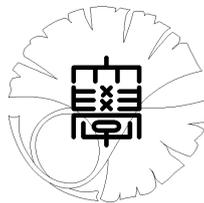


数理科学実践研究レター 2020-18 December 17, 2020

確率モデルによる資源分配について

by

森脇 湧登



UNIVERSITY OF TOKYO
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
KOMABA, TOKYO, JAPAN

確率モデルによる資源分配について

森脇湧登¹（東京大学大学院数理科学研究科）

概要

時間に依存する離散確率分布を用いた資源分配において、ユーザーの感じる平等感を分散を用いて定義し、確率分布に対するある制限の下、最も平等感の強い確率分布を決定した。

1 はじめに

各時刻に供給できる資源の総量が一定かつ離散的であり、需要が供給可能量を超えてしまう場合に「どうやって平等に配分をするか」という問題を考える。もし時刻毎の各ユーザーの需要が完全に分かっているのならば、それに基づいて誰にどのくらい、いつ配分するかを決定論的に決めればよい。しかし、全てのユーザーの情報を時刻ごとに集め、その情報に基づいて時刻ごとの配分を決めることは、コストがかかるため必ずしも有効ではない。

たとえば災害時のパンの配給をするときに、誰にいつパンを渡したのか、次にいつ渡すのかを管理するのは大変である。そこで我々はユーザーごとに独立な確率分布を用いて資源配分を行うことにする。独立というのは確率分布はユーザーごとに決まっており、他の人がいつパンをもらったか？などで確率分布が変わらないということである。これは全てのユーザーの情報を管理し制御するコストを抑えたいという目的から従う仮定である。

また、日用品・食料品のような離散的な物の配分を考えることは本質的である。もし連続的ならば可能供給量を需要で割った量を各人に配分すれば事が足りてしまう。一見、離散的でないように見える電力や水の場合も、計画停電や断水のような、0または1の配分をする場合は本稿における手法を用いることができる。確率モデルで資源を配分するとき、モデルとしては平等であっても周りばかりが得をしているように見える不平等感から不満が生じる可能性がある。我々は、ある時刻までにたくさん供給された人は、次の時刻には供給される確率が低くなるように、確率分布を設定することでこの問題が緩和できると考えた。

本稿では、ユーザーごとに独立な時間に依存する離散確率分布による資源分配を考察する。2.4章において、不平等感を分散を用いて定義し、最も不平等感が小さい確率分布を一定の制約（2.1章）の下、決定した。

2 モデルの説明

2.1 設定

本稿で考察する確率モデルについて説明する。このモデルを考えるに当たっては「多数のユーザーに対して、離散化された時刻 $(0,1,2,\dots)$ に資源をある確率分布に基づいて分配する」という状況が想定されている。確率モデルとして以下の条件を満たすものを考える。

- 各ユーザーはある確率分布に従い各時刻に 1 か 0 の資源を受け取る。
- 各ユーザーのある時刻の確率分布は、その時刻までにそのユーザーが受け取った資源の総量と時刻のみによって決まる。また時刻 $0'$ において全てのユーザーは何も分配されていない状態であるとする。
- 全てのユーザーは同じ確率分布に従い、それらは独立である。
- 時刻 t におけるユーザーが受け取る資源の量の期待値は p_t である。

¹moriwaki@ms.u-tokyo.ac.jp

上記の条件についてその妥当性を補足すると、「各時刻に 1 か 0 の資源を受け取る」としたのは問題を簡略化するためである。また特別なユーザーを作らずに、全てのユーザーは同じ確率分布に従い、それらは独立であると仮定した。これは全てのユーザーは平等であると仮定していることや、情報を共有するコストはかけられないことに由来する（「はじめに」を参照）。また p_t は時刻 t における供給可能量と総需要からきまる。

