受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿

令和７（2025）年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ｂ　（筆記試験）

令和６（2024）年８月２７日（火）

１０：００　～　１４：００

問題は全部で１８題ある．その中から**３題**選んで解答すること．

（１）　解答しようとする問題ごとに解答用紙を１枚使用すること．
試験開始後，各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　試験開始後，この問題冊子の表紙の上部の受験番号欄に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験開始後，各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（４）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**３枚の答案**，**３枚の計算用紙**である．着手した問題数が３題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙答案を補い，３枚とすること．
指示に反したもの，**答案が３枚でないものは無効**とする．
問題冊子は回収する．

（５）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

B 第1問

一般に有限集合 X の元の個数を $|X|$ で表す．X を2個以上の元からなる有限集合とし，有限群 G が X に推移的に作用しているとする．$g \in G$ に対し，$\{x \in X \mid gx = x\}$ の元の個数を n_g と書く．

(1) $\sum_{g \in G} n_g = |G|$ を示せ．

(2) $G_0 = \{ g \in G \mid n_g = 0 \}$ とおく．$|G_0|/|G| \geq |X|^{-1}$ を示せ．

(3) $|G_0|/|G| = |X|^{-1}$ かつ $|X| = 4$ となる X, G および G の X への推移的な作用を1組与えよ．

B 第2問

商環 $A = \mathbf{Z}[X]/(X^3 + 4X)$ を $B = \mathbf{R}[X]/(X^3 + 4X)$ の部分環と自然に同一視する．ただし $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{R}[X]$ はそれぞれ有理整数環 $\mathbf{Z}$, 実数体 $\mathbf{R}$ 上の1変数多項式環である．

(1) B を体の直積 $\prod_{i=1}^{n} K_i$ として表せ．

(2) $B = \prod_{i=1}^{n} K_i$ を (1) の通りとし，$\mathbf{R}[X] \xrightarrow{\text{自然準同型}} B \xrightarrow{\text{標準射影}} K_i$ の合成による $\frac{X}{2}$ の像が $\mathbf{Z}$ 上生成する K_i の部分環を C_i とおく．$A \hookrightarrow B = \prod_{i=1}^{n} K_i$ の像は部分環 $C = \prod_{i=1}^{n} C_i$ に含まれることを示し，商群 C/A を巡回群の直積として表せ．

(3) A の乗法群 $A^\times$ を求めよ．

ただし本問では環はすべて単位元をもつものとし，環準同型はすべて単位元を単位元にうつすものとする．

B 第3問

(1) A を単位元をもつ可換環とし，M を有限生成 A 加群とする．$M \otimes_A M = 0$ ならば $M = 0$ であることを示せ．

(2) 単位元をもつ Noether 可換環 A に対し，以下は同値であることを示せ．

(a) 任意の A 加群 M に対し，$M \otimes_A M = 0$ ならば $M = 0$ となる．

(b) A の任意の素イデアルは極大イデアルである．

B 第4問

複素数体 $\mathbf{C}$ の部分体 $K=\mathbf{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{3+\sqrt{3}})$ を考える．

(1) K は $\mathbf{Q}$ のガロア拡大であることを示し，その拡大次数を求めよ．

(2) $\mathbf{Q}\subset K$ の中間体で $\mathbf{Q}$ 上4次であるものを全て求め，$\mathbf{Q}(\alpha)$ $(\alpha\in K)$ という形で表せ．

(3) $\mathbf{Q}\subset K$ の中間体の組 (M_1,M_2) で以下の条件を満たすものを1つ与えよ：
M_1, M_2 は $\mathbf{Q}$ のガロア拡大であり，$\mathrm{Gal}(M_1/\mathbf{Q})$, $\mathrm{Gal}(M_2/\mathbf{Q})$ は位数が等しいが同型でない非可換群である．

B 第5問

二つのユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の直積 $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$ の部分空間 M を互いに直交する二つの単位ベクトルの組 (u,v) の全体とする．また，M 上の関数 f を $(u,v)\in M$ に u と v のベクトル積 (外積) $u\times v\in\mathbf{R}^3$ の第3成分を対応させるものとする．

