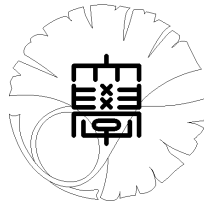


数理科学実践研究レター 2020-8 September 03, 2020

群によって統制される \mathbb{R}^3 内の離散的分布

by

甘中 一輝



UNIVERSITY OF TOKYO
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
KOMABA, TOKYO, JAPAN

群によって統制される \mathbb{R}^3 内の離散的分布

甘中一輝¹ (東京大学大学院数理科学研究科)

Kazuki Kannaka (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

概要

本論文では結晶群の概念を Euclid 空間から Minkowski 空間へ拡張した時に、その軌道の「数え上げ」にどのような現象が起こり得るか論じる。

1 はじめに

まず, \mathbb{R}^n における結晶群の定義を $n = 2, 3$ の場合の定義を含む形で書いておこう。

定義 1 結晶群とは \mathbb{R}^n の等長変換群 $O(n) \times \mathbb{R}^n$ の離散かつ余コンパクトな部分群の事である。

本論文におけるテーマとなる「数え上げ」の問題に関して、結晶群で知られている事を述べよう。 \mathbb{R}^n の原点を o と書き, $B(R)$ を \mathbb{R}^n における普通の意味での原点を中心とする半径 R の球として、結晶群 Γ に対する「数え上げ」 $N_\Gamma(o, R) := \#(\Gamma o \cap B(R))$ に関して、Schoenflies-Bieberbach の定理 (例えば [1, Chap. 3, Thm. 1.1]) を用いて $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ の場合に帰着する事で以下が分かる:

事実 2 結晶群 Γ に対して、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N_\Gamma(o, R)}{\text{vol}(B(R))} = \frac{1}{\text{vol}(\Gamma \backslash \mathbb{R}^n)}.$$

結晶群のより重要な仮定は離散性である。この説明のために位相空間論における作用の固有不連続性の概念を思い出す。

定義 3 離散群 Γ の局所コンパクト Hausdorff 空間 X への連続な作用は、 X の任意のコンパクト部分集合 S に対して $\{\gamma \in \Gamma \mid (\gamma S) \cap S \neq \emptyset\}$ が有限集合になる時、固有不連続であると言われる。

離散群 Γ の作用が固有不連続ならば、 Γ の X への作用は基本領域を持つ。特に Γ の各軌道は離散的である。結晶群の重要な性質はまさにこの固有不連続性である。

事実 4 離散部分群 $\Gamma \subset O(n) \times \mathbb{R}^n$ は Euclid 空間 \mathbb{R}^n に固有不連続に作用する。

事実 4 により、結晶群の \mathbb{R}^n における軌道は常に離散的であり、この離散的な軌道が対応する結晶の分布を表す。また、この事実 ($+\mathbb{R}^n$ の距離空間としての構造) を用いて、数え上げの増大度の上限が分かる:

事実 5 離散部分群 $\Gamma \subset O(n) \times \mathbb{R}^n$ に対して、 Γ にのみ依存する定数 $c_\Gamma > 0$ が存在して、

$$N_\Gamma(o, R) \leq c_\Gamma \text{vol}(B(R))$$

が任意の $R > 0$ で成立する。

結晶群の定義では、 \mathbb{R}^n の内積

$$\langle x, y \rangle_n = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

を保つものしか Γ の元として許容していない。そこで、筆者の過去の研究との関連 (後述) から、 \mathbb{R}^n にこの内積構造とは別の構造を入れて、「数え上げ」の問題を考察してみたい。

¹kannaka@ms.u-tokyo.ac.jp

2 Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{2,1}$ の不連続群

定義 6 自然数 n, p, q を $n = p + q$ を満たすものとする. 双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{p,q}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\langle x, y \rangle_{p,q} := x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \cdots - x_n y_n,$$

により定める. また Lie 群 $O(p, q)$ を

$$O(p, q) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \text{任意の } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ に対して, } \langle Ax, Ay \rangle_{p,q} = \langle x, y \rangle_{p,q}\},$$

で定める. さらに組 $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{p,q})$ を $\mathbb{R}^{p,q}$ と書くことにする.

そこで, 離散部分群 $\Gamma \subset O(p, q) \times \mathbb{R}^n$ で $\mathbb{R}^{p,q}$ に固有不連続に作用するものを考察したい. ここで, 結晶群の場合とは異なり, Γ に離散性だけでなく固有不連続性まであらかじめ仮定するのは, 離散部分群だが固有不連続に作用しないものが存在する為である.

