令和５（2023）年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ａ　（筆記試験）

令和４（2022）年８月２９日（月）

１３：００　～　１６：００

問題は全部で７題ある．Ａ 第１問，Ａ 第２問は必答問題である．Ａ 第３問～Ａ 第７問の中から２題選び，必答問題と合わせて**合計４題**解答すること．

（１）　解答しようとする問題ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**４枚の答案**，および**４枚の計算用紙**である．着手した問題数が４題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，４枚とすること．
指示に反したもの，**答案が４枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

A 第 1 問（必答）

2 以上の整数 n に対して，$2n$ 次単位行列を E と表す．相異なる実数 x, y に対して，$2n$ 次実正方行列 $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,2n}$ を次のように定める．

$$a_{i,j} = \begin{cases} x & (i+j \text{ が偶数のとき}) \\ y & (i+j \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の階数を求めよ．

(2) 行列 A の固有値 0 に属する固有空間の基底を一組求めよ．

(3) 行列 A の特性多項式 $\Phi_A(t) = \det(tE - A)$ を求めよ．

A 第 2 問（必答）

以下の問に答えよ．

1. $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ に対して，$\cos y \geq 1 - \dfrac{y^2}{2}$ を示せ．
2. $R > 0$ に対し，$\mathbf{R}^2$ の閉領域 D_R を

$$D_R = \left\{ (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq r \leq R \quad \text{かつ} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{R^2} \right\}$$

で定め，I_R を次で定める．

$$I_R = \iint_{D_R} \frac{x^2 \cos y}{x^2 + y^2 + 1} dxdy$$

極限 $\displaystyle\lim_{R\to\infty} I_R$ を求めよ．

3. $R > 0$ に対し，J_R を次で定める．

$$J_R = \int_0^R \left(\int_0^{x \tan \frac{\pi}{R^2}} \frac{x^2 \cos y}{x^2 + y^2 + 1} dy \right) dx$$

極限 $\displaystyle\lim_{R\to\infty} J_R$ を求めよ．

A 第 3 問

V を有限次元 $\mathbf{C}$ 線型空間とし，r を $0 < r < \dim V$ を満たす整数とする．$f\colon V \to V$ を $\mathbf{C}$ 線型写像とし，$\bigwedge^r f\colon \bigwedge^r V \to \bigwedge^r V$ を f が誘導する $\mathbf{C}$ 線型写像とする．以下の問に答えよ．

1. $\bigwedge^r f$ が同型ならば，f が同型であることを示せ．
2. f が同型であるとする．$\bigwedge^r f$ が対角化可能ならば，f が対角化可能であることを示せ．

A 第 4 問

$\mathbf{R}^n$ の通常のユークリッドノルムを $|\cdot|$ と表す．写像 $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ が任意の $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$|x - y| = |f(x) - f(y)|$$

をみたすとき，f を等長変換という．

$f_k\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ $(k = 1, 2, \ldots)$ を等長変換の族とし，すべての $k = 1, 2, \ldots$ に対して

$$|f_k(0)| \leq 1$$

が成り立つとする．ここで 0 は $\mathbf{R}^n$ の原点である．

(1) $x \in \mathbf{R}^n$ を任意に 1 つ選ぶ．このとき $\mathbf{R}^n$ の点列 $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots$ は収束部分列をもつことを示せ．

(2) $\{f_k\}$ の適当な部分列をとれば，$\mathbf{R}^n$ のある等長変換に広義一様収束することを示せ．

A 第 5 問

t を正の実数とする．$\mathbf{R}$ 上の関数 f_t を次の条件で定義する．f_t は周期 $4t$ をもつ周期関数であり，

$$f_t(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, t) \cup [3t, 4t), \\ -1 & x \in [t, 3t). \end{cases}$$

広義積分 $I(t)$ を次で定義する．

$$I(t) = \int_1^\infty \frac{f_t(x)}{\log(1+x)}\, dx.$$

(1) $\mathbf{R}$ 上の関数 g_t を次で定義する．

$$g_t(x) = \int_0^x f_t(y)\, dy, \quad x \in \mathbf{R}.$$

g_t は周期 $4t$ をもつ周期関数であることを示せ．

(2) 広義積分 $I(t)$ は収束することを示せ．

(3) n を正の整数とする極限 $\lim_{n\to\infty} (4n+1) I\left(\dfrac{1}{4n+1}\right)$ を求めよ．

A 第 6 問

a を $0 < a \leq 1$ を満たす実数とする．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbf{C}$ 上の有理型関数

$$f(z) = \frac{\pi}{(4z^2 - a^2)\sin(\pi z)}$$

の極およびそこでの留数をすべて求めよ．

(2) 級数

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{4n^2 - a^2}$$

の値を求めよ．

A 第 7 問

$[0,2\pi]$ で定義された十分滑らかな実数値関数 $x(t), y(t), z(t)$ が，次の連立微分方程式および境界条件を満たしているものとする：

$$
\begin{aligned}
-x''(t) - x(t) + z(t) &= 0 \qquad (0 < t < 2\pi) \\
-y''(t) - y(t) + z'(t) &= 0 \qquad (0 < t < 2\pi) \\
x(t) + y'(t) &= 0 \qquad (0 < t < 2\pi) \\
x(0) = 0,\ y(2\pi) = 0,\ z(0) &= 1,\ z'(2\pi) = 0
\end{aligned}
$$

このとき，次の問に答えよ.

(1) $z''(t) + z(t) = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) $x(t), y(t), z(t)$ を求めよ.