数理科学実践研究レター 2018–6 July 19, 2018

平面結晶群に対応するオービフォールド上のラプラシアンのスペクトルについて

by

竹内有哉

UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

平面結晶群に対応するオービフォールド上のラプラシアンのスペクトルについて

竹内有哉[1]（東京大学大学院数理科学研究科）
Yuya Takeuchi (Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo)

概 要

結晶の対称性に関する数値的指標をスペクトル幾何的な観点から構成することを目標として，17 種類の平面結晶群に対して対応するオービフォールド上のラプラシアンの固有値と固有関数の計算を行なった．

1 本論文の目的

$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ を 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の等長変換群，$\Gamma \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ を平面結晶群とする．このとき商空間 $M_\Gamma = \Gamma\backslash\mathbb{R}^2$ は 2 次元オービフォールドの構造をもつ ([1])．また Γ が $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ の部分群であることから，M_Γ にも自然にリーマン計量が誘導される．このリーマン計量に関するラプラシアンの固有値は離散的であり，各固有空間は $C^\infty(M_\Gamma)$ 内の有限次元部分空間である ([2])．本論文の目的はこの固有値と固有空間の基底を各平面結晶群に対して具体的に記述することである．

2 計算方法

$\Gamma \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ を平面結晶群とする．このとき Γ 内の平行移動全体がなす部分群 $T(\Gamma)$ は $\mathbb{R}^2$ 内のランク 2 の格子をなす．さらに $T(\Gamma)$ は Γ の正規部分群であり，その商群 $R(\Gamma) = T(\Gamma)\backslash\Gamma$ は有限群となる ([3])．このことから，M_Γ は $M_{T(\Gamma)}$ の有限群 $R(\Gamma)$ による商空間とリーマン計量まで込めて同型となる．よって M_Γ 上の固有関数は $M_{T(\Gamma)}$ 上の $R(\Gamma)$ 不変な固有関数と同一視される．
次に $M_{T(\Gamma)}$ 上の固有関数を具体的に記述する．まずいくつか記号を準備する．

- $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\tau(\alpha, \beta) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ をベクトル (α, β) に関する平行移動で定める．
- $\theta \in \mathbb{R}$ に対し，$\rho(\theta) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ を原点中心の θ 回転の回転移動で定める．
- $\theta \in \mathbb{R}$ に対し，$\sigma(\theta) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ を原点と $(\cos\theta, \sin\theta)$ を通る直線に関する鏡映で定める．

記述の簡略化のため，$T(\Gamma)$ は $\tau(1, 0), \tau(\alpha, \beta)$ で生成されると仮定する．ただし $\beta > 0$ とする．このとき，$(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ に対し

$$f_{k,l} = \exp\{2\pi\sqrt{-1}[kx + \beta^{-1}(l - k\alpha)y]\} \tag{1}$$

は $M_{T(\Gamma)}$ 上の固有関数であり，その固有値は $\lambda_{k,l} = 4\pi^2[k^2+\beta^{-2}(l-k\alpha)^2]$ である．さらに $(f_{k,l})_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2}$ は $L^2(M_{T(\Gamma)})$ の直交基底をなす．以下ではこの $f_{k,l}$ の線形和によって $R(\Gamma)$ 不変な固有関数を記述する．

3 計算結果

この節では上で述べた議論を用いて，17 種類の各平面結晶群に対し，その具体的な表示 Γ を一つ固定して M_Γ の固有関数を記述する．

[1] ytake@ms.u-tokyo.ac.jp

3.1 斜方格子

3.1.1 p1

$$\Gamma = T(\Gamma) = \langle \tau(1,0), \tau(\alpha,\beta) \rangle$$

とする．$\Lambda = \mathbb{Z}^2$ とする．各 $(k,l) \in \Lambda$ に対し，

$$F_{k,l} = f_{k,l}$$

は固有値 $\lambda_{k,l}$ の固有関数であり，$(F_{k,l})_{(k,l)\in\Lambda}$ は $L^2(M_\Gamma)$ の直交基底である．

3.1.2 p2

$$\Gamma = \langle a = \tau(1,0), b = \tau(\alpha,\beta), r = \rho(\pi) \rangle$$

