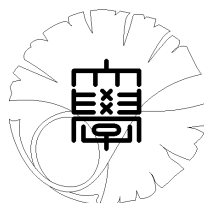


数理科学実践研究レター 2019–11 November 28, 2019

海洋波動における **WKB** 近似

by

高橋 杏、柏原 崇人、東塚 知己



UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

海洋波動における WKB 近似

高橋杏¹ (東京大学大学院理学系研究科地球惑星科学専攻)

Anne Takahashi (Department of Earth and Planetary Science, The University of Tokyo)

柏原崇人 (東京大学大学院数理科学研究科)

Takahito Kashiwabara (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

東塚知己 (東京大学大学院理学系研究科地球惑星科学専攻)

Tomoki Tozuka (Department of Earth and Planetary Science, The University of Tokyo)

概要

海洋物理学において、海洋波動の伝播・反射・屈折過程のシミュレーションに用いられる WKB 近似では、「媒質 (背景場) の空間変化がゆるやかである」ことを仮定している。しかしながら、この仮定は現実の海洋中で妥当であるとは限らない。そこで本論文では、WKB 近似の適用限界について最も簡単な例である浅水波を用いて考察する。

1 はじめに

海洋深層には、約 1500 年をかけて全球を一巡する深層海洋大循環が存在すると考えられている。この循環は、極域での海面冷却に伴う深層水形成と、深層水を表層へ引き上げる鉛直混合・拡散過程によって駆動されており、長い時間スケールでの気候変動に重要な影響を与えると考えられている [1]。鉛直混合・拡散過程は、主に潮汐流と地形の衝突等によって生じる海洋波動が砕波することで発生すると考えられており [2], 乱流混合過程とも呼ばれる。

乱流混合過程のシミュレーション手法の 1 つである “eikonal approach (ray-tracing) [3]” では、媒質 (背景場. ここでは密度場や水深等, 波動の性質に関わる物理量) が不均一な海洋中における波動の伝播・反射・屈折過程の計算に、「媒質の空間変化が十分にゆるやかである」ことを仮定した WKB 近似を使用する。しかしながら、このような仮定が現実の海洋中でどの程度妥当なのか、殆ど議論されていない。そこで本論文では、どの程度の媒質の空間変化に対して WKB 近似は適用可能なのか、最も簡単な海洋波動である浅水波を例にとって考察する。

2 浅水波方程式系における WKB 近似解

2.1 浅水波方程式系

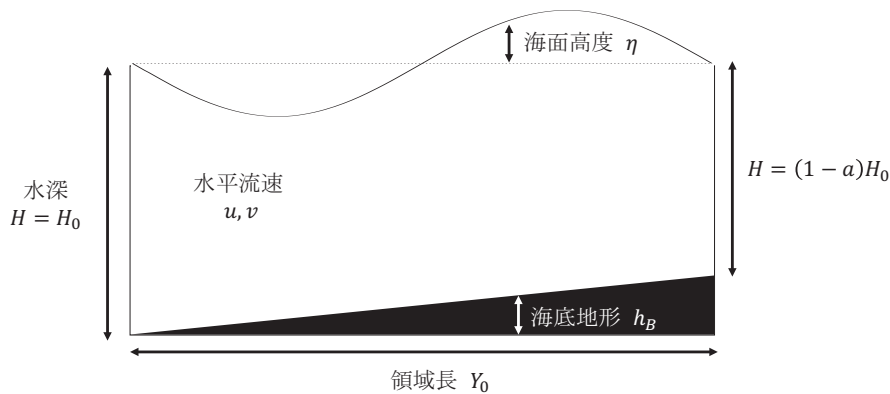


図 1: 浅水波方程式系の概略図.

¹anne@eps.s.u-tokyo.ac.jp

図1に示されるような、密度一様の海洋を考えることにする。海面高度 η と海底地形の高さ h_B を用いて、水深 H を

$$H = H_0 + \eta - h_B$$

のように表せる。水平スケール (波長) \gg 鉛直スケール (水深) であるような運動は、重力加速度 g を用いて、以下の浅水波方程式系で記述できる [3].

