

氏名：戸田幸伸 (Kavli IPMU)

分野名：代数幾何

キーワード：接続層の導来圏、Bridgeland 安定性条件、3次元カラビヤウ多様体、Donaldson-Thomas 不変量、Gopakumar-Vafa 不変量、導来代数幾何、Dolbeault 幾何ラングランズ対応

現在の研究概要：私の研究分野は代数幾何学で、特に「**数え上げ幾何学**」と「**接続層の導来圏**」が2大テーマとなります。数え上げ幾何学では、代数多様体の上に点や曲線などの幾何学的対象がどれだけ存在するかを調べます。とくに曲線の数え上げは、理論物理学の超弦理論とも深く関わる重要な研究対象です。一般には曲線は無限に存在するため、その個数を直接数えることはできません。そこで、仮想的な意味での「個数」を与える数え上げ不変量を定義し、その性質を研究します。もう一つのテーマである接続層の導来圏は、代数多様体上の幾何学的情報を圏論的に捉えるための枠組みとみなせます。導来圏は、代数幾何学だけでなく、シンプレクティック幾何学、表現論、非可換代数など多くの分野と深く結びつくことが明らかになっています。とくに、導来圏から構成される Bridgeland 安定性条件の空間は、ミラー対称性や双有理幾何学と関係する重要な研究対象です。

私はこれまで、導来圏や安定性条件の理論を数え上げ幾何学、特に Donaldson-Thomas 理論に応用し、DT/PT 対応や有理性予想など DT 不変量の定性的な性質を圏論的な立場から明らかにしてきました。また、3次元代数多様体上の安定性条件に関する BMT(Bayer-Macri-Toda)予想を提唱し、Maulik との共同研究では Gopakumar-Vafa 不変量の数学的定義を与えました。数え上げ幾何学という具体的な数学理論と、導来圏という抽象的な数学理論が結びつくのがこの研究の面白い点の1つです。近年は、数え上げ不変量を圏論の対象へと持ち上げる「**圏論的 DT 理論**」の研究を進めています。これを通じて、数え上げ幾何学とさまざまな数学分野を結びつける、新しい圏論的幾何学の創出を目指しています。例えば、Tudor Pădurariu との共同研究では、圏論的 DT 理論の観点から Dolbeault 幾何ラングランズ対応予想の新しい定式化を与え、数え上げ幾何学の観点からこの予想にアプローチしています。

学生への要望：まずは Hartshorne の「Algebraic Geometry」や Vakil の「The Rising Sea」などの本で代数幾何学の基礎知識を習得しておくことが望ましいです。定理を理解することも大切ですが、具体例で計算に慣れ親しんでおくことが研究する際に有用です。代数幾何の基礎知識を押さえたら、数え上げ幾何学あるいは接続層の導来圏の研究に繋がる文献を読み進めると良いと思います。例えば Fulton の「Intersection Theory」や Huybrechts の「Fourier-Mukai transforms in Algebraic Geometry」などの本がおすすめです。その後は、著書「Recent Progress on the Donaldson-Thomas theory」や「接続層の導来圏と代数幾何学」の章の中から興味あるテーマを選んで、関連する論文と合わせて深く勉強してみると良いと思います。また代数幾何学以外に微分幾何学や代数群の表現論の勉強もしておくのも有用だと思います。一方で、超弦理論などの理論物理について本格的に勉強しておく必要はありません。私の所属する Kavli IPMU では学生向けの講義がありませんので、修士課程の間は駒場を本拠地としていただいて、週に一度程度セミナーを Kavli IPMU か駒場で行います。博士課程以降は Kavli IPMU を本拠地とすることを推奨しています。