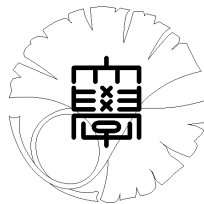


数理科学実践研究レター 2019–16 November 28, 2019

遅延振動子モデルの大域的挙動について

by

茅原 涼平



**UNIVERSITY OF TOKYO**  
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES  
KOMABA, TOKYO, JAPAN

# 遅延振動子モデルの大域的挙動について

茅原涼平<sup>1</sup> (東京大学大学院数理科学研究科)

Ryohei Chihara (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

## 概要

遅延振動子モデルとは、エルニーニョ・ラニーニャ現象の最も単純な数理モデルであり、時間遅れ  $d$  を含む 1 変数 1 階常微分方程式である。本研究では、このモデルに付随する力学系の初等的観察により、周期が  $2d$  か  $4d$  である振動解は存在しないことを示す。

## 1 はじめに

太平洋赤道域東部において海水温度が一定期間上昇する現象をエルニーニョ現象と呼び、反対に海水温度が一定期間低下する現象をラニーニャ現象と呼ぶ。この現象は世界各地に異常気象を引き起こすため、その理解を深めることは予測可能性の向上を通して社会にも貢献することが期待される。大気と海洋の相互作用により引き起こされると考えられているこの現象の最も単純なモデルである遅延振動子モデル [SS88] は、時間遅れ  $d$  を含む以下の 1 変数 1 階常微分方程式である：

$$\frac{dx}{dt} = -ax(t-d) + bx(t) - cx(t)^3. \quad (1)$$

ここで、 $a, b, c, d$  はすべて正の定数とする。右辺の各項について、 $-ax(t-d)$ ,  $+bx(t)$ ,  $-cx(t)^3$  はそれぞれロスビー波による反作用、ケルビン波による増幅作用、自家中毒の効果による反作用を表す。この遅延振動子モデル (1) に対して、周期的な振動解の存在が予想される一方で、その厳密な数学的記述は未だ未解明の部分が多い。そこで本研究では大域解の存在を認めて、その解の性質を、このモデルに付随する力学系の初等的観察に基づいて考察する。特に主結果として、周期  $2d$  か  $4d$  を持つ振動解の非存在を証明する (定理 1)。

一方で時間遅れを含む常微分方程式の振動解として典型的なものは

$$\frac{dx}{dt} = -x(t - \frac{\pi}{2})$$

の三角関数解  $x(t) = \sin(t)$  である。これは時間遅れ  $\pi/2$  の 4 倍の周期  $2\pi$  を持つ。遅延振動子モデル (1) をこの方程式の非線形項を付加することによる変形とみなすとき、主結果はこの変形によって存在が予想される振動解の周期が変わることを示している。

また遅延振動子モデルを、より現実に近い振る舞いをするように変形したモデル [BH89] の数値計算による観察が [Ume08] において行われている。特にそのようなモデルの解が (1) とは異なり、初期値鋭敏性を示すことが予想されている。

最後に、本論文の構成を述べる。まず第 2 節において、(1) の解の有界性を証明する。第 3 節では (1) のスケール変換に対する振る舞いについての注意を述べる。第 4 節で主結果を証明する。第 5 節ではまとめとして今後の課題を述べる。

## 謝辞

本研究を進めるにあたって、課題の提供や多くのアドバイスをいただいた、東塚知己先生、柏原崇人先生、数理科学実践研究グループの皆様に感謝いたします。

## 2 解の有界性

実関数  $x(t)$  を区間  $[0, \infty)$  で定義された (1) の解とする。

<sup>1</sup>rchihara@ms.u-tokyo.ac.jp

**命題 1** 解  $x(t)$  は有界であり,  $|x(t)| \leq \sqrt{\frac{a+b}{c}}$  を満たす.

**証明** 背理法で示す. 解  $x(t)$  が有界でないと仮定する. 先ず最大振幅  $A(t)$  を以下で定義する.

$$A(t) := \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s)|.$$

このとき仮定から, ある  $t_0 \in [0, \infty)$  で以下のいずれかを満たすものが取れる.

- 1)  $x(t_0) > \sqrt{\frac{a+b}{c}}$  かつ  $A(t_0) \leq x(t_0)$  かつ  $\frac{dx}{dt}(t_0) > 0$ .
- 2)  $x(t_0) < -\sqrt{\frac{a+b}{c}}$  かつ  $A(t_0) \leq -x(t_0)$  かつ  $\frac{dx}{dt}(t_0) < 0$ .

値  $t_0$  において 1) が成立しているとする. すると,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t_0) &\leq aA(t_0) + bx(t_0) - cx(t_0)^3 \\ &\leq (a+b)x(t_0) - cx(t_0)^3 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

ゆえに矛盾する. 2) の場合も同様である. このことから  $x(t)$  振幅が上記命題の範囲に制限されることもわかる. (証明終)

ゆえに (1) の解は定常解か振動解に近づいていくことが期待される.

### 3 スケール変換についての注意

正の定数  $\alpha, \beta > 0$  をとる. この定数を用いて  $x'(t') := \alpha x(\beta t')$  と置く.