とする．このとき $a, b, r \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ は以下の関係式を満たす．

$$ab = ba, \quad r^2 = 1, \quad rar^{-1} = a^{-1}, \quad rbr^{-1} = b^{-1}.$$

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ を

$$\Lambda = \left\{ (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; l \geq 0,\, l = 0 \text{ ならば } k \geq 0 \right\}$$

で定める．各 $(k,l) \in \Lambda$ に対し，

$$F_{k,l} = f_{k,l} + f_{-k,-l}$$

は固有値 $\lambda_{k,l}$ の固有関数であり，$(F_{k,l})_{(k,l)\in\Lambda}$ は $L^2(M_\Gamma)$ の直交基底である．

3.2 直方格子

3.2.1 pm

$$\Gamma = \langle a = \tau(1,0), b = \tau(0,\beta), s = \sigma(0) \rangle$$

とする．このとき $a, b, s \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ は以下の関係式を満たす．

$$ab = ba, \quad s^2 = 1, \quad sas^{-1} = a \quad sbs^{-1} = b^{-1}.$$

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ を

$$\Lambda = \left\{ (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; l \geq 0 \right\}$$

で定める．各 $(k,l) \in \Lambda$ に対し，

$$F_{k,l} = f_{k,l} + f_{k,-l}$$

は固有値 $\lambda_{k,l}$ の固有関数であり，$(F_{k,l})_{(k,l)\in\Lambda}$ は $L^2(M_\Gamma)$ の直交基底である．

3.2.2 pg

$$\Gamma = \langle a = \tau(1,0), b = \tau(0,\beta), s = \sigma(0)\tau(1/2,0) \rangle$$

とする．このとき $a, b, s \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ は以下の関係式を満たす．

$$ab = ba, \quad s^2 = a, \quad sas^{-1} = a, \quad sbs^{-1} = b^{-1}.$$

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ を

$$\Lambda = \left\{ (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; l \geq 0,\, l = 0 \text{ ならば } k \text{ は偶数} \right\}$$

で定める．各 $(k,l) \in \Lambda$ に対し，

$$F_{k,l} = f_{k,l} + e^{\pi\sqrt{-1}k} f_{k,-l}$$

は固有値 $\lambda_{k,l}$ の固有関数であり，$(F_{k,l})_{(k,l)\in\Lambda}$ は $L^2(M_\Gamma)$ の直交基底である．

3.2.3 pmm

$$\Gamma = \langle a = \tau(1,0), b = \tau(0,\beta), r = \rho(\pi), s = \sigma(0) \rangle$$

とする．このとき $a, b, r, s \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ は以下の関係式を満たす．

$$\begin{gathered} ab = ba, \quad r^2 = 1, \quad rar^{-1} = a^{-1}, \quad rbr^{-1} = b^{-1}, \\ s^2 = 1, \quad sas^{-1} = a, \quad sbs^{-1} = b^{-1}, \quad (rs)^2 = 1. \end{gathered}$$

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ を

$$\Lambda = \left\{ (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; k, l \geq 0 \right\}$$

で定める．各 $(k,l) \in \Lambda$ に対し，

$$F_{k,l} = f_{k,l} + f_{-k,l} + f_{k,-l} + f_{-k,-l}$$

は固有値 $\lambda_{k,l}$ の固有関数であり，$(F_{k,l})_{(k,l)\in\Lambda}$ は $L^2(M_\Gamma)$ の直交基底である．

3.2.4 pmg

$$\Gamma = \langle a = \tau(1,0), b = \tau(0,\beta), r = \rho(\pi), s = \sigma(0)\tau(0,\beta/2) \rangle$$

とする．このとき $a, b, r, s \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ は以下の関係式を満たす．

$$\begin{gathered} ab = ba, \quad r^2 = 1, \quad rar^{-1} = a^{-1}, \quad rbr^{-1} = b^{-1}, \\ s^2 = 1, \quad sas^{-1} = a, \quad sbs^{-1} = b^{-1}, \quad (rs)^2 = b. \end{gathered}$$

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ を

$$\Lambda = \left\{ (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; k, l \geq 0,\, k = 0 \text{ ならば } l \text{ は偶数} \right\}$$

で定める．各 $(k,l) \in \Lambda$ に対し，

$$F_{k,l} = f_{k,l} + f_{-k,-l} + e^{\pi\sqrt{-1}l}(f_{k,-l} + f_{-k,l})$$

は固有値 $\lambda_{k,l}$ の固有関数であり，$(F_{k,l})_{(k,l)\in\Lambda}$ は $L^2(M_\Gamma)$ の直交基底である．