2.2 モデルの自由度

モデルを記述するデータと拘束条件について考える。「全てのユーザーは同じ確率分布に従い、それらは独立である。」ので一人のユーザーの従う確率分布のみを考える。時刻 t までに総計 n 資源を受け取る確率を $q(t, n)$ 、時刻 t までに総計 n 資源を受け取ったユーザーが次の時刻に資源を 1 受け取る確率を $p(t, n)$ とする。時刻 t には高々 $n \leq t$ 個しか資源を持ち得ないことから、 $n \geq t + 1$ に対して $q(t, n) = 0$ が分かる。時刻 t においてユーザーが受け取る資源の量の期待値は p_t であるため、

$$p_t = \sum_{n=0}^t q(t, n)p(t, n) \quad (1)$$

である。また、 $q(t + 1, n)$ は $q(t, n)$ と $p(t, n)$ から決まり、

$$q(t + 1, n) = q(t, n)(1 - p(t, n)) + q(t, n - 1)p(t, n - 1) \quad (2)$$

を満たす。さらに初期条件から時刻 0 において資源は分配されていないので、 $n \geq 1$ ならば $q(0, n) = 0$ であり、 $q(0, 0) = 1$ である。式 1 より、 $p(0, 0) = p_0$ が分かり、式 2 より $q(1, 0) = 1 - p_0$ 、 $q(1, 1) = p_0$ が分かる。 $p(1, n)$ ($n = 0, 1$) は、 $p_1 = (1 - p_0)p(1, 0) + p_0p(1, 1)$ を満たす限り自由にとって良い。例えば、 $p(1, 0) \geq p(1, 1)$ とすることで、時刻 0 に貰えなかった人が次の時刻では貰いやすくなり、より平等な分配になるということである。また $\{p(t, n)\}_{t, n=0, 1, 2, \dots}$ を決めれば $\{q(t, n)\}_{t, n=0, 1, 2, \dots}$ は式 2 より定まる。供給量 $\{p_t\}_{t=0, 1, \dots}$ は固定して本稿では式 1 と 2 を満たす確率モデル $\{p(t, n)\}_{t, n=0, 1, 2, \dots}$ を $\{p_t\}_{t=0, 1, \dots}$ モデルと呼ぶ。

2.3 モデルの例

自明な例として $p(t, n) = p_t$ とすると、それまで貰っていたか、いないかに関わりなく各ユーザーが確率 p_t で資源を受け取るモデルができて、これは $\{p_t\}_{t=0, 1, \dots}$ モデルの例になっている。これを自明なモデルと呼ぶ。

次に非自明な例を考える。実際には時刻は有限な範囲で考えることが多いため、「例えば 5 回のチャンスのうち 3 回資源を分配する」というモデルを考えてみる。時刻 2 で資源を 1 持っている場合、残りのチャンスは 3 回で後 2 資源を貰わないといけないため、確率 $2/3$ で貰うとする。逆に時刻 2 で資源を 2 持っている場合、残りのチャンスは 3 回で後 1 だけ資源を貰えば十分なので、確率 $1/3$ で貰うとする。これは上で述べた自明なモデルよりも幾分平等になっている。一般には、時刻 $t (= 0, 1, \dots, 5)$ において、資源を n だけ持っている場合、後チャンスは $5 - t$ 回であるから、 $p(t, n) = \frac{3-n}{5-t}$ によって定める。

途中経過によらず 5 回後にちょうど 3 配分されている状態になるため、それを繰り返せば時刻 $t \geq 6$ でも確率分布を定義できて、 $p_t = 3/5$ モデル（時刻によらず一定）になっていることは容易に確認できる。このモデルの特徴は、時刻 5 の時点では途中の過程に関係なく全てのユーザーが資源を 3 持っている状態になるところであり、その点で優れている。（すなわち n が 3 でない時 $q(5, n) = 0$ であり $q(5, 3) = 1$ ）また、このモデルは $p = p_t$ (時刻によらない) が任意の有理数の場合に一般化でき、本稿では A モデルと呼ぶ。

2.4 平等感と B モデル

同じ確率分布に従う限り全てのユーザーは平等であるが、自明なモデルでは運がいい人はたくさん資源を分配されるし、そうでない人は少しか貰えないという差が生じる。こういった差はユーザー側からしてみると不平等に感じるはずである。たとえ最終的には平等になる A モデルであっても、最初の数ステップで資源をもらい続ける人と一度も貰えない人はいるはずで、その場合貰えなかった人は不利益を被るはずである。(例えばパンは早くもらえる方が望ましいはずである。)

ここで不平等感について次の仮説を考える。

仮説 1 時刻 t までにもらう資源の総量の期待値は $\sum_{i=0}^{t-1} p_i$ だが、その分散が大きいと人は不平等感を感じるのではないか?

