令和４（2022）年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ｂ　（筆記試験）

令和３（2021）年 ８月３１日（火）
１１：００ ～ １５：００

問題は全部で１８題ある．その中から**３題**選んで解答すること．

（１）　解答しようとする問題ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名は記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**３枚の答案**，および**３枚の計算用紙**である．着手した問題数が３題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙答案を補い，３枚とすること．
指示に反したもの，**答案が３枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

B 第 1 問

$\mathfrak{S}_n$ を n 次対称群とし，$M_n(\mathbf{C})$ で n 次の複素正方行列全体を表す．$A \in M_n(\mathbf{C})$, $1 \le i, j \le n$ に対して，$a_{i,j}$ で A の (i,j) 成分を表す．$A \in M_n(\mathbf{C}), \sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，A^σ を (i,j) 成分が $a_{\sigma(i),\sigma(j)}$ である $M_n(\mathbf{C})$ の元として定める．$\mathfrak{S}_n$ の部分群 G に対して

$$d_n(G) = \dim\{A \in M_n(\mathbf{C}) \mid A^\sigma = A \ (\sigma \in G)\}$$

とおく．ここで dim は複素ベクトル空間としての次元を表す．

(1) $n \ge 2$ に対して $d_n(\mathfrak{S}_n)$ を求めよ．

(2) $\mathfrak{A}_n$ を n 次交代群とし，自然に $\mathfrak{S}_n$ の部分群とみなす．このとき $n \ge 2$ に対して $d_n(\mathfrak{A}_n)$ を求めよ．

(3) G が $\{1, \ldots, n\}$ に推移的に作用する $\mathfrak{S}_n$ の部分群を動いたときの $d_n(G)$ の最大値を T_n とする．このとき $n \ge 2$ に対して T_n を求めよ．

B 第 2 問

複素数体 $\mathbf{C}$ 上の 2 変数多項式環 $\mathbf{C}[X, Y]$ の剰余環 $\mathbf{C}[X, Y]/(X^2)$ を R で表し，R のイデアル $(X, Y)/(X^2)$ を $\mathfrak{m}$ で表す．$\mathbf{C}$ ベクトル空間 $R \oplus \mathfrak{m}$ に積を

$$(a, z) * (b, w) = (ab, aw + bz) \quad (a, b \in R, \ z, w \in \mathfrak{m})$$

によって定義する．この積によって $R \oplus \mathfrak{m}$ を $\mathbf{C}$ 代数とみなしたものを $R * \mathfrak{m}$ と表す．

(1) $\mathfrak{m} * \mathfrak{m} = \{(a, z) \in R * \mathfrak{m} \mid a, z \in \mathfrak{m}\}$ は $R * \mathfrak{m}$ の極大イデアルであることを示せ．

(2) $\mathbf{C}$ ベクトル空間 $(\mathfrak{m} * \mathfrak{m})/(\mathfrak{m} * \mathfrak{m})^2$ の次元 n を求めよ．

(3) (2) で得られた整数 n に対し，$\mathbf{C}$ 上の n 変数多項式環 $\mathbf{C}[T_1, \ldots, T_n]$ から $R * \mathfrak{m}$ への全射環準同型を 1 つ構成し，その核の $\mathbf{C}[T_1, \ldots, T_n]$ のイデアルとしての生成系を 1 組求めよ．

B 第3問

整数 a, b に対し，環準同型 $\phi_{a,b}\colon \mathbf{Z}[X] \to \mathbf{Z}[Y,Z]$ を $\phi_{a,b}(X) = a(Y^5+Y^3Z^2)+bZ^6$ によって定める．$\mathbf{Z}[Y,Z]$ が $\phi_{a,b}$ によって $\mathbf{Z}[X]$ 上の自由加群になるための a, b に関する必要十分条件を求めよ．

