

数理科学実践研究レター 2021-10 September 17, 2021

超伝導と Floer 理論

by

飯田 暢生



**UNIVERSITY OF TOKYO**  
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES  
KOMABA, TOKYO, JAPAN

# 超伝導と Floer 理論

飯田暢生<sup>1</sup> (東京大学大学院数理科学研究科)

Nobuo Iida (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

## 概要

2 階の非線形偏微分方程式である Ginzburg-Landau 方程式は、超伝導現象を記述する基本方程式である。特殊な状況では、vortex 方程式とよばれる 2 次元多様体上の 1 階の非線形偏微分方程式が Ginzburg-Landau 方程式の解を与える。vortex 方程式は、Seiberg-Witten 方程式とよばれる 4 次元多様体上の非線形偏微分方程式と、数学的構造が類似している。Seiberg-Witten 方程式の次元簡約により得られる 3 次元多様体上の方程式や、シリンダー上の端を持つ 4 次元多様体上の Seiberg-Witten 方程式の情報を系統的に取り出す手法として、Floer 理論 (モノポール Floer 理論) というものがある。ここでは、vortex 方程式およびその次元簡約によって得られる 1 次元多様体上の方程式を、Floer 理論のアイデアを用いて調べる。Floer 理論の意味での臨界点を分類し、シリンダー状の端を持つ 2 次元多様体上の vortex 方程式の解の漸近挙動に関する結果を導く。

## 1 はじめに

Kamerlingh Onnes によって発見された超伝導現象は、物性物理学や材料科学において基本的なテーマの一つである。超伝導現象とは、一種の相転移現象であり、様々な物質 (多くの金属, 合金) があるしきい値の温度  $T_C$  以下の低温において、特徴的な電磁氣的振る舞いをするというものである。代表的な現象として、電気抵抗が 0 になることや、物体の内部から磁場が排斥される (Meissner 効果) ことなどが挙げられる。

3 次元多様体上の 2 階の非線形偏微分方程式である Ginzburg-Landau 方程式 (Hermite 直線束  $L$  が与えられた、向きづけられた Riemann 多様体上で定義できる)

$$\begin{cases} d * F_A + \langle \Phi, \nabla_A \Phi \rangle - \langle \nabla_A \Phi, \Phi \rangle = 0 \\ \nabla_A^* \nabla_A - 2\kappa^2(1 - |\Phi|^2)\Phi = 0 \end{cases}$$

は、超伝導現象を記述する基本方程式である。ここで、 $A$  は  $L$  のユニタリ接続であり、物理学ではベクトルポテンシャルとよばれ、 $\Phi$  は  $L$  の切断であり、物理学では秩序パラメータ、あるいは電子の巨視的な波動関数とよばれる。 $F_A$  は  $A$  の曲率である。 $\kappa > 0$  は Ginzburg-Landau パラメータと呼ばれる物質によって異なる正の実数である。超伝導体は  $I$  型と  $II$  型に大別され、 $\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$  が  $I$  型、 $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$  が  $II$  型に対応している。代表的な違いとして、超伝導体に磁場をかけ、その強さを強くしていくとき、 $I$  型ではあるしきい値を超えると、一気に全体に磁場が侵入するようになり Meissner 状態が解除されるのに対し、 $II$  型では、あるしきい値を超えると、Abrikosov string と呼ばれる渦糸状の領域だけに磁場が侵入していき、次第にその渦糸たちが全体を埋め尽くしていくようにして Meissner 状態が解除されるというものがある。 $I$  型と  $II$  型のちょうど中間の  $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$  において、さらに、磁場方向に平行移動不変な系を考える際には、vortex 方程式とよばれる 2 次元多様体上の 1 階の非線形偏微分方程式

$$\begin{cases} F_A + \frac{i}{2} * (1 - |\Phi|^2) = 0 \\ \bar{\partial}_A \Phi = 0 \end{cases}$$

が Ginzburg-Landau 方程式の解を与える。(このように、1 階の方程式が 2 階の方程式の解を与えるということの他の例として、Cauchy-Riemann 方程式の解が調和関数を与えることや、ASD 方程式が Yang-Mills 方程式の解を与えることなどが挙げられる。) このように、パラメータ  $\kappa$  がきっかりと値  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  に一致するという状況はあまり現実的ではないかもしれないが、以下では、単に数理的なモデルとしてこれを考察することにする。vortex 方程式は、3, 4 次元多様体のトポロジーの研究に用いられる Seiberg-Witten 方程式とよばれる 4 次元多様体上の非線形偏微分方程式と、数学的構造が類似している。Seiberg-Witten 方程式の次元簡約により得られる 3 次元多様体上の方程式や、シリンダー

