平成３０年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ｂ　（筆記試験）

平成２９年　８月２９日（火）
１１：００　～　１５：００

問題は全部で１８題ある．その中から**３題**選んで解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名は記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**３枚の答案**，および**３枚の計算用紙**である．着手した問題数が３題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，３枚とすること．
指示に反したもの，**答案が３枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

B 第1問

p を素数とし，$f\colon \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ を自然な全射とする．このとき次が成り立つような素数 p をすべて求めよ．

> $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ の位数が p である任意の元 g に対し，$\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z})$ の位数 p の元 g' で $f(g') = g$ となるものが存在する．

B 第2問

以下の問に答えよ．

(1) λ, μ, ν を互いに異なる複素数とする．可換環 A を

$$A = \mathbf{C}[x, y, z]/(x^2 + y^2 + z^2 + 1, \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + 1)$$

により定める．A のすべての極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して

$$\dim_{\mathbf{C}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$$

となるための λ, μ, ν に関する条件を求めよ．

(2) λ, μ, ν を (1) で求めた条件を満たす複素数とする．a を複素数とし，$\mathfrak{p} = (z - a)$ を $z - a$ で生成される $\mathbf{C}[z]$ の単項イデアルとする．

$$A \otimes_{\mathbf{C}[z]} (\mathbf{C}[z]/\mathfrak{p})$$

が 0 以外の冪零元を持たないための a の条件を求めよ．

B 第3問

複素数体 $\mathbf{C}$ 上の一変数多項式環 $\mathbf{C}[T]$ の部分環 $R=\{F(T)\in\mathbf{C}[T]\mid F'(0)=0\}$ を考え，R 上の 2 変数多項式環 $R[X,Y]$ の商環 $R[X,Y]/(X^2+XY+Y^2-T^2)$ を A で表す．$f\colon R\to A$ を自然な環準同型とし，X, Y の A での像を x, y で表す．

(1) A は整域であり，f は単射であることを示せ．

A の分数体を K とし，f より誘導される R の分数体から K への写像による $T=T^3(T^2)^{-1}$ の像を t で表す．$\mathbf{C}$ 上 t, $t^{-1}x$, $t^{-1}y$ で生成される K の部分環を B とする．

(2) $\mathfrak{q}$ を B の素イデアルとし，$\mathfrak{p}=A\cap\mathfrak{q}$ とおく．$\mathfrak{p}$ が A のイデアル (x,y,t^2,t^3) と異なるならば，自然な環準同型 $A_{\mathfrak{p}}\to B_{\mathfrak{q}}$ は同型になることを示せ．

(3) B は，$\mathbf{C}$ 上の環として，2 変数有理関数体 $\mathbf{C}(Z,W)$ の部分環 $\mathbf{C}[Z,W,W^{-1}]$ と同型であることを示せ．

B 第4問

p を奇素数とする．また，複素数 ζ,α を $\zeta=\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p^2}\right)$, $\alpha=\sqrt[p]{p}\,\zeta$ と定める．ただし $\sqrt[p]{p}$ は実数体における p の p 乗根を表す．

(1) $f(X)=\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}X^{pi}$ が $\mathbf{Q}[X]$ の既約多項式であることを示せ．

(2) 拡大次数 $[\mathbf{Q}(\zeta,\alpha):\mathbf{Q}]$, $[\mathbf{Q}(\alpha):\mathbf{Q}]$ を求めよ．

(3) $\mathbf{Q}(\alpha)$ が $\mathbf{Q}$ のガロア拡大であるかどうかを答えよ．

(4) 拡大 $\mathbf{Q}(\zeta,\alpha)/\mathbf{Q}$ の中間体 F で $[F:\mathbf{Q}]=p^2$ となるものの個数を求めよ．

B 第5問

4次元ユークリッド空間内の原点を中心とする単位球面を

$$S^3 = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2+w^2=1\right\}$$

とする．正の実数 α に対し，S^3 の部分集合 M_α を次のように定める：

$$M_\alpha = \left\{(x,y,z,w) \in S^3 \;\middle|\; xw-yz=\alpha\right\}.$$

このとき M_α が S^3 の閉部分多様体になることを示せ.

