令和６（2024）年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ｂ　（筆記試験）

令和５（2023）年８月２９日（火）
１０：００　～　１４：００

問題は全部で１８題ある．その中から**３題**選んで解答すること．

（１）　解答しようとする問題ごとに解答用紙を１枚使用すること．
試験開始後，各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　試験開始後，この用紙の下部に**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験開始後，各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（４）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**３枚の答案**，**３枚の計算用紙**である．着手した問題数が３題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙答案を補い，３枚とすること．
指示に反したもの，**答案が３枚でないものは無効**とする．
問題冊子は回収する．

（５）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿

B 第 1 問

2 以上の整数 n に対し, n 次実正方行列全体の集合を $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ とし $\mathcal{N}_n$ を次のように定める.

$$\mathcal{N}_n = \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R}) \mid X \text{ は冪零行列}\}$$

G を $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ の部分群とするとき, $X, Y \in \mathcal{N}_n$ に対して, ある $g \in G$ が存在して $gXg^{-1} = Y$ となるとき $X \sim_G Y$ と書くことにする. $\sim_G$ は $\mathcal{N}_n$ 上の同値関係を定める. このとき同値類の集合 $\mathcal{N}_n/\sim_G$ の濃度を $c_n(G)$ で表す.

(1) $n = 4$ のとき $c_n(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}))$ を求めよ.

(2) n が奇数であるとき $c_n(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})) = c_n(\mathrm{SL}_n(\mathbf{R}))$ を示せ.

(3) $n = 4$ のとき $c_n(\mathrm{SL}_n(\mathbf{R}))$ を求めよ.

B 第 2 問

複素数体 $\mathbf{C}$ 上の 2 変数多項式環 $\mathbf{C}[X, Y]$ の剰余環

$$\mathbf{C}[X, Y]/(X^2 - Y^5)$$

を R で表し，X, Y の R における像を x, y で表す．$\mathfrak{m}$ を x と y で生成される R のイデアルとし，

$$(x\mathfrak{m} : \mathfrak{m}) = \{r \in R \mid r\mathfrak{m} \subset x\mathfrak{m}\}$$

とおく．

(1) R が整域であることを示せ．さらに，R の商体を K で表したとき，

$$\frac{1}{x}(x\mathfrak{m} : \mathfrak{m}) = \left\{ \frac{r}{x} \in K \;\middle|\; r \in (x\mathfrak{m} : \mathfrak{m}) \right\}$$

は K の部分環であることを示せ．

(2) R 代数の同型

$$\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \cong \frac{1}{x}(x\mathfrak{m} : \mathfrak{m})$$

を示せ．ただし，$\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ は R 加群の準同型の合成を積とすることで R 代数とみなす．

(3) $\mathbf{C}$ 代数としての同型

$$\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) \cong \mathbf{C}[S, T]/I$$

が成立するような $\mathbf{C}$ 上の 2 変数多項式環 $\mathbf{C}[S, T]$ のイデアル I の生成系を 1 つ挙げよ．

B 第 3 問

n, ℓ を正の整数とする．n 変数多項式環 $S = \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$ のイデアル $I = (x_1, \dots, x_n)$ に対し, S 加群 $M = I^\ell / I^{\ell+2}$ を考える.

(1) S 加群 M の任意の自己準同型 f に対し, ある $\alpha \in \mathbf{C}$ が存在して $\mathrm{Image}(f - \alpha 1_M) \subset I^{\ell+1}/I^{\ell+2}$ と $(f - \alpha 1_M)^2 = 0$ が成立することを示せ. ここで 1_M は M の恒等写像とし, 写像 g に対する $\mathrm{Image}(g)$ は g の像を表す.

(2) S 加群 M が直既約である（すなわち 2 つの 0 でない S 加群の直和と同型にならない）ことを示せ.

B 第 4 問

$F = \mathbf{Q}(S)$ を有理数体 $\mathbf{Q}$ 上の 1 変数有理関数体とする．X に関する多項式 $f(X) = X^{12} - S^4$ と $g(X) = X^{12} - S^3$ を考える．$f(X)$ の F 上の最小分解体を K とし，$g(X)$ の K 上の最小分解体を L とする．

