数理科学実践研究レター　2020–6 August 31, 2020

ウェブ空間のバナッハ空間への埋め込みについて

by

森 迪也

UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

ウェブ空間のバナッハ空間への埋め込みについて

森迪也[1]（東京大学大学院数理科学研究科）
Michiya Mori (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概 要

インターネット利用者のウェブページのアクセスログを数学的に扱うために，関数解析学の視点から考察を行う．そのために，ウェブページ全体を集合とみなし，それをバナッハ空間に埋め込む方法例を与える．

1 はじめに

インターネット利用者のウェブページのアクセスログを，数学の道具を用いて扱う方法について考えたい．著者の専門分野である関数解析学を応用できないだろうか，という考えがこの研究の出発点である．ウェブページを要素とする集合を考え，それをウェブ空間と呼ぶことにする．ウェブ空間をバナッハ空間[2]の部分集合として実現することが，このレターにおける目標である．

バナッハ空間は線形構造と距離構造を同時に持ち合わせる数学的対象である．そのような空間へ埋め込むことで，線形演算や極限をとる操作などが数学的に意味を持ち，ウェブ空間を様々な観点から取り扱うことができるようになると期待される．

今回は，各利用者についての以下のデータを用いる．

- ウェブページを閲覧した（ページを表示した）時刻
- 閲覧したウェブページのアドレス

2 埋め込みの構成

まず，このレターにおけるウェブ空間を厳密に定義しよう．与えられたデータにおいて，いずれかの利用者が一回以上閲覧したウェブページ全体の集合をウェブ空間 S と定める．S にバナッハ空間の部分集合としての構造を与えるために，まず S 上の距離を構成したい．

距離付けには，グラフ理論の手法が応用できる．S を頂点とするグラフの構成方法を一つ与えよう．2 つのウェブページ $x, y \in S$ に対して，ある利用者がウェブページ x を閲覧した直前または直後にウェブページ y を閲覧したことを， x と y を結ぶ（無向）辺が存在するための必要十分条件とする．グラフには距離が定まる．たとえば，グラフ理論において頻繁に用いられる距離は，以下のように定められる．2 つのウェブページ $x, y \in S$ の距離 $d(x, y)$ を，x から y へ至る辺の最小数と定める[3]．

距離が与えられれば，次の古典的な定理を用いることが可能である．距離空間 (A, d_A), (B, d_B) に対し，写像 $\varphi\colon A \to B$ で，すべての $x, y \in A$ について $d_A(x, y) = d_B(\varphi(x), \varphi(y))$ を満たすものを等距離写像という．

定理 1 (Fréchet 1910 [1]) (A, d) を有限距離空間とする．このとき，あるバナッハ空間 X と等距離写像 $\varphi\colon A \to X$ が存在する．

証明 ここではより一般に，(A, d) を可分距離空間とするとき，ある可分バナッハ空間 X と等距離写像 $\varphi\colon A \to X$ が存在することを示そう．A の稠密部分集合 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとる．$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ から $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ への写像 φ_0 を，

$$(\varphi_0(a_n))_m = d(a_n, a_m) - d(a_m, a_1), \quad n, m \in \mathbb{N}$$

[1] mmori@ms.u-tokyo.ac.jp

[2] このレターに登場するバナッハ空間はすべて実バナッハ空間である．

[3] グラフが連結でない場合，この数は存在しない場合があるが，その場合は（S が有限集合なら）たとえば距離を S の濃度とすれば，d は距離の公理を満たす．あるいは，連結成分のみを考察の対象とすればこの問題は生じない．

により定めると，距離の公理から，φ_0 は等距離写像であることがわかる[4]．X を φ_0 の像を含む ℓ^∞ の最小の閉部分空間とすると，X は可分である．$\varphi\colon A \to X$ を次のように定める．各 $a \in A$ に対し，部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ で $a_{n_k} \to a$ $(k \to \infty)$ なるものがとれる．このとき，$\varphi(a) = \lim_{k\to\infty} \varphi_0(a_{n_k})$ は部分列の取り方に依らず well-defined であり，φ が等距離写像であることは簡単に確かめられる． □

以上により，ウェブ空間をバナッハ空間に埋め込む具体的な方法が得られた．

3　考察

前節の方法では，ウェブ空間 S にまずグラフおよび距離の構造を与えたのちに，その距離構造のみを用いてバナッハ空間 X への埋め込みを構成した．したがって，関数解析学の手法を今回の問題に応用するためには，X のバナッハ空間としての構造が，S の距離構造を反映していることが望ましい．

