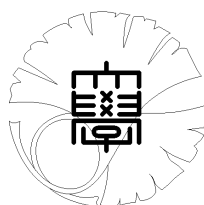


数理科学実践研究レター 2019–21 December 11, 2019

改良大森則に基づいた余震の待ち時間分布について

by

田森 宥好、矢野 良輔



UNIVERSITY OF TOKYO
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
KOMABA, TOKYO, JAPAN

改良大森則に基づいた余震の待ち時間分布について

田森宥好¹ (東京大学大学院数理科学研究科)

Hiroyoshi Tamori (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

矢野良輔² (東京海上日動リスクコンサルティング株式会社)

Ryosuke Yano (Tokio Marine and Nichido Risk Consulting Co., Ltd.)

概要

改良大森則を満たす余震発生のモデルを二つ与え、各モデルに於いて連続する余震間の待ち時間の分布がどのように解釈できるかを考察し、待ち時間分布の漸近挙動を比較する。本稿は [5] の extended abstract である。

1 導入

改良大森則とは、時刻 t での単位時間あたりの余震の回数 $\mathcal{N}(t)$ が

$$\mathcal{N}(t) = \frac{K}{(t+c)^p} [1/s] \quad (1)$$

で与えられるという経験則である。ここで各 K, c, p は本震やマグニチュード何以上のものを地震として数えるかに依存する正の定数である。

一方で友田 [6] によって、余震が起こってから次に余震が起こるまでの待ち時間が w となるような余震が起こる回数は Zipf-Mandelbrot 則に従うことが知られている。つまり、ある一定の時間幅 (例えば 60 秒) を固定し、時刻 0 から ∞ の間に起こる余震の内、待ち時間が各区間にあるような余震の回数 (例えば待ち時間が 60 秒以下の余震の回数, 60 秒より大きく 120 秒以下の余震の回数, 120 秒より大きく 180 秒以下の余震の回数, と続ける) を等間隔にプロットすると、そのグラフは

$$\mathcal{P}(w) = \frac{L}{(w+d)^q} [1/s] \quad (2)$$

の形をしている。ここで L, d, q は正の定数である。

本稿では改良大森則を満たすような二つの余震発生のモデル (elapsed time accumulation (ETA) モデルと nonhomogeneous Poisson process (NPP) モデル [3, 4]) を考え、待ち時間 w の余震の分布関数 $\mathcal{P}(w)$ をそれぞれのモデルで定式化する。さらに各モデルでの $\mathcal{P}(w)$ がどのような時に Zipf-Mandelbrot 則を漸近的に満たすかを考察し、その指数を比較する。

2 ETA モデル

$\mathcal{N}(t)[1/s]$ は単位時間あたりに地震を起こす“溜め”の量を表していると解釈し、“溜め”が 1 になったら余震が起こり、“溜め”は 0 に戻る、というモデルを考える。このモデルでは、時刻 t で余震が起こった時、次に余震が起こるまでの時間 $w(t)$ は次の式を満たす：

$$\int_t^{t+w(t)} \mathcal{N}(s) ds = 1. \quad (3)$$

以降の式の表示を簡単にするために

$$T := t + c, \quad A := (p - 1)/K$$

¹tamori@ms.u-tokyo.ac.jp

²ryosuke.yano@tokiorisk.co.jp

とおく。 A は p の値によっては負になることに注意する。この時、(1) を代入することにより、(3) は

$$\begin{cases} w(t) + T = Te^{1/K} & p = 1 \text{ のとき} \\ (w(t) + T)^{1-p} = T^{1-p} - A & p \neq 1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (4)$$

と書き直せる。

非負整数全体の集合を \mathbb{N} で表す。 $i \in \mathbb{N}$ に対して、 $t(i)$ を i 回目の余震が起こる時刻とする（ここで $t(0) = 0$ と仮定する）。すると $t(i+1) = t(i) + w(t(i))$ なので式 (4) から

$$t(i) = \begin{cases} c(e^{i/K} - 1) & p = 1 \text{ のとき} \\ (-Ai + c^{1-p})^{1/(1-p)} - c & p \neq 1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (5)$$

を得る。ここで t は $\{i \in \mathbb{N} \mid Ai < c^{1-p}\}$ を定義域を持つ実数値関数だが、式 (5) の表示によって $\{x \in \mathbb{R} \mid Ax < c^{1-p}\}$ を定義域を持つ関数へと拡張できる。ここで \mathbb{R} は実数全体の集合を表す。 $x \mapsto w \circ t(x)$ の逆関数を F とする。第一節で説明した、余震の待ち時間を測る時間間隔を Δt とする。この時、余震間隔に関する余震発生の頻度を表すグラフは、 $n \in \mathbb{N}$ に対して点

$$(n\Delta t, \#\{i \in \mathbb{N} \mid F((n-1)\Delta t) < i \leq F(n\Delta t)\})$$

