受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

令和８（2026）年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ａ　（筆記試験）

令和７（2025）年９月１日（月）

１３：００　～　１６：００

問題は全部で７題ある．Ａ 第１問，Ａ 第２問は必答問題である．Ａ 第３問～Ａ 第７問の中から２題選び，必答問題と合わせて**合計４題**解答すること．

（１）　解答しようとする問題ごとに解答用紙を１枚使用すること．
試験開始後，各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　試験開始後，この問題冊子の表紙の上部の受験番号欄に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験開始後，各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（４）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**４枚の答案**，**４枚の計算用紙**である．着手した問題数が４題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，４枚とすること．
指示に反したもの，**答案が４枚でないものは無効**とする．
問題冊子は回収する．

（５）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

A 第1問 (必答)

重積分

$$I = \iint_D \frac{\min\{x^2, 1-y^2\}}{(1+x^2+y^2)^3}\,dx\,dy$$

の値を求めよ．ただし

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 3\}$$

である．

A 第2問 (必答)

$a, b \in \mathbf{R}$ とする．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & b & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & b & 1 & 2 \\ -2 & -b & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおく．線型写像 $f_A\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ および $f_B\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ を，$\mathbf{v} \in \mathbf{R}^4$ に対して $f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ および $f_B(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$ とおくことによって定める．

(1) f_A の像 $\mathrm{Im}\, f_A$ の実線型空間としての次元を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker} f_B$ を f_B の核とする．$\mathbf{R}^4 = \mathrm{Im}\, f_A \oplus \mathrm{Ker} f_B$ となるための a, b に対する必要十分条件を求めよ．

A 第3問

実数 x についてのべき級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

を考える. ただし, $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ は

$$\lim_{k\to\infty} kc_k = 0$$

をみたす実数列とする.

(1) べき級数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ の収束半径は 1 以上であることを示せ.

(2) 任意の $x \in (0,1)$ に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

とおく. このとき, 任意の $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \right| \leq (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|c_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| x^k$$

がなりたつことを示せ.

(3) 区間 $(0,1)$ 上の (2) で定めた関数 f を考える. ある実数 L が存在し

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = L$$

がなりたつならば

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = L$$

となることを示せ.

A 第4問

z を変数とする $\mathbf{C}$ 上の正則関数全体のなす複素線型空間を V とし, $D = z\dfrac{d}{dz}$ とおく. $f \in V$ に対し,

$$\{f, Df, D^2 f, \ldots\} = \{D^n f \mid n \in \mathbf{Z}, n \geq 0\}$$

の張る線型部分空間が有限次元ならば, $f(z)$ は z の多項式であることを証明せよ.

A 第5問

u_0 と v_0 を $(u_0, v_0) \neq (3, 2)$ をみたす正の定数とする．u と v は区間 $[0, \infty)$ 上の正値の連続関数で，区間 $(0, \infty)$ 上で C^1 級であり，

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = 2u(t) - u(t)v(t) \\ \dfrac{dv}{dt}(t) = -3v(t) + u(t)v(t) \end{cases} \qquad (t > 0),$$

$$u(0) = u_0, \qquad v(0) = v_0$$

をみたすとする．$\mathbf{R}^2$ の部分集合 D を

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$$

と定め，集合 D 上の実数値関数 F を

$$F(x, y) = x - 3\log x + y - 2\log y \qquad (x > 0,\ y > 0)$$

によって定める．以下の問に答えよ．

(1) 任意の $t > 0$ に対して

$$F(u(t), v(t)) = F(u_0, v_0)$$

がなりたつことを示せ．

(2) 関数 F が集合 D で最大値をとるかどうかを判定せよ．また，集合 D で最小値をとるかどうかを判定せよ．

(3) 任意の $t > 0$ に対して，$(u(t), v(t)) \neq (3, 2)$ であることを示せ．さらに，極限 $\lim_{t \to \infty} (u(t), v(t))$ は存在しないことを示せ．

(4) 正の実数 T が存在して，$(u(T), v(T)) = (u_0, v_0)$ がなりたつとする．この T について

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(t)\,dt$$

を求めよ．

A 第6問

(1) i を虚数単位とする．実数 t に対して次の積分の値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2 + 1}\,dx$$

(2) n を正の整数とする．相異なる実数 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ に対して n 次正方行列

$$A = \left(e^{-|t_j - t_k|}\right)_{j,k=1,\ldots,n}$$

は正定値であることを示せ．

A 第7問

X および Y をコンパクト距離空間とし，$[0,1]=\{t\in\mathbf{R}\mid 0\le t\le 1\}$ とする．また，$f\colon X\times[0,1]\to Y$ を連続写像とし，$t\in[0,1]$ について $f_t\colon X\to Y$ を

$$f_t(x)=f(x,t)\quad (x\in X)$$

によって定義する．任意の $x_0\in X$ と任意の $t_0\in[0,1]$ について X の開集合 $U_{(x_0,t_0)}$ と $[0,1]$ の開集合 $V_{(x_0,t_0)}$ が存在して，$x_0\in U_{(x_0,t_0)}, t_0\in V_{(x_0,t_0)}$ であり，かつ任意の $t\in V_{(x_0,t_0)}$ について f_t の $U_{(x_0,t_0)}$ への制限が単射であると仮定する．

(1) Y の任意の閉集合 C について，集合

$$A(C)=\{t\in[0,1]\mid f_t(X)\cap C\neq\emptyset\}$$

が $[0,1]$ の閉集合であることを証明せよ．

(2) 任意の 0 以上の整数 n と $y_0\in Y$ について，集合

$$B_n(y_0)=\{t\in[0,1]\mid f_t^{-1}(\{y_0\})\text{ の濃度は } n \text{ 以下である }\}$$

が $[0,1]$ の開集合であることを証明せよ．