令和６（2024）年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ａ　（筆記試験）

令和５（2023）年８月２８日（月）

１３：００　～　１６：００

問題は全部で７題ある．Ａ 第１問，Ａ 第２問は必答問題である．Ａ 第３問～Ａ 第７問の中から２題選び，必答問題と合わせて**合計４題**解答すること．

（１）　解答しようとする問題ごとに解答用紙を１枚使用すること．
試験開始後，各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　試験開始後，この用紙の下部に**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験開始後，各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（４）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**４枚の答案**，**４枚の計算用紙**である．着手した問題数が４題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，４枚とすること．
指示に反したもの，**答案が４枚でないものは無効**とする．
問題冊子は回収する．

（５）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

A 第 1 問（必答）

実数 $a,\ b,\ c$ に対して，線形写像 $T_{a,b,c}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ を次のように定める．

$$T_{a,b,c}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & a & b \\ b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

線形写像 T に対し，$\operatorname{rank} T$ は T の階数を，$\operatorname{Ker} T$ は T の核を，$\operatorname{Image} T$ は T の像を表す．以下の問に答えよ．

(1) $\operatorname{rank} T_{a,b,c} = 1$ を満たす実数の組 (a, b, c) をすべて求めよ．

(2) (1) の組 (a, b, c) それぞれに対して，

$$\operatorname{Ker} T_{a,b,c} = \operatorname{Image} T_{p,q,r}$$

を満たす実数の組 (p, q, r) をすべて求めよ．

A 第 2 問（必答）

正の整数 n に対して，$\mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上の関数 f を次のように定める．

$$f(\mathbf{x}) = \frac{x_1^3 + \cdots + x_n^3}{\|\mathbf{x}\|^3}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

ただし $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = \cdots = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = 0$ となる点 $\mathbf{x}$ をすべて求めよ．

(2) 集合 $(\mathbf{R}_{\geq 0})^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ における f の最大値と最小値を求めよ．ただし，$\mathbf{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ である．なお，最大値と最小値が存在することは証明をせずに用いてよい．

A 第 3 問

正の整数 n に対して, 以下の条件を満たす最大の整数 m を求めよ.
（条件）$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbf{R}^n$ が存在して, 全ての相異なる $1 \leq i, j \leq m$ に対して $\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{a}_j$ のユークリッド内積が負である.

A 第 4 問

実数 t に対して，t を超えない最大の整数を $[t]$ で表す．$0 < \alpha \leq 1$ を満たす実数 α に対して，広義積分 I_α, J_α を次で定める．

$$I_\alpha = \int_0^1 \left(\frac{\alpha}{x} - \left[\frac{\alpha}{x}\right]\right) dx,$$
$$J_\alpha = \int_0^1 \left(\alpha \left[\frac{1}{x}\right] - \left[\frac{\alpha}{x}\right]\right) dx.$$

以下の問に答えよ．

(1) $\alpha = 1$ のとき，I_α は収束し，その値が $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{-\frac{1}{n+1} - \log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right\}$ に等しいことを示せ．

(2) $I_\alpha = \alpha I_1 - \alpha \log \alpha$ を示せ．

(3) J_α を求めよ．

A 第 5 問

$\mathbf{Q}$ を有理数全体のなす集合とする．集合 X を

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbf{Q}^2 \;\middle|\; |x| < \sqrt{2}y \text{ または } y = 0 \right\}$$

で定め，$(x, y) \in X$ と正の実数 ϵ に対して，X の部分集合 $U_\epsilon(x, y)$ を

$$U_\epsilon(x, y) = \{(x, y)\} \cup \left\{ (s, 0) \in \mathbf{Q}^2 \;\middle|\; \left| s - x + \sqrt{2}y \right| < \epsilon \text{ または } \left| s - x - \sqrt{2}y \right| < \epsilon \right\}$$

で定める．集合 X には，部分集合族 $\{U_\epsilon(x, y) \mid \epsilon > 0\}$ が $(x, y) \in X$ における基本近傍系となる位相を入れる．

(1) X はハウスドルフ空間であることを示せ．

(2) $U_1(0, 1)$ の X における閉包を図示せよ．

(3) X が連結であるか否かを答え，それを証明せよ．

A 第 6 問

(1) 次の広義積分の値が 0 であることを示せ．

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + 1} dx$$

(2) 次の広義積分を計算せよ．

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1} dx$$

A 第 7 問

$\mathbf{R}$ 上で定義された実数値関数 $x(t)$, $y(t)$ に対する連立非線形微分方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ y'(t) = -y(t) - x(t)^2 \end{cases}$$

と，$\mathbf{R}$ 上で定義された実数値関数 $u(t)$, $v(t)$ に対する連立線形微分方程式

$$(**) \qquad \begin{cases} u'(t) = u(t) \\ v'(t) = -v(t) \end{cases}$$

を考える．ここで $a \in \mathbf{R}$ は定数とする．

(1) $t = 0$ における初期値が $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ である $(*)$ の解 $(x(t), y(t))$ を求めよ．

(2) 次の条件 A を満たす同相写像 $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が存在するための a に対する必要十分条件を求め，そのときの同相写像 h を 1 つ与えよ．

（条件 A）任意の $x_0 \in \mathbf{R}$ に対し，初期値問題 $x'(t) = ax(t)$, $x(0) = x_0$ の解 $x(t)$ と，初期値問題 $u'(t) = u(t)$, $u(0) = h(x_0)$ の解 $u(t)$ の間に

$$h(x(t)) = u(t)$$

が成立する．

(3) 次の条件 B を満たす同相写像 $H\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ が存在するための a に対する必要十分条件を求め，そのときの同相写像 H を 1 つ与えよ．

（条件 B）任意の $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ に対し，$t = 0$ における初期値が (x_0, y_0) である $(*)$ の解 $(x(t), y(t))$ と，$t = 0$ における初期値が $H(x_0, y_0)$ である $(**)$ の解 $(u(t), v(t))$ の間に

$$H(x(t), y(t)) = (u(t), v(t))$$

が成立する．