B 第4問

p を素数とし，$\mathbf{F}_p$ を位数 p の有限体とする．

$$F = \mathbf{F}_p(x,y), \quad K = \mathbf{F}_p(x^p - x, x^{p-1}y^p - y)$$

とおき，F の K 上の Galois 閉包を L とする．

(1) F の K 上の拡大次数 $[F:K]$ を求めよ．

(2) L の F 上の拡大次数 $[L:F]$ を求めよ．

(3) L の部分体で K の p 次拡大になっており F に含まれないものの個数を求めよ．

B 第 5 問

2 次実正方行列全体のなす集合を $M(2,\mathbf{R})$ とし，行列式が 0 でない元からなる $M(2,\mathbf{R})$ の部分集合を $GL(2,\mathbf{R})$ とする．$\mathbf{R}^2$ の標準内積を $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ に対し，$\langle u,v\rangle={}^t\!u\,v=u_1v_1+u_2v_2$ と表記し，

$$
\begin{aligned}
M&=\{(u,v)\in\mathbf{R}^2\oplus\mathbf{R}^2 \mid \langle u,v\rangle=1\},\\
N&=\{Y\in M(2,\mathbf{R}) \mid \operatorname{rank}Y=\operatorname{Trace}Y=1\}
\end{aligned}
$$

とおく．写像 $\pi\colon M\to N$ を $(u,v)\mapsto u\,{}^t\!v$ によって定める．

(1) M および N は π が C^∞ 級写像となるような C^∞ 級多様体の構造をもつことを示せ．

(2) M 上の 2 次微分形式 η を $\eta=du_1\wedge dv_1+du_2\wedge dv_2$ と定める．$\pi^*\omega=\eta$ となる N 上の 2 次微分形式 ω が唯一つ存在することを示せ．

(3) $G=GL(2,\mathbf{R})$ の元 g に対して $L_g\colon N\to N$, $Y\mapsto gYg^{-1}$ によって得られる G の N への作用は推移的であることを示せ．さらに，任意の $g\in G$ に対して $L_g^*\omega=\omega$ を示せ．

(4) $b>0$ に対して $S(b)=\{Y\in N \mid \operatorname{Trace}(Y\,{}^tY-Y^2)\le b^2\}$ とおく．積分 $\int_{S(b)}\omega$ を計算せよ．

B 第 6 問

p_0, p_1, p_2, p_3 を円周 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ の相異なる 4 点とする．トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ の開部分集合 U_0, U_1, U_2, U_3 を次で定める．

$$\begin{cases} U_0 &= \{(p,q) \in S^1 \times S^1 \mid q \neq p_0\}, \\ U_i &= \{(p,q) \in S^1 \times S^1 \mid p \neq p_i\} \qquad (i = 1,2,3). \end{cases}$$

T^2 上の 1 次微分形式であって U_i 上で完全形式であるもの全体の集合を P_i とする．

(1) $\alpha_1 \in P_1$ と $\alpha_2 \in P_2$ に対して $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ は T^2 上の完全形式であることを示せ．

(2) $P_0 \cap P_1$ の要素は T^2 上の完全形式であることを示せ．

(3) $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ の要素であって T^2 上の完全形式でないものの例を 1 つ与えよ．

ただし S^1, T^2 の de Rham コホモロジーの性質は，この問題を解くにあたっては，主張を明確に述べた上で用いてよい．

B 第 7 問

境界をもたないコンパクトな 3 次元 C^∞ 級多様体 M からユークリッド空間 $\mathbf{R}^4$ への C^∞ 級はめ込み $f : M \to \mathbf{R}^4$ が次の条件をみたすとする．任意の点 $p \in \mathbf{R}^4$ について，

(i) $f^{-1}(\{p\})$ は高々 2 点からなる．

(ii) $f^{-1}(\{p\})$ がちょうど 2 点 $x, y \in M$ からなるときには，

$$(df)_x(T_xM) + (df)_y(T_yM) = T_p\mathbf{R}^4$$

が成り立つ．

(1) $f(x) = f(y)$ となる相異なる点 $x, y \in M$ の組 (x,y) 全体のなす集合を D とする．D は $M \times M$ の 2 次元 C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

(2) $f^{-1}(\{f(x)\})$ がちょうど 2 点からなる点 $x \in M$ 全体のなす集合を S とする．S は M の 2 次元 C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

B 第 8 問

正の整数 m, n に対し，$\mathbf{C}^2$ の部分位相空間

$$X_{m,n} = \left\{ (x, y) \in \mathbf{C}^2 \,\middle|\, x^m = y^n \right\}$$

を考える.

(1) $X_{2,2}$ が位相多様体ではないことを示せ.

