数理科学実践研究レター　2018–11 August 20, 2018

磁気流体緩和法の数学解析

by

三浦達彦

UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

磁気流体緩和法の数学解析

三浦達彦[*1] (MIURA Tatsu-Hiko)
東京大学大学大学院数理科学研究科
(Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo)

概要

太陽フレアの予測に関する磁気流体緩和法 [3] の数学解析を行い, モデルの修正などの提案を行った. 特に, モデルとなる磁気流体型の方程式では磁場の発散のコントロールが困難であることを数学的観点から指摘し, その困難を回避するような修正方程式を提案した.

1 導入

太陽フレアは太陽系最大の爆発現象であり, X 線放射や高エネルギー粒子の放出などを伴うため人工衛星や宇宙飛行士, さらには地球上の発電所などにも多大な被害を及ぼす可能性がある. そのため太陽フレア発生を予測することは非常に重要な課題であるが, その発生原因である太陽コロナの高エネルギー磁場を直接測定することは困難である. 一方太陽表面の磁場は観測可能であるため, 観測された太陽表面の磁場から太陽上空のコロナにおける磁場を推定する手法がいくつか提案されており, そのひとつに Inoue et al. [3] による磁気流体緩和法がある. この手法では太陽表面 Γ_b での観測磁場から初期値と境界値を構成し, 太陽上空 Ω の磁場を次の磁気流体型方程式を用いて計算する：

$$
(1.1)\qquad \begin{cases} \partial_t v + (v\cdot\nabla)v = \dfrac{1}{\rho} j\times B + \nu\Delta v & \text{in} \quad \Omega\times(0,T), \\ \partial_t B = \nabla\times(v\times B - \eta j) - \nabla\phi & \text{in} \quad \Omega\times(0,T), \\ j = \nabla\times B & \text{in} \quad \Omega\times(0,T), \\ \partial_t\phi + c_h^2\nabla\cdot B = -\dfrac{c_h^2}{c_p^2}\phi & \text{in} \quad \Omega\times(0,T). \end{cases}
$$

ここで $v=(v_1,v_2,v_3)$ は太陽上空に存在するプラズマの速度, $B=(B_1,B_2,B_3)$ は太陽上空の磁場, j は電流, ϕ は磁場の発散のコントロールに係るダミー変数であり, (1.1) は (v,B,j,ϕ) に関する方程式系（実質的には (v,B,ϕ) に関する方程式系）である. また, ρ はプラズマの密度, η は抵抗係数であり, 数値計算の都合上これらの係数は v と B の関数となっている. さらに ν は粘性係数, c_h および c_p は移流および拡散の速度を表す定数である. 実際の数値計算においては, 太陽上空 Ω を 3 次元の直方体, 太陽表面 Γ_b を直方体の底面として, Γ_b 上で観測された磁場 $B_{\mathrm{obs}}=(B^1_{\mathrm{obs}},B^2_{\mathrm{obs}},B^3_{\mathrm{obs}})$ を用いて次のように初期条件と境界条件を与える.

- 初期条件：

$$
(1.2)\qquad v=0,\quad B=B_{\mathrm{pot}},\quad \phi=0 \quad \text{in} \quad \Omega.
$$

ここで $B_{\mathrm{pot}}=(B^1_{\mathrm{pot}},B^2_{\mathrm{pot}},B^3_{\mathrm{pot}})$ はポテンシャル磁場, すなわち方程式

$$
\Delta f = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^2\times(0,\infty), \quad \partial_3 f = -B^3_{\mathrm{obs}} \quad \text{at} \quad x_3=0
$$

[*1] e-mail: `thmiura@ms.u-tokyo.ac.jp`

（∂_3 は x_3 に関する偏微分）を満たす関数 f を用いて $B_{\mathrm{pot}} = \nabla f$ と表される磁場である．

- 境界条件：速度とダミー変数に対する境界条件は

$$v = 0, \quad \partial_n \phi = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,T). \tag{1.3}$$

ここで $\partial_n \phi$ は境界における ϕ の外向き法線方向への微分である．また磁場の境界条件は

$$B = \gamma B_{\mathrm{obs}} + (1-\gamma) B_{\mathrm{pot}} \quad \text{on} \quad \Gamma_b \times (0,T), \quad B = B_{\mathrm{pot}} \quad \text{on} \quad \partial\Omega \setminus \Gamma_b \times (0,T). \tag{1.4}$$

