B 第 1 問

複素数体上の 4 変数有理関数体 $K = \mathbf{C}(X, Y, Z, W)$ に，4 次対称群 $G = \mathfrak{S}_4$ の $\mathbf{C}$ 上の作用を変数の置換により定める．不変部分体を $F = K^G$ とおき，$L = K(\sqrt{X})$ の F 上のガロワ閉包を M とする．

(1) 拡大次数 $[M : K]$ を求めよ．$M = K(x)$ をみたす $x \in M$ を 1 つ求めよ．

(2) K と M の中間体の個数を求めよ．

(3) K と M の中間体 $E \neq K, M$ のうちで F のガロワ拡大であるものをすべて求めよ．各々の E に対して $E = K(y)$ をみたす $y \in E$ を 1 つ求めよ．

B 第 2 問

(1) $\mathbf{R}[X]$ を実数体 $\mathbf{R}$ 上の 1 変数多項式環とする．自然数 m に対して，複素数体 $\mathbf{C}$ からの $\mathbf{R}$ 代数の準同型写像 $\mathbf{C} \to \mathbf{R}[X]/((X^2+1)^m)$ が存在することを示せ．

(2) $\mathbf{R}$ 上 1 つの元で生成される可換 $\mathbf{R}$ 代数であって，$\mathbf{R}$ 代数としての自己同型が有限個であるものを同型を除いてすべて求めよ．

B 第 3 問

$K = \mathbf{F}_9$ を 9 元体とする．$K^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \middle| \, \alpha, \beta \in K \right\}$ とし，一般線型群 $\mathrm{GL}(2, K)$ の各元を，行列と列ベクトルの積により線型写像 $K^2 \to K^2$ とみなす．また，写像 $\theta \colon K^2 \to K^2$ を $\theta \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^3 \\ \beta^3 \end{pmatrix}$ により定める．K^2 から K^2 への全単射全体のなす群の中で，$\mathrm{GL}(2, K)$ と θ によって生成される部分群を G とおく．

(1) G の共役類のうち $\mathrm{GL}(2, K)$ の部分集合であるものは，何個の元からなるものがそれぞれ何個あるかすべて答えよ．

(2) G の中で θ と共役な元のうち，θ と可換なものは何個あるか．

B 第 4 問

a, b, c を正の整数であって $a\mathbf{Z}+b\mathbf{Z}+c\mathbf{Z}=\mathbf{Z}$ となるものとする．複素数体 $\mathbf{C}$ 上の 3 変数多項式環 $\mathbf{C}[X,Y,Z]$ の商環 A を $A=\mathbf{C}[X,Y,Z]/(X^a-Y^bZ^c)$ により定める．

(1) A は整域であることを示せ．

(2) $a=b$ とする．2 変数多項式環 $\mathbf{C}[V,W]$ への $\mathbf{C}$ 代数としての単射準同型写像 $\varphi\colon A\to\mathbf{C}[V,W]$ であって，以下の条件 (i), (ii) をともにみたすものを一つ構成せよ．

(i) 分数体に同型を誘導する．
(ii) $\mathbf{C}[V,W]$ は A 加群として有限生成．

B 第 5 問

S^3 を 3 次元球面としその向きをひとつ固定する．Σ を 2 次元多様体とする．ω を Σ の上の 2 次微分形式とする．$f: S^3\to\Sigma$ を S^3 から Σ への C^∞ 写像とする．このとき S^3 上の 1 次微分形式 α が存在し，引き戻し $f^*\omega$ は $d\alpha$ と等しい．このような α に対して $I(\alpha)$ を次の積分として定める．

$$I(\alpha)=\int_{S^3}\alpha\wedge d\alpha$$

(1) $I(\alpha)$ は α のとり方に依存しないことを示せ．

(2) Σ が 2 次元トーラスであるとき，Σ 上の 1 次微分形式 η_1, η_2, η_3 であって次をみたすものが存在することを示せ．

$$\omega=\eta_1\wedge\eta_2+d\eta_3,\quad d\eta_1=0,\quad d\eta_2=0$$

(3) Σ が 2 次元トーラスであるとき $I(\alpha)=0$ を示せ．

ただし，各整数 k に対して多様体 M の k 次 de Rham コホモロジー群の次元を $b_k(M)$ と書くとき，$b_k(S^3)$ の値および Σ が 2 次元トーラスであるときの $b_k(\Sigma)$ の値については必要であれば適宜用いてよい．たとえば上のような α の存在は $b_2(S^3)=0$ からの帰結としてわかる．

B 第 6 問

$\mathbf{C}^2$ において, 各 $z \in \mathbf{C}$ について点 $(\pm z, 0)$ と 点 $(0, \pm z)$ (複号任意) を同一視して得られる $\mathbf{C}^2$ の商集合 X に商位相を与え, 自然な射影を $p\colon \mathbf{C}^2 \to X$ とする. また X の部分空間 Y を $Y = X \setminus \{p(0,0)\}$ で定める.