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\eta - h_B)}{\partial t} = -\nabla \cdot (H\mathbf{u}). \quad (3)$$

ここでは、水深が y のみに依存する下式で与えられる状況を考える。

$$H(y) = H_0 \left(1 - \frac{a}{Y_0} y\right). \quad (4)$$

式(1)を x で微分、式(2)を y で微分、式(3)を t で微分して整理すると、以下のような η についての関係式を導くことができる。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gH \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + g \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} \quad (5)$$

もしも $H = \text{const.}$ であれば、解は

$$\eta = \eta_0 \exp \{i(kx + ly - \omega t)\} \quad (6)$$

となり、以下の分散関係式が成立する。

$$\omega^2 = gH(k^2 + l^2). \quad (7)$$

2.2 WKB 近似解

水深 H が y 方向に変化する場合には、式(5)の解として(6)のような厳密解を明示的に導くことはできないが、WKB法を用いて近似解を計算することができる[4]。変数 x と t については波動解が成り立つと考え、下式

$$\eta = \hat{\eta}(y) \exp \{i(kx - \omega t)\}$$

を式(5)に代入すると、 $\hat{\eta}(y)$ についての常微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 \hat{\eta}}{dy^2} + \frac{H_y}{H} \frac{d\hat{\eta}}{dy} = - \left(\frac{\omega^2}{gH} - k^2 \right) \hat{\eta}. \quad (8)$$

ここで、 H_y は H の y に関する微分を表す。水深が変化する水平スケール (H/H_y) が波動の波長 ($1/l$) に比べて十分に大きい場合、微小量

$$\epsilon = \left| \frac{1}{l} \frac{H_y}{H} \right| \ll 1 \quad (9)$$

を用いて、 y と比べてゆっくり変化する変数 $y' = \epsilon y$ を導入できる。式(8)を y' についての常微分方程式に書き換えると、

$$\epsilon^2 \frac{d^2 \hat{\eta}}{dy'^2} + \epsilon^2 \frac{H_y}{H} \frac{d\hat{\eta}}{dy'} = - \left(\frac{\omega^2}{gH} - k^2 \right) \hat{\eta} \quad (10)$$

となる。

(10) のような常微分方程式には WKB 法が適用できると考えられるため、解の形を (一般に) 下式のように仮定することができる。

$$\hat{\eta}(y') \sim \exp(iQ(y')/\epsilon), \quad (11)$$

$$Q(y') \sim \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k Q_k(y'). \quad (12)$$

さらに、「基本的に進行波の形を維持しつつ振幅と位相が変化する」という物理的直感から

$$\hat{\eta}(y') \sim \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} i\epsilon^{k-1} Q_k(y')\right\} \exp(iQ_0/\epsilon)$$

のように Q_0 に関する項のみを特別に取り出し、

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Q_0}{\epsilon} \right) = \frac{\partial Q_0}{\partial y'} = l \quad (13)$$

のように Q_0 の y' 微分を波数 l と定義することにする。 Q_0 以外に関する項を漸近級数展開することで、下式が導ける。

$$\hat{\eta}(y') = \{\Psi_0 + (-i\epsilon)\Psi_1 + (-i\epsilon)^2\Psi_2 + \dots\} \exp(iQ_0/\epsilon) \quad (14)$$

式 (14) を式 (10) に代入し ϵ について同じ次数 (オーダー) の項同士を比べることにする。これが WKB 法である。

まずは $O(1)$ の項のみを取り出すと、

$$\omega^2 = gH(k^2 + l^2) \quad (15)$$

のように $l = \partial Q_0 / \partial y$ についての関係式が得られる。これは分散関係式 (7) と同じ形だが、 $H(y')$ が y' の関数であることに注意が必要である。 $\hat{\eta}$ は leading order では「 H が一定である場合の分散関係式」を局所的に満たす解であることがわかる。

次に $O(\epsilon)$ の項のみを取り出すと、

$$\Psi'_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{l} \frac{dl}{dy} + \frac{H_{y'}}{H} \right) \Psi_0$$

