受験番号

令和７（2025）年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ａ　（筆記試験）

令和６（2024）年８月２６日（月）
１３：００　～　１６：００

問題は全部で７題ある．Ａ 第１問，Ａ 第２問は必答問題である．Ａ 第３問～Ａ 第７問の中から２題選び，必答問題と合わせて**合計４題**解答すること．

（１）　解答しようとする問題ごとに解答用紙を１枚使用すること．
試験開始後，各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　試験開始後，この問題冊子の表紙の上部の受験番号欄に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験開始後，各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（４）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**４枚の答案**，**４枚の計算用紙**である．着手した問題数が４題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，４枚とすること．
指示に反したもの，**答案が４枚でないものは無効**とする．
問題冊子は回収する．

（５）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

A 第 1 問 (必答)

(1) 実数 $x \geq 1$ に対し，広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{x+y}\, dy$$

が収束することを示せ．

(2) (1) の広義積分の値を $f(x)$ と書く．次の極限が有限値として存在するような実数 a_0, a_1, a_2 を求め，その極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to \infty} x^3 \left(f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \frac{a_2}{x^2} \right)$$

A 第 2 問 (必答)

a を実数とし，4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^4$ を次で定める．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

線型写像 $f\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ を任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^4$ に対し

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

と定める．ユークリッド空間 $\mathbf{R}^4$ において $\boldsymbol{z}$ と直交するベクトル全体のなす $\mathbf{R}^4$ の部分空間を V とし，$p\colon \mathbf{R}^4 \to V$ を $\mathbf{R}^4$ から V の上への直交射影とする．さらに，f の V への制限を $f_V\colon V \to \mathbf{R}^4$ と書き，$g = p \circ f_V$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) V 上の線型変換 g の特性多項式を求めよ．

(2) V のある基底に対する g の表現行列が対角行列となるような a を全て求めよ．

A 第3問

整数 $n \geq 1$ に対して関数 $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ および $g_n : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ をそれぞれ

$$f_1(x) = \sin x, \qquad f_{n+1}(x) = \sin\big(f_n(x)\big),$$
$$g_n(x, y, z) = \frac{1}{n}\log\left(e^{nx} + e^{ny} + e^{nz}\right)$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) 関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbf{R}$ 上で一様収束するか否かを判定し，一様収束する場合には極限関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) 関数列 $\{g_n(x, y, z)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbf{R}^3$ 上で一様収束するか否かを判定し，一様収束する場合には極限関数 $g(x, y, z)$ を求めよ．

A 第4問

V を実線型空間，V' を V の部分線型空間とする．実線型空間 W に対し，$B(V, W)$ を $V \times V$ から W への対称双線型写像全体の集合，すなわち

$$B(V, W) = \Big\{ f\colon V \times V \to W \;\Big|\; f \text{ は双線型かつ}$$
$$\text{すべての } x, y \in V \text{ に対し } f(x, y) = f(y, x) \Big\}$$

とする．また，$B(V, W)$ の部分集合 $A(V, V', W)$ を

$$A(V, V', W) = \Big\{ f \in B(V, W) \;\Big|\; x \in V,\ y \in V' \text{ ならば } f(x + y, y) = f(y, x) \Big\}$$

により定める．さらに，一般に，実線型空間 W_1, W_2 に対し

$$L(W_1, W_2) = \Big\{ f\colon W_1 \to W_2 \;\Big|\; f \text{ は線型写像} \Big\}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) 実線型空間 S と $A(V, V', S)$ の元 g の組 (S, g) であって，次の条件を満たすものが存在することを示せ：

任意の実線型空間 W に対し，写像

$$g^*\colon L(S, W) \to A(V, V', W), \qquad f \mapsto g^*(f) = f \circ g$$

は全単射である．

(2) V が有限次元であるとし，$\dim V = n, \dim V' = m$ とする．$\dim S$ を求めよ．

A 第 5 問

X, Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を次の条件 (a), (b) をともに満たす写像とする．

(a) f は単射である．

(b) X の任意のコンパクト部分集合 K に対し，その像 $f(K)$ は Y のコンパクト部分集合である．

以下の問に答えよ．

(1) このような X, Y と f であって，f が連続でない例を挙げよ．

(2) X と Y がともに距離空間であるならば f は連続であることを示せ．

A 第 6 問

$\Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ を複素平面内の単位円板とする．$z \in \Delta$ の実数値関数

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos t - 2}{4\cos t - 5} \cdot \frac{-2r\sin(t-\theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(t-\theta)}\, dt$$

を考える．ただし，$z = re^{i\theta}\,(0 \leq r < 1,\, 0 \leq \theta < 2\pi)$ の表示を用いた．以下の問に答えよ．

(1) $z \in \Delta,\, 0 \leq t < 2\pi$ とする．$\dfrac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$ の虚部は

$$\frac{-2r\sin(t-\theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(t-\theta)}$$

であることを示せ．

(2) $\mathbf{C}$ 上の有理型関数 $f(z)$ で，Δ 上で $f(z)$ の虚部が $v(z)$ となるものを一つ求めよ．

A 第 7 問

正の実数全体の集合上で定義された実数値 C^1 級関数 $y(x)$ で，微分方程式

$$y' = \frac{y^2}{x} + y - \frac{1}{x} \qquad (x > 0)$$

を満たすものを考える．

(1) $w(x) = y(x) - (1 - x)$ とおく．$w(x)$ の満たす微分方程式を導け．

(2) (1) で求めた微分方程式を解くことにより，$y(x)$ をすべて求めよ．

(3) $\displaystyle\limsup_{x\to\infty} |y(x)| < \infty$ となる $y(x)$ をすべて求めよ．