<sup>1</sup>iida@ms.u-tokyo.ac.jp

上の端を持つ 4 次元多様体上の Seiberg-Witten 方程式の情報を系統的に取り出す手法として, Floer 理論 (モノポール Floer 理論) というものがある. Floer 理論は Seiberg-Witten 方程式に限らず, インスタントン (ASD 方程式) の理論や擬正則曲線の理論の文脈でも現れるものであるが, 共通するのは, 非線形偏微分方程式を無限次元の Morse 理論という描像の下に扱うという考え方である. ここでは, vortex 方程式の次元簡約によって得られる 1 次元多様体上の方程式

$$\begin{cases} \frac{i}{2} *_{1} (1 - |\Psi|^2) = 0 \\ D_B \Psi = 0 \end{cases}$$

を, Floer 理論のアイディアを用いて調べる. 次元簡約によって得られる方程式とは, 次元が一つ低い多様体 (ここでは 1 次元多様体) と  $\mathbb{R}$  の直積上の,  $\mathbb{R}$  方向に平行移動不変な解を表す方程式のことである. 次元簡約した方程式の解は, Floer 理論の文脈では臨界点と呼ばれる. この論文の結果の一つとして, 臨界点のゲージ同値類を完全に分類した. 結論として, 臨界点のゲージ同値類の空間は 1 点となり (定理 2), さらにその臨界点是非退化であることが示される (命題 3). Floer 理論の標準的な解析により, 臨界点の分類の帰結として, シリンダー状の端を持つ 2 次元多様体上の vortex 方程式の解の漸近挙動に関する結果が得られる (定理 6). 本レターの結果は, 標準的な Floer 理論の構成により, vortex 方程式が 1+1 invertible TQFT を与えることを示唆している.

## 2 vortex 方程式

全体を通して, 多様体, ベクトル束は滑らかなもの考えるとする. 記法として一般に, 多様体  $X$  上の Hermite 直線束  $L$  に対し,  $L$  上のユニタリ接続全体の空間を  $\mathcal{A}(X; L)$  と書くことにする. これは,  $X$  上の純虚数値 1 形式全体のなす無限次元ベクトル空間  $i\Omega^1(X)$  をモデルとする affine 空間である.  $(X, g)$  を Riemann 計量が与えられた向きづけられた 2 次元多様体とする. この上に, Hermite 直線束  $L \rightarrow X$  を固定する.  $(A, \Phi) \in \mathcal{A}(X; L) \times \Gamma(X; L)$  についての次の方程式を, vortex 方程式という.

$$\begin{cases} F_A + \frac{i}{2} * (1 - |\Phi|^2) = 0 \\ \bar{\partial}_A \Phi = 0 \end{cases}$$

ここで, 2 次元においては, 計量と向きから複素構造が定まり, 従って,  $L$  上の接続  $A$  から, 直線束で twist された Dolbeault 作用素

$$\bar{\partial}_A : \Gamma(L) \rightarrow \Omega^{0,1}(L)$$

が定義されることに注意する. 解とは限らない一般の組  $(A, \Phi)$  を configuration とよぶ. configuration 全体の空間を  $\mathcal{C}(X; L) = \mathcal{A}(X; L) \times \Gamma(X; L)$  と書くことにする.