(1) K の F 上の拡大次数 $[K : F]$ を求めよ．

(2) L の K 上の拡大次数 $[L : K]$ を求めよ．

(3) L の部分体で，F の 2 次拡大になっており，K に含まれないものの個数を求めよ．

B 第 5 問

球面 $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ と $\mathbf{R}^3$ 内の平面の交わりで円周と同相になるものを S^2 の円と呼び，S^2 の円全体のなす集合を Y とおく．$\lambda \in \mathbf{C}$ に対し，$\operatorname{Re}\lambda$, $\operatorname{Im}\lambda$, $\overline{\lambda}$ で λ の実部，虚部，共役複素数を表し，

$$\mu(z, w) = \frac{1}{|z|^2 + |w|^2}(2\operatorname{Re}(z\overline{w}), 2\operatorname{Im}(z\overline{w}), |z|^2 - |w|^2)$$

によって写像 $\mu\colon \mathbf{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \to S^2$ を定める．さらに，$\mathbf{C}^2$ の部分集合 V に対し S^2 の部分集合 $\mu(V \setminus \{(0,0)\})$ を $[V]$ とおく．

$\mathbf{C}^2$ を 4 次元実線型空間とみなしたとき，2 次元の実線型部分空間 V で

条件 (T)　　$V \cap \sqrt{-1}V = \{(0,0)\}$

をみたすもの全体のなす集合を X とする．ここで

$$\sqrt{-1}V = \{(\sqrt{-1}z, \sqrt{-1}w) \in \mathbf{C}^2 \mid (z, w) \in V\}$$

とした．

(1) X は C^∞ 多様体の構造をもつことを示せ．

(2) V が条件 (T) を満たさない $\mathbf{C}^2$ の 2 次元実線型部分空間のとき，$[V]$ はどのような集合か．

(3) 対応 $V \mapsto [V]$ は写像 $\varphi\colon X \to Y$ を導くことを示せ．また φ が全射であることを示せ．

(4) 次の命題の真偽を述べ，その理由を説明せよ:

S^2 上の 0 でない任意の C^∞ 級 1 次微分形式 α に対し，ある $V \in X$ が存在して $[V]$ の適当な向きづけに対して $\int_{[V]} \alpha > 0$ が成り立つ．

B 第 6 問

$\mathbf{R}^2$ の標準的な座標を (x,y) とする．開円板 $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ 上のリーマン計量 g を

$$g=\frac{dx^2+dy^2}{(1-(x^2+y^2))^2}$$

で定める．

(1) D に $\mathbf{R}^2$ の標準的な向きから定まる向きを入れる．g の面積形式を求めよ．

(2) $P\in D$ とし，写像 $\gamma\colon[0,1]\to D$ を $\gamma(t)=tP$ で定める．積分

$$\int_0^1\sqrt{g\left(\frac{d\gamma}{dt}(t),\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)}\,dt$$

を求めよ．

(3) $X=D\setminus\left\{\left(0,\frac{1}{2}\right)\right\}$ の点 P に対し，次の条件 (a)～(c) をすべて満たす写像 $\gamma\colon[0,1]\to X$ 全体のなす集合を $A(P)$ とする．

(a) ある $\varepsilon>0$ が存在して，γ は開区間 $(-\varepsilon,1+\varepsilon)$ から X への C^∞ 写像に拡張される．

(b) $\gamma(0)=(0,0)$.

(c) $\gamma(1)=P$.

また，$\gamma\in A(P)$ に対し，

$$L(\gamma)=\int_0^1\sqrt{g\left(\frac{d\gamma}{dt}(t),\frac{d\gamma}{dt}(t)\right)}\,dt$$

と定める．このとき，最小値

$$\min_{\gamma\in A(P)}L(\gamma)$$

が存在するための $P\in X$ に関する必要十分条件を求めよ．

B 第 7 問

n を 1 以上の整数とする．$\mathbf{R}^{n+1}$ の元 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ について $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} {x_i}^2}$ と表し，球面 $S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ を考える．直積 $S^n \times S^n$ 上の C^∞ 関数

$$f : S^n \times S^n \to \mathbf{R}, \quad (x, y) \mapsto \|2y - x\|^2$$

の臨界値全体の集合を C と表し，正則値全体の集合を D と表す．

(1) 集合 C の元をすべて求めよ．

(2) 元 $a \in C$ に対して $O_a = f^{-1}(\mathbf{R} \setminus \{a\})$ とおく．任意の $a, b \in C$ に対して O_a と O_b は微分同相であることを示せ．

(3) 逆像 $f^{-1}(D)$ は，あるコンパクト C^∞ 多様体とユークリッド空間の直積に微分同相であることを示せ．

B 第 8 問

球面と円周の直積 $S^2 \times S^1$ をユークリッド空間 $\mathbf{R}^5$ の部分位相空間として次で定める．

$$S^2 \times S^1 = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbf{R}^5 \mid x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + u^2 = 1\}$$

