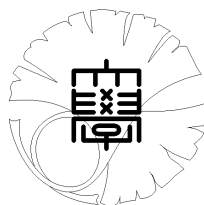


数理科学実践研究レター 2021-14 September 21, 2021

特異点を持つ **del Pezzo** 曲面を用いた
代数幾何学的符号について

by

河上 龍郎



UNIVERSITY OF TOKYO
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
KOMABA, TOKYO, JAPAN

特異点を持つ del Pezzo 曲面を用いた代数幾何学的符号について

河上龍郎¹ (東京大学大学院数理科学研究科)

Tatsuro Kawakami (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概要

本研究の目的は、特異点を持つ代数多様体に対し代数幾何学符号を定義し、さらに7つの A_1 特異点を持つ del Pezzo 曲面 X の反標準符号を計算することである。

1 はじめに

符号理論とはデジタル通信における誤り訂正などに使われる理論であり、現代の情報通信においては不可欠なものである。1980年に Goppa により、代数幾何学符号と呼ばれる、有限体上の代数多様体から構成される符号が導入され、符号理論と代数幾何学との関連性が注目されるようになった。特に近年では滑らかな del Pezzo 曲面から構成される代数幾何学符号がよく研究されており、これにより性質の良い符号が発見されている (例えば [1])。

代数幾何学符号は滑らかな代数多様体に対してのみ定義されるが、代数幾何学では特異点を持つ代数多様体も重要な対象である。符号理論に関しても代数多様体に特異点を許すことで、符号を定義する対象を広げることができ、その結果、より良い符号が発見できると期待できる。

このような理由で、この論文では、代数幾何学符号の定義を特異点を持つ代数多様体まで拡張し、さらに例として7つの A_1 特異点を持つ del Pezzo 曲面から具体的に符号を構成する。

記号 . この論文を通して、 \mathbb{F}_q で位数 q の有限体を表すことにする。また、代数多様体とは体上有限型かつ分離的な整スキームを表し、代数曲面とは二次元の代数多様体を表すとする。また \mathbb{F}_q 上の射影的代数多様体 X に対し、 $X(\mathbb{F}_q)$ で X の \mathbb{F}_q -有理点の個数を表す。 $X(\mathbb{F}_q)$ は有限であることに注意する。

2 準備

2.1 符号

この節では、符号に関する基本的な定義を行う。

定義 1 ((線形) 符号). ベクトル空間 \mathbb{F}_q^n の部分空間 $C \subset \mathbb{F}_q^n$ を (線形) 符号と呼ぶ。

有限体上のベクトル空間に以下のように距離を導入する。

定義 2. ベクトル空間 \mathbb{F}_q^n の二点 $x := (x_1, \dots, x_n), y := (y_1, \dots, y_n)$ の距離 $d(x, y)$ を $\#\{i \in \{1, \dots, n\} \mid x_i \neq y_i\}$ で定める。また、符号 $C \subset \mathbb{F}_q^n$ の最小距離を $\min\{d(x, y) \mid x, y \in C, x \neq y\}$ で定める。

定義 3. n 次元ベクトル空間 \mathbb{F}_q^n の k 次元部分空間 $C \subset \mathbb{F}_q^n$ の最小距離が d であるとき、 C を $C(n, k, d)$ と表す。また、二つの符号 $C(n, k, d), C(n', k', d')$ が $n = n', k = k', d = d'$ を満たすとき、 C と C' は同型であると言い、これらを同一視する。

注意 4. 一般に、伝送率と呼ばれる $\frac{k}{n}$, 相対距離と呼ばれる $\frac{d}{n}$ が大きいほど、“良い”符号とされる。さて、ここで代数多様体から定まる符号を定義する。滑らかな代数多様体に対する従来の定義 ([1, Section 2]) は、そのまま滑らかでない代数多様体に用いることが可能である。

¹kawakami@ms.u-tokyo.ac.jp

定義 5. X を \mathbb{F}_q -有理点を持つ \mathbb{F}_q 上幾何学的連結な正規射影代数多様体, D を X 上の有効な Cartier 因子とする. 写像

$$\Phi: H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \rightarrow \mathbb{F}_q^{|X(\mathbb{F}_q)|}$$