B 第6問

$\mathbf{C}^2$ の変換 I, J を

$$I(z,w) = \left(\sqrt{-1}z, \sqrt{-1}w\right), \quad J(z,w) = (-\overline{w}, \overline{z})$$

により定め，変換 I と J で生成される群を Γ とおく．また，

$$\begin{aligned} S^1 &= \{z \in \mathbf{C} \mid |z|=1\}, \\ D^2 &= \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}, \\ \mathrm{Int}D^2 &= \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\} \end{aligned}$$

として，$\mathbf{C}^2$ の Γ 不変部分空間 U, V を次のように定める：

$$\begin{aligned} U &= \left(\mathrm{Int}D^2 \times S^1\right) \cup \left(S^1 \times \mathrm{Int}D^2\right), \\ V &= \left((D^2 \setminus \{0\}) \times S^1\right) \cup \left(S^1 \times (D^2 \setminus \{0\})\right). \end{aligned}$$

(1) 整係数ホモロジー群 $H_*((U \cap V)/\Gamma; \mathbf{Z})$ を求めよ.

(2) 整係数ホモロジー群 $H_*(V/\Gamma; \mathbf{Z})$ を求めよ.

(3) 整係数ホモロジー群 $H_*((U \cup V)/\Gamma; \mathbf{Z})$ を求めよ.

B 第7問

$\mathbf{R}^2$ 上のベクトル場 X を

$$X = \left(x - y - x(x^2 + 3y^2)\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(x + y - y(3x^2 + y^2)\right) \frac{\partial}{\partial y}$$

で定める．

(1) 任意の点 $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ に対し，時刻 $t = 0$ で (x_0, y_0) を通る X の積分曲線は任意の $t > 0$ に対して定義され，その像は有界であることを示せ．

(2) 次の主張が正しければ証明を，正しくなければ反例を与えよ：

任意の C^∞ 級関数 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ に対し，f が $\mathbf{R}^2$ のコンパクト集合に台を持つならば，$\mathbf{R}^2$ 上のベクトル場

$$X + f(x, y) \frac{\partial}{\partial x}$$

は零点を持つ．

B 第8問

2 次の実正方行列全体のなす集合を $M(2,\mathbf{R})$ とし，行列式が 0 でない元全体からなる $M(2,\mathbf{R})$ の部分集合を $GL(2,\mathbf{R})$ とする．Z を $M(2,\mathbf{R})$ の 0 でない元で，Trace $Z=0$ をみたすものとする．$M(2,\mathbf{R})$ の部分集合 M を

$$M=\left\{gZg^{-1}\in M(2,\mathbf{R})\;\middle|\;g\in GL(2,\mathbf{R})\right\}$$

で定める．歪対称行列全体のなす $M(2,\mathbf{R})$ の部分集合を $\mathrm{Skew}(2,\mathbf{R})$ とし，写像 $p\colon M\to\mathrm{Skew}(2,\mathbf{R})$ を $p(X)=X-{}^tX$ で定める．

(1) M は多様体の構造をもつことを示せ．

(2) p が固有写像であることを示せ．ただし，p が固有写像であるとは，$\mathrm{Skew}(2,\mathbf{R})$ の任意のコンパクト部分集合 S に対し，S の p による逆像がコンパクトであることをいう．

(3) 任意の $X\in M(2,\mathbf{R})$ に対し，M 上のベクトル場 $\widetilde{X}$ を次の条件で定める：

任意の $g\in GL(2,\mathbf{R})$ に対して，$x=gZg^{-1}\in M$ とおくと，

$$\widetilde{X}_x=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} ge^{tX}Ze^{-tX}g^{-1}\in T_xM.$$