(1) M は $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$ のコンパクトな C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

(2) $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$ をユークリッド空間 $\mathbf{R}^6$ と自然に同一視することで，M に $\mathbf{R}^6$ のユークリッド計量が誘導するリーマン計量を入れる．$\{\phi_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ を f の勾配ベクトル場 $\operatorname{grad} f$ が生成する M 上のフロー (1パラメータ変換群) とする．$u\times v=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ となる $(u,v)\in M$ に対して，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\phi_t(u,v)$ 及び $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\phi_t(u,v)$ を求めよ．

(3) 実数 θ に対して，次の条件 $(*)$ を満たす実3次正方行列 P を一つ求めよ．

$(*)$ $u\times v=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$ となる任意の $(u,v)\in M$ に対して，

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\phi_t(u,v)\right)=\lim_{t\to-\infty}\phi_t(u,v)$$

が成り立つ．

ただし，実3次正方行列 A と $(u,v)\in\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$ に対して，$A(u,v)=(Au,Av)$ とする．

B 第 6 問

ユークリッド平面 $\mathbf{R}^2$ の連結開集合 U に対して，U 上の二点 p, q の距離 $d_U(p,q)$ を，二点 p, q を結ぶ区分的に滑らかな曲線の長さの下限として定義する．U_0, U_1 を $\mathbf{R}^2$ の空でない連結開集合とし，$f\colon U_0 \to U_1$ を全単射であって，任意の p, $q \in U_0$ に対して

$$d_{U_0}(p,q) = d_{U_1}(f(p), f(q))$$

が成立するものとする．このとき，$\mathbf{R}^2$ の合同変換 A がただ一つ存在して，任意の $p \in U_0$ に対して

$$f(p) = A(p)$$

が成立することを示せ．

B 第 7 問

実射影空間 $\mathbf{R}P^5$ の部分空間

$$X = \{[x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2] \in \mathbf{R}P^5 \mid x_1y_1 = x_1y_2 = x_2y_1 = x_2y_2 = 0\}$$

について次に答えよ．

(1) X の整係数ホモロジー群 $H_*(X;\mathbf{Z})$ を求めよ．

(2) 円周 S^1 から X への連続写像であって，定値写像とホモトピックでないものを一つ具体的に与えよ．

B 第8問

nを 2 以上の整数とする．ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 上のすべての C^∞ 級 $(n-1)$ 次微分形式からなる集合を $\Omega^{n-1}(\mathbf{R}^n)$ とおく．また正の実数 r に対して，$(n-1)$ 次元球面 $S(r)$ を

$$S(r)=\left\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n}x_i^2=r^2\right\}$$

と定め，その向きを一つ固定する．

(1) 任意の $\omega\in\Omega^{n-1}(\mathbf{R}^n)$ に対して，正の実数 r が 0 に近づくとき，

$$\frac{1}{r^n}\left|\int_{S(r)}\omega\right|$$

は収束することを示せ．

(2) kを正の整数とする．次の条件 $(*)$ を満たす実数 a の範囲を求めよ．

$(*)$ 任意の $\omega\in\Omega^{n-1}(\mathbf{R}^n)$ に対して，正の実数 r が 0 に近づくとき，

$$\frac{1}{r^a}\left|\int_{S(r)}x_1^k\omega\right|$$

は収束する．

B 第 9 問

$\mathbf{R}$ 上の実数値ルベーグ可測関数 f は，任意の $R > 0$ に対し

$$\int_{|x| \le R} |f(x)|\, dx < \infty$$

を満たすとする．このとき，以下の二つの条件 (i) と (ii) は同値であることを示せ．ただし，$C_0(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}$ 上の実数値連続関数で台がコンパクトなもの全体の集合を表すとする．

(i) f は $\mathbf{R}$ 上でルベーグ可積分である．

(ii) 任意の実数値関数の列 $a_n \in C_0(\mathbf{R})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で任意の $x \in \mathbf{R}$ において

$$\sup_{n \ge 1} |a_n(x)| \le 1, \quad \lim_{n \to \infty} a_n(x) = 1$$

を満たすものに対して，

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \int_{\mathbf{R}} a_n(x) f(x)\, dx \right| < \infty$$

