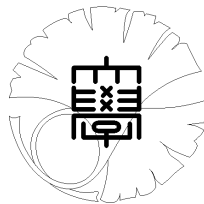


数理科学実践研究レター 2020-9 September 28, 2020

液滴の分裂にまつわる数理

by

稲山 貴大



**UNIVERSITY OF TOKYO**  
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES  
KOMABA, TOKYO, JAPAN

# 液滴の分裂にまつわる数理

稲山貴大<sup>1</sup> (東京大学大学院数理科学研究科)

Takahiro Inayama (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

## 概要

本研究の目的は、液滴の分裂に関する数理モデルを立て、ミクロな視点で降雨現象を理解することである。単位体積当たりが存在する直径  $r(mm)$  の液滴の数は、 $r$  に関して指数減衰的に振る舞うことが知られており、これは Marshall-Palmer 則と呼ばれている。本論文では Becker-Döring モデルという数理モデルを立て、そこに表れる方程式を解くことで、どのような雨粒の分裂モデルが Marshall-Palmer 則を満たすか考察する。結論として、平衡状態における雨粒の分布は、各過程での遷移確率ではなくそれらの比によって決まるということを証明する。

## 1 はじめに

降雨現象は、ミクロな視点では、雨粒の分裂・合体の繰り返しだと見なせる。そのため、液滴の分裂または合体に関する数理モデルを研究することが、降雨現象を理解する一助になると考えられる。本研究では、以下のような設定を採用する。

- 雨粒は、ユニットと呼ばれる最小単位の液滴のいくつかの集まりである。
- 雨粒の分裂・合体は、この構成要素のユニットの授受で表現される。

## 2 数理モデル

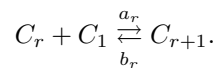
ここではより細かい記号の設定を行う。

- $C_r \cdots r$  個のユニットで構成された 1 つの液滴。
- $c_r(t) \cdots$  時刻  $t$  における単位体積当たりの  $C_r$  の密度。

このような記号下では、雨粒の大きさの分布を調べることは、 $c_r(t)$  を求めることに対応する。以降の章で詳しく見ていくが、本論文の設定では液滴の直径という量を、最小単位の液滴  $C_1$  が何個集まったかという情報に置き換えることで、数理モデルを立てている。

### 2.1 Becker-Döring モデル

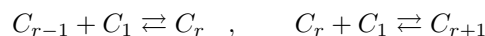
本研究では、Becker-Döring モデルと呼ばれている数理モデルを中心に調べる。Becker-Döring モデルとは、液滴の授受が、液滴の最小単位である  $C_1$  についてしか行われずとして単純化されたモデルである。具体的には次のようなモデルで表現される。



ここで  $a_r, b_r$  とはそれぞれの遷移が起こる確率である。今、各  $r$  に関して

$$J_r(t) := a_r c_r(t) c_1(t) - b_{r+1}(t) c_{r+1}(t)$$

で定まる量を導入する。これは flux と呼ばれ、上記の反応がどれだけ右に傾いているかを示す量になっている。各  $C_r$  に関して、



という遷移過程があることを考えると、次の微分方程式が成立することが分かる。

<sup>1</sup>inayama@ms.u-tokyo.ac.jp

**定義 1** (Becker-Döring 方程式, [2, (3.3)])

$$\frac{dc_r(t)}{dt} = J_{r-1}(t) - J_r(t).$$

これは無限個の微分方程式の集まりである. 本論文では  $c_1(t) \equiv c_1$  (定数) とする. 雨粒が地表に届く頃には, 反応はある意味で平衡状態になっていると考えられるので, そのときの解を調べる. ここで平衡状態とは  $J_r = 0$  のときの状態のことである. 平衡状態のときの解を平衡解と呼び, その解を  $c_{eq,r}$  と記す (平衡解は時刻  $t$  に依らないことに注意する).

解は  $a_r$  と  $b_r$  の取り方に依存するが, 選び方によっては現実に即さないモデルになることもある. 例えば, 大きさが十分大きい雨粒というのは現実的にはほとんどない, つまり  $r \rightarrow +\infty$  の極限を考えたときに  $c_{eq,r} \rightarrow 0$  となっていることが必要である. そのため, どのような推移過程が現実のモデルに即しているのかを調べるのが重要である. 次のサブセクションで, 現実のモデルに関する 1 つの法則を紹介する.

## 2.2 Marshall-Palmer 則

雨粒の大きさの分布に関して, 次の法則が知られている.

**定理 2** (Marshall-Palmer 則, [1]) 単位体積当たり存在する直径  $r(mm)$  の液滴の数は,

$$f(r) = N_0 e^{-\Lambda r}$$

という分布に従う. ここで,  $N_0, \Lambda$  はある正の定数である.