をプロットしたものとなる。これは導関数 $F'(w)$ を Δt 倍したグラフ $\{(w, \Delta t F'(w)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid w \in \mathbb{R}\}$ を、格子点 $\mathbb{N}\Delta t \times \mathbb{N}$ で近似したものを見做せる。そこで、このモデルでは単位時間あたりに待ち時間 w の余震が起こる回数を

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(w) &:= F'(w)/[s] \\ &= \begin{cases} Kw^{-1} & p = 1 \text{ のとき} \\ KT^{-p}/\{(1 - AT^{p-1})^{p/(1-p)} - 1\} & p \neq 1 \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

によって定義する。ここで $p \neq 1$ のとき、 T は式 (4) によって定まる w の関数である。

t の代わりに T を用いることで、 $w(t)$ と $\mathcal{P}(w)$ の式 (4), (6) には定数 c が現れない。従ってこの $\mathcal{P}(w)$ の表示は c に依存しない。しかし余震は式 (5) の時刻 $t(1)$ 以降に起こるので、上記の $\mathcal{P}(w)$ の表示は c に依存する区間 $\{w \in \mathbb{R} \mid w \geq w(t(0)) = t(1)\}$ で成立し、この区間外では $\mathcal{P}(w) = 0$ なことに注意する。

$p = 1$ の場合に加えて、例えば $p = \frac{2}{3}$ の時にも式 (4) での $w(t)$ の逆関数を定数と四則演算と冪乗を使って表示できるので、十分大きな w に対して $\mathcal{P}(w)$ の具体的な表示

$$\mathcal{P}(w) = \frac{27K^3}{6 + \sqrt{324K^3w - 3}}$$

が得られる。 $p = \frac{2}{3}$ の例から分かるように、 $\mathcal{P}(w)$ は一般には Zipf-Mandelbrot 則を満たすとは限らない。しかし $w \rightarrow \infty$ とした時、式 (4), (6) とロピタルの定理 [2] を用いて、 $\mathcal{P}(w)$ はベキ則 (2) に漸近することが確かめられる。表 1 に各場合の漸近する関数を記した。

3 NPP モデル

このモデルでは、 $(t_1, t_2]$ の区間に $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{N}(s) ds$ 回余震が起こると考える。さらに、余震が他の余震に影響を与えないと仮定し、時刻 s の時点からみて区間 $(s+t, s+t+dt]$ で初めて余震が起こる確率を $f_s(t)dt$ とする。この時、

$$F_s(t) := \int_0^t f_s(u) du \quad (7)$$

は時刻 s の時点で区間 $(s, s+t]$ で一回は余震が起こる確率である。

$h \ll 1$ のとき、区間 $(s, s+h]$ で起こる余震の回数は $\mathcal{N}(s)h \ll 1$ で近似できる。一方、区間 $(s, s+h]$ で一回は余震が起こる確率は $f_s(0)h \ll 1$ で近似できる。さらに、区間 $(s, s+h]$ で余震は起きないか一回だけ起きると近似すると、 $\mathcal{N}(s)h \doteq f_s(0)h$ となる。この考察をもとに、本モデルでは

$$f_s(0) = \mathcal{N}(s) \quad (8)$$

によって単位時間あたりの余震回数を定義する。

余震が他の余震に影響を与えないという仮定から時刻 s の時点で区間 $(s+t, s+t+h]$ で初めて余震が起こる確率 $F_s(t+h) - F_s(t)$ は、時刻 s から t 秒間余震が起きず、時刻 t から h 秒の間に余震が起こる確率 $(1 - F_s(t))F_{s+t}(h)$ と等しい：

$$F_s(t+h) - F_s(t) = (1 - F_s(t))F_{s+t}(h). \quad (9)$$

(7), (8), (9) を用いると

$$f_s(t) = \mathcal{N}(s+t) \exp\left(-\int_s^{s+t} \mathcal{N}(u)du\right) \quad (10)$$