が成り立つ．

B 第 10 問

$\Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ を複素平面 $\mathbf{C}$ 内の単位円板とする．f は Δ 上正則であり，Δ 上単射であるとする．各 r $(0 < r < 1)$ に対し $\Delta_r = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < r\}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ を f の $z = 0$ を中心とするテイラー展開とする．このとき $f(\Delta_r)$ の面積を a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ と r を用いて表せ．

(2) 像 $f(\Delta)$ が凸集合ならば，各 r $(0 < r < 1)$ に対し $f(\Delta_r)$ も凸集合であることを示せ．

B 第 11 問

開区間 $(-1,1)$ 上の関数 $f(t)=\sqrt{1-t}$ に対し，

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

を f の $t=0$ を中心とするテイラー展開とする．以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$ を示せ．

(2) $\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とする．有界線型作用素 $A\colon \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ に対し，$\|A\|\leq 1$ ならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$ は作用素ノルムに関して収束することを示せ．ただし，$\|A\|$ は A の作用素ノルムを表す．

(3) 実数列 $x=(x_i)_{i=1}^{\infty}$ で $\|x\|_{l^2}^2=\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<\infty$ を満たすもの全体のなす実ヒルベルト空間 l^2 を考える．ヒルベルト空間 l^2 上の等長作用素 $T\colon l^2\to l^2$ を

$$Tx=(0,x_1,x_2,x_3,\ldots),\quad x=(x_1,x_2,x_3,\ldots)\in l^2$$

で定め，$B=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n$ とする．l^2 の単位ベクトルの列 $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ で

$$\lim_{k\to\infty}\|Bv_k\|_{l^2}=0$$

となる例を一つ与えよ．

B 第 12 問

実数値関数 $u \in C^\infty(\mathbf{R}\times(0,\infty))$ は

$$\begin{cases} u_t(x,t)+u(x,t)u_x(x,t)=u_{xxx}(x,t), & (x,t)\in\mathbf{R}\times(0,\infty), \\ u(x+1,t)=u(x,t), & (x,t)\in\mathbf{R}\times(0,\infty), \end{cases}$$

を満たすとする．次の問に答えよ．

(1) $t\in(0,\infty)$ に対して， $I_1(t)=\displaystyle\int_0^1 u(x,t)^2\,dx$ とおく．$I_1(t)$ が t によらないことを示せ．

(2) $a\in\mathbf{R}$，$t\in(0,\infty)$ に対して，$I_2(t)=\displaystyle\int_0^1 \left(u_x(x,t)^2+au(x,t)^3\right)dx$ とおく．$I_2(t)$ が t によらないような a を 1 つ求めよ．

(3) 関数 u は $\mathbf{R}\times(0,\infty)$ 上で有界であることを示せ．ただし必要ならばある定数 $M\geq 0$ が存在して任意の $t\in(0,\infty)$ に対して

$$\max_{x\in[0,1]} u(x,t)^2 \leq M\int_0^1 \left(u(x,t)^2+u_x(x,t)^2\right)dx$$

が成り立つことを使って良い．

B 第13問

$\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$とし，$p$を $0 < p < 1$を満たす定数とする．確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上で定義された確率変数列

$$X_1, X_2, X_3, \dots, Y_1, Y_2, Y_3, \dots$$

は独立であるとする．X_i $(i \in \mathbf{N})$は実数に値をとり，平均0，分散1をもつとする．Y_r $(r \in \mathbf{N})$は$\mathbf{N}$に値をとり，

