数理科学実践研究レター 2020–1 March 17, 2020

遅延振動子の方程式の数学解析

by

古川 賢

UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

遅延振動子の方程式の数学解析

古川賢[1]（東京大学大学院数理科学研究科）
Ken Furukawa (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概 要

エルニーニョ・ラニーニャ現象を記述するモデルの一つに遅延振動子の方程式がある. しかし, 通常の遅延振動子の方程式は実際の観測データと必ずしも符合しているとはいえない. そこで, 遅延振動子の方程式の係数を周期関数に置き換えることによって, より実際の現象に近いであろう方程式を考え, それの可解性を調べた.

1 導入

エルニーニョ現象とは「太平洋赤道域の日付変更線付近から南米沿岸にかけて海面水温が平年より高くなり, その状態が 1 年程度続く現象」である ([1]). 反対に同海域で海面水温が平年より低くなる現象をラニーニャ現象という. また、エルニーニョ現象では赤道上の貿易風が平年よりも弱くなり, 反対にラニーニャ現象では平年より強くなる. これらは大気と海洋の相互作用によって発達したり, 消滅する。エルニーニョ現象による大気の循環は地球各地の気候に変化をもたらすため, 世界各国で異常気象を引き起こすとされている.
本研究では, このエルニーニョ現象及びラニーニャ現象に対して, 数理科学に関する専門性を気候変動現象の予測に生かすことにより, 予測の高精度化に貢献することを目標とする. エルニーニョ・ラニーニャ現象を記述する数理モデルの一つとして, 遅延振動子の方程式 ([2])

$$T(t) = aT(t) - bT(t+\tau) - T^3(t) \tag{1}$$

がある. ここで, $t > 0$ は時刻, T は平年からの水温のずれ, $\tau < 0$ は時間遅れを表し, $a, b > 0$ は定数である. T^3 はエルニーニョ現象の非線形性を表し, $T(t+\tau)$ は遅延反転フィードバックを表している. しかし, この遅延振動子の方程式は実際の観測データと照らし合わせると, かならずしも符合しているとは言えない. エルニーニョ現象では海面水温が 6 月から 9 月にかけて増大し, 10 月から 12 月に最大を迎えた後減衰していくという 1 年間での周期性がある. そこで, 遅延振動子の方程式 (1) の係数に季節性を組み込んだ次の方程式

$$T(t) = a\left[1 + \alpha \sin(2\pi t)\right] T(t) - b\left[1 + \alpha\sin(2\pi(t+\tau))\right] T(t+\tau) - T^3(t) \tag{2}$$

を考える. ここで, $\alpha > 0$ とする. この方程式は, 季節性の観点から (1) よりも実際の現象を反映しているものと考えられる.

2 遅延振動子の方程式の可解性について

この章では, 方程式 (2) の数学的な性質を見る. (2) の可解性に関連する結果を紹介する.
まず初めに, (2) を線形化した方程式

$$T(t) = a\left[1 + \alpha\sin(2\pi t)\right] T(t) - b\left[1 + \alpha\sin(2\pi(t-\tau))\right] T(t-\tau) \tag{3}$$

の可解性について考える. ただし, $\tau \in [-1, 0]$ とし, $T_\tau(t) = T(t+\tau)$, $U = (T, T_\tau)^T$ と置く. すると U は

$$\frac{d}{dt}U(t) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha\sin(2\pi t) & -b\left[1 + \alpha\sin(2\pi(t+\tau))\right] \\ 0 & \frac{d}{d\tau} \end{pmatrix}$$

を満たす. 一般に次の結果が知られている ([3]).

[1] kenf@ms.u-tokyo.ac.jp

補題 1 X を $Banach$ 空間, $B : X \to X$ を有界線形作用素, $\Phi : W^{1,p}([-1,0];X) \to X$ （$1 < p < \infty$, $W^{1,p}$ は $Sobolev$ 空間）を有界線形作用素とする．このとき

$$A = \begin{pmatrix} B & \Phi \\ 0 & \frac{d}{d\tau} \end{pmatrix} \tag{4}$$

は C^0 半群を生成し, その定義域は

$$D(A) = \left\{ U = (T, T_\tau)^T \in X \times L^p([-1,0];X) : T_0 = T \right\} \tag{5}$$

である．ただし, L^p はルベーグ空間である．

$t_0 > 0$ を固定する．この時, 補題 1 により,

$$\frac{d}{dt}U(t) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \sin(2\pi t_0) & -b\left[1 + \alpha \sin(2\pi(t_0 + \tau))\right] \\ 0 & \frac{d}{d\tau} \end{pmatrix}, \quad U(0) = U_0$$

に対して, $U \in C([0,T);\mathbb{R} \times L^p([-1,0];\mathbb{R}))$ となる解が作れる．ただし, $T > 0$ とする．あとは, Cauchy の折れ線法により (3) の解を構成することができる．
また, 方程式 (3) において, 右辺第 2 項の時間遅れを表す項は与えられた関数であるため, それを単なる外力と見なせる．方程式 (3) の右辺は T に関して局所 Lipschitz で t に関して有界かつなめらかなので, ある十分小さい時刻 $t_* > 0$ が存在して, (3)) の解 $T \in C([0,t_*);\mathbb{R})$ が存在することを縮小写像の原理によって示すことができる ([4][5]).

3 終わりに

本論文では, 主に線形化した遅延振動子の方程式の解や短時間での解の存在性について考察した．元のモデルが気象現象を表すものであること考慮すると, 周期解の存在性やその解の安定性に関係する問題も取り扱いたかったが, 時間遅れを含む方程式のそれらの話題に関連する文献を見つけることができず, 既存の手法などが分からなかったためできなかった．それらは今後の問題として考えていきたい．最後になるが, 資料を提供して頂いた東京大学理学系研究科の東塚知己先生, 東京大学数理科学研究科の柏原崇人先生に深謝する．また, 一緒に課題に取り組んでいただいた東京大学理学系研究科の木戸晶一郎さん, 高橋杏さん, 東京大学数理科学研究科の茅原涼平さん, 中井拳吾さんに感謝する．

参考文献

[1] 気象庁「エルニーニョ/ラニーニャ現象とは」
https://www.data.jma.go.jp/gmd/cpd/data/elnino/learning/faq/whatiselnino.html.
[2] D. S. Battistiand, A. C. Hirst, J. Atmos. Sci., 46, (1989)1687.
[3] A. Bátkai, S. Piazzera, Semigroups for delay equations. Research Notes in Mathematics, 10. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2005.
[4] 増田久弥, 発展方程式,1975, 紀伊国屋書店.
[5] 内田敏機, 原惟行, 日野義之, 宮崎倫子, タイムラグをもつ微分方程式, 牧野書房.