## 3 シリンダー上の vortex 方程式

これから,  $X$  がシリンダー  $\mathbb{R} \times Y$  の場合に, その上の vortex 方程式を調べる. ここで,  $Y$  は向きづけられた 1 次元閉 Riemann 多様体であり, その Riemann 計量を  $g_Y$  と書く. (計量を忘れて単に多様体としてみれば,  $Y$  は  $S^1$  のいくつかのコピーである.)  $\mathbb{R} \times Y$  の  $\mathbb{R}$  座標を  $t$  と書くことにする.  $\mathbb{R} \times Y$  に積計量  $g = dt^2 + g_Y$  および, 直積としての向きを与える. シリンダー上の直線束は自明なものと同型なものしかない.  $L = Y \times \mathbb{C}$  を  $Y$  上の自明な Hermite 直線束とし, シリンダー  $\mathbb{R} \times Y$  への引き戻しも同じ記号で書くことにする. これで, シリンダー  $\mathbb{R} \times Y$  上で vortex 方程式が定義される. Floer 理論の標準的な枠組みに従い, シリンダー上の vortex 方程式が, ある汎関数の,  $t$  座標を時刻とするような下向き gradient フローの方程式として解釈できることを見る. そのために,  $\mathbb{R} \times Y$  上の configuration  $(A, \Phi)$  を,  $\mathbb{R} \rightarrow \{Y \text{ 上の configuration}\}$  という道とみなす. ( $Y$  上の configuration はまだ定義していないが, すぐ後に定義する.) より具体的には, 次のようにする.

$\Phi \in \Gamma(\mathbb{R} \times Y; L)$  とすると, これは, 時刻  $t \in \mathbb{R}$  を固定するごとに,  $L$  の  $S^1$  上の切断を与えている. すなわち,

$$\Phi(t, y) = \Psi_t(y) \quad \text{where } y \in Y$$

により, 各  $t$  に対し  $\Psi_t \in \Gamma(Y; L)$  が定まる. 一方, シリンダー上のユニタリ接続  $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R} \times Y; L)$  は,

$$\nabla_A = dt \wedge \frac{\partial}{\partial t} + c_t dt + \nabla_{B_t}$$

と一意的に表示される. ここで, 各  $t \in \mathbb{R}$  に対し,  $c_t \in i\Omega^0(Y)$ ,  $B_t \in \mathcal{A}(Y; L)$  である. 自明束上の接続は, 接続行列により表示できる. 接続行列として表示すると,

$$A = B_t + c_t dt \in i\Omega^1(\mathbb{R} \times Y)$$

である. 一般に, 1次元多様体上の Hermite 直線束  $L \rightarrow Y$  に対し,  $Y$  上の configuration の空間を,  $\mathcal{C}(Y; L) = \mathcal{A}(Y; L) \times \Gamma(Y; L)$  と定義する. すると, 今述べたことは, シリンダー上の configuration  $(A, \Phi) \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times Y; L)$  は, 道

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{C}(Y; L) \times i\Omega^0(Y) \\ t &\mapsto (B_t, \Psi_t, c_t) \end{aligned}$$

を定める, とまとめることができる.

今,  $L \rightarrow Y$  を 1次元多様体上の Hermite 直線束とすると,  $B \in \mathcal{A}(Y; L)$  に対し, 作用素  $D_B : \Gamma(Y; L) \rightarrow \Gamma(Y; L)$  を,

$$D_B = i *_1 \nabla_B$$

により定義する. ここで,  $*_1$  は 1次元多様体  $Y$  上の Hodge スター作用素を表す. これらの準備の下で, シリンダー上の vortex 方程式は, 次のようにある汎関数の formal gradient フローの方程式として書き換えることができる.

**補題 1.** 1)  $(A, \Phi) \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times Y; L)$  に対する vortex 方程式は, 次のように書き換えられる:

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_t, \Psi_t) = - \left( \frac{i}{2} *_1 (1 - |\Psi_t|^2) - d_1 c_t, D_{B_t} \Psi_t + c_t \Psi_t \right).$$

2)  $B_0 \in \mathcal{A}(Y; L)$  を一つ固定し, 汎関数

$$\mathcal{L} : \mathcal{C}(Y; L) \rightarrow \mathbb{R}$$

を

$$\mathcal{L}(B, \Psi) = -\frac{i}{2} \int_Y (B - B_0) + \frac{1}{2} \langle \Psi, D_B \Psi \rangle$$

により定義する. このとき,  $\mathcal{L}$  の  $L^2$ -formal gradient は

$$\text{grad } \mathcal{L}(B, \Psi) = \left( \frac{i}{2} *_1 (1 - |\Psi|^2), D_B \Psi \right)$$

である.