を $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ と各 \mathbb{F}_q -有理点 x に対し, f の $\mathcal{O}_X(D)_x/\mathfrak{m}_x \cong \mathbb{F}_q$ への像をとることで定める. ただし, \mathfrak{m}_x で局所環 $\mathcal{O}_X(D)_x$ の極大イデアルを表す. このとき, 代数幾何学的符号 $\mathcal{C}^{AG}(X, D)$ を

$$\mathcal{C}^{AG}(X, D) := \text{Im}(\Phi)$$

で定める. また, D として反標準因子 $-K_X$ をとる場合, 反標準因子符号と呼ぶ.

注意 6. 上の定義において, $\mathcal{C}^{AG}(X, D)$ は, 各 \mathbb{F}_q -有理点 x における茎 $\mathcal{O}_X(D)_x$ の局所自明化や \mathbb{F}_q -有理点の並び方に依存するが, 符号の同型を除いて一意に定まる.

2.2 Del Pezzo 曲面

近年, 滑らかな del Pezzo 曲面から構成される代数幾何学符号がよく研究されている (例えば [1]). この論文では, Du Val 特異点と呼ばれる特異点を許した del Pezzo 曲面から構成される代数幾何学符号を考察する. ここで, Du Val 特異点とは二次元の標準特異点を表す.

定義 7. X を \mathbb{F}_q 上幾何学的連結な正規射影的代数曲面とする. 反標準因子 $-K_X$ が豊富で, X が高々 Du Val 特異点しか持たないとき, X を *Du Val del Pezzo 曲面* とよぶ.

定義 8. *Du Val del Pezzo 曲面* X の特異点に対応する *Dynkin* 図形を X の *Dynkin* 型とよぶ. 例えば, X が 3 つの A_1 -特異点と 1 つの D_4 -特異点を持つとき, X の *Dynkin* 型は $3A_1 + D_4$ であると言い, $X(3A_1 + D_4)$ と書く.

3 主結果

この節では, Du Val del Pezzo 曲面 $X(7A_1)$ における反標準因子符号を計算する.

3.1 構成

ここでは, Du Val del Pezzo 曲面 $X(7A_1)$ を構成する. まず, \mathbb{F}_2 上の射影平面 $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$ を考える. $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$ には, $2^2 + 2 + 1 = 7$ 点の \mathbb{F}_2 -有理点, 及び, 7 本の \mathbb{F}_2 上定義された射影直線がある. この射影直線はそれぞれちょうど 3 つの $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$ の \mathbb{F}_2 -有理点を持っており, また各 \mathbb{F}_2 -有理点で, ちょうど 3 本の射影直線が交わっている. さて, ここで $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$ の \mathbb{F}_2 -有理点を全て blow-up する写像 $f: Y \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$ を考える. このとき, Y のピカル数 $\rho(Y) = 7 + 1 = 8$ であり, また $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$ の各射影直線の強変換は (-2) -曲線となる. またこれらは互いに交わらない. 次に, この 7 本の (-2) -曲線の収縮 $\pi: Y \rightarrow X$ を考える. このとき, $\rho(X) = \rho(Y) - 7 = 1$ であり, また X は 7 つの A_1 特異点を持つ. ここで, $\rho(X) = 1$ より, K_X は豊富, 数値的自明, 反豊富のいずれかであるが, π は (-2) -曲線のみを潰すことから, $K_Y = \pi^*K_X$ であり, さらに Y は有理曲面であるので, K_X は反豊富にならなければならない. 従って, X は \mathbb{F}_2 上定義された *Dynkin* 型が $7A_1$ である Du Val del Pezzo 曲面である.

注意 9. [2, Proposition 5.10] の証明と同様の議論により, 基礎体を固定すれば $X(7A_1)$ は同型を除いて一意に定まることがわかる. 特に, *Dynkin* 型が $7A_1$ である *Du Val del Pezzo 曲面* は標数 2 でしか実現できない.