一般に，バナッハ空間 X とその部分集合 S の組について考えよう．実は，組 (X, S) が適当な条件を満たすとき，X のバナッハ空間構造は S の距離構造に支配される．たとえば，次の定理が成り立つ．

定理 2 (Mazur–Ulam 1932 [3]) X, Y をバナッハ空間，$\varphi\colon X \to Y$ 全射等距離写像とするとき，φ はアファイン写像である．すなわち，写像 $\tilde{\varphi}\colon X \to Y$ を $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \varphi(0),\ x \in X$ により定めると，$\tilde{\varphi}$ は線形（全射等距離）写像となる．

証明　Väisälä による短い証明 [5] を紹介する．$a, b \in X$ とする．$z = (a+b)/2,\ z' = (\varphi(a)+\varphi(b))/2$ とおくとき，$\varphi(z) = z'$ となることを示したい．これを示せば，φ の連続性から，φ がアファイン写像であることがわかる．X からそれ自身への全射等距離写像で，二点 a, b を固定するものの全体を W とおき，$\lambda = \sup\{\|g(z) - z\| \mid g \in W\}$ と定める．任意の $g \in W$ について，等式

$$\|g(z) - z\| \leq \|g(z) - a\| + \|a - z\| = \|g(z) - g(a)\| + \|a - z\| = 2\|a - z\|$$

が成り立つので，$\lambda < \infty$ である．全射等距離写像 $\psi\colon X \to X$ を，$\psi(x) = 2z - x,\ x \in X$ で定める．このとき，$\psi^{-1} = \psi,\ \psi(a) = b,\ \psi(z) = z$ が成り立つ．よって，任意の $g \in W$ に対して，合成 $g^* = \psi \circ g^{-1} \circ \psi \circ g$ を考えると，$g^* \in W$ が成り立つ．ゆえに，

$$\lambda \geq \|g^*(z) - z\| = \|\psi \circ g^{-1} \circ \psi \circ g(z) - z\| = \|g^{-1} \circ \psi \circ g(z) - z\| = \|\psi \circ g(z) - g(z)\| = 2\|z - g(z)\|$$

を得るが，$g \in W$ について右辺の上限をとることで，$\lambda \geq 2\lambda$ が成り立つ．ゆえに，$\lambda = 0$, すなわち任意の $g \in W$ に対し $g(z) = z$ を得る．全射等距離写像 $\psi'\colon Y \to Y$ を $\psi'(y) = 2z' - y,\ y \in Y$ で定める．このとき，合成 $h = \psi \circ \varphi^{-1} \circ \psi' \circ \varphi$ は W に属するので，$h(z) = z$ を得る．これより，$\psi' \circ \varphi(z) = \varphi(z)$，すなわち $\varphi(z) = z'$ が従う． □

より一般に，$\emptyset \neq U \subset X,\ V \subset Y$ を開連結集合，$\varphi\colon U \to V$ を全射等距離写像とするとき，あるアファイン全射等距離写像 $f\colon X \to Y$ が存在して，$\varphi(x) = f(x),\ x \in U$ が成り立つことも知られている [2]．また，次に示すように，X に特別な仮定を置く場合にも類似の結論が成り立つ．

定理 3 H_1, H_2 をヒルベルト空間，$S \subset H_1$ を部分集合とする．S を含む H_1 の閉超平面が存在しないと仮定する．$\varphi\colon S \to H_2$ を等距離写像とする．このとき，アファイン等距離写像 $f\colon H_1 \to H_2$ が存在して，

$$\varphi(x) = f(x), \quad x \in S$$

が成り立つ．

この定理はよく知られているものだが，簡潔に証明をしておく．証明のために補題を準備する．

[4] この方法は Kuratowski の埋め込み法と呼ばれる．

補題 4 $x_0, x_1, \dots, x_n$ を n 次元ユークリッド空間 E_n のアファイン独立な点，ψ を $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ から E_n への等距離写像とする．

1) このとき，ただ一つのアファイン全射等距離写像 $g\colon E_n \to E_n$ が存在して，

$$\psi(x_j) = g(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

が成り立つ．

2) $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset T \subset E_n$ とする．等距離写像 $\tilde{\psi}\colon T \to E_n$ が $\tilde{\psi}(x_j) = \psi(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$ を満たすとする．このとき，*1)* の g について $\tilde{\psi}(x) = g(x), x \in T$ が成り立つ．