このとき，ある M 上の 2 次微分形式 ω が存在して，任意の $g\in GL(2,\mathbf{R})$ と任意の $X,Y\in M(2,\mathbf{R})$ に対して，$x=gZg^{-1}\in M$ とおくと，

$$\omega_x\left(\widetilde{X}_x,\widetilde{Y}_x\right)=\mathrm{Trace}(Z(XY-YX))$$

をみたすことを示せ．

(4) 写像 $C\colon\mathbf{R}\to\mathrm{Skew}(2,\mathbf{R})$ を $C(r)=\begin{pmatrix}0&-r\\r&0\end{pmatrix}$ で定める．正の実数 A に対し，$S=\{C(r)\mid|r|\leq A\}$ とおく．$Z=C(1)$ とするとき，M に適当な向きを与え，(3) で存在が示された ω に対して，積分

$$\int_{p^{-1}(S)}\omega$$

を求めよ．

B 第9問

$(X,\mathcal{F},\mu)$ を測度空間とし，$1<p<\infty$，$q=\dfrac{p}{p-1}$ とする．L^p 空間 $L^p(X,\mathcal{F},\mu)$, L^q 空間 $L^q(X,\mathcal{F},\mu)$ をそれぞれ $L^p(X)$, $L^q(X)$ と表す．以下では $L^p(X), L^q(X)$ の元は実数値関数であるとし，$\|\cdot\|_p$ を $L^p(X)$ のノルム，$\|\cdot\|_q$ を $L^q(X)$ のノルムとする．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L^p(X)$, $f\in L^p(X)$ とし，任意の $g\in L^q(X)$ に対し，以下を満たすとする：

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n g d\mu=\int_X fgd\mu.$$

また，$V\subset L^p(X)$ を

$$V=\left\{\sum_{n=1}^{N}a_nf_n\ ;\ N\in\mathbf{N}, a_1,\ldots,a_N\in\mathbf{R}\right\}$$

で定める．

(1) $\|f\|_p=\sup\limits_{\|g\|_q=1}\int_X fgd\mu$ を示せ．

(2) $\liminf\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_p\geq\|f\|_p$ を示せ．

(3) $p=2$ とする．$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_2=\|f\|_2$ ならば，$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_2=0$ となることを示せ．

(4) $p=2$ とする．$f\in\overline{V}$ を示せ．ただし，$\overline{V}$ は V の $L^2(X)$ における閉包とする．

B 第10問

複素平面内の単位円を $\Delta = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$，その閉包を $[\Delta]$，境界を S^1 とする．$[\Delta]$ の近傍で定義された正則関数 f で $f([\Delta]) \subset [\Delta]$ を満たすもの全体のなす集合を $\mathcal{S}$ とする．

(1) 定数でない $f \in \mathcal{S}$ に対して $a = f(0)$ とおき

$$T(f)(z) = \frac{\phi_a(f(z))}{z}, \quad \phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

と定義する．$T(f)$ は $z = 0$ まで解析接続され $\mathcal{S}$ に属することを示せ．

(2) 定数でない $f \in \mathcal{S}$ に対して $f_0 = f$ とおき，f_n が定数にならない限り帰納的に

$$f_{n+1} = T(f_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

と定義する．ある n に対して $|f_n(0)| = 1$ であれば f は $f(S^1) = S^1$ を満たすことを示せ．

(3) $f \in \mathcal{S}$ が $f(S^1) = S^1$ を満たすとする．このとき，f は Δ 内に零点をもち，それらを重複度も込めて $a_1, \ldots, a_m$ と置けば

$$f(z) = c\,\phi_{a_1}(z)\phi_{a_2}(z)\cdots\phi_{a_m}(z)$$

と表せることを示せ．ここで $c \in S^1$ は z に依らない定数である．

B 第11問

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 内の $\{0\}$ でない部分ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ に対して, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ への直交射影作用素をそれぞれ P_1, P_2 とする．これに対して $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ のなす角 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ を

$$\cos\theta = \sup_{\xi_1 \in \mathcal{H}_1,\, \xi_2 \in \mathcal{H}_2,\, \|\xi_1\|=1,\, \|\xi_2\|=1} |\langle \xi_1 | \, \xi_2 \rangle|$$