(1) Y の整係数ホモロジー群を計算せよ.

(2) X の点 $p(0,0)$ は 4 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^4$ の開集合と同相な開近傍を持たないことを示せ.

B 第 7 問

S を連結な 2 次元有向コンパクトな C^∞ 級多様体, g を S 上の Riemann 計量, $\varphi : S \to S$ を C^∞ 写像とし,

$$D_-(\varphi) = \inf \left\{ \frac{\|d\varphi(v)\|_g}{\|v\|_g} \,\middle|\, p \in S,\, v \in T_pS \setminus \{0\} \right\}$$
$$D_+(\varphi) = \sup \left\{ \frac{\|d\varphi(v)\|_g}{\|v\|_g} \,\middle|\, p \in S,\, v \in T_pS \setminus \{0\} \right\}$$

とおく. 以下の問に答えよ.

(1) g の面積要素を vol_g とおく. このとき

$$D_-(\varphi)^2 \le \frac{\left| \int_S \varphi^* \mathrm{vol}_g \right|}{\int_S \mathrm{vol}_g} \le D_+(\varphi)^2$$

が成り立つことを証明せよ.

(2) $D_-(\varphi) > 1$ ならば $D_+(\varphi) \ge \sqrt{2}$ であることを証明せよ.

(3) $D_-(\varphi) > 1$ かつ $D_+(\varphi) = \sqrt{2}$ となる S, g, φ の例をあげよ.

B 第 8 問

$\mathbf{R}^3$ 上の 2 次形式 Q を $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ とおき，$\mathbf{R}^3$ の部分集合 M を

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, Q(x,y,z) = 1\}$$

と定める．

(1) M は多様体の構造をもち，$\mathbf{R}^3$ の部分多様体となることを示せ．

(2) $\mathbf{R}^3$ 上の 2 次微分形式 α が M の近傍で次の等式 $(*)$ をみたすとする．

$$(*) \quad dQ \wedge \alpha = dx \wedge dy \wedge dz$$

このとき，α の M への制限 $\alpha|_M$ は $(*)$ をみたす α のとり方によらないことを示せ．

(3) $r > 0$ に対して，$SL(2,\mathbf{R})$ の部分集合 $B(r)$ を

$$B(r) = \left\{ g \in SL(2,\mathbf{R}) \,\middle|\, {}^t gg \text{ の固有値 } \lambda_1,\, \lambda_2 \text{ は } |\log \lambda_j| \leq r \ (j = 1, 2) \text{ をみたす} \right\}$$

と定める．このとき，$B(r)$ は $SL(2,\mathbf{R})$ のコンパクト集合であることを示せ．

(4) M を 2 次の正方行列の空間に実現された，以下の曲面

$$\left\{ p = \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix} \in M(2,\mathbf{R}) \,\middle|\, \det p = -1 \right\}$$

と同一視し，$p \in M$ と $r > 0$ に対して M の部分集合 $\Omega(p,r)$ を次のように定める．

$$\Omega(p,r) = \{ gpg^{-1} \,|\, g \in B(r) \}$$

このとき，等式 $(*)$ をみたす微分形式 α に対し，積分 $\int_{\Omega(p,r)} \alpha|_M$ を求めよ．

B 第 9 問

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は測度空間で $\mu(\Omega) = 1$ をみたすとする．Ω 上の実数値可測関数 $f(x)$ と $p > 0$ に対して