ここで $\gamma = \gamma(t)$ は $\gamma(0) = 0$ かつ $[0,T]$ 上 $\gamma \in [0,1]$ を満たす単調増加関数であり，その増加の程度は数値計算による磁場の変化の度合いを基に逐次的に設定する．

本研究では上記の磁気流体緩和法について数学解析を行い，モデルの修正などの提案を行った．以下その概要を説明する．

2 モデル方程式の数学解析

磁気流体緩和法 (1.1)–(1.4) を数学的に取り扱うことは以下の理由により非常に困難である．

- 非圧縮条件 $\operatorname{div} v = 0$ が課されていない状況で流体方程式に移流項 $(v \cdot \nabla) v$ が含まれている．
- 方程式の係数 ρ, η が v と B の関数である．
- 磁場の境界値が底面 Γ_b の辺上で不連続になる可能性がある．

このような困難を回避するため，移流項 $(v \cdot \nabla) v$ を無視して係数 ρ, η を定数とした方程式を考察することにした．具体的には立方体 $\Omega = (0,1)^3$ における次の磁気流体型方程式を考える：

$$\begin{cases} \partial_t v = \dfrac{1}{\rho} (\nabla \times B) \times B + \nu \Delta v & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ \partial_t B = \nabla \times (v \times B - \eta \nabla \times B) - \nabla \phi & \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ \partial_t \phi = -c_h^2 \nabla \cdot B - \dfrac{c_h^2}{c_p^2} \phi & \text{in} \quad \Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで，ρ, ν, η, c_h, および c_p は定数とし，電流 j に関する方程式 $j = \nabla \times B$ を用いて (v, B, j, ϕ) に関する方程式系を (v, B, ϕ) に関する方程式系に書き直している．また，初期条件は

$$v = 0, \quad B = B_0, \quad \phi = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{2.2}$$

境界条件は

$$\begin{gathered} v,\ B,\ \text{および}\ \phi\ \text{は}\ x_1 \in [0,1]\ \text{および}\ x_2 \in [0,1]\ \text{について周期的}, \\ v = 0, \quad B = B_b, \quad \partial_n \phi = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_3 \times (0,T) \end{gathered} \tag{2.3}$$

とする．ただし $\Gamma_3 = [0,1]^2 \times \{0,1\}$ は立方体 Ω の上面と底面の和集合であり，$B_0 \colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ および $B_b \colon \Gamma_3 \times (0,T) \to \mathbb{R}^3$ は与えられたベクトル場とする．我々は上記の修正された初期値境界値問題 (2.1)–(2.3) について，ガレルキン法 [1, 2] により弱解（方程式に対応する積分等式を満たす関数）の構成を試みた．ガレルキン法では以下の手順により方程式の弱解を構成する．

(1) 基底関数の有限線形和により (2.1)–(2.3) の近似解 (v_N, B_N, ϕ_N), $N = 1, 2, \ldots$ を構成する.
(2) 適切な関数空間における近似解 (v_N, B_N, ϕ_N) の評価（エネルギー評価）を導く.
(3) 近似解の列 $\{(v_N, B_N, \phi_N)\}_{N=1}^{\infty}$ から適切な関数空間内で収束する部分列を取り, その極限が方程式 (2.1)–(2.3) の弱解であることを示す.

実際に上記の方法によって弱解の構成を試みたところ, 手順 (2) で磁場の発散 $\nabla \cdot B_N$ に対する適切な評価を得られず, 近似解 (v_N, B_N, ϕ_N) のエネルギー評価が導出できないことが分かった.

ガレルキン法において磁場の発散を評価できない原因は, 磁場の発散をコントロールする発展方程式の構造が元の磁場の方程式と異なるためである. 方程式 (2.1) の第 2 式と第 3 式から, 磁場の発散の時間発展に関する次の消散型波動方程式を得る：

$$\partial_t^2(\nabla \cdot B) + \frac{c_h^2}{c_p^2}\partial_t(\nabla \cdot B) - c_h^2 \Delta(\nabla \cdot B) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0, T). \tag{2.4}$$

この方程式は双曲型方程式であり, 放物型方程式である磁場の方程式とはその数学的構造が異なる. このように数学的構造の異なる方程式が現れたため, 本研究でのガレルキン法による弱解構成では近似解のエネルギー評価を導出することができなくなってしまったのである.

