数理科学特別講義 VII

担当講師：織田　寛（拓殖大学工学部）

講義の表題：Chevalley 制限定理とその様々な拡張

講義内容：

複素ベクトル空間 V に Lie 群 G が線形に作用しているとき V 上の多項式環 $\mathbb{C}[V]$ に G が自然に作用するが，この作用で不変な $\mathbb{C}[V]$ の部分環 $\mathbb{C}[V]^G$ を把握することは不変式論の基本的な問題である．V 内の殆どの G 軌道が通過する部分空間 $L \subset V$ を取り $W = \{g \in G \,|\, gL = L\}/\{g \in G \,|\, g|_L = \mathrm{id}_L\}$ と置くと，“ 制限写像 ”$\rho : \mathbb{C}[V]^G \to \mathbb{C}[L]^W$ が単射準同型になる．多くの場合で $\mathbb{C}[L]^W$ は $\mathbb{C}[V]^G$ より簡単なものになっており，ρ の像をきちんと記述することで $\mathbb{C}[V]^G$ を知ることができる．

古典的な Chevalley 制限定理は，複素簡約 Lie 群 G が Lie 環 $V = \mathfrak{g}$ へ随伴作用で作用しているとき L を Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ とすると ρ が全射になることを主張する．例えば $G = GL(n, \mathbb{C})$ のときは，$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$（$n$ 次正方行列全体），$\mathfrak{h} = \mathbb{C}^n$（対角行列全体），$W = \mathfrak{S}_n$（$n$ 次対称群）となり，ρ は同型 $\mathbb{C}[\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})]^{GL(n,\mathbb{C})} \simeq \mathbb{C}[\mathbb{C}^n]^{\mathfrak{S}_n}$ を与える．

Chevalley 制限定理の一つの変形として $V = \mathfrak{g}$ の代わりに G，$L = \mathfrak{h}$ の代わりに G の極大トーラス H としたバージョン $\bar{\rho} : \mathbb{C}[G]^G \simeq \mathbb{C}[H]^W$ があるが，これは代数的 Peter-Weyl 定理とほぼ同値である．

また，G の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ 中心を記述する Harish-Chandra 同型 $\tilde{\rho} : U(\mathfrak{g})^G \simeq S(\mathfrak{h})^W$（$S(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h}$ 上の対称代数）は，Chevalley 制限定理の非可換版と考えられる．

最近, Khoroshkin, Nazarov, Vinberg によって上記諸結果のベクトル値関数への拡張が得られた．E を G の有限次元表現, E^H をその H 不変部分空間とするとき, 自然に定義される単射準同型 $\rho_E : (\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \otimes E)^G \to (\mathbb{C}[\mathfrak{h}] \otimes E^H)^W$, $\bar{\rho}_E : (\mathbb{C}[G] \otimes E)^G \to (\mathbb{C}[H] \otimes E^H)^W$ の像が記述されたのである．（これらは一般に全射ではなく，全射になるための E の条件は Broer により以前から知られていた．）また彼らは，Zhelobenko 作用素を用いて $U(\mathfrak{h})$ 加群 $U(\mathfrak{h}) \otimes E^H$ の適当な局所化に W を通常と異なる方法で作用させることにより，同型 $\tilde{\rho}_E : (U(\mathfrak{g}) \otimes E)^G \to (U(\mathfrak{h}) \otimes E^H)^W$ を得た．

$G = KAN$ を実半単純 Lie 群の岩澤分解とするとき，Riemann 対称空間 $K \backslash G$ 上の関数 $C^\infty(K \backslash G) \simeq C^\infty(AN)$ を部分空間 A に制限する写像 $\tau : C^\infty(K \backslash G) \to C^\infty(A)$ についても ρ に類似したいろいろな結果が成り立つ．この場合，Heckman-Opdam 超幾何関数の理論で重要な Cherednik 作用素が自然に関係してくるのが興味深い．

講義では以上のことをなるべく証明をつけて説明したいと思います．実半単純 Lie 群の構造についての基本的なこと（岩澤分解，制限ルート系，Weyl 群など）と，複素半単純 Lie 群の有限次元表現（最高ウェイトの理論）を予備知識として仮定します．