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

と定める．ある $p > 0$ に対し $\|f\|_p < \infty$ をみたす実数値可測関数 $f(x)$ について以下の問に答えよ．

(1) $\varphi(q) = \|f\|_q$ $(0 < q \leq p)$ とおくと φ は広義単調増加連続関数であることを示せ．

(2) f を Ω 上の正値可測関数とする．このとき，積分 $\displaystyle\int_\Omega \log f(x) d\mu(x)$ は確定し

$$-\infty \leq \int_\Omega \log f(x) d\mu(x) < \infty$$

となることを示せ．

さらに，任意の $p > 0$ に対し，$\|f\|_p < \infty$ だが $\displaystyle\int_\Omega \log f(x) d\mu(x) = -\infty$ となる $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$，$f$ の例をあげよ．

(3) f を Ω 上の正値可測関数とする．さらに，$\displaystyle\int_\Omega \log f(x) d\mu(x)$ は有限とする．

$$\lim_{q \to +0} \frac{1}{q} \left(\int_\Omega (f(x)^q - 1 - q \log f(x)) \, d\mu(x) \right) = 0$$

を示せ．

(4) f を Ω 上の正値可測関数とする．

$$\lim_{q \to +0} \|f\|_q = \exp\left(\int_\Omega \log f(x) d\mu(x) \right)$$

を示せ．ただし，$\displaystyle\int_\Omega \log f(x) d\mu(x) = -\infty$ のときは，右辺は 0 と解釈する．

B 第 10 問

$\mathbf{R}^2$ の部分集合 D を次で定める．

$$D = \{\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$$

D 上の実数値可積分関数からなるバナッハ空間を $L^1(D)$ で表す．ただし，D 上の測度としては $\mathbf{R}^2$ 上のルベーグ測度を制限して得られるものを考える．$L^1(D)$ 上の線型作用素 T, S を，$f \in L^1(D)$ と $(x, y) \in D$ に対し次で定義する．

$$(Tf)(x, y) = \int_0^{1-y} f(t, y)\, dt$$

$$(Sf)(x, y) = \int_0^{1-x} f(x, s)\, ds$$

(1) T は $L^1(D)$ 上の有界線型作用素であることを示し，作用素ノルム $\|T\|$ を求めよ．

(2) 線型作用素 ST の固有値で正のものをすべて求めよ．

B 第 11 問

実数 x と t を変数とする滑らかな実数値関数 $u = u(x, t)$ が

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{1 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$$

を $0 < x < 1$，$0 < t$ でみたし，

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0$$

を $0 < t$ でみたすとする．

(1) 曲線 $C(t) = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; y = u(x, t),\ 0 \leq x \leq 1\right\}$ の長さ $\ell(t)$ は，t について広義単調減少であることを示せ．

(2) 関数 $I(t)$ を

$$I(t) = \int_0^1 u(x, t)\, dx$$

で定める．このとき $I(t)$ は t によらない定数であることを示せ．

B 第 12 問

$D \subset \mathbf{C}$ を原点 0 を含む有界な領域とする．D 上の関数 $f : D \to \mathbf{C}$ は正則であり，$f(D) \subset D$，$f(0) = 0$ をみたすとする．

(1) $|f'(0)| \leq 1$ を示せ．

(2) $|f'(0)| < 1$ とする．f の n 回合成を $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{個}}$ とおく．このとき，関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ は D 上広義一様収束するか否かを判定し，証明または反例を与えよ．

(3) $|f'(0)| = 1$ とする．このとき f の n 回合成の関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ は D 上広義一様収束するか否かを判定し，証明または反例を与えよ．

B 第 13 問

領域 $D = \{(t, y) \,|\, t \in \mathbf{R},\, y > 0\}$ において定義された微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} = (1 + y(t)) \log(1 + y(t))$$

の点 $(0, \zeta) \in D$ を通る解を $y = x_1(t),\, t \in \mathbf{R}$ とする．この $x_1(t)$ が与えられたとき，同じ領域 D で定義された微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} = 1 + \sqrt{x_1(t)\, y(t)}$$

の点 $(0, \eta) \in D$ を通る解を $y = x_2(t)$ とする．

(1) $x_1(t)$ を求めよ．

(2) ある $t^* \in [0, \infty)$ が存在して，$t > t^*$ では，$x_1(t) x_2(t) > 1$ となることを示せ．
さらに，$t > t^*$ では $\dfrac{d}{dt}\sqrt{x_2(t)} \leq \sqrt{x_1(t)}$ となることを示せ．

