受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

令和８（2026）年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ｂ　（筆記試験）

令和７（2025）年９月２日（火）
１０：００　～　１４：００

問題は全部で１８題ある．その中から**３題**選んで解答すること．

（１）　解答しようとする問題ごとに解答用紙を１枚使用すること．
試験開始後，各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　試験開始後，この問題冊子の表紙の上部の受験番号欄に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験開始後，各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（４）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**３枚の答案**，**３枚の計算用紙**である．着手した問題数が３題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙答案を補い，３枚とすること．
指示に反したもの，**答案が３枚でないものは無効**とする．
問題冊子は回収する．

（５）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

B 第1問

整数を成分とする 2 次正方行列全体のなす環を $M_2(\mathbf{Z})$ とする．正整数 n に対し，$M_2(\mathbf{Z})$ の部分環

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z}) \;\middle|\; c \in n\mathbf{Z} \right\}$$

を考える. 非負整数 r を固定し, 左 A 加群 X に対する次の条件を考える.

(F_r) X はアーベル群として $\mathbf{Z}^r$ と同型である.

(1) 条件 (F_r) をみたす左 A 加群が存在するならば, r は偶数であることを示せ.

(2) 条件 (F_r) をみたす左 A 加群の同型類は有限個であることを示せ.

B 第2問

複素数体 $\mathbf{C}$ 上の 1 変数有理関数体 $\mathbf{C}(X)$ を K とし，K 係数の多項式 $f(T) = T^8 - 2T^4 + X^2 \in K[T]$ の K 上の最小分解体を L とする.

(1) L は X の平方根を含むことを示せ.

(2) L は $f(T)$ の $\mathbf{C}(X^2)$ 上の最小分解体でもあることを示し，L の $\mathbf{C}(X^2)$ 上の拡大次数を求めよ.

(3) L に含まれる K の最大アーベル拡大を求め，そのガロア群を求めよ.

(4) 拡大 L/K の中間体 M で拡大 L/M のガロア群が位数 8 の四元数群になるものをすべて求めよ.

B 第3問

p を素数とし，$\mathbf{F}_p$ を位数 p の有限体とする．一般線型群 $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ の部分群

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, d \in \mathbf{F}_p^\times,\ b \in \mathbf{F}_p \right\}$$

を考える.

$$\psi\colon \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p[X]/(X^2)) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_p)$$

を各成分を $\mathbf{F}_p[X]/(X^2) \to \mathbf{F}_p,\ a + bX \mapsto a$ で送ることで定まる群準同型とし，$G = \psi^{-1}(B)$ とおく.

(1) 群 B における共役類の個数を求めよ.

(2) G の部分群でアーベル群であるものの位数の最大値を求めよ.

B 第4問

A を整域とし，I を A の真のイデアルとする．I を含む A の素イデアル全体を包含関係に関して半順序集合と見たとき，その極小元全体のなす集合を $\mathrm{Min}_A(I)$ と表す．A のイデアル $\sigma_A(I)$ を

$$\sigma_A(I) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}_A(I)} IA_{\mathfrak{p}} \cap A$$

と定義する．ただし，$A_{\mathfrak{p}}$ は A の素イデアル $\mathfrak{p}$ での局所化を表し，自然な包含写像によって A を $A_{\mathfrak{p}}$ の部分環とみなす．

(1) n を正の整数とする．A が有理整数環 $\mathbf{Z}$ 上の n 変数多項式環 $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ であり，I が A の単項イデアルであるならば，$\sigma_A(I) = I$ であることを示せ．

T を $\mathbf{Z}$ 上の3変数多項式環 $\mathbf{Z}[X, Y, Z]$ とし，その部分環

$$S = \mathbf{Z}[XY, YZ], \quad R = \mathbf{Z}[X^3Y^3, Y^3Z^3, XY^2Z]$$

を考える．自然な包含写像によって S を R 代数，T を S 代数とみなす．また，J を X^3Y^3, XY^2Z および3で生成される R のイデアルとする．

(2) R のイデアル $\sigma_R(J^3)$ の生成系を1組求めよ．

(3) T のイデアル $\sigma_T(JT)$ と $\sigma_T(\sigma_S(JS)T)$ の生成系をそれぞれ1組ずつ求めよ．

B 第5問

3次元球面 $S^3 = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{4} {u_i}^2 = 1 \right\}$ に対して，C^∞ 級関数

$$f \colon S^3 \times S^3 \to \mathbf{R}, \quad (u, v) \mapsto f(u, v) = {}^t uv$$

を考える．ここで ${}^t u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ は u の転置をあらわす．