次の関係で生成された $S^2 \times S^1$ 上の同値関係 $\sim$ による $S^2 \times S^1$ の商位相空間を X とする．

$$(x, y, z, t, u) \sim (y, x, z, -t, -u), \quad (x, y, z, t, u) \sim (x, z, y, -t, -u)$$

ただし，$(x, y, z, t, u) \in S^2 \times S^1$ である．

(1) 位相空間 X がハウスドルフかどうか答えよ．

(2) 位相空間 X の整係数ホモロジー群を求めよ．

B 第 9 問

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする． また，$\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ とする．

(1) X 上の μ 可積分である実数値関数 h は，任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_A h(x) d\mu(x) \geq 0$$

を満たすものとする． このとき，ほとんど至るところ $h(x) \geq 0$ であることを示せ．

(2) X 上の μ 可積分な実数値関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ が，以下の 2 条件 (a), (b) を満たすとする．

(a) X 上の可測関数 f が存在し，ほとんど至るところ

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

が成り立つ．

(b) X 上の μ 可積分な実数値関数 g と $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ を満たす実数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ が存在し，任意の $n \in \mathbf{N}$ について，ほとんど至るところ

$$|f_n(x)| \leq g(x) + a_n$$

が成り立つ．

このとき，

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

が成り立つかどうかを答えよ．さらに，成り立つならば証明を与え，成り立たないならば反例となる $(X, \mathcal{F}, \mu)$ と $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ を 1 組あげよ．

(3) 可測集合列 $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{F}$ と $\{B_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{F}$ を，それぞれ単調減少列とする．すなわち，$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ かつ $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots$ とする．このとき，

$$\lim_{k \to \infty} \lim_{\ell \to \infty} \mu(A_k \cap B_\ell) \quad と \quad \lim_{\ell \to \infty} \lim_{k \to \infty} \mu(A_k \cap B_\ell)$$

が存在することを示せ．ここで，極限が $+\infty$ となる場合も，極限が存在するということとする．さらに，

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{\ell\to\infty}\mu(A_k\cap B_\ell)=\lim_{\ell\to\infty}\lim_{k\to\infty}\mu(A_k\cap B_\ell)$$

となることを示せ．

(4) 可測集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\mathcal{F}$ と $\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset\mathcal{F}$ を，それぞれ単調増大列，単調減少列とする．すなわち，$A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots$ かつ $B_1\supset B_2\supset B_3\supset\cdots$ とする． このとき，

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{\ell\to\infty}\mu(A_k\cap B_\ell)\quad と\quad\lim_{\ell\to\infty}\lim_{k\to\infty}\mu(A_k\cap B_\ell)$$

が存在することを示せ．ここで，極限が $+\infty$ となる場合も，極限が存在するということとする． さらに，

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{\ell\to\infty}\mu(A_k\cap B_\ell)=\lim_{\ell\to\infty}\lim_{k\to\infty}\mu(A_k\cap B_\ell)$$

が成り立つかどうかを答え，成り立つならば証明を与え，成り立たないならば反例となる $(X,\mathcal{F},\mu)$, $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を１組あげよ．

B 第 10 問

$\mathbf{R}$ 上でルベーグ測度を考える．複素数値関数 $f\in L^1(\mathbf{R})$, $g\in L^2(\mathbf{R})$ に対し，$f*g(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)\,dy$ とおく．次の２条件 (i), (ii) が同値であることを示せ．ただし，$\|f\|_1=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$, $\|g\|_2=\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$ である．

(i) $\displaystyle\sup_{\|g\|_2\le 1}\|f*g\|_2=\|f\|_1$.

(ii) 実数 s,t が存在して，$\mathbf{R}$ 上ほとんど至るところ $f(x)e^{\sqrt{-1}(sx+t)}\in\mathbf{R}_{\ge 0}$ が成り立つ．ただし，$\mathbf{R}_{\ge 0}=\{x\in\mathbf{R}\mid x\ge 0\}$ である．

B 第 11 問

Ω は $\mathbf{R}^n$ の滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域で，Ω のルベーグ測度は 1 とする．$\frac{\partial}{\partial\nu}$ を $\partial\Omega$ における法微分，φ を Ω の閉包 $\overline{\Omega}$ 上の非負値連続関数，f を $(0,\infty)$ 上で正値であって，$[0,\infty)$ 上で連続かつ下に凸な単調増加関数とする．