3.2.5 pgg

$$\Gamma = \langle a = \tau(1,0), b = \tau(0,\beta), r = \rho(\pi), s = \sigma(0)\tau(1/2,\beta/2) \rangle$$

とする．このとき $a, b, r, s \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ は以下の関係式を満たす．

$$\begin{gathered} ab = ba, \quad r^2 = 1, \quad rar^{-1} = a^{-1}, \quad rbr^{-1} = b^{-1}, \\ s^2 = a, \quad sas^{-1} = a, \quad sbs^{-1} = b^{-1}, \quad (rs)^2 = b. \end{gathered}$$

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ を

$$\Lambda = \left\{ (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; k, l \geq 0,\ k = 0 \text{ ならば } l \text{ は偶数},\ l = 0 \text{ ならば } k \text{ は偶数} \right\}$$

で定める．各 $(k,l) \in \Lambda$ に対し，

$$F_{k,l} = f_{k,l} + f_{-k,-l} + e^{\pi\sqrt{-1}(k+l)}(f_{k,-l} + f_{-k,l})$$

は固有値 $\lambda_{k,l}$ の固有関数であり，$(F_{k,l})_{(k,l)\in\Lambda}$ は $L^2(M_\Gamma)$ の直交基底である．

3.3 菱形格子

3.3.1 cm

$$\Gamma = \langle a = \tau(1,0), b = \tau(\cos 2\theta, \sin 2\theta), s = \sigma(\theta) \rangle$$

とする．ただし $0 < \theta < \pi/2$ である．このとき $a, b, s \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ は以下の関係式を満たす．

$$ab = ba, \quad s^2 = 1, \quad sas^{-1} = b, \quad sbs^{-1} = a.$$

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ を

$$\Lambda = \left\{ (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; k \geq l \right\}$$

で定める．各 $(k,l) \in \Lambda$ に対し，

$$F_{k,l} = f_{k,l} + f_{l,k}$$

は固有値 $\lambda_{k,l}$ の固有関数であり，$(F_{k,l})_{(k,l)\in\Lambda}$ は $L^2(M_\Gamma)$ の直交基底である．

3.3.2 cmm

$$\Gamma = \langle a = \tau(1,0), b = \tau(\cos 2\theta, \sin 2\theta), r = \rho(\pi), s = \sigma(\theta) \rangle$$

とする．ただし $0 < \theta < \pi/2$ である．このとき $a, b, r, s \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ は以下の関係式を満たす．

$$\begin{gathered} ab = ba, \quad r^2 = 1, \quad rar^{-1} = a^{-1}, \quad rbr^{-1} = b^{-1}, \\ s^2 = 1, \quad sas^{-1} = b, \quad sbs^{-1} = a, \quad (rs)^2 = 1. \end{gathered}$$

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ を

$$\Lambda = \left\{ (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; k \geq |l|,\ k = -l \text{ ならば } k = l = 0 \right\}$$

で定める．各 $(k,l) \in \Lambda$ に対し，

$$F_{k,l} = f_{k,l} + f_{l,k} + f_{-k,-l} + f_{-l,-k}$$

は固有値 $\lambda_{k,l}$ の固有関数であり，$(F_{k,l})_{(k,l)\in\Lambda}$ は $L^2(M_\Gamma)$ の直交基底である．

3.4 正方格子

3.4.1 p4

$$\Gamma = \langle a = \tau(1,0), b = \tau(0,1), r = \rho(\pi/2) \rangle$$

とする．このとき $a, b, r \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ は以下の関係式を満たす．

$$ab = ba, \quad r^4 = 1, \quad rar^{-1} = b, \quad rbr^{-1} = a^{-1},$$

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ を

$$\Lambda = \left\{ (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; k, l \geq 0,\ k = 0 \text{ ならば } l = 0 \right\}$$

で定める．各 $(k,l) \in \Lambda$ に対し，

$$F_{k,l} = f_{k,l} + f_{l,-k} + f_{-k,-l} + f_{-l,k}$$

は固有値 $\lambda_{k,l}$ の固有関数であり，$(F_{k,l})_{(k,l)\in\Lambda}$ は $L^2(M_\Gamma)$ の直交基底である．