$$P(Y_r = k) = p(1-p)^{k-1} \qquad (k \in \mathbf{N})$$

を満たすとする．各$r \in \mathbf{N}$に対して

$$U_r = \sum_{i=1}^{Y_r} X_i$$

とおく．

(1) $r \in \mathbf{N}$に対して$E[Y_r]$および$E[U_r^2]$を求めよ．

(2) $r, s \in \mathbf{N}$が相異なるとき，$E[U_r U_s]$を求めよ．

(3) 各$n \in \mathbf{N}$に対して

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} U_r$$

とおく．ある確率変数S_∞が存在して

$$\lim_{n \to \infty} E[|S_n - S_\infty|^2] = 0$$

が成り立つことを示せ．

(4) 各$r \in \mathbf{N}$に対して

$$V_r = \sum_{i=1}^{Y_r} X_{i+r}$$

とおく．十分大きな$r \in \mathbf{N}$に対して$V_1 + V_r$の分布が$U_1 + U_r$の分布と異なることを示せ．

B 第14問

m を正の整数とし，以下で定まる $\mathbf{R}$ 上の確率密度関数の族 $\{f(x;t) \mid t > 0\}$ を考える．

$$f(x;t) = \begin{cases} C_m(t)\, x^{-m-1} \exp\left(-\dfrac{1}{tx}\right) & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

ここで $C_m(t)$ は m と t のみに依存した定数である．以下の問に答えよ．

(1) $C_m(t)$ を求めよ．

(2) 正数 θ に対し，正値確率変数 X の分布が確率密度関数 $f(x;\theta)$ をもつとする．整数 r に対して X^r の期待値を $\mu(r) = E[X^r]$ で表す．このとき，$\mu(r)$ が有限値として存在するような r の範囲，およびそのときの $\mu(r)$ を求めよ．

(3) 以下では $X_1, X_2, \ldots$ を (2) の X と同じ分布に従う独立な正値確率変数とし，正の整数 n に対して関数 $L_n : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ を

$$L_n(t) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i;t)$$

で定める．このとき，L_n を $(0,\infty)$ において最大にする点 $\widehat{\theta}_n$ を $X_1, \ldots, X_n$ を用いて表せ．

(4) 期待値 $E[\widehat{\theta}_n]$ を求めよ．

(5) 確率変数列 $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$ の $n \to \infty$ のときの漸近分布を求めよ．

B 第 15 問

正の整数 M に対して $h=1/M$ とし，$\tau>0$ を実数とする．$n=0,1$ に対して，複素数からなる点列 $\{U_j^n\}_{j\in\mathbf{Z}}$ は周期 M を持つものとする．すなわち，任意の $j\in\mathbf{Z}$ に対して $U_j^0=U_{j+M}^0$ かつ $U_j^1=U_{j+M}^1$ が成り立つものとする．$n=1,2,\ldots$ に対して，点列 $\{U_j^{n+1}\}_{j\in\mathbf{Z}}$ を次の等式を満たすように定める．

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^{n-1}}{2\tau}+\frac{U_{j+1}^n-U_{j-1}^n}{2h}=0 \quad (j\in\mathbf{Z})$$

さらに，$n=0,1,\ldots$ に対して，複素数からなる点列 $\{\hat{U}_k^n\}_{k=1}^M$ を次で定義する．

$$\hat{U}_k^n=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}U_j^n\exp\Big(-2\pi i\frac{jk}{M}\Big) \quad (k=1,2,\ldots,M)$$

ただし，i は虚数単位である．

(1) $n=0,1,\ldots$ に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{M}|\hat{U}_k^n|^2$ を $\displaystyle\sum_{j=1}^{M}|U_j^n|^2$ を用いて表せ．

(2) $n=1,2,\ldots$ と $k=1,2,\ldots,M$ に対して，$\hat{U}_k^{n+1}$, $\hat{U}_k^n$, $\hat{U}_k^{n-1}$ が満たす漸化式を求めよ．

(3) $0<\tau<h$ のとき，任意の周期 M の点列 $\{U_j^0\}_{j\in\mathbf{Z}}$, $\{U_j^1\}_{j\in\mathbf{Z}}$ に対して，$\displaystyle\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}|U_j^n|^2$ は n について一様に有界になることを示せ．

B 第16問

n を2以上の整数，q を $|q|<1$ を満たす複素パラメータとする．以下の問に答えよ．

(1) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ と y を変数とする次の有理式の恒等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1-yx_i}\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{x_i}{x_i-x_j}\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-yx_i}$$