として定める．ただし，$\langle \xi_1 | \, \xi_2 \rangle$ は ξ_1, ξ_2 の内積を表す．$A = P_1 + P_2$ とする．A に対して正の有界線型作用素 B で $B^2 = A$ となるものが一意に存在する．

(1) A が直交射影作用素となる必要十分条件は $\theta = \frac{\pi}{2}$ であることを示せ．

(2) $\mathcal{L}$ を $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ により張られるヒルベルト空間とする．$B\mathcal{H}$ は $\mathcal{L}$ の中で稠密であることを示せ．

(3) 次の不等式を示せ．

$$A \leq 1 + \cos\theta.$$

B 第12問

ϕ は $\mathbf{R}$ 上の複素数値 C^∞ 級関数で，任意の非負整数 k と m に対して

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left[\ |x|^k\left|\frac{d^m\phi}{dx^m}(x)\right|\ \right]<\infty$$

を満たすとする．但し，$\frac{d^0\phi}{dx^0}=\phi$ である．$\mathbf{R}^2$ の開部分集合 $(0,\infty)\times\mathbf{R}=\{(t,x)\in\mathbf{R}^2 \mid t>0,\ x\in\mathbf{R}\}$ 上の複素数値関数 u を

$$\begin{aligned}u(t,x)=&\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbf{R}}e^{\frac{i(x-y)^2}{2t}}\phi(y)\,dy\\=&e^{\frac{ix^2}{2t}}\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}e^{-iy\frac{x}{t}}e^{\frac{iy^2}{2t}}\phi(y)\,dy,\qquad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbf{R}\end{aligned}$$

によって定める．ここで，i は虚数単位である．

(1) 任意の $t\in(0,\infty)$ に対して

$$\int_{\mathbf{R}}|u(t,x)|^2\,dx=\int_{\mathbf{R}}|\phi(y)|^2\,dy$$

が成り立つことを示せ．

(2) 集合 $(0,\infty)\times\mathbf{R}$ 上の複素数値関数 g を

$$g(t,x)=e^{\frac{ix^2}{2t}}\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}e^{-iy\frac{x}{t}}\phi(y)\,dy,\qquad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbf{R}$$

によって定める．このとき，定数 $C>0$ が存在して，任意の $t\in(0,\infty)$ に対して

$$\int_{\mathbf{R}}|u(t,x)-g(t,x)|^2\,dx\le Ct^{-2}\int_{\mathbf{R}}y^4|\phi(y)|^2\,dy$$

が成り立つことを示せ．

(3) a と b を $0<a<1,\ b>1$ を満たす任意の実数とする．$\mathbf{R}^2$ の開部分集合 D を

$$D=(a,\infty)\times(-b,b)=\{(t,x)\in\mathbf{R}^2 \mid t>a,\ -b<x<b\}$$

と定める．このとき，集合 D において u の偏導関数 $\frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ が存在して，任意の $(t,x)\in D$ に対して

$$i\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$$

が成り立つことを示せ．

B 第13問

以下の問に答えよ．

(1) H を $n\times n$ 実対称行列，$\rho(H)$ を H のスペクトル半径，O を $n\times n$ 零行列とする．このとき，$\lim_{k\to\infty} H^k = O$ となるための必要十分条件が $\rho(H)<1$ であることを示せ．

(2) 正則な $n\times n$ 実対称行列 A と $b\in\mathbf{R}^n$ に対して，方程式 $Ax=b$ の解を求めるために，反復列 v_k $(k=0,1,2,\ldots)$ を，

$$v_{k+1} = v_k - \alpha(Av_k - b) \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

で生成する．ただし，$v_0\in\mathbf{R}^n$ は初期値，$\alpha\in\mathbf{R}$ はパラメータである．n と A が以下で与えられるとき，任意の v_0 に対して v_k が，$k\to\infty$ で解 x に収束するための α についての必要十分条件を求めよ．

$$\text{(i)}\quad n=2,\ A=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)}\quad n=3,\ A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