ここで本稿の目的を次のように述べるができる。各 0 以上 1 以下の実数 p_t に対して、「任意の時刻において開始から受け取った資源の総量の分散が最小になるような $\{p_t\}_{t=0,1,\dots}$ モデルを決定する。」
「できるだけ平等感が大きくなるようにする。」という視点を導入すると次のようなモデルが考えられる。時刻 1 において、受け取った資源の量について二つの状態 0 と 1 (それぞれ確率 $1-p_0, p_0$) があり得るが、 0 の人にできるだけ優先して資源を分配することを考える。ただし 0 の人が確実に資源を受け取れる ($p(1,0) = 1$) とした場合、式 1 から $p_1 \geq (1-p_0)p(1,0)$ となる必要があるが、これが成り立たなくなってしまうことがある。そこで供給量が p_1 を超えない最大の資源を一番不足している人から順に渡すというモデルを B モデルと呼ぶ。重要な注意として B モデルにおいては各時刻に最大で二つの状態しか生じ得ないことが簡単に分かる (すなわち二つの n を除き $q(t,n) = 0$ が任意の時刻 t で成り立つ)。具体的に書くと、時刻 t において確率が 0 でない状態を $n, n+1$ とすると、 $q(t,n) \leq p_t$ ならば、

$$p(t,n) = 1 \tag{3}$$

$$p(t,n+1) = \frac{p_t - q(t,n)}{1 - q(t,n+1)} \tag{4}$$

であり、 $q(t,n) \geq p_t$ ならば、

$$p(t,n) = \frac{p_t}{q(t,n)} \tag{5}$$

$$p(t,n+1) = 0 \tag{6}$$

によって与えられる。また正の実数 r に対して r を超えない最大の整数を $[r]$ によって表すとする。

補題 1 $n \neq [\sum_{i=0}^{t-1} p_i], [\sum_{i=0}^{t-1} p_i] + 1$ ならば $q(t,n) = 0$ であり、 $q(t, [\sum_{i=0}^{t-1} p_i]) = [\sum_{i=0}^{t-1} p_i] + 1 - \sum_{i=0}^{t-1} p_i$, $q(t, [\sum_{i=0}^{t-1} p_i] + 1) = \sum_{i=0}^{t-1} p_i - [\sum_{i=0}^{t-1} p_i]$ が成り立つ。

A モデルと B モデルの分散を比較する。例えば $p = p_t = 3/5$ (時刻によらない) の A モデルの場合、時刻 3 において資源量の期待値は $9/5$ 、分散は $9/25$ であるが、B モデルでは期待値は同じで分散は $4/25$ と半分以上小さくなる。この点から B モデルは A モデルに比べてはるかに平等であることが伺える。また補題 1 より、たとえば $p = 3/5$ の B モデルは $q(5,3) = 1$ を満たす。一般に有理数 p に対して、B モデルも A モデルと同様の周期性を持つことが分かる。

3 主結果

我々は本研究において次の命題を証明した。

命題 1 各時刻の供給量 $\{p_t\}_{t=0,1,\dots}$ を固定する。B モデルは、時刻 0 から時刻 T までに受け取った資源の総量の分散が任意の時刻 $T = 0, 1, 2, \dots$ において最小になる唯一の $\{p_t\}_{t=0,1,\dots}$ モデルである。

すなわち、B モデルは我々の設定において、任意の時刻における配分量の分散 (平等感) を最小にする唯一のモデルであるということが分かる。

3.1 証明の方針

供給量 $\{p_t\}_{t=0,1,\dots}$ を固定し、 $\{p(t, n)\}_{t,n=0,1,2,\dots}$ を $\{p_t\}_{t=0,1,\dots}$ モデルとする。時刻 T までに n 資源を受け取った確率 $q(T, n)$ は以下の条件を満たす。

$$1 \geq q(T, n) \geq 0 \quad (7)$$

$$\sum_{n=0}^T q(T, n) = 1 \quad (8)$$

$$\sum_{n=0}^T nq(T, n) = \sum_{i=0}^{T-1} p_i \quad (9)$$

以上の拘束条件の下、分散 $\sum_{n=0}^T n^2 q(T, n) - (\sum_{n=0}^T nq(T, n))^2$ を最小化することを考える。ただし $\sum_{n=0}^T nq(T, n) = \sum_{i=0}^{T-1} p_i$ より、分散を最小化することは、 $\sum_{n=0}^T n^2 q(T, n)$ を最小化することと同値である。Bモデルならば二つの n を除き $q(T, n) = 0$ となることを注意しておく。線形代数から次の補題を用意する。