$T>0$ とし，半線形熱方程式に対する初期値境界値問題

$$
\text{(P)} \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u = \Delta u + f(u), & (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ \frac{\partial}{\partial \nu}u = 0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \\ u|_{t=0} = \varphi, & x\in\Omega \end{cases}
$$

の非負値解 $u(x,t)$ を考える．以下では，(P) の解 $u(x,t)$ で (A) をみたすものを考える．

(A) u は $\overline{\Omega}\times[0,T)$ 上の連続関数，$\frac{\partial}{\partial t}u$, $\frac{\partial}{\partial x_i}u$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}u$ $(i,j=1,\ldots,n)$ は $\Omega\times(0,T)$ 上の連続関数であり，$\overline{\Omega}\times(0,T)$ 上の連続関数として拡張できる

(1) Ω 上の非負値ルベーグ可積分な関数 ψ に対して

$$\int_\Omega f(\psi(x))dx \geq f\left(\int_\Omega \psi(x)dx\right)$$

が成立することを示せ．

(2) 任意の $t\in(0,T)$ に対して，以下の不等式が成立することを示せ．

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)dx \geq f\left(\int_\Omega u(x,t)dx\right)$$

(3) φ を $\overline{\Omega}$ 上恒等的に零ではないとする．このとき f が

$$\int_1^\infty \frac{ds}{f(s)} < \infty$$

をみたすならば，十分大きい $T>0$ に対して，(A) をみたす初期値境界値問題 (P) の非負値解 $u(x,t)$ は存在しないことを示せ．

B 第 12 問

自然数 $m \geq 1$ に対して開円板 $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ 上の正則関数

$$f_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^m}$$

を考える.

(1) $f'_{m+1}(z) = \dfrac{f_m(z)}{z}$ を示せ.

(2) $f_m(z)$ は $\mathbf{C} \setminus [1, \infty)$ 上の正則関数に解析接続できることを示せ.

(3) $f_m(z)$ は $\dfrac{1}{2}$ を始点とする $\mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ 内の任意の曲線に沿って解析接続可能であることを示せ.

(4) $m \geq 2$ のとき $f_m(z)$ は $\dfrac{1}{2}$ を始点とする $\mathbf{C} \setminus \{1\}$ 内のある曲線に沿っては解析接続可能でないことを示せ.

B 第 13 問

$0 < q < 1$ または $1 < q$ を満たす実定数 q に対し，$|z| < 1$ の範囲で次の 2 つの複素関数 $L_q(z)$, $\ell_q(z)$ を定義する．

$$L_q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(1-q^n)},$$
$$\ell_q(z) = \exp\left(L_q(z)\right).$$

(1) $0 < q < 1$ のとき $\ell_q(qz) = (1-z)\ell_q(z)$ を示せ．

(2) $0 < q < 1$ のとき $\ell_q(z)$ の $z = 0$ の周りでの冪(べき)級数展開を求めよ．

(3) 次の関係式が成り立つことを示せ．

$$L_{q^{-1}}(z) + L_q(z) = -\log(1-z)$$

B 第 14 問

x を座標とする数直線上を運動する粒子で，ハミルトニアンが

$$H = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2\right)$$

で与えられるような量子力学系を考える．

(1) λ を実数とするとき，

$$\left(x + \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = \lambda\,\varphi(x)$$

かつ規格化条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\, dx = 1$$

を満たす波動関数 $\varphi(x)$ を求めよ．

(2) 時刻 $t = 0$ で量子力学系が (1) で求めた状態にあるとする．時刻 $t > 0$ における，粒子の位置演算子 $x(t)$ の期待値 $\langle x(t) \rangle$ を求めよ．ただし，演算子 $A(t)$ は Heisenberg の運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}A(t) = \sqrt{-1}\,[H, A(t)]$$

に従って時間発展するものとする．

B 第 15 問

$f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上で定義された C^2 関数で $f(0)=0$ を満たすものとし，$x_0 \in \mathbf{R}$ とする．$n=0,1,\ldots$ に対して，漸化式

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} & (f'(x_n) \neq 0 \text{ のとき}) \\ x_n & (f'(x_n) = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって実数の列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定める．

(1) $f'(0) \neq 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ならば，

$$|x_{n+1}| \leq C|x_n|^2 \quad (n=0,1,\ldots)$$

を満たす正の定数 C が存在することを示せ．

(2) (1) と同じ仮定のもとで，数列 $\{2^{2^{n-m}} x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が有界になるような非負の整数 m が存在することを示せ．