のように Ψ_0 についての関係式が得られる。積分定数 C_1 を用いて

$$\Psi_0 = \frac{C_1}{\sqrt{lH}}$$

のように解を決定できる。今回の問題設定のように“波の回折”が重要ではない場合には、 $O(\epsilon)$ までの近似で十分 [5] なので、 $\hat{\eta}$ の WKB 近似解は

$$\hat{\eta}(y') = \frac{C_1}{\sqrt{lH}} \exp\left\{i \int^{y'} l(t) dt\right\} \quad (16)$$

となる。

数値解との比較を行う上で、簡単のため $k = 0$ とすると、(15) より積分定数 C_2 を用いて

$$\begin{aligned} \int^{y'} l(t) dt &= \int^{y'} \sqrt{\frac{\omega^2}{gH_0(1 - \frac{a}{Y_0 t})}} dt \\ &= -\frac{2\omega Y_0}{\sqrt{gH_0 a}} \sqrt{1 - \frac{a}{Y_0} y'} + C_2. \end{aligned}$$

$y' = 0$ で位相が 0 となるように定めることにすると (境界条件に対応)、WKB 近似解は

$$\hat{\eta}(y') = \frac{C_1}{\sqrt{lH}} \exp\left\{i \frac{2\omega Y_0}{\sqrt{gH_0 a}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a}{Y_0} y'}\right)\right\} \quad (17)$$

となる。

3 WKB 近似の適用限界

3.1 数学的観点から

前章で導いた WKB 近似解は $\epsilon \ll 1$ である場合には厳密解に漸近するが、現実の海洋中では必ずしも $\epsilon \ll 1$ という条件が成り立っているわけではない。そこで本節では、 ϵ が大きい場合について考察を行い、WKB 近似の適用限界について議論する。

(i) $\epsilon \geq 1$ の場合

(11), (12) のような無限級数解を仮定しているため、解は発散してしまう。

(ii) $\epsilon < 1$ の場合

$\epsilon \ll 1$ の場合には、解 $\hat{\eta}$ は基本的に進行波の形を維持するため、(13) のように $\hat{\eta}$ の波数 l を定義できる。しかし $\epsilon \sim 1$ である場合には、

$$l = \frac{1}{i\hat{\eta}} \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial y} \sim \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Q_0}{\epsilon} \right)$$

が成り立たず、解 $\hat{\eta}$ が波動解から乖離してしまう。WKB 近似解における波数を

$$l_0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Q_0}{\epsilon} \right)$$

と定義すると、

$$l = \frac{1}{i\hat{\eta}} \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial y} = l_0 + \frac{\{\Psi'_0 + (-i\epsilon)\Psi'_1 + (-i\epsilon)^2\Psi'_2 + \dots\}}{i\{\Psi_0 + (-i\epsilon)\Psi_1 + (-i\epsilon)^2\Psi_2 + \dots\}}$$

のように表すことができるため、解 $\hat{\eta}$ の平面波解からのずれは、

$$\frac{l - l_0}{l_0} \sim \frac{\Psi'_0}{i\Psi_0 l_0} = \frac{\epsilon^2}{2i} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{k^2}{l_0^2} + 1 \right) \right\}$$

のように ϵ^2 に比例する形で評価できると考えられる。

3.2 物理的観点から

本節では、 ϵ が 1 に近づくとつれて WKB 近似解が厳密解からどれくらい乖離するのか調べるため、 ϵ を様々な値に変えたときの WKB 近似解 (17) と式 (10) を数値的に解いた解を比較する (図 2)。数値解の計算には 4 次のルンゲ-クッタ法を使用した。刻み幅 Δy を 10 m, 100 m, 1 km に変えても得られる解はほぼ同じであったことから、数値解は厳密解に十分収束していると考えられる。そのため、以下では数値解を厳密解とみなして議論する。

ϵ は式 (4), (9), (15) より

$$\epsilon \simeq \frac{aH_0\sqrt{g}}{\omega Y_0\sqrt{H}} \propto (Y_0\sqrt{H})^{-1}$$

と表すことができるため、本節では領域の長さ Y_0 のみを可変とし、 $a = 0.9$, $H_0 = 1$ km, $\omega = 10^{-3}$ cps で一定とした。