補題 2 $T \geq S$ であり、 $\{b_s\}_{s=0,\dots,S-1}$ は実数値のベクトル、 $\{a_{sn}\}_{0 \leq s \leq S, 0 \leq n \leq T}$ は実数値の $(S+1) \times (T+1)$ 行列とする。 $S \times (T+1)$ 行列 $\{a_{sn}\}_{0 \leq s \leq S-1, 0 \leq n \leq T}$ の任意の $S \times S$ 小行列式が 0 でないと仮定する。実変数 $\{q_n\}_{n=0,\dots,T}$ に関する式

$$0 \leq q_n \leq 1, n = 0, 1, \dots, T \quad (10)$$

$$\sum_{n=0}^T a_{sn} q_n = b_s, s = 0, 1, \dots, S-1 \quad (11)$$

が解を持つと仮定する。このとき条件 (10), (11) の下、 $\sum_{n=0}^T a_{sn} q_n$ が最小値を取る $\{q_n\}_{0 \leq n \leq T}$ のうち、 S 個の n をのぞき、 $q_n = 1$ または 0 であるものが存在する。また $\{a_{sn}\}_{0 \leq s \leq S, 0 \leq n \leq T}$ の任意の $(S+1) \times (S+1)$ 小行列式が 0 でないならば、最小値を取る $\{q_n\}_{0 \leq n \leq T}$ はただ一つである。

証明 条件 (10), (11) の下、 $\sum_{n=0}^T a_{sn} q_n$ が最小値を取る $\{q_n\}_{0 \leq n \leq T}$ の集合を M とおく。このとき、 $\{q_n\}_{0 \leq n \leq T}, \{q'_n\}_{0 \leq n \leq T} \in M$ ならば、任意の実数 $0 \leq u \leq 1$ に対して、 $\{uq_n + (1-u)q'_n\}_{0 \leq n \leq T} \in M$ が成り立つため、 M は凸集合である。また解の存在の仮定とコンパクト性から M は空ではない。 $\{r_n\}_{0 \leq n \leq T} \in M$ で、 $\#\{n \mid r_n \neq 1, 0\} \geq S+1$ となるものが存在すると仮定する。集合 $\{n \mid r_n \neq 1, 0\}$ の元を適当に順序付けて i_1, \dots, i_L とおく ($L > S$)。このとき、 $\{x_n\} \in \mathbb{R}^{T+1}$ についての連立方程式、

$$\begin{aligned} x_n &= 0, \quad n \in \{0, \dots, T\} \setminus \{i_1, \dots, i_S, i_{S+1}\} \\ \sum_{n=0}^T a_{sn} x_n &= 0, \quad s \in \{0, \dots, S-1\} \end{aligned}$$

は $\{a_{sn}\}_{0 \leq s \leq S-1, 0 \leq n \leq T}$ の任意の $S \times S$ 小行列式が 0 でないため、0 ベクトルでない非自明な解を持つ。そのような解を一つ選び $\{y_n\} \in \mathbb{R}^T$ とおき、 $\alpha = \sum_{n=0}^T a_{Sn} y_n$ とおく。 $\alpha \geq 0$ としてよい。ここで $\{a_{sn}\}_{0 \leq s \leq S, 0 \leq n \leq T}$ の任意の $(S+1) \times (S+1)$ 小行列式が 0 でないならば、 $\alpha > 0$ となる解が取れることを注意しておく。

任意の $k = 1, \dots, L$ に対して、 $0 < r_{i_k} < 1$ であるから、正の実数 u を十分小さく取ると、 $0 \leq r_n - uy_n \leq 1$ が任意の n に対して成り立つように取れる。このとき、 $\{r_n - uy_n\}_{n=0,\dots,T}$ は条件 (10), (11) を満たしている。 $\sum_{n=0}^T a_{Sn} (r_n - uy_n) = \sum_{n=0}^T a_{Sn} r_n - u\alpha$ より、 $\alpha > 0$ ならば $\sum_{n=0}^T a_{Sn} r_n$ の最小性に矛盾する。よって $\alpha = 0$ である。このとき $\{r_n - uy_n\}_{0 \leq n \leq T} \in M$ であり、上手く u をとれば $\{p_n - uy_n\}_{0 \leq n \leq T}$ の 0 または 1 でない成分の個数を $L-1$ 個以下にできる。よって、補題の前半部分が証明できた。