(3) 十分大きな $\zeta > 0$ に対して，ある $t^* \in [0, \infty)$，$a > 0$，$b > 0$ が存在して，$x_2(t)$ は $t > t^*$ において不等式

$$x_2(t^*) \leq x_2(t) \leq a \exp(b \exp(t))$$

をみたすことを示せ．

B 第 14 問

実数 $a < b$ と，閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ と正の整数 N に対して，

$$E_N(a, b; f) = \left| \int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{N} \sum_{j=1}^{N} f\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) \right|$$

と定める．ただし，$x_j = a + j(b-a)/N$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$ とおいている．

(1) $f(x)$ が $[a, b]$ 上の C^2 級関数のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$E_N(a, b; f) \leq \frac{(b-a)^3}{24N^2} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

(2) $f(x) = e^x \cos x$ に対して，$E_N(0, \pi; f) \leq 10^{-4}$ をみたすような N の値を一つ求めよ．必要ならば，$e^{\frac{1}{4}\pi} < 2.2$, $e^{\frac{1}{2}\pi} < 4.82$, $e^{\frac{3}{4}\pi} < 10.6$, $e^{\pi} < 23.2$ を用いてよい．

(3) $f(x) = \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$ に対して，$E_N(0, 1; f) \leq 10^{-4}$ をみたすような N の値を一つ求めよ．

B 第 15 問

母関数 $G(x, u) = \dfrac{\exp\left(-\frac{ux}{1-u}\right)}{\sqrt{1-u}}$ によって定義される x の関数 $\sigma_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$$G(x, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(x) u^n$$

について以下の問に答えよ．

(1) $\sigma_n(x)$ が次数 n の多項式であることを示せ．

(2) 整数 $m, n \geq 0$ に対して，$\displaystyle\int_0^{\infty} \sigma_m(x) \sigma_n(x) \frac{dx}{\sqrt{x}\, e^x}$ を求めよ．

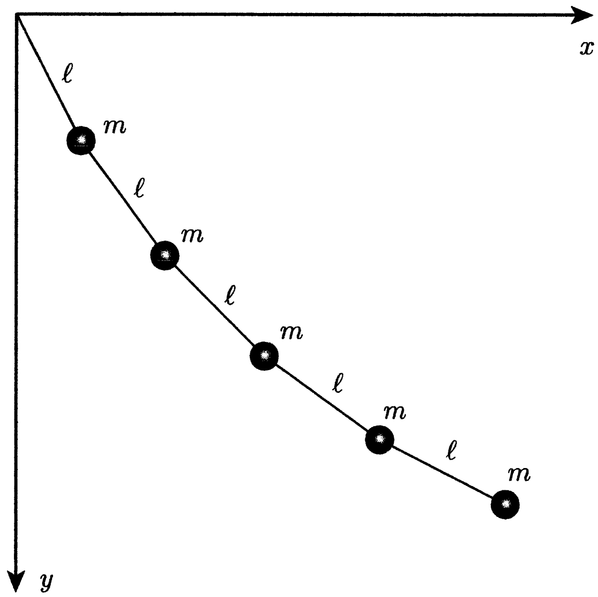
(3) 任意の正の整数 n に対して，次の漸化式をみたす a_n, b_n, c_n を求めよ．ただし，a_n, b_n, c_n は x に依存しない n のみで定まる定数とする．

$$x\sigma_n(x) = a_n \sigma_{n+1}(x) + b_n \sigma_n(x) + c_n \sigma_{n-1}(x)$$

(4) 整数 $m, n \geq 0$ に対して，$I_{m,n} = \displaystyle\int_0^{\infty} x^m \sigma_n(x) \frac{dx}{\sqrt{x}\, e^x}$ とおく．$I_{m,n}$ を求めよ．

B 第 16 問

質量が m のおもりを N 個用意し，図のように長さが ℓ の N 本のひもで順につないで天井からぶら下げる．ひもはたわんだり伸び縮みしたりせず，ひもの重さは無視でき，おもりの運動は鉛直軸を含む一定の平面内で起こるものとする．また，時刻を t, 重力加速度を g で表すことにする．図のように，運動が行われる平面の xy 座標を，天井とひもとの固定点を原点とし，水平方向が x, 鉛直下向きを y となるように定める．上から数えて i 番目のおもりの水平方向の位置座標を x_i とする．