**証明** テンソル計算である. □

1次元多様体  $Y$  上のゲージ変換群  $\mathcal{G}(Y) = C^\infty(Y, U(1))$  の configuration space  $\mathcal{C}(Y; L)$  への作用を,

$$u \cdot (B, \Psi) = (B - u^{-1} du, u\Psi)$$

と定義する.  $\mathcal{G}(Y)$  の単位元  $1 \in \mathcal{G}(Y)$  における接空間は

$$T_1 \mathcal{G}(Y) = i\Omega^0(Y)$$

であり,  $\mathcal{C}(Y; L)$  の  $(B, \Psi)$  における接空間は

$$T_{(B, \Psi)}\mathcal{C}(Y; L) = i\Omega^1(Y) \oplus \Gamma(L)$$

である.  $(B, \Psi)$  におけるゲージ群の作用の微分は,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{(B, \Psi)} : i\Omega^0(Y) &\rightarrow i\Omega^1(Y) \oplus \Gamma(L) \\ \xi &\mapsto (-d\xi, \xi\Psi) \end{aligned}$$

で与えられる.

ここまでの表記を用いると, シリンダー上の vortex 方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(B_t, \Psi_t) + \mathbf{d}_{(B_t, \Psi_t)}c_t = -\text{grad } \mathcal{L}(B_t, \Psi_t)$$

と書ける. この等式は, ゲージ群の作用の軌道方向  $\text{Imd}_{(B, \Psi)} \subset T_{(B, \Psi)}\mathcal{C}(Y; L)$  を modulo にすると, シリンダー上の vortex 方程式は「ベクトル場」 $-\text{grad } \mathcal{L}(B, \Psi)$  のフローの方程式と解釈できることを意味している. 形式的には, vortex 方程式を up to ゲージ変換で考えることが, 無限次元空間  $\mathcal{B}(Y; L) = \mathcal{C}(Y; L)/\mathcal{G}(Y)$  上のフローを考えることに対応していると思うことができる.

## 4 臨界点の分類

方程式  $\text{grad } \mathcal{L}(B, \Psi) = 0$  を満たす 1 次元多様体  $Y$  上の configuration  $(B, \Psi) \in \mathcal{C}(Y; L)$  を (Morse-Floer の意味での) 臨界点とよぶ. これは, (modulo ゲージ変換で)  $\mathbb{R} \times Y$  上の  $\mathbb{R}$  方向に平行移動不変な解に対応している. この節では, 臨界点を分類する.  $Y$  の連結成分が複数ある場合には,  $\mathcal{C}(Y; L)$  は各連結成分ごとに直積に分かれるだけであり, 臨界点集合も直積であるから,  $Y$  が連結, すなわち多様体として  $S^1$  である場合を考えれば十分である. ただし, 計量は標準的なものとは限らないとする. 実際には, どのような計量を取っても結論は本質的に同じになる. 結論は臨界点のゲージ同値類の空間は 1 点となるというものがある.

**定理 2.**  $Y = S^1$  (計量は標準的なものとは限らない) とする. 自明な *Hermite* 直線束  $Y \times \mathbb{C}$  を考える. 接続を接続行列と同一視し,  $\mathcal{C}(Y; L) = \Omega^1(Y) \oplus \Gamma(Y; L)$  とみなす. このとき, 臨界点のゲージ同値類の集合  $(\text{grad } \mathcal{L})^{-1}(0)/\mathcal{G}(Y)$  は 1 元集合  $\{(0, 1)\} \subset \mathcal{C}(Y; L)/\mathcal{G}(Y)$  である.

**証明** 臨界点の方程式は

$$\begin{cases} |\Psi|^2 = 1 \\ \nabla_B \Psi = 0 \end{cases}$$

である.

Hodge 分解

$$\Omega^1(Y) = \text{Imd} \oplus \text{Kerd}^*$$

より, 任意の configuration はゲージ変換により, 接続行列  $B \in i\Omega^1(Y)$  がスライス条件  $d^*B = 0$  を満たすようにできる. そこで, 上の二式にこの式を加えた方程式

$$\begin{cases} |\Psi|^2 = 1 \\ \nabla_B \Psi = 0 \\ d^*B = 0 \end{cases}$$

の解を分類する.  $d^*B = 0$  の解はある実定数  $b \in \mathbb{R}$  に対し,  $B = -ibd\text{vol}$  と書けるもので尽くされる. 今,  $Y = S^1$  の座標を  $\theta$  とし,  $d\text{vol} = f(\theta)d\theta$  ( $f > 0$ ) と書く.  $\Psi : Y \rightarrow \mathbb{C}$  とみなすと,

$$\nabla_B \Psi = 0$$

は

$$\left(\frac{d}{d\theta} - ibf(\theta)\right)\Psi(\theta) = 0$$

と書ける。これは常微分方程式であり、 $|\Psi|^2 = 1$  と合わせると、解は

$$\Psi(\theta) = e^{ib \int_0^\theta f(\theta') d\theta'} \Psi_0, \quad \Psi_0 \in \mathbb{C}, |\Psi_0| = 1$$