**命題 2** 関数  $x(t)$  を (1) の解とする. このとき  $x'(t')$  は以下を満たす:

$$\frac{dx'}{dt'} = -a\beta x'(t' - \frac{d}{\beta}) + b\beta x'(t') - c\beta\alpha^{-2}x'(t'). \quad (2)$$

**証明**

$$\frac{dx'}{dt'} = \alpha\beta \frac{dx}{dt}(\beta t')$$

に (1) を代入し, 式を整理することで命題の式を得る. (証明終)

この命題から, 方程式 (2) は,  $\beta = d, \alpha \nearrow \infty$  のとき, 次の時間遅れを含む線形微分方程式

$$\frac{dx'}{dt'} = -adx'(t' - 1) + bdx'(t')$$

に近づいていくことが分かる.

### 4 周期 $2d$ あるいは $4d$ の振動解の非存在

この節では  $x(t)$  を数直線  $\mathbb{R}$  全体で定義された (1) の解とする. 解  $x(t)$  の周期を, 存在する場合には,  $x(t+p) = x(t)$  を満たす最小の正数  $p > 0$  と定義する. 周期を持つ解を振動解という. ここでは定常解を振動解から除外する.

**定理 1** 周期  $2d$  あるいは  $4d$  を持つ (1) の振動解は存在しない.

**証明** 第1段階: はじめに周期  $2d$  の振動解  $x(t)$  が存在しないことを示す. 背理法による. そのような解  $x(t)$  が存在すると仮定する. この時  $y(t) := x(t-d)$  とおくと  $(x, y)$  は平面  $\mathbb{R}^2$  上の次の力学系の周期解になっている:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -ay + bx - cx^3 \\ \frac{dy}{dt} &= -ax + by - cy^3.\end{aligned}$$

ここで  $x(t)$  は振動解という仮定からある  $t_0$  において  $x(t_0) = y(t_0)$  が成り立つ. すると上記力学系の解の一意性から結局  $x(t) = y(t)$  でなければならない. これは仮定と矛盾する. ゆえに周期  $2d$  の振動解は存在しない.

次の証明は [KY74] での議論を応用する. [KY74] では一定の条件下で微分方程式  $\frac{dx}{dt}(t) = -f(x(t-1))$  に周期 4 の解が存在することが, 方程式に付随する力学系の観察によって不動点定理を経由することなく示されている.

第2段階: 次に周期  $4d$  の振動解が存在しないことを背理法で示す. 関数  $x(t)$  を今度は周期  $4d$  の振動解とする. この時まず, (1) の右辺を  $f(x(t-d), x(t))$  と置くと,  $f(X, Y)$  が  $f(-X, -Y) = -f(X, Y)$  を満たすことと  $x(t-2d) = x(t+2d)$  が成立することから,  $x(t-2) = -x(t)$  が  $\mathbb{R}$  上で成立する. ここで  $y(t) := x(t-1)$  とおく. 上記の考察から  $(x(t), y(t))$  は  $\mathbb{R}^2$  上の次の力学系の周期解となる:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -ay + bx - cx^3 \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by - cy^3.\end{aligned}$$

ここで, 下の式の右辺の  $ax$  の符号が第1段階と逆になっていることに注意する. さて,  $\mathbb{R}^2$  上の関数  $V(x, y)$  を次で定義する:

$$V(x, y) := x^2 + y^2.$$

この時周期解の軌道上で

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= 2x(-ay + bx - cx^3) + 2y(ax + by - cy^3) \\ &= 2bV - 2c(x^4 + y^4).\end{aligned}$$

ここで  $(x(t), y(t))$  は仮定より周期解であったから,  $V(t)$  と  $x^4 + y^4$  は周期関数であり, 特に有界である. ゆえにある定数  $A > 0$  があり,

$$\frac{dV}{dt} > 2bV - A.$$

このことから  $t \nearrow \infty$  のとき  $V \nearrow \infty$  となり,  $V$  の有界性と矛盾する. ゆえに周期  $4d$  の (1) の振動解は存在しない. (証明終)

## 5 おわりに

本研究では, エルニーニョ・ラニーニャ現象の最も単純なモデルである遅延振動子モデル (1) の振動解の存在を認めて, その周期は時間おくれ  $d$  の 2 倍あるいは 4 倍とはなり得ないことを, モデルに付随する力学系の初等的観察によって示した. この結果は時間遅れを含む常微分方程式の典型的な例である三角関数が時間遅れの 4 倍の周期を持つことと比較すると興味深い. しかし実際に振動解が存在するのか, その周期の値はいくつか, 振動解の振幅や周期は (1) の  $a, b, c, d$  のパラメータにどのように依存するのか等の問題は依然未解決であり, 今後の課題である.

## 参考文献

- [BH89] D. Battisti and A. Hirst. Interannual variability in the tropical atmosphere-ocean system: influences of the basic state, ocean geometry and nonlinearity. *J. Atmos. Sci.*, 46 (1989), 1687-1712.
- [KY74] J. Kaplan and J. Yorke. Ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential delay equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 48 (1974), 317-324.
- [SS88] M. Suarez and P. Schopf. A delayed action oscillator for ENSO, *J. Atmos. Sci.*, 45 (1988), 3238-3287.
- [Ume08] 梅木誠. エルニーニョ現象に対する Battisti-Hirst 遅延振動子モデルの解析 (非線形波動現象の数理と応用), 数理解析研究所講究録, 1954 (2008), 159-165.