B 第14問

$\mathbf{N}$ を正の整数全体のなす集合とする．X_n $(n \in \mathbf{N})$，S_k $(k \in \mathbf{N})$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の実確率変数とし，S_k の分布が確率密度関数

$$g_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!} k^k x^{k-1} e^{-kx} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

を持つとする．さらに，任意の $\epsilon > 0$ と $k \in \mathbf{N}$ に対して，ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して，任意の $m, n \geq N$ に対して，

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \Big| \mathrm{P}\big[X_n S_k > x\big] - \mathrm{P}\big[X_m S_k > x\big] \Big| < \epsilon$$

が成り立つと仮定する．

(1) S_k の期待値と分散を求めよ．

(2) $k \to \infty$ のとき，S_k が確率収束することを示せ．

(3) 各 $k \in \mathbf{N}$ に対して，$n \to \infty$ のとき $X_n S_k$ が法則収束することを示せ．ただし，確率変数の法則収束は分布収束ともいう．

(4) $n \to \infty$ のとき X_n が法則収束することを示せ．

B 第15問

$p_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ を

$$p_0(x)=1, \quad p_n(x)=\frac{(-1)^n n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^n(1-x)^n\right] \quad (n=1,2,\ldots)$$

と定める.

(1) $p_n(x)$ は n 次の係数を 1 とする n 次多項式であり, $m \neq n$ であれば,

$$\int_0^1 p_m(x)p_n(x)\,dx=0$$

であることを示せ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 p_n(x)^2\,dx$ の値を求めよ.

(3) n 次の係数を 1 とする n 次多項式は複素平面上に重複も含めて n 個の零点を持つ. $p_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ の零点はすべて開区間 $(0,1)$ にあり，かつ一位の零点であることを示せ.

B 第16問

以下のような微分積分方程式系の初期値・境界値問題を考える．ここで，$(S_0, I_0, r_0(\cdot)) \in [0,\infty) \times [0,\infty) \times L^1_+(0,\infty)$ は初期条件である．$L^1_+(0,\infty)$ は $(0,\infty)$ 上の非負の可積分関数のなす空間である．b, μ, β, γ は正の定数で，$\theta(\tau)$ は $[0,\infty)$ において非負有界連続な与えられた関数である．以下では，この初期値・境界値問題が $t>0$ において一意的な非負解を持ち，$\lim_{\tau\to\infty} r(t,\tau) = 0$ となることを仮定してよい．

$$
\begin{aligned}
&\frac{dS(t)}{dt} = b - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) + \int_0^\infty \theta(\tau) r(t,\tau)d\tau,\\
&\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\mu+\gamma)I(t),\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) r(t,\tau) = -(\mu + \theta(\tau))r(t,\tau),\\
&r(t,0) = \gamma I(t),\\
&S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad r(0,\tau) = r_0(\tau).
\end{aligned}
$$

(1) $\Omega = \left\{(S, I, r(\cdot)) \in [0,\infty) \times [0,\infty) \times L^1_+(0,\infty) : S + I + \int_0^\infty r(\tau)d\tau = \frac{b}{\mu}\right\}$ とする．このとき $(S_0, I_0, r_0(\cdot)) \in \Omega$ であれば，$t > 0$ において $(S(t), I(t), r(t,\cdot)) \in \Omega$ であることを示せ．

(2) $R_0 = \frac{\beta b}{\mu(\mu+\gamma)}$ とする．このとき，$I>0$ となる平衡点がただ一つ存在するための必要十分条件は，$R_0 > 1$ であることを示せ．

