

数理科学実践研究レター 2019-4 November 28, 2019

レーシングカーの力学モデル

by

岩本 昌倫



**UNIVERSITY OF TOKYO**  
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES  
KOMABA, TOKYO, JAPAN

## レーシングカーの力学モデル

岩本昌倫<sup>1</sup> (東京大学大学院理学系研究科地球惑星科学専攻)

Masanori Iwamoto (Department of Earth and Planetary Science, Graduate School of Science,  
The University of Tokyo)

### 概要

レーシングカーの力学モデルを構築し、実測値と比較した。力学モデルに基づき重回帰分析を行った結果、直線の場合に限定されるが、モデルは実測値を精度良く説明できている。本モデルを用いることで、実際の走行タイムを理論的に推定することが可能となる。

## 1 序論

カーレースにおいて、走行タイムへの影響が考えられる要素は多岐にわたる。ブレーキ・アクセル・ハンドリングなどの操作技術やエンジン・タイヤ・重量などの車体性能に加え、天候や路面状況といった外的要因もあり、膨大なデータから走行タイムを決定づけるパラメータを判別するのは困難を極める。そこで本論文では、古典的運動方程式からレーシングカーの力学モデルを構築し、第一原理に基づいてパラメータを決定した。さらに重回帰分析を行うことで、本モデルが実測値を正しく再現できていることを確認する。

## 2 力学モデル

力学モデルの構築にあたって、車体を無視しタイヤのみを考える。また、すべてのタイヤを同一視し剛体だと仮定する。すなわち、一つの剛体円柱が転がっている状況を考える。さらに簡単のため、直進運動のみを考え、かつタイヤは空転しないと仮定する。このとき、運動方程式および束縛条件は以下ようになる [1]。

$$m \frac{dv}{dt} = f - \beta v^2 \quad (1)$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = T - rf \quad (2)$$

$$v = r\omega \quad (3)$$

ここで、 $m$  は車体の重量、 $v$  は速度、 $f$  は転がり抵抗、 $\beta$  は空気抵抗係数、 $I$  はタイヤの慣性モーメント、 $\omega$  はタイヤの角速度、 $T$  はタイヤに加わるトルク、 $r$  はタイヤの半径である。さらに、トルク  $T$  について以下のように仮定する。

$$T = g_1 g_2 T_E - T_B \quad (4)$$

ここで、 $g_1$  は減速比、 $g_2$  は変速比、 $T_E$  はエンジンによるトルク、 $T_B$  はブレーキによるトルクである。以上から  $f$  と  $\omega$  を消去すると、

$$a = \frac{rg_1}{mr^2 + I} g_2 T_E - \frac{r}{mr^2 + I} T_B - \frac{r^2 \beta}{mr^2 + I} v^2 \quad (5)$$

が得られる。ここで、 $a$  は加速度である。 $g_1$ 、 $r$ 、 $m$ 、 $I$ 、 $\beta$  は定数であるので、 $g_2$ 、 $T_E$ 、 $T_B$ 、 $v$  が説明変数となる。

<sup>1</sup>iwamoto@eps.s.u-tokyo.ac.jp

### 3 実測値との比較

実測値と比較するにあたって、 $T_E$  および  $T_B$  は直接計測していないため、別の実測値の関数になっていると仮定する。ここでは、 $T_E$  はエンジン回転数、 $T_B$  はブレーキ圧の線形関数になっていると仮定した。 $T_E$  の関数形については本来既知であるが、エンジン性能についての情報が今回は入手できなかったので上記の仮定を用いた。変速比  $g_2$  についても、データが入手できなかったのでギア数に反比例すると仮定した。ここでのギア数は、1速や2速といったいわゆる速度段のことを指す。最終的に、以下が得られる。ただし、 $c_1$ 、 $c_2$ 、 $c_3$  は定数である。

$$a = c_1 \times \frac{\text{エンジン回転数}}{\text{ギア数}} - c_2 \times \text{ブレーキ圧} - c_3 v^2 \quad (6)$$

本モデルは直線運動を仮定しているため、コーナリングの最中は正しく記述できない。そこで、横方向の加速度の大きさが  $2m/s^2$  以下の区間を直線運動をしている領域だと定義した。また、データのうち、いくつかのラップには暖機運転をしている区間等も含まれているため、それを除いたものを用いる。さらに、直線運動をしている領域のデータ数をできるだけ多くするために、コースの中で最も直線が長い区間を取りだして式 (6) を用いて重回帰分析を行う。

実際に重回帰分析から各係数を決定したうちの一例が図1である。上図は進行方向の加速度、下図は横方向の加速度の時間発展であり、黒い破線が回帰分析の結果である。68秒から78秒までの区間はよく一致していることがわかる。それ以外の区間は横方向の加速度が大きいことからコーナリングの最中であると考えられ、直線運動を仮定した本モデルでは原理的に記述できない領域である。