3 修正方程式の提案

第 2 節で述べたように, 方程式 (2.1) は数学的構造の異なる方程式 (2.4) を内包しておりその取扱いは困難である. そこで我々は磁場の発散をコントロールする発展方程式の修正を提案した. 磁場の発散に関する消散型波動方程式

$$\frac{c_p^2}{c_h^2}\partial_t^2(\nabla \cdot B) + \partial_t(\nabla \cdot B) - c_p^2 \Delta(\nabla \cdot B) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0, T)$$

において, 移流の速度を表す係数 c_h を無限大とすることによって形式的に次の拡散方程式を得る：

$$\partial_t(\nabla \cdot B) - c_p^2 \Delta(\nabla \cdot B) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \times (0, T). \tag{3.1}$$

この方程式は元々の磁場の方程式と同じ放物型の方程式であるため, この方程式を含むように磁気流体緩和法を修正すればガレルキン法による弱解の構成が可能であると予想される. このような考察の下, 我々は立方体 $\Omega = (0, 1)^3$ における次の修正方程式を提案した：

$$\begin{cases} \partial_t v = \dfrac{1}{\rho} j \times B + \nu \Delta B & \text{in} \quad \Omega \times (0, T), \\ \partial_t B = \nabla \times (v \times B - \eta j) - \nabla \phi & \text{in} \quad \Omega \times (0, T), \\ \quad j = \nabla \times B & \text{in} \quad \Omega \times (0, T), \\ \quad \phi = -c_p^2 \nabla \cdot B & \text{in} \quad \Omega \times (0, T). \end{cases} \tag{3.2}$$

ここで ρ, η, および c_p は定数とする. また, (3.2) の第 4 式が拡散方程式 (3.1) による磁場の発散のコントロールに対応している. 修正方程式 (3.2) は未知変数 (v, B, j, ϕ) に関する方程式系であるが, 第

3 式と第 4 式によって実質的には (v, B) に関する以下のような方程式系となっている：

$$
\begin{cases}
\partial_t v = \dfrac{1}{\rho}(\nabla \times B) \times B + \nu \Delta v & \text{in} \quad \Omega \times (0, T), \\
\partial_t B = \nabla \times (v \times B - \eta \nabla \times B) + c_p^2 \nabla(\nabla \cdot B) & \text{in} \quad \Omega \times (0, T).
\end{cases} \tag{3.3}
$$

我々は修正方程式 (3.3) を初期条件

$$
v = 0, \quad B = B_0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{3.4}
$$

および境界条件

$$
\begin{gathered}
v,\ B \text{ は } x_1 \in [0,1] \text{ と } x_2 \in [0,1] \text{ について周期的}, \\
v = 0, \quad B = B_b \quad \text{on} \quad \Gamma_3 \times (0, T)
\end{gathered} \tag{3.5}
$$

（ただし $\Gamma_3 = [0,1]^2 \times \{0,1\}$ であり, $B_0 \colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ と $B_b \colon \Gamma_3 \times (0,T) \to \mathbb{R}^3$ は与えられたベクトル場とする）の下で考察した．その結果, 当初の予想通り磁場の発散に対する適切な評価を導くことができ, ガレルキン法による初期値境界値問題 (3.3)–(3.5) の弱解の構成を行うことができた．（紙面の都合上, 方程式の弱解の定義やその具体的な構成方法などについては省略する.）

なお, 今回提案した修正方程式の実際の太陽フレア研究への応用については現在検討中である.

4 磁場の発散の減衰度に関する考察

本節では磁場の発散をコントロールする発展方程式の解の時間に関する減衰度について考察する．以下簡単のため 1 次元区間 $(0, \pi)$ 上で方程式を考える．ディリクレ境界条件の下での拡散方程式

$$
\begin{gathered}
\partial_t f_D(x,t) = c_p^2 \Delta f_D(x,t), \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \\
f_D(0,t) = f_D(\pi,t) = 0, \quad t \in (0,\infty)
\end{gathered}
$$

について, 変数分離法により方程式を解くことで解 f_D の減衰度が以下のようになることが分かる：

$$
f_D(x,t) \sim \exp(-c_p^2 t). \tag{4.1}
$$

同様にして, 消散型波動方程式

$$
\begin{gathered}
\partial_t^2 f_W(x,t) + \frac{c_h^2}{c_p^2} \partial_t f_W(x,t) = c_h^2 \Delta f_W(x,t), \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \\
f_W(0,t) = f_W(\pi,t) = 0, \quad t \in (0,\infty)
\end{gathered}
$$