さて, この様な設定での不連続群は Auslander による有名な予想が契機となって, 多くの数学者によって研究されてきた. 特に Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{2,1}$ が最も基本的な場合であり, 例えば Margulis [4, 5] は階数 2 の自由群で $\mathbb{R}^{2,1}$ に固有不連続に作用するものを構成した. 結晶群がほとんど可換群である事と対照的である事に注意されたい.

3 anti-de Sitter 空間 AdS^3 の不連続群との類似

Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{2,1}$ は曲率 0, 符号数 $(2, 1)$ の擬 Riemann 多様体であったが, 一方で符号数は $(2, 1)$ のまま, 「曲率が -1 で一定」という条件を持つ空間として 3 次元の anti-de Sitter 空間

$$\text{AdS}^3 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1\}$$

が知られている. Minkowski 空間の場合と同様に「半径 R の擬球」が

$$B(R) := \{x \in \text{AdS}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq \cosh 2R\}$$

によって AdS^3 内に定義できる. 著者は以前の研究で AdS^3 の不連続群のとある族を構成し, これらの群 Γ の数え上げ $N_\Gamma(x, R) := \#(\Gamma x \cap B(R))$ を評価する事で次の事を証明した:

事実 7 ([3]) 狭義単調増加関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ に対して AdS^3 に固有不連続かつ等長に作用する群 Γ_f が存在して, $N_{\Gamma_f}(E, R) > f(R)$ が十分大きい $R > 0$ で成立する. ここで, $E = (1, 0, 0, 0) \in \text{AdS}^3$.

すなわち, anti-de Sitter 空間 AdS^3 では数え上げに上限が無い. これは Riemann 幾何と対照的である. 実際, Euclid 空間における事実 5 のように, Riemann 多様体における不連続群の軌道の数え上げの増大度には必ず上限が存在する.

さて, $\mathbb{R}^{2,1}$ におけるこの現象の類似の成立・不成立の判定が本論文で提起したい問題となる.

問題 8 離散部分群 $\Gamma \subset O(2, 1) \times \mathbb{R}^3$ で \mathbb{R}^3 に固有不連続に作用するもの全体を考えた時, $x \in \mathbb{R}^3$ を通る Γ 軌道の「数え上げ」 $N_\Gamma(x, R)$ について事実 7 の類似が成立するか?

4 解決に向けて

残念ながら, 問題 8 を解くことは現在出来ていない. 問題 8 の解決へ向けて著者が考えているアプローチを簡単に説明して本論文を終わりとしたい.

Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{2,1}$ の不連続群が anti-de Sitter 空間 AdS^3 の convex cocompact な不連続群を「崩壊」させることで得られるという Danciger-Guéritaud-Kassel による一連の研究 (例えば [2]) がある. 事実 7 で構成される AdS^3 の不連続群は残念ながら convex cocompact ではないのでそのまま彼らの

理論を適用する事は出来ないが、「崩壊」のさせ方を真似する事で $\text{Isom}(\mathbb{R}^{2,1}) = \text{O}(2,1) \times \mathbb{R}^3$ の離散部分群を構成する事が出来る。この様にして得られる離散群がもし $\mathbb{R}^{2,1}$ に固有不連続に作用するならば、事実 7 と類似の性質を持つ事が証明できるのだが、固有不連続性の判断がまだついていない。事実 4 の Minkowski 空間の場合での類似が成立しない事が難しさにつながっている。

謝辞 本研究を温かく励まし続けてくださった日本製鉄の中川淳一氏に深く感謝致します。また、セミナーの監督等、様々な場面で補助していただいた中村勇哉先生、間瀬崇史先生、志甫淳先生に感謝いたします。

参考文献

- [1] D. V. Alekseevskij, È. B. Vinberg, and A. S. Solodovnikov. Geometry of spaces of constant curvature. In *Geometry, II*, Vol. 29 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pp. 1–138. Springer, Berlin, 1993.
- [2] J. Danciger, F. Guéritaud, and F. Kassel. Geometry and topology of complete Lorentz space-times of constant curvature. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, Vol. 49, No. 1, pp. 1–56, 2016.
- [3] K. Kannaka. *Counting orbits of certain infinitely generated non-sharp discontinuous groups for 3-dimensional anti-de Sitter space. preprint*, Vol. arXiv:1907.09303, .
- [4] G. A. Margulis. Free completely discontinuous groups of affine transformations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 272, No. 4, pp. 785–788, 1983.
- [5] G. A. Margulis. Complete affine locally flat manifolds with a free fundamental group. Vol. 134, pp. 190–205. 1984. *Automorphic functions and number theory, II*.