黒線で示される WKB 解と緑線で示される数値解は、 $\epsilon \sim 0.05, 0.2$ と小さいときにはほぼ一致する (図 2a, b) が、 $\epsilon \sim 0.5, 0.8$ と大きくなるにつれて乖離が大きくなる (図 2c, d)。

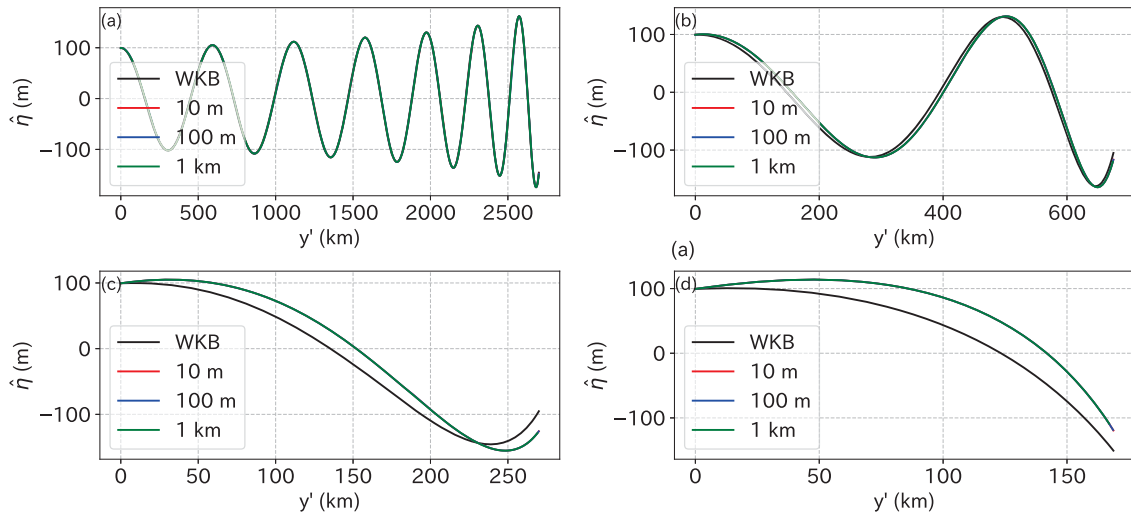


図 2: $\hat{\eta}(y')$ の WKB 近似解 (黒線) と数値解 (赤線: $\Delta y = 10$ m, 青線: $\Delta y = 100$ m, 緑線: $\Delta y = 1$ km) の比較. ただし (a) $\epsilon \sim 0.05$, (b) $\epsilon \sim 0.2$, (c) $\epsilon \sim 0.5$, (d) $\epsilon \sim 0.8$.

さらに, WKB 近似解の波長 Y_L は式 (15) より $Y_L = 2\pi l^{-1} \propto \sqrt{H}$ であることから, 波長 Y_L と領域長 Y_0 の比は

$$\frac{Y_L}{Y_0} = \epsilon \frac{2\pi H}{aH_0} \propto \epsilon$$

となり, ϵ が大きくなるにつれて領域内に含まれる波の数が少なくなることがわかる (図 2). 特に図 2c, d では, 領域内に波が 1 波長分も含まれておらず, そもそも解 $\hat{\eta}$ が「波動」として扱い難い状況になっている.

波が波長と振幅を変えながら伝播する様子は, 周波数解析手法の一種であるウェーブレット解析を用いて確認することができる. 図 3 には, $\epsilon \sim 0.05$ と $\epsilon \sim 0.8$ の 2 つのケースについて, WKB 近似解と数値解のそれぞれに対してウェーブレット解析を行うことで得られる, $\hat{\eta}$ の波数の y 方向の変化を示す.

