平成２９年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

英　語　(筆記試験)

平成２８年　８月２９日（月）

１０：４０　～　１２：００

問題は全部で２題ある．２題とも解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　草稿用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**２枚の答案**，および**草稿用紙**である．着手した問題数が２題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，２枚とすること．
指示に反したもの，**答案が２枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面の右下に「裏面使用」と明記すること．

E 第 1 問

(1) 次の英文を和訳せよ．但し，数学記号はそのまま訳文に用いてもよい．

An $n \times n$ real matrix A is said to be orthogonal if the column vectors that make up A are orthonormal, that is, if

$$\sum_{l=1}^{n} A_{lj} A_{lk} = \delta_{jk}, \qquad 1 < j,\, k \leq n.$$

(Here δ_{jk} is the Kronecker delta, equal to 1 if $j = k$ and equal to zero if $j \neq k$.) Equivalently, A is orthogonal if it preserves the inner product, namely if $\langle x, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle$ for all vectors x, y in $\mathbf{R}^n$. (Angled brackets denote the usual inner product on $\mathbf{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_k x_k y_k$.) Still another equivalent definition is that A is orthogonal if $A^{tr} A = I$, i.e., if $A^{tr} = A^{-1}$. (Here, A^{tr} is the transpose of A, $(A^{tr})_{kl} = A_{lk}$.)

Since $\det A^{tr} = \det A$, we see that if A is orthogonal, then

$$\det(A^{tr} A) = (\det A)^2 = \det I = 1.$$

Hence, $\det A = \pm 1$, for all orthogonal matrices A.

[出典] Brian C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. An Elementary Introduction*, Graduate Texts in Mathematics, 222. Springer-Verlag, New York (2003), p. 5 (一部改変).

(2) 次の英文の下線部を和訳せよ．但し，数学記号はそのまま訳文に用いてもよい．

We nowadays require any mathematical theory to be satisfactorily axiomatised. It is essential to know that what assumptions are granted before one can say what constitutes a valid proof. <u>The drive towards formal consistency has loosened the ties with the physical intuition which was the original source of geometrical theory and has sharpened the distinction between a formal proof of a theorem on the one hand, and on the other hand the motivation and intuitive thinking which lies behind, and without which the theorem would not have been formulated.</u> For Descartes, the plane was something known, and coordinates are linear equations provided a *description* of points and lines. <u>There are great formal advantages in shifting our stance, and *defining* a plane as $\mathbf{R}^2$, a point as an ordered pair $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, a line as a locus $\{(x, y) \mid ax + by + c = 0\}$, and so forth; but in order to retain an understanding of the theory, we must not lose sight of the situation in physical space which motivates the theory.</u>

[注] Descartes：デカルト

[出典] P. Neumann et al., *Groups and Geometry*, Oxford Science Publications (1994), pp.116–117.

E 第 2 問

次の和文を英訳せよ．但し，数学記号はそのまま訳文に用いてもよい．

区間 I で $f(x)$ が微分可能で単調増加であっても，必ずしも I で常に $f'(x) > 0$ とは限らない．たとえば，$f(x) = x^3$ は $\mathbf{R}$ で単調増加であるが $f'(0) = 0$ となる．すなわち，常に $f'(x) > 0$ であることは単調増加であるための十分条件ではあるが必要条件ではない．

定理　$f(x)$ を区間 I で定義された微分可能な関数とする．$f(x)$ が単調非減少であるための必要かつ十分な条件は I で常に $f'(x) \geqq 0$ なることである．

証明　$y = f(x)$ が単調非減少ならば $\Delta x > 0$ のとき $\Delta y \geqq 0$，$\Delta x < 0$ のとき $\Delta y \leqq 0$ であるから，

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geqq 0.$$

逆に，I で常に $f'(x) \geqq 0$ ならば，I に属する任意の 2 点 s, t, $s < t$，に対して，平均値の定理により

$$f(t) - f(s) = f'(\xi)(t - s), \qquad s < \xi < t,$$

なる ξ が存在するから，$f(t) \geqq f(s)$，すなわち $f(x)$ は単調非減少である．　□

[出典] 小平邦彦 著『[軽装版] 解析入門 I』岩波書店 (2003), pp.121–122 (一部改変).