次に $\{a_{sn}\}_{0 \leq s \leq S, 0 \leq n \leq T}$ の任意の $(S+1) \times (S+1)$ 小行列式が 0 でないと仮定する。このとき、注意した通り α がゼロでないように取れるので、先ほどの議論から M の任意のベクトルの 0 または 1 でない成

分の個数は S 個以下であることが分かる. $\{y_n\}_{0 \leq n \leq T}, \{y'_n\}_{0 \leq n \leq T} \in M$ をとる. $\#\{n \mid y_n \neq y'_n\} > S$ のとき, M が凸集合であることから, 0 または 1 でない成分の数が $S+1$ 個以上である M のベクトルが存在し矛盾が生じる. よって $\{y_n - y'_n\}_{0 \leq n \leq T}$ の 0 でない成分の個数は高々 S 個である. 拘束条件と最小性から $\sum_{n=0}^T a_{sn}(y_n - y'_n) = 0$ が全ての $s \in \{0, \dots, S\}$ に対して成立する. $(S+1) \times (S+1)$ 小行列式が 0 でないことから, 全ての $n = 0, \dots, T$ に対して $y_n = y'_n$ であることが分かる. よって M は一つの元からなる集合である. よって補題が示された.

これより上記の補題を用いて命題 1 を証明する. 時刻 $T = 0, 1$ における状態は供給量から決まりモデルによらないため, $T \geq 2$ としてよい.

$3 \times (T+1)$ 行列, $a_{sn} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & T \\ 0 & 1 & 4 & \dots & T^2 \end{pmatrix}$ を考える. また, $b_0 = 1, b_1 = \sum_{i=0}^{T-1} p_i$ とおく.

このとき, 拘束条件 (8), (9) は, $\sum_{n=0}^T a_{sn}q(T, n) = b_s$ ($s = 0, 1$) とかける. この拘束条件の下で, $\sum_{n=0}^T a_{2n}q(T, n)$ を最小化できれば, 時刻 T までに受け取った資源の総量の分散は最小化される. $(a_{sn})_{s,n}$ および $\{b_s\}$ に対して, 補題 2 を適応する. ヴァンデルモンドの行列式から $(a_{sn})_{s,n}$ の任意の 3×3 小行列の行列式は 0 でない. また $\{p_t\}_{t=0,1,\dots}$ モデルは存在するため, 式 (10), (11) の解は存在する. (10), (11) の解 $\{q_n\}_{n=0,1,\dots,T}$ で $\sum_{n=0}^T a_{2n}q_n$ を最小にするものを取る. 補題 2 より, そのような解は唯一存在し, ある $n = k, l$ ($k > l$) を除くと $q_n = 0$ または 1 となる. この場合, 最小性と $a_{2n} \geq 0$ から, $n = k, l$ でなければ, $q_n = 0$ である.

このとき拘束条件から $q_k = \frac{b_1 - l}{k - l}, q_l = \frac{k - b_1}{k - l}, k \geq b_1 \geq l$ が分かる.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^T a_{2n}q_n &= k^2 \frac{b_1 - l}{k - l} + l^2 \frac{k - b_1}{k - l} \\ &= (k + l)b_1 - kl = (k - b_1)(b_1 - l) + b_1^2 \end{aligned}$$

より, 最小性と k, l が自然数であることから, $k = 1 + [b_1], l = [b_1]$ が分かる. 補題 1 と比べて命題が示される.

3.2 結論

時間に依存する確率モデルを用いた配分において, どのような確率モデルを用いるのがよいか? という問題に対して, 平等感がある時刻までに受け取った資源量の分散が小さいことと定義し, 最も平等な確率モデルは B モデルであることを証明した.

謝辞

本研究は数物フロンティア・リーディング大学院の助成を受けたものである. 本研究をするにあたって有益な議論やコメントをしてくださった, 日産自動車の池添圭吾氏, 村井謙介氏, 今別府悟氏, 東京大学の佐藤玄基氏, 長岡大氏, 千葉悠喜氏, 呉孟超氏, 金井雅彦氏, 間瀬崇史氏に感謝を申し上げます.