(2) $X_{m,n}$ が位相多様体になるための (m, n) に対する必要十分条件を求めよ.

(3) $X_{m,n} \setminus \{(0,0)\}$ の整数係数ホモロジー群 $H_*(X_{m,n} \setminus \{(0,0)\}; \mathbf{Z})$ を求めよ.

B 第 9 問

X を集合とし，正の整数 n に対して，$f_1, f_2, \ldots, f_n$ を X 上の実数値関数の列とする. $f_1, f_2, \ldots, f_n$ をすべて可測にするような X 上の完全加法族のうち，最小のものを $\mathcal{F}_n$ と表す. ただし，完全加法族は σ-加法族ともいう.

(1) $g : X \to \mathbf{R}$ が $\mathcal{F}_1$-可測ならば，あるボレル可測関数 $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が存在して，$g = \phi \circ f_1$ となることを示せ.

(2) $h : X \to \mathbf{R}$ が $\mathcal{F}_n$-可測ならば，あるボレル可測関数 $\psi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ が存在して，$h = \psi \circ (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ となることを示せ. ただし，

$$(f_1, f_2, \ldots, f_n) \ : \ X \to \mathbf{R}^n$$

は，$(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ $(x \in X)$ で定まる写像である.

B 第 10 問

複素平面 $\mathbf{C}$ 上で定義された正則関数 $f(z)$ が

$$\operatorname{Re} f(z) \leq 1 + |z|^2 \qquad (z \in \mathbf{C})$$

をみたすならば，$f(z)$ は 2 次以下の多項式であることを示せ．

B 第 11 問

$\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ を非負の実数列とする．$1 \leq p < \infty$ に対して

$$\mathcal{S} = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p \mid |x_n| \leq \varepsilon_n \ (n = 1, 2, \ldots)\}$$

とする．ただし，l^p は，複素数列 $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ をみたすもの全体の集合で，

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

をノルムとするバナッハ空間を表すものとする．

$\mathcal{S}$ が l^p 内のコンパクト集合であるための，数列 $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対する必要十分条件を求めよ．

B 第 12 問

$\mathbf{R}^2$ の錐領域

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, |y| < x\}$$

を考える. 実数値関数 $u \in C(\overline{D})$ は, D 上で C^2 級で,

$$-\Delta u(x,y) \geq 0 \quad ((x,y) \in D), \qquad \inf_{(x,y)\in\partial D} u(x,y) \geq 0$$

をみたすとする. 以下の問に答えよ.

(1) 関数 u は D 上非負とは限らないことを示せ.

(2) 関数 u が

$$\lim_{R\to\infty} \inf_{(x,y)\in D\cap\partial B(0,R)} \frac{u(x,y)}{1+x^2-y^2} \geq 0$$

をみたしたとする. ただし, $B(0,R) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, \sqrt{x^2+y^2} < R\}$ とする. D 上の関数 v を

$$v(x,y) = \frac{u(x,y)}{1+x^2-y^2}$$

と定義する. このとき, 関数 v が D 上非負になること, すなわち, 関数 u が D 上非負になることを示せ.

B 第 13 問

$\alpha : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ を周期 $T > 0$ をもつ連続な周期関数とし,

$$\alpha^* = \frac{1}{T}\int_0^T \alpha(s)ds$$

とおく. $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ を連続関数とし, ある定数 $M > 0, \epsilon > 0$ が存在して

$$|f(t)| \leq Me^{(\alpha^*-\epsilon)t} \qquad (t \geq 0)$$

が成り立つと仮定する. $x : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ を次の常微分方程式の解とする.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha(t)x(t) + f(t) \qquad (t \geq 0).$$

このとき, 周期 T をもつ連続な周期関数 $\phi : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ が存在して

$$\lim_{t\to\infty} |e^{-\alpha^* t}x(t) - \phi(t)| = 0$$

となることを示せ.