3.2 符号の計算

X を上で構成した \mathbb{F}_2 上定義された Dynkin 型が $7A_1$ の Du Val del Pezzo 曲面とする. $\mathcal{C}^{AG}(X, -K_X) = \mathcal{C}(n, k, d)$ と書く. n, k, d の値を計算する. まず, 次の補題により, n の値を得る.

補題 10. X を \mathbb{F}_2 上定義された Dynkin 型が $7A_1$ の Du Val del Pezzo 曲面とする. このとき,

$$X(\mathbb{F}_2) = 7$$

である.

証明 まず, $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^1(\mathbb{F}_2) = 2+1 = 3$, $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2(\mathbb{F}_2) = 2^2+2+1 = 7$ に注意する. 構成より, Y は $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$ の 7 つの \mathbb{F}_2 -有理点における blow-up であるから $Y(\mathbb{F}_2) = 7+7 \cdot (3-1) = 21$ である. また, X は Y 上の互いに交わらない 7 本の \mathbb{F}_2 上定義された射影直線を潰して得られるので, $X(\mathbb{F}_2) = Y(\mathbb{F}_2) - 7 \cdot (3-1) = 7$ を得る. \square

次に, k の値を計算する.

補題 11. X を \mathbb{F}_2 上定義された Dynkin 型が $7A_1$ の Du Val del Pezzo 曲面とする. このとき,

$$\dim_{\mathbb{F}_2} \mathcal{C}^{AG}(X, -K_X) = 3$$

である.

証明 構成より, $|-K_X|$ の基底はちょうど 3 つの X の \mathbb{F}_2 -有理点を通る二重直線 3 本から成っていることがわかる. さらに, 適切な並び替えの下で, これらの (定義 5 の) Φ による像は, \mathbb{F}_2^7 の $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0, 0, 1, 1)$, $(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ となることがわかる. よって,

$$\dim_{\mathbb{F}_2} \mathcal{C}^{AG}(X, -K_X) = 3$$

である. \square

最後に, 最小距離 d を計算する.

補題 12. X を \mathbb{F}_2 上定義された Dynkin 型が $7A_1$ の Du Val del Pezzo 曲面とする. このとき, $\mathcal{C}^{AG}(X, -K_X)$ の最小距離は 2 である.

証明 補題 11 より, $\mathcal{C}^{AG}(X, -K_X)$ は \mathbb{F}_2^7 の $e_1 := (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$, $e_2 := (1, 1, 0, 0, 0, 1, 1)$, $e_3 := (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ で貼られる部分空間である. ここで, 各 i に対し, e_i と原点の距離は 4, $e_1 + e_2$ と原点の距離は 4, $e_2 + e_3$ と原点の距離は 4, $e_3 + e_1$ と原点の距離は 6, そして, $e_1 + e_2 + e_3$ と原点の距離は 2 であるから, 最小距離は 2 である. \square

これらの補題を合わせて, 主定理を得る.

定理 13. X を \mathbb{F}_2 上定義された Dynkin 型が $7A_1$ の Du Val del Pezzo 曲面とする. このとき,

$$\mathcal{C}^{AG}(X, -K_X) = \mathcal{C}(7, 3, 2)$$

が成立する.

4 終わりに

上で見たように, 滑らかでない代数多様体で代数幾何学符号を定義することは意味のあることだと思われる. 今後, 特異点を持つ del Pezzo 曲面から既存の符号より良いパラメータを持つ符号が得られれば非常に興味深い.

謝辞

本研究にあたり、多くの有益な助言を下された鮑先生と株式会社ニコンの皆様に心より感謝を申し上げます。

参考文献

- [1] R. Blache, A. Couvreur, E. Hallouin, D. Madore, J. Nardi, M. Rambaud, and H. Randriam. Anticanonical codes from del Pezzo surfaces with Picard rank one. *Trans. Amer. Math. Soc.* 373 (2020), 5371–5393.
- [2] T. Kawakami and M. Nagaoka. Pathologies and liftability on Du Val del Pezzo surfaces in positive characteristic. arXiv preprint arXiv:2008.07700, 2020.