(3) $R_0 < 1$ であるとする．$(S_0, I_0, r_0(\cdot)) \in \Omega$ であるとき，

$$
\lim_{t\to\infty} S(t) = \frac{b}{\mu}, \quad \lim_{t\to\infty} I(t) = 0
$$

となることを示せ．

(4) $R_0 > 1$ であれば，任意の初期条件

$$
(S_0, I_0, r_0(\cdot)) \in \Omega \setminus \left\{(S, I, r(\cdot)) \in [0,\infty) \times [0,\infty) \times L^1_+(0,\infty) : I = 0\right\}
$$

に対して，$\epsilon > 0$ が存在して，

$$
\limsup_{t\to\infty} I(t) > \epsilon
$$

となることを示せ．

B 第17問

$V=\mathbf{R}[x_1,x_2]$ を実係数2変数多項式環とし，$\theta_i = x_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i=1,2)$ を V に作用する微分作用素とする．また，λ_1, λ_2, q $(0<q<1)$ を実パラメータとする．

(1) V 上の線形作用素 e_i, f_i, h_i $(i=1,2)$ を

$$e_i = \frac{1}{x_i}\frac{q^{\theta_i}-q^{-\theta_i}}{q-q^{-1}}, \qquad f_i = x_i\frac{q^{\lambda_i-\theta_i}-q^{-\lambda_i+\theta_i}}{q-q^{-1}}, \qquad h_i = \lambda_i - 2\theta_i$$

で定める．これらは交換関係

$$[e_i,f_i] = \frac{q^{h_i}-q^{-h_i}}{q-q^{-1}}, \qquad [h_i,e_i] = 2e_i, \qquad [h_i,f_i] = -2f_i$$

をみたすことを示せ．ただし，$[A,B]=AB-BA$ は交換子を表す．

(2) V 上の線形作用素 E,F,H を

$$E = e_1q^{h_2}+e_2, \qquad F = f_1 + q^{-h_1}f_2, \qquad H = h_1+h_2,$$

と定める．交換関係

$$[E,F] = \frac{q^{H}-q^{-H}}{q-q^{-1}}, \qquad [H,E] = 2E, \qquad [H,F] = -2F$$

が成立することを示せ．

(3) 線形作用素

$$C = FE + \alpha\, q^{H} + \beta\, q^{-H}$$

が E,F,H のすべてと可換となるように $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ を定めよ．

(4) $\lambda_1=\lambda_2=1$ の場合を考える．V の4次元部分空間 W で E,F,H の作用に関して閉じているものを1つ求めよ．また，その W に対し $C|_W$ は対角化可能であることを示し，その固有値と固有ベクトルを全て求めよ．

B 第18問

次の有向グラフを考える．頂点集合 Q は $\{v_{ij}\,;\,i \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}, j \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}\}$ とする．各 $i \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}, j \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ に対し，$v_{ij} \to v_{i+1\,j}$ とする．また，$j = 0, 2$ のとき $v_{ij} \to v_{i\,j+1}$ と $v_{ij} \to v_{i\,j-1}$，および $j = 1, 3$ のとき $v_{ij} \to v_{i-1\,j+1}$ と $v_{ij} \to v_{i-1\,j-1}$ とする．これらを有向辺とすることで，12 個の頂点と 36 個の辺からなる有向グラフが得られる．グラフの有向辺に沿った無限パス $\pi(0) \to \pi(1) \to \pi(2) \to \cdots$ のうちで，最初の頂点 $\pi(0)$ が $q \in Q$ に等しいもの全体を $\Pi(q)$ と書くことにする．集合 $X \subseteq Q$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{EG}(X) &= \{q \in Q\,;\, \exists \pi \in \Pi(q)\, \forall n \geq 0\ \pi(n) \in X\} \\
\mathbf{AF}(X) &= \{q \in Q\,;\, \forall \pi \in \Pi(q)\, \exists n \geq 0\ \pi(n) \in X\}
\end{aligned}
$$

と定める．また $|X|$ で X の元の個数を表すとする．

(1) $\min\{|X|\,;\,\mathbf{AF}(X) = Q\}$ を求めよ．

(2) $\min\{|X|\,;\,\mathbf{AF}(\mathbf{EG}(X)) = Q\}$ を求めよ．