平成２９年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ａ　（筆記試験）

平成２８年　８月２９日（月）
１３：００　～　１６：００

問題は全部で７題ある．Ａ１，Ａ２は必答問題である．Ａ３～Ａ７の中から２題選び，必答問題と合わせて**合計４題**解答すること．

（1）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（2）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（3）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**４枚の答案**，および**４枚の計算用紙**である．着手した問題数が４題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，４枚とすること．
指示に反したもの，**答案が４枚でないものは無効**とする．

（4）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

A 第1問 (必答)

x を変数とする 4 次以下の複素係数多項式全体のなす複素ベクトル空間を V と書く．$0 \leq m \leq 4$ を満たす整数 m に対し，線型変換 $T_m\colon V \to V$ を $T_m(f(x)) = f'(x) + x^m f(0)$ で定める（$f'(x)$ は $f(x)$ の微分を表す）．次の問に答えよ．

(1) T_m の核 $\operatorname{Ker} T_m$ の次元を求めよ．

(2) 以下の条件が満たされるとき，T_m は対角化可能であるという：

> V の基底を適切に選ぶと，その基底に関する T_m の表現行列が対角行列となる．

T_m が対角化可能であるような m および，そのときの T_m の固有値を全て求めよ．

A 第2問 (必答)

次の問に答えよ．

(1) $\theta > 0$ に対して，$\sin\theta > \theta - \dfrac{\theta^3}{6}$ を示せ．

(2) $0 < x < \pi$ と $n \geq 2$ に対して，

$$f_n(x) = \underbrace{\sin(\sin(\sin\cdots(\sin}_{n\,個} x)\cdots)) = (\underbrace{\sin\circ\sin\circ\sin\circ\cdots\circ\sin}_{n\,個})(x)$$

と定める．このとき，$n \geq 3$ に対して，

$$f_n(x) > \frac{f_2(x)}{n-1}$$

が成り立つことを示せ．

(3) $f_0(x) = x$，$f_1(x) = \sin x$ としたとき，次の無限級数の収束を判定せよ．

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = x + \sin x + \sin(\sin x) + \sin(\sin(\sin x)) + \cdots.$$

(4) 次の無限級数の収束を判定せよ．

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n(x) = x - \sin x + \sin(\sin x) - \sin(\sin(\sin x)) + \cdots.$$

A 第3問

λ を正の実数とする．$\mathbf{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & (\,(x,y)=(0,0)\,), \\ \dfrac{x^4+2y^2}{(x^2+y^2)^\lambda} & (\,(x,y)\neq(0,0)\,) \end{cases}$$

に関して以下の問に答えよ．

(1) $f(x,y)$ が $(x,y)=(0,0)$ で連続である λ をすべて求めよ．

(2) $f(x,y)$ が $(x,y)=(0,0)$ で全微分可能である λ をすべて求めよ．

A 第4問

x_0 と y_0 を $x_0^2+y_0^2>0$ を満たす実数とし，$x(t)$ と $y(t)$ は次を満たすとする．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=(x-y)(1-x^2-y^2), \\ \dfrac{dy}{dt}=(x+y)(1-x^2-y^2), \\ x(0)=x_0, \\ y(0)=y_0. \end{cases}$$

このとき，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}x(t)$ を求めよ．

A 第5問

V を n 次元実ベクトル空間とし，$\bigwedge^2 V^*$ を交代双線型形式（2形式）全体のなす実ベクトル空間とする．性質

(*) $\bigwedge^2 V^*$ の任意の元 ω に対し，二つの線型形式（1形式）$\alpha,\beta\in V^*$ が存在して $\omega=\alpha\wedge\beta$ と表される．

について以下の問に答えよ．

(1) $n=3$ のとき，性質 (*) が成り立つことを示せ．

(2) $n\geq 4$ のとき，性質 (*) は成り立たないことを示せ．

A 第6問

実数を成分とする2次正方行列全体のなす集合を $M_2(\mathbf{R})$ で表す．$A \in M_2(\mathbf{R})$ について，$f_A\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $v \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$f_A(v) = Av$$

と置くことにより定める．そして $M_2(\mathbf{R})$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$A \sim B \iff \operatorname{Ker} f_A = \operatorname{Ker} f_B$$

により定める．$\mathbf{R}^4$ を 4 次元ユークリッド空間とし，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ を $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$

と同一視することにより，$M_2(\mathbf{R})$ を $\mathbf{R}^4$ と同一視する．さらに，X を同値関係 $\sim$ による $M_2(\mathbf{R})$ の商空間とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $p, q \in X$ が存在して，X の部分空間 $X \setminus \{p, q\}$ は，1次元実射影空間 $\mathbf{R}P^1$ に同相であることを示せ．

(2) 零行列 $O_2 \in M_2(\mathbf{R})$ の定める X の点を $[O_2]$ とする．$[O_2]$ を含む X の開集合を全て求めよ．

(3) 位相空間 T について，T の自己同相写像全体のなす集合を $\operatorname{Homeo}(T)$ で表す．$\operatorname{Homeo}(X)$ から $\operatorname{Homeo}(\mathbf{R}P^1)$ への全単射を一つ与えよ．

A 第7問

広義積分

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x^2 - 1}\, dx$$

の値を求めよ．