の解 f_W の減衰度は以下のようになることが確かめられる：

$$
\begin{cases}
f_W(x,t) \sim \exp\left(-\dfrac{c_h^2}{2c_p^2} \left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{4c_p^4}{c_h^2}} \right) t \right) & \text{if} \quad c_h \geq 2c_p^2, \\
f_W(x,t) \sim \exp\left(-\dfrac{c_h^2}{2c_p^2} t \right) & \text{if} \quad c_h < 2c_p^2.
\end{cases} \tag{4.2}
$$

式 (4.1) と (4.2) から, 拡散方程式の解と f_D と消散型波動方程式の解 f_W は共に時間について指数関数的に減衰することが分かる．したがって磁場の発散をコントロールする方程式を消散型波動方程式

(2.4) から拡散方程式 (3.1) に変更しても数値計算の結果は大きくは変化しないと予想される．数学的には拡散方程式のほうが消散型波動方程式よりも取り扱いが易しいため, 我々は上記の考察を基に磁場の発散を拡散方程式によりコントロールするような修正方程式 (3.2) を提案した．

なお, 移流の速度を表す係数 c_h が非常に大きい ($c_h \to \infty$) ときは, 関数 $\sqrt{1-x}$ の $x=0$ でのテイラー展開により

$$1-\sqrt{1-\frac{4c_p^4}{c_h^2}}=\frac{2c_p^4}{c_h^2}+o\left(\frac{1}{c_h^2}\right) \quad (c_h \to \infty)$$

であり, 消散型波動方程式の解 f_W の減衰度 (4.2) の $c_h \geq 2c_p^2$ の場合から

$$f_W(x,t) \sim \exp(-c_p^2 t)+o(1) \quad (c_h \to \infty)$$

となることが従う．この式と拡散方程式の解 f_D の減衰度 (4.1) を比較することで, 移流の速度が非常に大きい場合は消散型波動方程式の解が拡散方程式の解とほぼ同様に時間減衰することが分かる．

5 結論

太陽フレアの予測に関する磁気流体緩和法 (1.1) では放物型方程式を用いて磁場を計算する一方, 双曲型方程式である消散型波動方程式 (2.4) によって磁場の発散をコントロールしている．このような数学的構造の異なるいくつかの方程式を連立して扱うことは難しく, その分野に詳しい研究者でなければ解の存在や長時間挙動などの定性的理論を調べることは困難であると思われる．一方, 修正方程式 (3.2) は磁場の発散の方程式もあわせて放物型であり,（磁気流体型方程式なのでその解析は未だに困難ではあるが）元の方程式 (1.1) よりは数学的に扱いやすいと予想される．

本研究では磁気流体緩和法 (1.1) の数学解析を通じて数学的により扱いやすい修正方程式 (3.2) を提案し, その根拠として拡散方程式および消散型波動方程式による磁場の発散の時間減衰が共に指数関数的であることを確認した．（修正方程式の実際の太陽フレア研究への応用については検討中である.）この提案は「数値計算に用いるならば, 数学的により扱いやすく, かつよりよく理解されている方程式を採用すべきである」という筆者の見解に基づくものである．このことは工学など他分野における数理科学の応用においてもその手法の正当性や効率性の担保の面から重要であると思われる．

謝辞

本研究の課題を提供していただいた JAXA 宇宙科学研究所の清水敏文先生と東京大学の川畑佑典氏に感謝する．また, お茶の水女子大学の千葉優作先生と東京大学の柏原崇人先生には会合の日程調整など議論全体の統括をしていただき, 東京大学の儀我美一先生, 米田剛先生, 池祐一氏, 江間陽平氏, 劔持智哉氏, 松原宰栄氏, 渡邉陽太氏には議論を通じて様々な意見をいただいた．ここに感謝の意を表する．

参考文献

[1] F. Boyer and P. Fabrie, *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-*

Stokes equations and related models, vol. 183 of Applied Mathematical Sciences, Springer, New York, 2013.

[2] L. C. Evans, *Partial differential equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, second ed., 2010.

[3] S. Inoue, T. Magara, V. S. Pandey, D. Shiota, K. Kusano, G. S. Choe, and K. S. Kim, *Nonlinear force-free extrapolation of the coronal magnetic field based on the magnetohydrodynamic relaxation method*, The Astrophysical Journal, 780 (2014), p. 101.