3.4.2 p4m

$$\Gamma = \langle a = \tau(1,0), b = \tau(0,1), r = \rho(\pi/2), s = \sigma(0) \rangle$$

とする．このとき $a, b, r, s \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ は以下の関係式を満たす．

$$ab = ba, \quad r^4 = 1, \quad rar^{-1} = b, \quad rbr^{-1} = a^{-1},$$
$$s^2 = 1, \quad sas^{-1} = a, \quad sbs^{-1} = b^{-1}, \quad (rs)^2 = 1.$$

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ を

$$\Lambda = \left\{ (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; 0 \leq l \leq k \right\}$$

で定める．各 $(k,l) \in \Lambda$ に対し，

$$F_{k,l} = f_{k,l} + f_{l,-k} + f_{-k,-l} + f_{-l,k} + f_{k,-l} + f_{l,k} + f_{-k,l} + f_{-l,-k}$$

は固有値 $\lambda_{k,l}$ の固有関数であり，$(F_{k,l})_{(k,l)\in\Lambda}$ は $L^2(M_\Gamma)$ の直交基底である．

3.4.3 p4g

$$\Gamma = \langle a = \tau(1,0), b = \tau(0,1), r = \rho(\pi/2), s = \sigma(0)\tau(1/2,-1/2) \rangle$$

とする．このとき $a, b, r, s \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ は以下の関係式を満たす．

$$ab = ba, \quad r^4 = 1, \quad rar^{-1} = b, \quad rbr^{-1} = a^{-1},$$
$$s^2 = a, \quad sas^{-1} = a, \quad sbs^{-1} = b^{-1}, \quad (rs)^2 = 1.$$

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ を

$$\Lambda = \left\{ (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; 0 \leq l \leq k,\ l = 0 \text{ ならば } k \text{ は偶数} \right\}$$

で定める．各 $(k,l) \in \Lambda$ に対し，

$$F_{k,l} = f_{k,l} + f_{l,-k} + f_{-k,-l} + f_{-l,k} + e^{\pi\sqrt{-1}(k+l)}(f_{l,k} + f_{k,-l} + f_{-l,-k} + f_{-k,l})$$

は固有値 $\lambda_{k,l}$ の固有関数であり，$(F_{k,l})_{(k,l)\in\Lambda}$ は $L^2(M_\Gamma)$ の直交基底である．

3.5　六角格子

3.5.1　p3

$$\Gamma = \langle a = \tau(1,0), b = \tau(1/2, \sqrt{3}/2), r = \rho(2\pi/3) \rangle$$

とする．このとき $a, b, r \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ は以下の関係式を満たす．

$$ab = ba, \quad r^3 = 1, \quad rar^{-1} = a^{-1}b, \quad rbr^{-1} = a^{-1}.$$

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ を

$$\Lambda = \left\{ (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; k \geq 0,\, k \geq l,\, k = 0 \text{ ならば } l = 0 \right\}$$

で定める．各 $(k,l) \in \Lambda$ に対し，

$$F_{k,l} = f_{k,l} + f_{-k+l,-k} + f_{-l,k-l}$$

は固有値 $\lambda_{k,l}$ の固有関数であり，$(F_{k,l})_{(k,l)\in\Lambda}$ は $L^2(M_\Gamma)$ の直交基底である．

3.5.2　p3m1

$$\Gamma = \langle a = \tau(1,0), b = \tau(1/2, \sqrt{3}/2), r = \rho(2\pi/3), s = \sigma(\pi/6) \rangle$$

とする．このとき $a, b, r, s \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ は以下の関係式を満たす．

$$ab = ba, \quad r^3 = 1, \quad rar^{-1} = a^{-1}b, \quad rbr^{-1} = a^{-1},$$
$$s^2 = 1, \quad sas^{-1} = b, \quad sbs^{-1} = a, \quad (rs)^2 = 1.$$

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ を

$$\Lambda = \left\{ (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; 0 \leq l \leq k \right\}$$

で定める．各 $(k,l) \in \Lambda$ に対し，

$$F_{k,l} = f_{k,l} + f_{-k+l,-k} + f_{-l,k-l} + f_{l,k} + f_{-k,-k+l} + f_{k-l,-l}$$