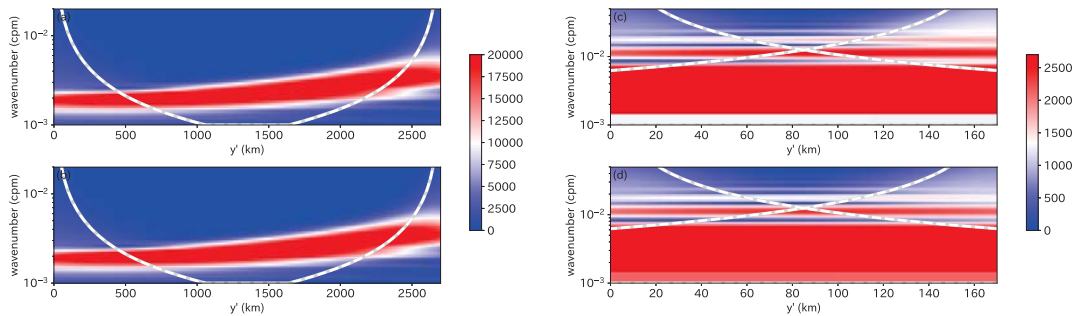


図 3: $\epsilon \sim 0.05$ での (a) WKB 近似解, (b) 数値解, $\epsilon \sim 0.8$ での (c) WKB 近似解, (d) 数値解 のウェーブレット・スペクトル. 図中の白色点線の上側の領域は “cone of influence” と呼ばれ, この範囲内でのスペクトル解析は有意である.

$\epsilon \sim 0.05$ では, WKB 近似解と数値解のスペクトルはほぼ一致しており, WKB 近似解の波数に対応するピークが見られる (図 3a, b). 一方 $\epsilon \sim 0.8$ では, 両者のスペクトルは大差ないように見えるが, いずれも卓越波数 (パワーを多く含む波数領域) が “cone of influence” (ウェーブレット変換の始点

と終点において解析結果に誤差を生じさせる端効果の影響を受けない範囲のこと。図3の白色点線の上側の領域。) 外にあることから、有意なスペクトル解析を行うにはデータ長が短すぎるのがわかる(図3c, d)。

これらの結果から、 ϵ が大きくなるにつれて WKB 近似解は厳密解から乖離するが、「WKB 近似が、波動を再現できなくなる」というよりは「領域長に対して波長が長すぎるために、厳密解が波動解とは呼べなくなる」という方が適当であるという知見が得られた。

4 おわりに

本論文では、最も簡単な海洋波動の例として、密度一様の海洋上に生じる浅水波について、WKB 近似解法の適用限界を議論した。深層海洋大循環を駆動する深海乱流混合では、密度成層がある海洋内部で浮力を復元力として生じる内部重力波の砕波が重要な役割を果たす。そのため、今後、内部重力波における WKB 近似解法の適用限界を議論することができれば、先行研究においてその使用が極めて理想的な状況に限られていた“eikonal approach (ray-tracing)”というシミュレーション手法を、より現実的な状況に適用することが可能になるかもしれない。比較的少ない計算機資源でシミュレーションを行える eikonal approach は、乱流混合強度を推定するためのパラメタリゼーションの構築にも使用されており、乱流パラメタリゼーションの精度が向上すれば、深層海洋大循環像の解明にまた一歩近づくであろう。

参考文献

- [1] 増田章 (1993), 海洋の深層大循環, 日本流体力学会誌「ながれ」, 1993, 12 巻, 4 号, doi: <https://doi.org/10.11426/nagare1982.12.369>
- [2] Munk, W. and C. Wunsch (1998). Abyssal recipes II: Energetics of tidal and wind mixing, *Deep Sea Res. I*, **45**, 1977-2010, doi: [https://doi.org/10.1016/S0967-0637\(98\)00070-3](https://doi.org/10.1016/S0967-0637(98)00070-3).
- [3] Henyey, F. S., J. Wright, and S. M. Flatté (1986). Energy and action flow through the internal wave field: An eikonal approach, *J. Geophys. Res.*, **91**, 8487-8495, doi: <https://doi.org/10.1029/JC091iC07p08487>.
- [4] Bühler, O. (2014), *Waves and Mean Flows* (Cambridge Monographs on Mechanics), Cambridge University Press, doi:10.1017/CBO9781107478701
- [5] 柴田正和 (2009), 漸近級数と特異摂動法 微分方程式の体系的近似解法, 森北出版.