(1) f の臨界値全体のなす集合を求めよ．

(2) f の正則値の逆像は，空でなければいくつかの球面の直積に同相であることを示せ．ただし，球面の次元は異なっていてもよい．

B 第6問

2次元球面 S^2 上に相異なる二点 p, q をとる．$S^2 \times \{0,1\}$ において $(p,0)$ と $(p,1)$ を同一視し，さらに $(q,0)$ と $(q,1)$ を同一視して得られる位相空間を X とおく．ただし $\{0,1\}$ には離散位相を入れる．また，写像 $\tilde{f}\colon S^2 \times \{0,1\} \to S^2 \times \{0,1\}$ を

$$\tilde{f}(x,0) = (x,1), \quad \tilde{f}(x,1) = (x,0) \quad (x \in S^2)$$

で定義し，$\tilde{f}$ が誘導する連続写像を $f: X \to X$ とおく．さらに，位相空間 Y を，

$$(x,1) \sim (f(x),0) \quad (x \in X)$$

で生成される $X \times [0,1]$ 上の同値関係による $X \times [0,1]$ の商空間とする．

(1) X の整係数ホモロジー群 $H_*(X; \mathbf{Z})$ を求めよ．

(2) Y の整係数ホモロジー群 $H_*(Y; \mathbf{Z})$ を求めよ．

B 第7問

2次元球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ 上の4点

$$p_1 = (1,0,0), \quad p_2 = (-1,0,0), \quad p_3 = (0,1,0), \quad p_4 = (0,-1,0)$$

に対して，$M = S^2 \setminus \{p_1,p_2,p_3,p_4\}$ とおく．実数 a, b に対して，M 上の1次微分形式 $\omega_{a,b}$ を

$$\omega_{a,b} = \frac{a(ydz - zdy)}{1-x^2} + \frac{b(zdx - xdz)}{1-y^2}$$

と定める．

(1) $\omega_{a,b}$ は閉微分形式であることを示せ．

(2) 次の条件 $(*)$ が成立するための実数の組 (a,b) に関する必要十分条件を求めよ．

$(*)$ $S^2 \setminus \{p_1, p_3\}$ 上の閉1次微分形式 η および $S^2 \setminus \{p_2, p_4\}$ 上の閉1次微分形式 η' が存在して，$\omega_{a,b} = \eta|_M + \eta'|_M$ が成り立つ．

B 第8問

(X, d) をコンパクト距離空間とする．正の実数 ϵ と正の整数 n に対し，

$$X^n(\epsilon) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in X^n \;\middle|\; \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}_\epsilon(x_i) = X \right\}$$

とおく．ただし

$$\overline{B}_\epsilon(x_i) = \{ y \in X \mid d(x_i, y) \leq \epsilon \}$$

である．以下の問に答えよ．

(1) 任意の正の実数 ϵ と正の整数 n に対し，$X^n(\epsilon)$ はコンパクトであることを示せ．

(2) 写像 $f\colon X \to X$ は全射であり，かつ任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$$

をみたすとする．$X^n(\epsilon) \neq \emptyset$ をみたす正の実数 ϵ と正の整数 n をとり，関数

$$E\colon X^n(\epsilon) \to \mathbf{R}, \quad E((x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i,j=1}^{n} d(x_i, x_j)$$

を考える．このとき

$$E((f(x_1), \ldots, f(x_n))) = E((x_1, \ldots, x_n))$$

をみたす $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n(\epsilon)$ が存在することを示せ．

(3) (2) の f は等長写像である，すなわち，任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

をみたすことを示せ．

(4) 任意の正の実数 ϵ に対して，ある正の実数 δ が存在して，次の主張 $(*)$ が成立することを示せ．

$(*)$ 写像 $g\colon X \to X$ が全射であり，かつ任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(g(x), g(y)) \leq (1 + \delta) d(x, y)$$

をみたすならば，ある等長写像 $h\colon X \to X$ が存在して，任意の $z \in X$ に対して

$$d(g(z), h(z)) < \epsilon$$

をみたす．

B 第9問

$\mathcal{B}(\mathbf{R})$ および $\mathcal{B}((0,\infty))$ をそれぞれ $\mathbf{R}$ および $(0,\infty)$ のボレル集合族とする．μ を $(\mathbf{R},\mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 上の測度とする．$\mathcal{B}((0,\infty))\times\mathcal{B}(\mathbf{R})$-可測関数 $\phi:(0,\infty)\times\mathbf{R}\to[0,1]$ は次をみたすものとする．

- 任意の $x\in\mathbf{R}$ に対して, $(0,\infty)$ 上の関数 $p\mapsto\phi(p,x)$ は単調非増大かつ連続.
- 任意の $x\in\mathbf{R}$ に対して, $\lim_{p\to 0}\phi(p,x)=1$.
- 任意の $p>0$ に対して, $\int_{\mathbf{R}}\phi(p,x)\mu(dx)<\infty$.
- 任意の $p>0$ に対して, $\lim_{|x|\to\infty}\phi(p,x)=0$.