は固有値 $\lambda_{k,l}$ の固有関数であり，$(F_{k,l})_{(k,l)\in\Lambda}$ は $L^2(M_\Gamma)$ の直交基底である．

3.5.3　p31m

$$\Gamma = \langle a = \tau(1,0), b = \tau(1/2, \sqrt{3}/2), r = \rho(2\pi/3), s = \sigma(0) \rangle$$

とする．このとき $a, b, r, s \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ は以下の関係式を満たす．

$$ab = ba, \quad r^3 = 1, \quad rar^{-1} = a^{-1}b, \quad rbr^{-1} = a^{-1},$$
$$s^2 = 1, \quad sas^{-1} = a, \quad sbs^{-1} = ab^{-1}, \quad (rs)^2 = 1.$$

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ を

$$\Lambda = \left\{ (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; k \leq 2l,\, l \leq 2k \right\}$$

で定める．各 $(k,l) \in \Lambda$ に対し，

$$F_{k,l} = f_{k,l} + f_{-k+l,-k} + f_{-l,k-l} + f_{k,k-l} + f_{-k+l,l} + f_{-l,-k}$$

は固有値 $\lambda_{k,l}$ の固有関数であり，$(F_{k,l})_{(k,l)\in\Lambda}$ は $L^2(M_\Gamma)$ の直交基底である．

3.5.4 p6

$$\Gamma = \langle a = \tau(1,0), b = \tau(1/2, \sqrt{3}/2), r = \rho(\pi/3) \rangle$$

とする．このとき $a, b, r \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ は以下の関係式を満たす．

$$ab = ba, \quad r^6 = 1, \quad rar^{-1} = b, \quad rbr^{-1} = a^{-1}b.$$

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ を

$$\Lambda = \left\{ (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; 0 \le l \le k,\ l = 0 \text{ ならば } k = 0 \right\}$$

で定める．各 $(k,l) \in \Lambda$ に対し，

$$F_{k,l} = f_{k,l} + f_{l,-k+l} + f_{-k+l,-k} + f_{-k,-l} + f_{-l,k-l} + f_{k-l,k}$$

は固有値 $\lambda_{k,l}$ の固有関数であり，$(F_{k,l})_{(k,l)\in\Lambda}$ は $L^2(M_\Gamma)$ の直交基底である．

3.5.5 p6m

$$\Gamma = \langle a = \tau(1,0), b = \tau(1/2, \sqrt{3}/2), r = \rho(\pi/3), s = \sigma(\pi/6) \rangle$$

とする．このとき $a, b, r \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ は以下の関係式を満たす．

$$\begin{gathered} ab = ba, \quad r^6 = 1, \quad rar^{-1} = b, \quad rbr^{-1} = a^{-1}b, \\ s^2 = 1, \quad sas^{-1} = b, \quad sbs^{-1} = a, \quad (rs)^2 = 1. \end{gathered}$$

$\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ を

$$\Lambda = \left\{ (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; l \le k \le 2l \right\}$$

で定める．各 $(k,l) \in \Lambda$ に対し，

$$\begin{aligned} F_{k,l} =& f_{k,l} + f_{l,-k+l} + f_{-k+l,-k} + f_{-k,-l} + f_{-l,k-l} + f_{k-l,k} \\ &+ f_{k,k-l} + f_{l,k} + f_{-k+l,l} + f_{-k,-k+l} + f_{-l,-k} + f_{k-l,l} \end{aligned}$$

は固有値 $\lambda_{k,l}$ の固有関数であり，$(F_{k,l})_{(k,l)\in\Lambda}$ は $L^2(M_\Gamma)$ の直交基底である．

4 謝辞

多くの有益な助言をくださった中川淳一，若林泰央，石井隆志，大井雅雄，今野北斗，若月駿の各氏に感謝いたします．

参考文献

[1] 河野俊丈, 『結晶群』, 共立講座 数学探検 第 7 巻, 共立出版, 2015.

[2] Donnelly, H., Asymptotic expansions for the compact quotients of properly discontinuous group actions, *Illinois J. Math.*, Vol. 23, No. 3, pp 485–496, 1979.

[3] Farkas, D. R., Crystallographic groups and their mathematics, *Rocky Mountain J. Math.*, Vol. 11, No. 4, pp 511–551, 1981.