B 第 14 問

A を正の実数として関数 $f(x) = -Ax\,(x \in \mathbf{R})$ を考える．常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad y(0) = 1$$

の解を $y(t)$ とする．さらに，正の実数 h に対応して次の数列 $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}, \{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定める：

$$Y_0 = 1, \quad Y_{n+1} = Y_n + hk_2(Y_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = Z_n + \frac{h}{6}(k_1(Z_n) + 4k_2(Z_n) + k_3(Z_n)) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

ただし，関数 $k_1(x), k_2(x), k_3(x)$ は

$$k_1(x) = f(x), \quad k_2(x) = f\Big(x + \frac{h}{2}k_1(x)\Big), \quad k_3(x) = f\big(x - hk_1(x) + 2hk_2(x)\big)$$

によって定義されている．このとき以下の問に答えよ．

(1) 正の実数 T を固定する．次をみたす正の定数 h_0, C_1, C_2 が存在することを示せ：$0 < h \leq h_0$ のとき，

$$|y(nh) - Y_n| \leq C_1 h^2 \quad かつ \quad |y(nh) - Z_n| \leq C_2 h^3 \quad (n = 0, \ldots, \lfloor T/h \rfloor)$$

が成り立つ．ただし，実数 a に対して，$\lfloor a \rfloor$ は a 以下の最大の整数を表す．

(2) 次をみたす正の定数 h_1 が存在することを示せ：$h \geq h_1$ のとき，

$$|y(nh) - Y_n| < |y(nh) - Z_n| \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

が成り立つ．

B 第 15 問

整数 m に対して，m 以上の整数全体の集合を $\mathbf{Z}_{\geq m}$ で表す．$\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ に対し，次の 2 階の線形常微分方程式を考える．

$$x^2 u''(x) + x u'(x) + \left(x^2 - \frac{\nu^2}{4}\right) u(x) = 0.$$

以下の問に答えよ．

(1) 上記の微分方程式は $(0, \infty)$ において定義された以下の形の級数解 $u_\nu(x)$ を持つことを示せ．

$$u_\nu(x) = x^{\frac{\nu}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right).$$

(2) $\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ を固定する．このとき，

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{\nu}{2}} u_\nu(x)\right) = \gamma x^{-\frac{\nu}{2}} u_{\nu+2}(x) \qquad (x > 0)$$

が成り立つような定数 $\gamma \in \mathbf{R}$ を求めよ．

(3) $\nu \in \mathbf{Z}_{\geq 3}$ を固定する．このとき，

$$u_{\nu+2}(x) + \omega\, u_{\nu-2}(x) = \phi(x) u_\nu(x) \qquad (x > 0)$$

が成り立つような定数 $\omega \in \mathbf{R}$ と零点を持たない関数 $\phi : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ の組を 1 つ求めよ．

(4) 任意の $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対し，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} u_{2k+1}(x)$ を求めよ．

B 第 16 問

無向有限グラフ $G=(V_G,E_G)$ 上のイジング模型とは，スピン配位 $s:V_G\to\{1,-1\}$ のボルツマン重率が,

$$\exp\left\{K\sum_{(i,j)\in E_G}s(i)s(j)+H\sum_{i\in V_G}s(i)\right\}$$

で与えられるような統計力学模型である．ただし，$H>0$ は外場, $K>0$ は相互作用を表す実パラメータである．n を正整数とし，図 1 のようなグラフ C_n 上のイジング模型を考えたい．グラフ C_n は，図 2 のような二分木 B_n（頂点数 2^n）の 3 つのコピー $B_n^{(1)},B_n^{(2)},B_n^{(3)}$ を根で繋ぐ (3 つの根を同一視して C_n の頂点 o とみなす) 操作で得られる．B_n 上のイジング模型において，根 r のスピンに $s(r)=\sigma$ という条件を課し，かつ $s(r)$ には外場が働かないとした状態和

$$Q_n(\sigma)=\sum_{\substack{s:V_{B_n}\to\{1,-1\}\\ s(r)=\sigma}}\exp\left\{K\sum_{(i,j)\in E_{B_n}}s(i)s(j)+H\sum_{\substack{i\in V_{B_n}\\ i\neq r}}s(i)\right\}$$

を考える．また，$x_n=Q_n(-1)/Q_n(1)$ とおく．

(1) C_n 上のイジング模型において，スピン $s(o)$ の, 上で定義したボルツマン重率に関する期待値 M_n を x_n で表せ.

(2) x_n $(n=1,2,3,\dots)$ に関する漸化式を，1 変数関数 f を用いて $x_{n+1}=f(x_n)$ の形で表せ．また，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

(3) $M=\lim_{n\to\infty}M_n$ が，H と K からどのように定まるかを説明せよ.