証明 $x_0 = \psi(x_0) = 0$ の場合を考えれば十分．このとき，$\{x_1, \dots, x_n\}$ は線形独立である．
1) Schmidt の直交化の手順を踏めば，ψ が直交変換 g に一意的に拡張することは簡単に示される．
2) 等距離写像 $\psi' := g^{-1} \circ \tilde{\psi}\colon T \to E_n$ を考える．$x \in T$ とする．$\psi'(x) = x$ を示せばよい．ψ' は $\psi'(x_j) = x_j$, $j = 0, \dots, n$ を満たす．ゆえに，

$$|\psi'(x) - x_j| = |x - x_j| \tag{1}$$

が成り立つ．特に，$x_0 = 0$ より，$|\psi'(x)| = |x|$ を得る．等式 (1) の両辺を二乗することで，$\langle \psi'(x), x_j \rangle = \langle x, x_j \rangle$, $j = 1, 2, \dots, n$ を得る．$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ は線形独立であるから，$\psi'(x) = x$ を得る． □

定理 3 の証明：S の有限部分集合の張るアファイン部分空間の全体を $\mathcal{F}$ とおく．補題 4 より，各 $F \in \mathcal{F}$ に対して，あるアファイン等距離写像 $\psi_F\colon F \to H_2$ が存在して，$F \cap S$ 上 $\psi_F = \varphi$ が成り立つ．さらに，すべての ψ_F を拡張する唯一の写像 $\psi\colon \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \to H_2$ が取れる．この写像は等距離アファイン写像であり，φ を拡張する．$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ の完備化，すなわち H_1 まで ψ を等距離拡張することで，望みの結論を得る． □

関連する話題については，たとえば [6] の Chapter III を参照．上述の定理 2, 3 の仮定の下では，S の構造が X を支配している．

一方で，定理 1 の証明では，X として具体的には ℓ^∞ 空間の部分空間が用いられている．すなわち，ℓ^∞ 空間にはどのような距離空間も埋め込める．逆に言うと，一般に包含 $S \subset \ell^\infty = X$ に対し，X のバナッハ空間構造が S の距離構造を反映していると期待するのは難しい．

4 おわりに

このレターでは，ウェブ空間をバナッハ空間に埋め込む方法について調べた．次なる課題は，より実用性を考慮した上で，埋め込みの最適な手法，アルゴリズムを確立することであろう．具体的な問題としては，次が考えられる．

- より良い方法で，与えられたデータを距離構造に反映させることはできないか．我々の方法では，距離として整数値しか現れないが，たとえば,（ページの閲覧した順番ではなく）ページの閲覧時刻の情報をもとに「連続的な」距離を構成するにはどのような方法があるか.
- 今回の課題の提供元であるマクロミルの所有するデータは完全なものではなく，各ウェブページや利用者の設定によっては得られない情報も存在する．グラフや距離の構成において，そういった点をいかに考慮するべきだろうか.
- ヒルベルト空間に埋め込める距離空間の特徴づけはよく知られている（たとえば [6, Theorem 2.4] を見よ）．グラフおよび距離の構成を工夫することで，ウェブ空間をヒルベルト空間に埋め込むことは可能か.
- ヒルベルト空間以外で，定理 3 と類似の性質を持つバナッハ空間は何があるか.
- 等距離な埋め込みではなく，ほとんど等距離な埋め込みや，Bilipschitz な埋め込みなどを用いることはできないか．距離空間のバナッハ空間へのさまざまなタイプの埋め込みについて扱った数学書として，[4] が挙げられる．

5 謝辞

課題を提供していただいた株式会社マクロミルの皆様，研究にあたり多くの有益な助言をいただいた田中雄一郎氏に心より感謝を申し上げます．

参考文献

[1] M. Fréchet, Les dimensions d'un ensemble abstrait. *Math. Ann.* **68** (1910), no. 2, 145–168.

[2] P. Mankiewicz, On extension of isometries in normed linear spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* **20** (1972), 367–371.

[3] S. Mazur and S. Ulam, Sur les transformationes isométriques d'espaces vectoriels normés. *C. R. Acad. Sci. Paris* **194** (1932), 946–948.

[4] M.I. Ostrovskii, "Metric embeddings. Bilipschitz and coarse embeddings into Banach spaces." De Gruyter Studies in Mathematics, 49. De Gruyter, Berlin, 2013.

[5] J. Väisälä, A proof of the Mazur-Ulam theorem. *Amer. Math. Monthly* **110** (2003), no. 7, 633–635.

[6] J.H. Wells and L.R. Williams, "Embeddings and extensions in analysis." Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 84. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.