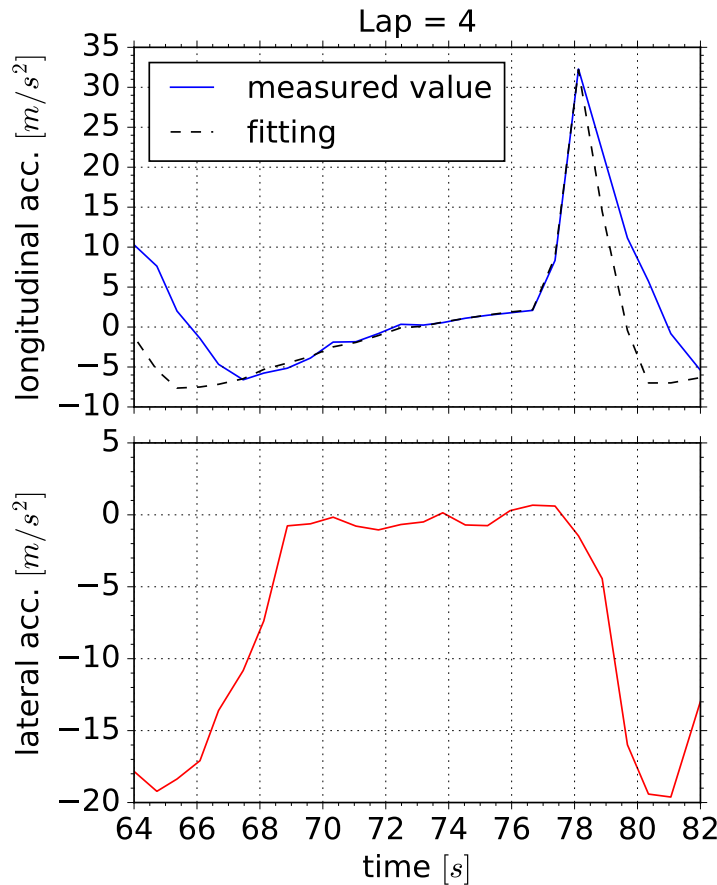


図1: 力学モデルと実測値の比較。上図は進行方向の加速度、下図は横方向の加速度の時間発展であり、黒い破線が重回帰分析結果。

各ラップに対して同様の解析を行った結果が表1である。どのラップに対しても決定係数は1に極め

て近く、非常に精度よくフィッティングできていることがわかる。ただし、 $c_1$  は他の定数に比べて分散が大きく、精度が落ちてしまっている。これは、エンジンのトルク  $T_E$  を線形関数だと仮定したことが要因の1つである。エンジンのトルクはエンジンの回転数の関数ではあるが、一般に線形にはならず、エンジンに固有の関数である。さらに、変速比  $g_1$  についてもギア数に単純に反比例はせず、これによるズレも影響を与えている。ただし、前述のようにこれらの関数形は本来既知であるので、これらの情報があれば重回帰分析の精度をさらに高めることができる。

Lap	$c_1$	$c_2$	$c_3$	決定係数
4	$3.4 \times 10^{-3}$	0.45	$2.4 \times 10^{-3}$	0.9988
8	$4.5 \times 10^{-3}$	0.42	$2.5 \times 10^{-3}$	0.9994
9	$6.4 \times 10^{-3}$	0.44	$2.8 \times 10^{-3}$	0.9993
12	$4.3 \times 10^{-3}$	0.42	$2.5 \times 10^{-3}$	0.9994
14	$3.9 \times 10^{-3}$	0.43	$2.3 \times 10^{-3}$	0.9993

表 1:  $c_1$ 、 $c_2$ 、 $c_3$  の重回帰分析結果

## 4 結論

本論文で提唱した力学モデルは実測値を正しく記述できており、本モデルから走行タイムを推定できることを示唆している。ただし、本モデルは直進時に限定されており、一般のコースで適用することはできない。コーナリング中には横滑りや車体の回転運動を考慮する必要があり、タイヤを同一視した本モデルでは正しく記述できない。事実、図1からわかるようにコーナリング中の実測値と本モデルは大きく乖離している。コーナリングも正しく記述できるモデルとしては、単純なものとしては2つのタイヤを剛体棒でつないだバイクのようなモデルが挙げられる。このようなモデルを構築できれば、走行タイムをより一般のコースで推定できるようになる。

## 5 謝辞

本課題を提供して頂いたアビームコンサルティング株式会社の皆様に感謝する。また、本研究に当たり多くの有益な助言を頂いた東京大学大学院数理科学研究科の田中雄一郎氏に感謝する。

## 参考文献

- [1] 藤原邦男, 「物理学序論としての力学」, 基礎物理学 1, 東京大学出版会, 1984.