$p>0$ に対して, $f(p)=\int_{\mathbf{R}}\phi(p,x)\mu(dx)$ と定める.

(1) $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ は単調非増大かつ連続な関数であることを示せ.

(2) $\lim_{p\to 0}f(p)<\infty$ と $\mu(\mathbf{R})<\infty$ が同値であることを示せ.

(3) 正の整数 n で添字付けられた $(\mathbf{R},\mathcal{B}(\mathbf{R}))$ 上の測度の列 $(\mu_n)_n$ を, 任意の n について $\mu_n(\mathbf{R})=1$ となるものとする. さらに,

$$f_n(p)=\int_{\mathbf{R}}\phi(p,x)\mu_n(dx)$$

と定めると, 次をみたすとする: 関数 $h:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ が存在して

- 任意の $p>0$ に対して $\lim_{n\to\infty}f_n(p)=h(p)$ となる.
- $\lim_{p\to 0}h(p)=1$ である.

をみたす．このとき, 任意の $\epsilon>0$ に対して, コンパクト集合 $K\subset\mathbf{R}$ で $\inf_{n\geq 1}\mu_n(K)\geq 1-\epsilon$ となるものが存在することを示せ.

B 第10問

$\gamma\colon [0,1] \to \mathbf{C}$ を C^1 級曲線，その像を $[\gamma] = \gamma([0,1])$ とする．連続関数 $f : \gamma([0,1]) \to \mathbf{C}$ に対して $\mathbf{C} \setminus [\gamma]$ 上の関数を次の積分で定める．

$$F(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

(1) $F(z)$ は $\mathbf{C} \setminus [\gamma]$ 上で正則であることを示せ．

(2) 有理関数の列 $\{R_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ で $\mathbf{C} \setminus [\gamma]$ 上で $F(z)$ に広義一様収束するものが存在することを示せ．

(3) $\gamma(t) = t$ かつ $f(w)$ が 0 でない多項式のとき $F(z)$ は $\mathbf{C}$ 上の有理型関数には解析接続できないことを示せ．

B 第11問

以下，実ヒルベルト空間の元 x, y に対し，(x, y) で x と y の内積を表すものとする．0 でない可分な実ヒルベルト空間 H に関する下記の命題 (a), (b), (c) を考える．

(a) H 上の全射かつ等長な線型作用素 U であって，次の条件をみたすものが存在する: すべての $x, y \in H$ に対し，$\lim_{n\to\infty} (U^n x, y) = 0$ が成り立つ．

(b) H の稠密な部分空間 H_0 と，H 上の全射かつ等長な線型作用素 U であって，次の条件をみたすものが存在する: すべての $x, y \in H_0$ に対し，$\lim_{n\to\infty} (U^n x, y) = 0$ が成り立つ．

(c) H は無限次元である．

以下の問に答えよ．

(1) (a) と (b) が同値であることを示せ．

(2) (b) と (c) が同値であることを示せ．

(3) 0 でない可分な実ヒルベルト空間 K と，その上の有界線型作用素 T であって，下記の (d) をみたすが，(e) をみたさないものの例を一つ挙げよ．

(d) K の稠密な部分空間 K_0 であって，次の条件をみたすものが存在する: すべての $x, y \in K_0$ に対し，$\lim_{n\to\infty} (T^n x, y) = 0$ が成り立つ．

(e) すべての $x, y \in K$ に対し，$\lim_{n\to\infty} (T^n x, y) = 0$ が成り立つ．

B 第12問

n を正の整数とし，a を正の実数とする．$x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$g_a(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \int_{(0,\infty)} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} e^{-t} t^{\frac{a-n}{2}-1}\, dt$$

とおく．ここで，$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ であり，正の実数 p に対して

$$\Gamma(p) = \int_{(0,\infty)} e^{-t} t^{p-1}\, dt$$

である．この問題では，必要であれば，

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-|y|^2}\, dy = \pi^{\frac{n}{2}}$$

が成り立つことを証明なしに用いてよい．以下の問に答えよ．

(1) 関数 g_a は $\mathbf{R}^n$ 上ルベーグ可積分であることを示せ．

(2) a と b を正の実数とする．ルベーグ測度に関してほとんど全ての $x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$(g_a * g_b)(x) = g_{a+b}(x)$$