(2) 複素数 y に対する次の等式を示せ．

$$\prod_{i=0}^{\infty}(1-q^i y)=\sum_{i=0}^{\infty}c_i y^i,\quad ただし\quad c_0=1,\ c_i=\frac{(-1)^i q^{i(i-1)/2}}{\prod_{j=1}^{i}(1-q^j)}\quad (i\ge 1)$$

(3) x_i に関する q-差分作用素を T_{q,x_i}，また，y に関する q-差分作用素を $T_{q,y}$ と記す．即ち，$\mathbf{C}^{n+1}$ 上の有理型関数 f に対して

$$T_{q,x_i}f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n,y)=f(x_1,\ldots,qx_i,\ldots,x_n,y)\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$
$$T_{q,y}f(x_1,\ldots,x_n,y)=f(x_1,\ldots,x_n,qy)$$

と定める．方程式系

$$T_{q,x_i}K(x_1,\ldots,x_n,y)=\frac{1}{1-yx_i}K(x_1,\ldots,x_n,y)\qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

を満たすような零でない関数 $K(x_1,\ldots,x_n,y)$ をひとつ求めよ．また，この K に対して $T_{q,y}K(x_1,\ldots,x_n,y)$ を計算せよ．

(4) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の有理型関数に作用する q-差分作用素 H を

$$H=\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{x_i}{x_i-x_j}\right)T_{q,x_i}$$

と定める．m を非負整数とする．$x_1, x_2, \ldots, x_n$ の m 次斉次対称多項式 $P_m=P_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ne 0$ であって $HP_m=q^m P_m$ を満たすものを一つ求め，(2)で定めた c_i を用いて表せ．

B 第 17 問

(1) 量子力学では，複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の元 $\boldsymbol{v}$ のうち，ノルムが 1 のものを量子状態とよぶ．また，複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の演算子 A のうち，自己共役であるもの，すなわち，$A^* = A$ を満たすものを物理量とよぶ．$\mathcal{H} = \mathbf{C}^2$ のとき，物理量 A のなす線型空間の正規直交基底 $\langle S_0, S_1, S_2, S_3 \rangle$ を一つ求めよ．ただし，S_0 は恒等演算子 I，S_3 は対角行列となるように選ぶ．また，2 次正方行列 A, B の内積を $(A,\,B) := \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A^*B)$ で定める．以下の (2), (3), (4) においては，ここで選んだ S_1, S_2, S_3 を用いること．

(2) 量子状態 $\boldsymbol{v}$ において物理量 A を量子測定すると，次で与えられる確率 w_a で A の固有値 a を観測する．

$$w_a = |P_a \boldsymbol{v}|^2$$

ここで，P_a は固有値 a の固有空間への射影演算子である．ある量子状態 $\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ において S_1, S_2, S_3 を測定して観測される値の期待値をそれぞれ求めよ．

(3) 時刻 0 から t へ時間発展する間の量子状態 $\boldsymbol{v}$ の変化は，複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のユニタリ演算子 U_t で与えられる．ここで，$U_t = e^{\sqrt{-1}\,S_3 t}$ と定める．ある量子系の量子状態が時刻 0 で S_1 の正の固有値に対応する固有ベクトルと一致するとき，時刻 t で S_1, S_2, S_3 を測定して観測される値の期待値 $\langle S_1 \rangle_t$, $\langle S_2 \rangle_t$, $\langle S_3 \rangle_t$ をそれぞれ求め，これらが実数であることを示せ．

(4) パラメータ $t \in \mathbf{R}$ を動かしたとき，3 次元実空間の点 $(\langle S_1 \rangle_t,\ \langle S_2 \rangle_t,\ \langle S_3 \rangle_t)$ が描く曲線を図示せよ．

B 第 18 問

アルファベットを Σ とする．言語 $L, R \subset \Sigma^*$ に対し

$$R/L = \bigcap_{v \in L} \{uw \mid u \in \Sigma^*,\ w \in \Sigma^*,\ uvw \in R\}$$

と置く．R が正則言語ならば，L にかかわらず R/L は正則言語であることを示せ．
(注: 正則言語は別名，正規言語ともいう)