が得られる。

このモデルでは $\mathcal{P}(w)$ を、待ち時間 w の余震が起こる回数の密度関数と解釈する。区間 $(s, s+ds]$ で $\mathcal{N}(s)ds$ 回分の余震が起こり、その中で次に区間 $(s+w, s+w+dw]$ で初めて余震が起こるものの割合は $f_s(w)dw$ だったから、

$$\mathcal{P}(w) = \int_0^\infty \mathcal{N}(s)f_s(w)ds + f_0(w)$$

である。(1), (10) を用いて整理すると

$$\mathcal{P}(w) = K^2 \int_c^\infty s^{K-1}(s+w)^{-K-1}ds + Kc^K(t+c)^{-K-1}, \quad (p=1) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(w) = K^2 \int_c^\infty s^{-p}(s+w)^{-p} \exp\left(\frac{K}{1-p} \{s^{1-p} - (s+w)^{1-p}\}\right) ds \\ + K(w+c)^{-p} \exp\left(\frac{K}{1-p} \{c^{1-p} - (w+c)^{1-p}\}\right) \quad (p > 1/2, p \neq 1) \quad (12) \end{aligned}$$

を得る。ここで積分を絶対収束させるために $p > 1/2$ を仮定している。

$p > 1/2$ のもとで、 $\mathcal{P}(w)$ の $w \rightarrow \infty$ での漸近挙動は表 1 で与えられる。表の $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。この漸近挙動は式 (11), (12) において、 $p \geq 1$ の場合には積分と極限を交換することで得られ、 $1/2 < p < 1$ の場合にはラプラスの手法 [1] を用いて得られる。被積分関数の指数部分が $w \rightarrow \infty$ で収束するかどうかに応じて漸近挙動を求める手法が異なることに注意する。

4 考察

ETA モデルでは“溜め”が 1 になった瞬間に余震が必ず起こると仮定しており、全ての余震の起こる時刻が分かってしまう一方で、NPP モデルは余震が互いに影響を与えないと仮定しており、確率論的であるという点で、二つのモデルは対照的である。また、 $\mathcal{P}(w)$ の解釈も二つのモデルでは異なる。ETA モデルでは余震の順番に対してその待ち時間を与える関数を滑らかな関数へと拡張し、その逆関数の導関数を $\mathcal{P}(w)$ だと解釈していた一方で、NPP モデルでは $\mathcal{P}(w)dw$ を待ち時間が $(w, w+dw]$ の区間にある余震が起こる回数の密度関数と解釈している。

このように対照的なモデルであっても、一般には $\mathcal{P}(w)$ はそのままでは Zipf-Mandelbrot 則を満たさないが、適切な指数 p を考えれば $w \rightarrow \infty$ の時に漸近的には同則を満たすことが検証できた。さらに表 1 に見られるように、各モデルでの漸近する関数には以下のような共通点がある：

- $\mathcal{P}(w)$ が定義され、さらに極限が 0 に収束するために $p > 1/2$ を仮定する必要がある。

- $p \geq 1$ ならば, それぞれのモデルの $\mathcal{P}(w)$ は同じ関数に漸近する. $1/2 < p < 1$ でも p に依存する定数倍を除いて同じ関数に漸近する.
- $\mathcal{P}(w)$ の漸近する関数の指数は, p と 1 の大小によって異なる振る舞いをする.

これらの現象を観測データと照らし合わせて, 余震の発生原理に関する示唆が得られるかについて考察することは今後の課題である.

表 1: $\mathcal{P}(w)$ が $w \rightarrow \infty$ で漸近的に近づく関数

モデル	ETA ($p > 0$)	NPP ($p > 1/2$)
$p \leq 1$	$p^{-1} K^{1/p} w^{-2+1/p}$	$p^{-1} K^{1/p} \Gamma(2 - 1/p) w^{-2+1/p}$
$p \geq 1$	$K w^{-p}$	$K w^{-p}$

参考文献

- [1] A. Erdélyi, *Asymptotic expansions*, Dover Publications, Inc., New York, 1956. MR 0078494
- [2] S. Krantz, *A handbook of real variables*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004, With applications to differential equations and Fourier analysis. MR 2015447
- [3] T. Senshu, *On the time interval distribution of aftershocks*, *Zisin* **2** (1959), no. 12, 149–161.
- [4] R. Shcherbakov, G. Yakovlev, D. L. Turcotte, and J. B. Rundle, *Model for the distribution of aftershock interoccurrence times*, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005), no. 21, 218501.
- [5] H. Tamori and R. Yano, *Distribution of waiting time between two successive aftershocks from modified omori's law*, *EPL* **127** (2019), no. 6, 60005.
- [6] Y. Tomoda, *Statistical description of the time interval distribution of earthquakes and on its relations on the distribution of maximum amplitude*, *Zisin* **2** (1954), no. 7, 155–169.