と書けるもので尽くされる。 $\Psi$  は  $S^1$  上の関数でなくてはならないので、 $b$  は  $b \int_0^{2\pi} f(\theta') d\theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$  を満たさなくてはならない。このとき、 $u = \frac{\Psi}{|\Psi|} = e^{ib \int_0^\theta f(\theta') d\theta'} \frac{\Psi_0}{|\Psi_0|} \in \mathcal{G}(Y)$  と定義すると、

$$(B, \Psi) = u \cdot (0, 1)$$

が成り立つから、全ての臨界点は、 $(0, 1)$  にゲージ同値であり、臨界点のゲージ同値類の集合はこれにより代表される 1 点である。□

## 5 Taubes 臨界点の非退化性

定理 2 の up to ゲージ変換で唯一の臨界点  $(0, 1) \in \Omega^1(Y) \oplus \Gamma(Y; L) = \mathcal{C}(Y; L)$  を  $\alpha$  と書くことにする。Taubes が 3, 4 次元の Seiberg-Witten 方程式において類似した解を考察したことにちなみ、 $\alpha$  を Taubes 臨界点とよぶことにする。この節では、この臨界点が非退化であることを示す。その前に非退化性の意味について説明する。有限次元多様体  $M$  上の関数  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  の臨界点とは  $M$  内の点  $p$  であって、 $\text{grad } f(p) = 0$  であるものをいい、臨界点  $p$  が非退化であるとは、Hessian  $\text{Hess}f_p$  が全単射線形写像であることをいうのであった。今の状況では、 $M$  の代わりに無限次元空間  $\mathcal{B}(Y; L) = \mathcal{C}(Y; L)/\mathcal{G}(Y)$  上で、 $\text{grad } f$  の代わりに  $\text{grad } \mathcal{L}$  の臨界点の非退化性を考える。後で、Floer 理論の標準的な議論を用いて、臨界点の非退化性の帰結として、シリンダー上の解の指数的減衰について議論する。ちなみに、今回のように臨界点が何も手を加えずとも非退化となるのは例外的な状況であり、通常の (インスタントンや Seiberg-Witten モノポールの) Floer 理論では一般には成り立たない。

次が Taubes 臨界点  $\alpha$  の非退化性を主張する命題である。商  $\mathcal{B}(Y; L) = \mathcal{C}(Y; L)/\mathcal{G}(Y)$  上で Hessian を考える代わりに、商の代わりに働きをするスライス作用素をつけて拡大した、extended Hessian というものを考える。[?KM07]12 節の議論を真似ることで、irreducible な臨界点においては、両者の全単射性は同値であることがわかるが、商  $\mathcal{B}(Y; L) = \mathcal{C}(Y; L)/\mathcal{G}(Y)$  上の Hessian はここでは用いず、extended Hessian を考えることにする。

**補題 3.** Taubes 臨界点  $[\alpha] = [(0, 1)]$  は非退化である。すなわち、extended Hessian

$$\widehat{\text{Hess}}_\alpha = \begin{bmatrix} D_\alpha \text{grad } \mathcal{L} & \mathbf{d}_\alpha \\ \mathbf{d}_\alpha^* & 0 \end{bmatrix} : i\Omega^1(Y) \oplus \Gamma(Y; L) \oplus i\Omega^0(Y) \rightarrow i\Omega^1(Y) \oplus \Gamma(Y; L) \oplus i\Omega^0(Y)$$

