多重旗多様体の有限型軌道分解

松木敏彦 (龍谷大学文学部)

G を体 $\mathbb{F}$ 上の代数群とし、$P_1, \ldots, P_k$ を G の放物型部分群とする。このとき、次の多重旗多様体の G-軌道分解を考える。

$$\mathcal{M} = (G/P_1) \times \cdots \times (G/P_k)$$

ただし、G は $\mathcal{M}$ に対角的に作用するものとする。すなわち

$$g \cdot (m_1, \ldots, m_k) = (gm_1, \ldots, gm_k)$$

とする。$\mathbb{F}$ が無限体のときに、$\mathcal{M}$ が有限個の G-軌道に分解されるとき、$\mathcal{M}$ は有限型であるという。

例 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$, $k = 3$ のとき、$\mathcal{M} \cong \mathrm{P}^1(\mathbb{F}) \times \mathrm{P}^1(\mathbb{F}) \times \mathrm{P}^1(\mathbb{F})$ であり、$\mathcal{M}$ は次の 5 個の G-軌道に分解される。

$$\{\ell_1 = \ell_2 = \ell_3\}, \quad \{\ell_1 = \ell_2 \neq \ell_3\}, \quad \{\ell_2 = \ell_3 \neq \ell_1\}, \quad \{\ell_3 = \ell_1 \neq \ell_2\},$$
$$\{\ell_1 \neq \ell_2 \neq \ell_3 \neq \ell_1\}$$

論文 [1] は、一般線形群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ の多重旗多様体について、(1) 有限型 $\Longrightarrow k \leq 3$ を示し、(2) 有限型 3 重旗多様体の分類を与え、(3) その軌道分解を quiver の表現を用いて記述した。[2] はシンプレクティック群について同じことを行なった。

本講義では、「初等線形代数だけで行けるところまで行く」という方針で、この問題を扱ってみたい。実際、[3] はこの方針で標数 $\neq 2$ の任意の体上の split 直交群の典型的な 3 重旗多様体の軌道分解を記述した。

References

[1] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math. **141** (1999), 97–118.

[2] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, *Symplectic multiple flag varieties of finite type*, J. Alg. **230** (2000), 245–265.

[3] T. Matsuki, *An example of orthogonal triple flag variety of finite type*, J. Alg. **375** (2013), 148–187.