(1) どの $|x_i|$ も十分に小さいという仮定のもとで，この系の Lagrangian L, および L から得られる Euler-Lagrange 方程式を求めよ．ただし，こうして得られる Euler-Lagrange 方程式は，線型の微分方程式になるものとする．

(2) (1) で求めた線型微分方程式の解で，定数 ω を用いて

$$x_i = A_i \sin \omega t \qquad\qquad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

と表される解に興味があるとする．このとき，最高次の係数が 1 のある整数係数 N 次多項式 $P_N(X)$ が存在し，上の形の解が存在するための必要十分条件が，$P_N\left(\omega^2 \frac{\ell}{g}\right) = 0$ と表されることを示せ．

(3) 多項式列 $\{P_N(X) \mid N = 1, 2, 3, \cdots\}$ を特徴づける漸化式を 1 つ求めよ．

B 第 17 問

V を体 $\mathbf{K}$ 上の線型空間とする．$a_1, \ldots, a_n \in V$ として，$\sigma : V \to V$ を $\sigma(a_1) = a_1, \ldots, \sigma(a_n) = a_n$ となる V の自己同型写像とする．

等号付きの 1 階述語論理の言語 $\mathcal{L} = \{=\} \cup \{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{K}\} \cup \{g\}$ は，各 $\alpha \in \mathbf{K}$ に対して 1 変数の関数記号 f_α を持ち，また g は 2 変数の関数記号であるとして，$\mathbf{K}$ 上の線型空間 V を，この言語 $\mathcal{L}$ に対する構造とみなす．ここで構造 V においては，$f_\alpha(b)$ はスカラー α によるベクトル $b \in V$ のスカラー倍 αb を，$g(b, c)$ がベクトル $b, c \in V$ の和 $b + c$ を表すと考えている．つまり $V \models f_\alpha(b) = c \Leftrightarrow \alpha b = c$，$V \models g(b, c) = d \Leftrightarrow b + c = d$ である．

このとき以下の問に答えよ．

(1) 言語 $\mathcal{L}$ の論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)$ と $b_1, \ldots, b_m \in V$ について

$$V \models \varphi(b_1, \ldots, b_m; a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow V \models \varphi(\sigma(b_1), \ldots, \sigma(b_m); a_1, \ldots, a_n)$$

となることを示せ．

(2) $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ を $a_1, \ldots, a_n$ で生成される V の部分空間とする．言語 $\mathcal{L}$ の論理式 $\varphi(x; y_1, \ldots, y_n)$ に対して集合

$$D = \{b \in V \mid V \models \varphi(b; a_1, \ldots, a_n)\}$$

を考えると，$D \subset \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ となるかもしくは $D \cup \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = V$ となることを示せ．

(3) 係数体 $\mathbf{K}$ が有限体である場合を考える．

言語 $\mathcal{L}$ の論理式 $\varphi(x; y_1, \ldots, y_n)$ に対して (2) の集合 D は有限集合かもしくはその補集合 $D^{\mathrm{c}} = \{b \in V \mid b \notin D\}$ が有限集合であることを示せ．

B 第 18 問

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の独立な実確率変数列で

$$\mathrm{E}[X_n] = 0, \qquad \mathrm{E}[X_n^2] = 1, \qquad \mathrm{E}[X_n^4] = a < \infty \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

をみたすものとする．ここで, a は定数である．正の整数 n と非負整数 h に対して,

$$\gamma_n(h) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j X_{j+h}$$

と定める．また, $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $m_n/n \to 0$ $(n \to \infty)$ をみたす正整数列とする．

(1) 正の整数 n と非負整数 h に対して, $\gamma_n(h)$ の期待値 $\mathrm{E}[\gamma_n(h)]$ および分散 $\mathrm{Var}[\gamma_n(h)]$ を求めよ．

(2) $\mathrm{P}(\gamma_n(0) \leq 1/2) \to 0$ $(n \to \infty)$ を示せ．

(3) $\displaystyle\max_{h=1,\ldots,m_n} \gamma_n(h)$ が $n \to \infty$ のとき 0 に確率収束することを示せ．

(4) $\hat{h}_n$ を $\{0, 1, \ldots, m_n\}$ に値をとる確率変数で

$$\gamma_n(\hat{h}_n) = \max_{h=0,1,\ldots,m_n} \gamma_n(h)$$

をみたすものとする．$\mathrm{P}(\hat{h}_n = 0) \to 1$ $(n \to \infty)$ を示せ．