は全単射となる。

**証明** 議論は、3 次元 Seiberg-Witten 方程式における [?Tau07] の補題 3.3 および、4 次元 Seiberg-Witten 方程式における [?KM97] の補題 3.11 の類似である。 $\widehat{\text{Hess}}_\alpha$  は formally self adjoint であることが確かめられるので、単射であることを示せばよい。テンソル計算により、一般の configuration  $(B, \Psi)$  に対し、

$$\begin{aligned} & \|\widehat{\text{Hess}}_{(B, \Psi)}(b, \psi, f)\|_{L^2(Y)}^2 \\ &= \int_Y \{|d^*b|^2 + |D_B\psi|^2 + |d^*f|^2 \\ & \quad + (|b|^2 + |\psi|^2 + |f|^2)|\Psi|^2 \\ & \quad + 2\text{Re}((i *_1 b - f)\psi, D_B\Psi)\} \end{aligned}$$

という等式が示せる. この等式を,

$$\|\widehat{\text{Hess}}_{(B,\Psi)}v\|_{L^2(Y)}^2 = \int_Y (|Dv|^2 + |\Psi|^2|v|^2 + \langle v, R_{(B,\Psi)}v \rangle)$$

と略記する. ここで,  $v = (b, \psi, f)$ ,  $D = (d^*, D_B, d)$  であり,  $R_{(B,\Psi)}$  は  $(B, \Psi)$  に依存する各点での自己準同型であって,  $(B, \Psi) = \alpha = (0, 1)$  のときには,  $R_\alpha = 0$  である. よってこのとき,

$$\|\widehat{\text{Hess}}_\alpha v\|_{L^2(Y)}^2 = \int_Y (|Dv|^2 + |v|^2)$$

が成り立ち,  $\widehat{\text{Hess}}_\alpha v = 0$  ならば  $v = 0$  となることがわかる. すなわち,  $\widehat{\text{Hess}}_\alpha$  は単射である.  $\square$

## 6 シリンダー上の端を持つ多様体上の有限エネルギー解とその漸近挙動

この節では, configuration に対し定義されるエネルギーとよばれる量を導入し, シリンダー上の端を持つ 2 次元 Riemann 多様体上の vortex 方程式の有限エネルギー解を調べる. 特に, 前節の臨界点の分類を用いて, その漸近挙動に関する結果を述べる. まずは, 2 種類のエネルギーを導入し, それらが解に対しては一致することを説明する.

**定義 4.**  $X$  を向きづけられた 2 次元 Riemann 多様体,  $L$  をその上の Hermite 直線束とする.  $(A, \Phi) \in \mathcal{C}(X; L)$  に対し, その解析的エネルギーを

$$\mathcal{E}^{an}(A, \Phi) = \int_X \left[ |F_A|^2 + |\nabla_A \Phi|^2 + \frac{1}{4}(1 - |\Phi|^2)^2 \right] d\text{vol}_X,$$

位相的エネルギーを

$$\mathcal{E}^{top}(A, \Phi) = \int_X [iF_A + d *_2 \langle \Phi, i *_2 \nabla_A \Phi \rangle]$$

と定義する. 位相的エネルギーの第 2 項は事実上境界項であることに注意する. (とりあえずは, これらのエネルギーは値  $\pm\infty$  をとることも許す.) 後述するように, vortex 方程式の解に対しては, 2 つのエネルギーは一致するので, しばしば共通の記号  $\mathcal{E}$  で表す.

◇

これらエネルギーの基本性質をまとめておく.

**補題 5.** 1)  $(A, \Phi) \in \mathcal{C}(X; L)$  に対し,

$$\int_X \left\{ 2|\bar{\partial}_A \Phi|^2 + \left| *F_A + \frac{i}{2}(1 - |\Phi|^2) \right|^2 \right\} d\text{vol}_X = \mathcal{E}^{an}(A, \Phi) - \mathcal{E}^{top}(A, \Phi)$$

が成り立つ. 特に, 一般に  $\mathcal{E}^{an}(A, \Phi) \geq \mathcal{E}^{top}(A, \Phi)$  が成り立ち, 等号成立は  $(A, \Phi)$  が vortex 方程式の解であることと同値である.

2)  $X$  が閉多様体のときには,

$$\mathcal{E}^{top}(A, \Phi) = 2\pi \langle c_1(L), [X] \rangle$$

が成り立つ. これは, 解に依存せず, バンドル  $L \rightarrow X$  のトポロジーだけで決まる量である.

3)  $X$  が境界付きコンパクト多様体のときには,  $A$  の境界への制限を  $B$  と書くと,

$$\mathcal{E}^{top}(A, \Phi) = \int_X iF_A - \int_{\partial X} \langle \Phi, D_B \Phi \rangle d\text{vol}_{\partial X}$$

が成り立つ.