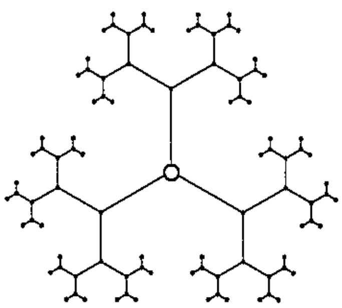

図 1　$n=5$ の場合の C_n の図．中央の白丸は頂点 o を表す.

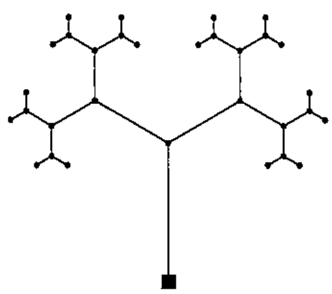

図 2　$n=5$ の場合の B_n の図．■ は B_n の根 r を表す.

B 第 17 問

$\mathrm{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ を自然数全体の集合とし，N 上の写像 $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ 全体からなる集合を N^{N} で表す．一般に集合 X の濃度を $|X|$ で表し，$X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$ は集合 X, Y の差集合を表す．

以下の 2 条件をみたす無限集合 $F \subset \mathrm{N}^{\mathrm{N}}$ を考える．

(a) $\forall f, g \in F\,(f \neq g \Rightarrow |\{n \in \mathrm{N} \mid f(n) = g(n)\}| < \aleph_0)$.

(b) $A_f := \{g \in F \mid |\{n \in \mathrm{N} \mid g(n) < f(n)\}| = \aleph_0\}$ に対して，$\forall f \in F\,(|A_f| < \aleph_0)$.

またフィルター $\{X \subset \mathrm{N} \mid |\mathrm{N} \setminus X| < \aleph_0\}$ を拡張した N 上の超フィルター $\mathcal{U}$ を 1 つ取り，写像 $f, g \in \mathrm{N}^{\mathrm{N}}$ に対して，$g \prec f :\Leftrightarrow (\{n \in \mathrm{N} \mid g(n) < f(n)\} \in \mathcal{U})$ とおく．ただし，超フィルターは極大フィルターともいう．以下の問に答えよ．

(1) $f, g \in F$ に対して，$g \prec f$ ならば $g \in A_f$ となることを示せ．

(2) $\prec$ は F 上の線形順序であることを示せ．

(3) $\forall n, m \in \mathrm{N}(n < m \Rightarrow f_n \prec f_m)$ かつ $\forall g \in F \exists n \in \mathrm{N}(g \preceq f_n)$ となる列 $\{f_n\}_{n \in \mathrm{N}} \subset F$ の存在を示せ．ここで $g \preceq f :\Leftrightarrow (g \prec f \vee g = f)$.

(4) $|F| = \aleph_0$ であることを示せ．

B 第 18 問

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を考え，以下，確率変数はこの確率空間上で定義されているものとする．任意の確率変数 X, Y に対して，

$$\rho(X,Y) = \sup_{x\in\mathbf{R}} |P(X \le x) - P(Y \le x)|$$

と定める．$X_1, X_2, \ldots$ を正値確率変数列とし，$n \ge 1$ について

$$Y_n = \sqrt{n}(X_n - 1), \qquad T_n = 2n(X_n - \log X_n - 1)$$

とおく．ある確率変数 Z が存在して $\rho(Y_n, Z) \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つと仮定する．また，関数 $F : \mathbf{R} \to [0,1]$ を $F(x) = P(Z \le x)$ $(x \in \mathbf{R})$ で定める．以下の問に答えよ．

(1) 任意の確率変数 X, Y と実数 x に対して

$$|P(X < x) - P(Y < x)| \le \rho(X,Y)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\rho(Y_n^2, Z^2) \to 0$ $(n \to \infty)$ を示せ．

(3) $n(X_n - 1)^3$ は $n \to \infty$ のとき 0 に確率収束することを示せ．

(4) F が連続ならば $\rho(T_n, Z^2) \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つことを示せ．

(5) F が連続でないならば，(4) の収束が成り立つとは限らないことを示せ．