(3) $f(x)$ は下に凸な関数で，$x \neq 0$ のとき $f(x) > 0$ と仮定する．このとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2^n f(x_n))^2$ が収束することを示せ．

B 第 16 問

等号つきの一階論理を考える．$T \vdash A$ は論理式 A が等号つきの一階論理で公理系（閉論理式の集まり）T から証明できることを表す．$T = \emptyset$ であるとき，これを $\vdash A$ と書く．$i = 1, 2$ に対して，L_i を関係記号（等号 $=$ を含む）のみからなる言語とし，T_i を L_i 上の公理系とする．また $T_1 \cup T_2$ を言語 $L_1 \cup L_2$ 上の公理系とみなす．

(1) 以下の Craig の補間定理より次の命題を導け：

> $L_1 \cup L_2$ 上の公理系 $T_1 \cup T_2$ が矛盾すれば，言語 $L_1 \cap L_2$ 上のある閉論理式 C が存在して，$T_1 \vdash C$ かつ $T_2 \vdash \neg C$ となる．

（Craig の補間定理）
閉論理式 A, B について，$\vdash A \to B$ であるとする．このとき $\vdash A \to C$ かつ $\vdash C \to B$ であって，C に現れる関係記号は等号か A, B に共通に現れる関係記号に限るような閉論理式 C が存在する．

(2) L_1 と L_2 に共通な関係記号は等号以外にはないとする．さらに $i = 1, 2$ について公理系

$$T_i \cup \left\{ \exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq j < k \leq n} (x_j \neq x_k) \right) \;\middle|\; n = 2, 3, 4, \ldots \right\}$$

はそれぞれ無矛盾であるとする．このとき $T_1 \cup T_2$ は無矛盾であることを示せ．

B 第17問

$\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$ とする．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された確率変数列

$$U_1, U_2, U_3, \dots, V_1, V_2, V_3, \dots$$

は独立であるとする．U_i $(i \in \mathbf{N})$ は開区間 $(0, 1)$ に値をとり，

$$P(U_i \leq x) = x \qquad (x \in (0, 1))$$

を満たし，V_j $(j \in \mathbf{N})$ は集合 $\{0, 1\}$ に値をとり，

$$P(V_j = 1) = P(V_j = 0) = \frac{1}{2}$$

を満たすとする． 各 $i \in \mathbf{N}$ に対して

$$X_i = U_i V_i + U_{i+1}(1 - V_i), \qquad Y_i = -\log X_i$$

とおく．

(1) 確率変数 Y_1 の平均，分散および分布の確率密度関数を求めよ．

(2) 相異なる $i, j \in \mathbf{N}$ に対して，Y_i と Y_j の共分散 $\mathrm{Cov}[Y_i, Y_j]$ を求めよ．

(3) 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

とおく．$n \to \infty$ のとき M_n が確率収束することを示せ．

(4) 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$L_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i \right)^{1/n}$$

とおく．$n \to \infty$ のとき L_n が確率収束することを示せ．

B 第 18 問

n を正整数とし，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された $2n$ 個の独立確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ を考える．各 $i = 1, \ldots, n$ について，X_i は非負値で $E[X_i^2] < \infty$ を満たし，また ϵ_i は平均 0，分散 1 の正規分布に従うとする．θ を正の実数パラメータとし, 各 $i = 1, \ldots, n$ に対して

$$Y_i = \epsilon_i \sqrt{\theta(1 + X_i)}$$

と定める．観測データとして $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ が得られているとする．関数 $L_n : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ を

$$L_n(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1 + X_i)}} \exp\left(-\frac{Y_i^2}{2t(1 + X_i)}\right) \qquad (t \in (0, \infty))$$

で定義し，$L_n(t)$ を $(0, \infty)$ において最大にする t として推定量 $\widehat{\theta}_n$ を定める．

(1) $\widehat{\theta}_n$ を $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ を用いて表せ．

(2) $\widehat{\theta}_n$ は θ の不偏推定量であることを示せ．さらに，$\widehat{\theta}_n$ の分散を求めよ．

(3) $\overline{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$ とおく．t に関する方程式

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = t(1 + \overline{X}_n)$$

の解として推定量 $\widetilde{\theta}_n$ を定める．$\widetilde{\theta}_n$ は θ の不偏推定量であることを示せ．

(4) $\widehat{\theta}_n$ の分散と $\widetilde{\theta}_n$ の分散の間の大小関係を判定せよ．