4)  $Y$  を向きづけられた 1 次元閉多様体,  $[t_1, t_2]$  を有界閉区間とする.  $X$  が有限シリンダー  $X = [t_1, t_2] \times Y$  である場合を考える.  $(A, \Phi) = (B_t + c_t dt, \Psi_t)$  の  $\{t\} \times Y$  への制限を  $\tilde{\gamma}(t) = (B_t, \Psi_t) \in \mathcal{A}(Y; L) \times \Gamma(Y; L)$  と書く. このとき, 解析的エネルギーは

$$\mathcal{E}^{an}(A, \Phi) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \left\| \frac{d\tilde{\gamma}(t)}{dt} + \mathbf{d}_{\tilde{\gamma}(t)} c_t \right\|_{L^2(Y)}^2 + \|\text{grad } \mathcal{L}(\tilde{\gamma}(t))\|_{L^2(Y)}^2 \right]$$

と表されまた, 位相的エネルギーは, 汎関数  $\mathcal{L}$  の減少量の 2 倍に等しい:

$$\mathcal{E}^{top}(A, \Phi) = 2\{\mathcal{L}(\tilde{\gamma}(t_1)) - \mathcal{L}(\tilde{\gamma}(t_2))\}$$

証明 テンソル計算である. □

エネルギーの概念を導入したところで, シリンダー状の端を持つ多様体上の vortex 方程式の有限エネルギー解およびその漸近挙動に関する結果を述べる. 主張は, 有限エネルギー解はいずれも, ゲージ変換を適切に施すと, シリンダーの端の方で微分も込めて指数関数的に Taubes 臨界点へと近づくというものである.

**定理 6.**  $X$  を向きづけられたコンパクトな 2 次元多様体であって, 空でない境界  $Y$  を持ち, Riemann 計量であって, カラー近傍上直積計量であるものが与えられたものとする.  $X^* = X \cup [-1, \infty) \times Y$  を半無限シリンダーを境界で接着して得られる Riemann 多様体とし,  $L$  を  $X$  上の Hermite 直線束であって,  $[-1, \infty) \times Y$  上自明化が固定されているものとする. このとき, 次が成り立つ.  $[0, \infty) \times Y$  上の  $[0, \infty)$  方向に平行移動不変な解  $(0, 1) \in \mathcal{A}([0, \infty) \times Y) \times \Gamma([0, \infty) \times Y; L)$  を  $\gamma_\alpha$  と書くことにする. このとき,  $\mathcal{E}(\gamma) < \infty$  である  $L \rightarrow X^*$  上の vortex 方程式の任意の解  $\gamma$  に対し, 任意の  $j$  に対し, ある  $C, \delta, T_0 > 0$  およびあるゲージ変換  $u \in \mathcal{G}([T_0, \infty) \times Y)$  が存在して,

$$|\nabla^j(u \cdot \gamma - \gamma_\alpha)| \leq C e^{-\delta t} \quad t \in [T_0, \infty)$$

が成り立つ.  $\nabla$  は自明束上の共変微分である ( $t$  方向の微分も含む). ( $C, \delta, T$  は解  $\gamma$  に依存することに注意.)

証明 標準的である. 例えば, [Don02] の命題 4.3 や, [KM07]13 節, 補題 16.2.4 などを見よ. □  
この結果は, 物理的には次のように解釈できる. vortex 方程式による記述を持つ材質の超伝導体を考える. 形状はフラスコ状で, その端は無限に広がっているとみなせるとする. 端の部分の形状は同じだが, 端を除いた部分の形状を様々に変えたものをいくつか考える. このとき, 端の十分先の超伝導状態 (エネルギーは有限であるとする) は端に平行な方向に平行移動不変なある超伝導状態へと近づいていく. その近づいていく先の超伝導状態は端を除いた部分の形状によらず同じである.

## 謝辞

学習班を担当し, 励ましとコメントをくださった, 株式会社ニコンの小池哲也様, 中村ちから様, 信田萌伽様, 高山侑也様, 東京大学数理科学研究科 鮑 園園先生にこの場を借りてお礼申し上げます. また, いくつかの指摘をくださった査読者の方に感謝いたします.