つまり直径について指数減衰的に振る舞うことを示している. 上述の Becker-Döring 方程式から, 平衡解は

$$c_{eq,r} = \frac{a_{r-1}c_1}{b_r} c_{eq,r-1} \quad (1)$$

という漸化式を満たすことが分かる. これを基に, 次章でどのような推移過程が Marshall-Palmer 則を満たすのかいくつか具体例を調べてみる.

## 3 具体例の計算

### 3.1 $a_r, b_r = (\text{定数})$

このサブセクションでは,  $a_r \equiv a, b_r \equiv b$  ( $a, b$  は定数) の場合を考える. これは液滴の大きさに依らず, 遷移が一定の確率で起きるモデルである. 式 1 より,

$$c_{eq,r} = \frac{a_{r-1} \cdots a_1}{b_r \cdots b_2} c_1^r$$

と書けるので,  $\theta = \frac{ac_1}{b}$  と置くと,

$$c_{eq,r} = \theta^{r-1} c_1$$

となることが分かる.  $r \rightarrow +\infty$  の極限を考えることで,  $\theta < 1$  という条件が必要なが分かる, このとき

$$c_{eq,r} = \theta^{r-1} c_1 = c_1 e^{-\log(\frac{1}{\theta})(r-1)}$$

と指数減衰していることが分かる ( $\log(\frac{1}{\theta}) > 0$  に注意).

### 3.2 $a_r \sim \frac{1}{r}, b_r = (\text{定数})$

このサブセクションでは,  $a_r = \frac{a}{r}, b_r \equiv b$  ( $a, b$  は定数) の場合を考える. これは分裂過程はクラスターの大きさに依らず一定の確率で起きるが, 合体する確率は大きさが増える毎に減っていくというモデルである. この場合における平衡解は,

$$c_{eq,r+1} = \left(\frac{ac_1}{b}\right)^r \frac{1}{r!} c_1 = \frac{\theta^r}{r!} c_1$$

となる. これは, 例えばスターリングの公式を使うと,

$$c_{eq,r+1} \sim \frac{e^{r(1+\log \theta)}}{\sqrt{2\pi r r^r}} c_1 \quad (r \rightarrow +\infty)$$

と分かるので,  $\theta$  の値に依らずに  $r \rightarrow +\infty$  で  $c_{eq,r} \rightarrow 0$  となるが, これは指数減衰的な振る舞いではない.

### 3.3 $a_r \sim \frac{1}{r}, b_r \sim \frac{1}{r}$

このサブセクションでは,  $a_{r-1} = \frac{a}{r}, b_r = \frac{b}{r}$  ( $a, b$  は定数) の場合を考える. これはクラスターの大きさが大きくなればなるほど, 分裂も合体もしにくくなるモデルである. この場合任意の  $r$  について

$$\frac{a_{r-1}}{b_r} = \frac{a}{b}$$

となるので,  $a_r, b_r = (\text{定数})$  の場合と同じ平衡解になる.

## 4 終わりに

$a_r$  と  $b_r$  の比が  $r$  に依らず一定であり, また初期条件も踏まえて  $b_r$  が  $a_r$  に比べて十分大きければ (これは上の  $\theta < 1$  という条件と対応している), 平衡解が  $r$  に関して指数減衰的な振る舞いをするのが分かった. これは具体例の計算を直接せずとも分かることだが, 上の具体例の計算は, 指数減衰的に振る舞わないケースも含めて色々と示唆に富んだ結果であると思われる. また, 雨粒の分布を制御しているのは, それぞれの遷移確率ではなく, その比だけであるというのは興味深い結果である.

また,  $J_r \equiv 0$  ではなく,  $J_r \equiv J$  が  $r$  に寄らず定数になるという条件を考えることもできる. この条件を満たす状態は定常状態と呼ばれ, 平衡状態の一般化に相当する. 上の計算と結論の通り, 平衡状態だけ考えては  $a_r$  と  $b_r$  の比は分かっても, それぞれがどうなっているのかは判断できない (実際, 3.1 と 3.3 の結果を区別できない). しかし, この定常状態における液滴の大きさの分布が指数減衰的になるという条件を加味することで, 具体的に  $a_r, b_r$  を決定できることが期待される. この計算は今後の課題としたい.

## 5 謝辞

本研究の課題を提供していただいた東京海上日動リスクコンサルティング株式会社の矢野良輔様, および会合の調整や議論の総括をしていただいた柏原崇人先生に感謝申し上げます.

## 参考文献

- [1] Marshall, J. S., and W. McK. Palmer, *The distribution of raindrops with size*, J. Meteor. **5**, (1948), 165-166.
- [2] Wattis, J.A.D., *An introduction to mathematical models of coagulation-fragmentation processes: a discrete deterministic mean-field approach*, Phys. D: Nonlinear Phenomena, **222**, (2006), 1-20.