が成り立つことを示せ．ここで，

$$(g_a * g_b)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} g_a(x-y) g_b(y)\, dy$$

である．

(3) $0 < a < n$ とする．このとき，a と n に依存する $C > 0$ が存在して，$0 < |x| < 1$ をみたす任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$g_a(x) \leq C|x|^{-(n-a)}$$

が成り立つことを示せ．

B 第13問

$\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$ を正の整数全体の集合とする．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された実確率変数列

$$X_1, X_2, X_3, \dots, Y_1, Y_2, Y_3, \dots$$

は独立であるとする．X_i $(i \in \mathbf{N})$ は開区間 $(0,1)$ に値をとり，

$$P(X_i \leq x) = x \qquad (x \in (0,1))$$

をみたし，Y_i $(i \in \mathbf{N})$ は正の実数に値をとり，

$$P(Y_i > y) = e^{-y} \qquad (y > 0)$$

をみたすとする． 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$$

とおく．

(1) $n \in \mathbf{N}$ に対して M_n の分布の確率密度関数を求めよ．

(2) $n \to \infty$ のとき M_n が 1 に確率収束することを示せ．

(3) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された実確率変数 Z が

$$P(Z \leq z) = \exp(-\exp(-z)) \qquad (z \in \mathbf{R})$$

をみたすとする．$n \to \infty$ のとき $\max_{i=1,\dots,n} Y_i - \log n$ が Z に法則収束することを示せ．ただし，確率変数の法則収束は分布収束ともいう．

(4) $n \to \infty$ のとき $\max_{i=1,\dots,n}(X_i + Y_i) - \log n$ が $Z + \log(e-1)$ に法則収束することを示せ．

B 第14問

確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上で定義された独立な実確率変数列$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$について，各$\epsilon_i$が標準正規分布に従っているとする．$x_1, x_2, \ldots$を$x_1 \neq 0$なる実数列，$s_1, s_2, \ldots$を正数列，また$\theta \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$を定数とする．各$i = 1, 2, \ldots$に対して

$$Y_i = x_i \theta + s_i \sigma \epsilon_i$$

とおく．

(1) $(Y_1, \ldots, Y_n)$の同時密度関数を$(y_1, \ldots, y_n) \mapsto f_n(y_1, \ldots, y_n; \theta, \sigma)$とする．各$\sigma > 0$に対して，以下の関数$\ell_n(\theta, \sigma)$を最大にする$\widehat{\theta}_n \in \mathbf{R}$を求めよ．

$$\theta \mapsto \ell_n(\theta, \sigma) := \log f_n(Y_1, \ldots, Y_n; \theta, \sigma)$$

(2) $\widehat{\theta}_n$の分布を求めよ．

(3) 各$n \in \mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$に対して

$$Q_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{s_i^2}$$

とおく．$n \to \infty$のとき$\widehat{\theta}_n$がθへ確率収束するためのQ_nに関する必要十分条件を求めよ．

(4) 以下で定まる確率変数列は，$n \to \infty$のときσ^2へ確率収束することを示せ．

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i^2} \left(Y_i - x_i \widehat{\theta}_n \right)^2$$

B 第15問

N を正の整数とする．与えられた $f_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ に対して，$u_i \in \mathbf{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, N+1)$ を求める差分方程式

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \qquad u_0 = u_{N+1} = 0 \qquad (*)$$

を考える．ただし，$h = (N+1)^{-1}$ とおいている．

(1) $f_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ とする．$(*)$ をみたす $u_i \in \mathbf{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, N+1)$ が存在するならば，$u_i \geq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, N+1)$ をみたすことを示せ．

(2) $(*)$ をみたす $u_i \in \mathbf{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, N+1)$ が一意的に存在することを示せ．

(3) 関数 $g(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e - 1}$ に対して，$g_i = g(ih)$ $(i = 0, 1, \ldots, N+1)$ とおく．このとき，次の不等式をみたす h には依存しない正定数 M の存在を示せ．

$$\max_{i=1,2,\ldots,N} \left| -\frac{g_{i-1} - 2g_i + g_{i+1}}{h^2} + \frac{g_i - g_{i-1}}{h} - 1 \right| \leq Mh.$$

(4) (3) に現れる M を固定して，$2Mh \leq 1$ を仮定する．このとき，h に依存しない正定数 C が存在して $(*)$ をみたす任意の $f_i, u_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, \ldots, N)$ について不等式

$$\max_{i=1,2,\ldots,N} |u_i| \leq C \max_{i=1,2,\ldots,N} |f_i|$$

がなりたつことを示せ．

B 第16問

原点を除いたユークリッド平面に極座標(r,θ)を入れる．$r>0$で定義された滑らかな中心力ポテンシャル関数$U(r)$のもとで運動する質量1の質点を考える．この系のラグランジアンは

