到達する時間は

$$\int_{C_\theta} \frac{1}{\sqrt{h(x)}} d\mathcal{H}^1(x)$$

となり、変数  $\theta$  について積分平均を取ると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \int_{C_\theta} \frac{1}{\sqrt{h(x)}} d\mathcal{H}^1(x) \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{B_R(0)} \frac{1}{|x|\sqrt{h(x)}} dx \end{aligned}$$

となる。そこで、  $g \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_{>0})$  に対して、関数空間  $\mathcal{B}_m^p$  を

$$\mathcal{B}_m^p := \left\{ h \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \mid h = g \text{ on } \partial\Omega, \int_\Omega |\nabla h|^p dx \leq m \right\},$$

汎関数  $T_2 : \mathcal{B}_m^p \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  を

$$T_2[h] := \frac{1}{2\pi} \int_\Omega \frac{1}{|x|\sqrt{|h(x)|}} dx$$

と定める。1次元の場合と同様に、  $h$  の  $p$ -Dirichlet エネルギーの拘束条件を課した上で、  $T_2[h]$  を最大化することを考える。

### 3.1 汎関数 $T_2$ における Maximizer の存在定理

ここでは、拘束条件下における汎関数  $T_2$  の Maximizer が存在するための十分条件を与える。

**定理 2** 定数  $C_0, C_1$  を以下で定める。

$$C_0 = C_0(p, \Omega) := \inf \left\{ \frac{\|u\|_{L^p}}{\|\nabla u\|_{L^p}} \mid u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \right\}$$

(Poincaré 定数),

$$C_1 = C_1(p, \Omega) := \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla h|^p dx \mid h \in W^{1,p}(\Omega), h = g \text{ in } \partial\Omega \right\}.$$

さらに,  $2 < p < \infty$ ,

$$C_1 \leq m < \left\{ \frac{(p-2) \min_{x \in \partial\Omega} g(x)}{(p-2)C_0 + p\pi^{-1/p}R^{1-2/p}} \right\}^p$$

とする。このとき,

$$T_2[\tilde{h}] = \max_{h \in \mathcal{B}_m^p} T_2[h]$$

となる  $\tilde{h} \in \mathcal{B}_m^p$  が存在する。

**証明**  $\sup_{h \in \mathcal{B}_m^p} T_2[h] < \infty$  となることを示せば、1次元の場合と同様にして示すことが出来る。任意の  $h \in \mathcal{B}_m^p$  に対して、Morrey の不等式と Poincaré の不等式より、

$$\begin{aligned} \|g - h\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \|g - h\|_{L^p(\Omega)} + \frac{\pi^{-1/p}R^{1-2/p}}{1-2/p} \|\nabla h\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \left( C_0 + \frac{\pi^{-1/p}R^{1-2/p}}{1-2/p} \right) \|\nabla h\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \left( C_0 + \frac{\pi^{-1/p}R^{1-2/p}}{1-2/p} \right) m^{1/p} < \min_{x \in \partial\Omega} g(x) \end{aligned}$$

より、ある  $h$  に依存しない定数  $C$  が存在して、任意の  $x \in \Omega$  に対して、 $0 < C < h(x)$  となる。したがって、

$$\begin{aligned} \sup_{h \in \mathcal{B}_m^p} T_2[h] &= \sup_{h \in \mathcal{B}_m^p} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|\sqrt{h(x)}} dx \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|} dx < \infty \end{aligned}$$

となる。

### 3.2 汎関数 $T_2$ における Maximizer が満たすべき偏微分方程式

ここでは汎関数  $T_2$  の Maximizer が満たすべき必要条件を1次元モデルの場合と同様にして導出する。未定乗数付き汎関数  $\mathcal{E}_\lambda^2 : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  を

$$\mathcal{E}_\lambda^2[h] := \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|x|\sqrt{h(x)}} - \lambda |\nabla h(x)|^p \right) dx.$$

と定める。 $\mathcal{E}_\lambda^2$  の第一変分の  $L^2$  表現は  $\frac{\delta \mathcal{E}_\lambda^2[h]}{\delta h} = \lambda \operatorname{div} (|\nabla h|^{p-2} \cdot \nabla h) - h^{-3/2} \frac{1}{|x|}$  より、 $\mathcal{E}_\lambda^2$  の Euler-Lagrange 方程式は

$$\lambda \operatorname{div} (|\nabla h(x)|^{p-2} \cdot \nabla h(x)) = h(x)^{-3/2} \frac{1}{|x|} \quad (3)$$

となる。

## 4 終わりに

本レポートでは、拘束条件下における音響ブラックホールの形状の最適化について、最適解の存在の十分条件と、満たすべき微分方程式の導出、さらには特別な場合における具体的な解の表示を紹介した。しかしながら、本研究で導出した結果は条件が限定されたものであり、今後は最適解が存在するための  $m$  に関する必要十分条件や、具体的な解曲線の表示法、数値計算法の構築などが課題である。また、本研究では厚さ関数の微分量に関する拘束条件下で考察をしたが、今後は音響ブラックホールの実社会への応用上、さらに必要と思われる拘束条件を模索し、本結果のさらなる拡張に取り組む必要がある。

## 謝辞

本レポートを作成するにあたり、日産自動車株式会社三浦進氏から課題提供および参考文献のご提示、さらには大変活発な議論をして頂いた。また、東京大学金井雅彦先生、間瀬崇史先生、関澤昊氏からは大変有意義なご意見を賜った。ここに感謝の意を表したい。本研究は数物フロンティア・リーディング大学院の助成を受けている。

## 参考文献

- [1] Chenhui Zhao and Marehalli G. Prasad., Acoustic Black Holes in Structural Design for Vibration and Noise Control. *Acoustics*, 1(1),220-251 (2019).
- [2] Nollert H-P., Quasinormal modes: the characteristic ‘sound’ of black holes and neutron stars, *Class. Quantum Grav.* 16 R159–R216 (1999).