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U(r)$$

で与えられるものとする．以下の問に答えよ．

(1) オイラー・ラグランジュ方程式を書き下せ．

(2) 全エネルギーEおよび角運動量Jを，それぞれ$r,\dot{r},\theta,\dot{\theta}$の関数として表せ．また，これらが保存量であることを(1)の結果を用いて示せ．

以下では次を仮定する：動径rは有界閉区間$[r_1,r_2]$を周期的に往復運動し，その周期はTである．

(3) 周期Tを$\displaystyle\int_{r_1}^{r_2}\cdots dr$という形の定積分で表せ．

(4) $k>0$とする．ポテンシャルが$U(r)=-k/r$のときの運動の軌跡を$r=f(\theta)$という形で具体的に表せ．必要なら次の公式を用いて良い．

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{-c}}\arccos\left(\frac{b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)\qquad(c<0,\quad b^2-4ac>0)$$

B 第17問

正の整数nに対し，関数$L_n(z)$を$-1<z<1$において以下のように定める．

$$L_n(z)=z\int_0^1\frac{du_1}{u_1}\int_0^{u_1}\frac{du_2}{u_2}\int_0^{u_2}\cdots\int_0^{u_{n-1}}\frac{du_n}{u_n}\int_0^{u_n}\frac{du_{n+1}}{1-zu_{n+1}}$$

任意の正の整数nに対して次の問に答えよ．

(1) $\displaystyle z\frac{dL_{n+1}(z)}{dz}-L_n(z)$を求めよ．

(2) $L_n(z)+L_n(-z)=2^{-n}L_n(z^2)$を示せ．

(3) 以下の公式を示せ．

$$\int_0^\infty\frac{x^n dx}{e^{x+w}-1}=n!\,L_n(e^{-w})\qquad(\forall w>0)$$

B 第18問

この問題では一階述語論理について考え，自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ には 0 を含めない．

$\mathcal{L}$ を二項関係記号 $\sim$ のみからなる言語とし，Γ_{eq} を $\sim$ が同値関係であることを述べた $\mathcal{L}$ の公理系とする．つまり，Γ_{eq} は次の 3 つの $\mathcal{L}$-文からなる公理系である．

$$\forall x\,(x \sim x), \qquad \forall x \forall y\,(x \sim y \to y \sim x), \qquad \forall x \forall y \forall z\,((x \sim y \wedge y \sim z) \to x \sim z)$$

$n \in \boldsymbol{N}$ に対して,「x を代表元とする $\sim$ の同値類が n 個の要素からなる」ことを述べた $\mathcal{L}$-論理式

$$\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \left(\left(\bigwedge_{i<j\leq n} \neg\, x_i = x_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \leq n} x \sim x_i \right) \wedge \forall y \left(x \sim y \to \bigvee_{i \leq n} x_i = y \right) \right)$$

を $\varphi_n(x)$ とし,「n 個の要素からなる $\sim$ の同値類がただ 1 つ存在する」ことを述べた $\mathcal{L}$-文

$$\exists x\, \varphi_n(x) \wedge \forall x \forall y\, ((\varphi_n(x) \wedge \varphi_n(y)) \to x \sim y)$$

を ψ_n とする．また $\mathcal{L}$ の公理系 $\Gamma_{\mathrm{eq}} \cup \{\psi_n \mid n \in \boldsymbol{N}\}$ を Γ とする．

Γ のモデル $\mathcal{A} = (A, \sim_{\mathcal{A}})$ に対して，A が可算集合であるとき，$\mathcal{A}$ は可算であるといい，無限個の要素からなる $\sim_{\mathcal{A}}$ の同値類が無限個存在するとき，$\mathcal{A}$ はリッチであるということにする．

以下の問に答えよ．

(1) $\mathcal{A}_1 = (A_1, \sim_{\mathcal{A}_1})$ と $\mathcal{A}_2 = (A_2, \sim_{\mathcal{A}_2})$ を可算でリッチな Γ のモデルとする．このとき $\mathcal{A}_1$ と $\mathcal{A}_2$ は同型であることを示せ．

(2) Γ' を無矛盾な $\mathcal{L}$ の公理系とし，$\Gamma \subseteq \Gamma'$ とする．このとき，可算でリッチな Γ' のモデルが存在することを示せ．

(3) すべての $\mathcal{L}$-文 ρ に対して，ρ かその否定 $\neg\rho$ が Γ で証明できることを示せ．