令和４（2022）年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ａ　（筆記試験）

令和３（2021）年　８月３０日（月）

１１：００　～　１４：００

問題は全部で７題ある．Ａ 第１問，Ａ 第２問は必答問題である．Ａ 第３問～Ａ 第７問の中から２題選び，必答問題と合わせて**合計４題**解答すること．

（１）　解答しようとする問題ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**４枚の答案**，および**４枚の計算用紙**である．着手した問題数が４題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，４枚とすること．
指示に反したもの，**答案が４枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

A 第 1 問（必答）

x を変数とする次数 2 以下の実係数多項式全体のなす実線型空間を V とする．a, b を実数とし，線型写像 $S, T\colon V \to V$ を

$$S(f(x)) = \frac{d}{dx}((ax+2)f(x)), \quad T(f(x)) = (bx+3)\frac{d}{dx}f(x) \qquad (f(x) \in V)$$

と定める．

(1) S を対角化する V の基底が存在するための a に対する必要十分条件を求めよ．

(2) S, T を同時に対角化する V の基底が存在するための a, b に対する必要十分条件を求めよ．

A 第 2 問（必答）

次の定積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\, dxdy$$

ただし, 積分領域 D を次で定める．

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; |x| \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

A 第 3 問

実数 a, b に対して, 次の値を求めよ.

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$$

A 第 4 問

a, b, x_0, y_0 を正の実数とする．正の実数に値をとる関数の組 $(x(t), y(t))$ が次の連立常微分方程式の初期値問題の解であるとする：

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -ax(t)y(t) \qquad (t > 0), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -by(t) + ax(t)y(t) \qquad (t > 0), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

このとき以下の問に答えよ.

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t)$ が存在することを示せ.

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \{x(t) + y(t)\}$ と $\displaystyle\lim_{t\to\infty} y(t)$ が存在することを示し，極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} y(t)$ の値を求めよ.

(3) 任意の $t > 0$ に対して,

$$y(t) - y_0 = \frac{b}{a} \log \frac{x(t)}{x_0} - x(t) + x_0$$

が成り立つことを示せ.

(4) $\alpha = \displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t)$ とおく．不等式 $0 < \alpha < \dfrac{b}{a}$ が成り立つことを示せ.

A 第 5 問

集合 $\mathbf{R}^2$ に次の距離 d を入れた距離空間を X とする．$a=(x,y), b=(x',y')\in\mathbf{R}^2$ に対して，

$$d(a,b)=\begin{cases}|x-x'|+|y|+|y'| & (x\neq x' \text{ のとき})\\ |y-y'| & (x=x' \text{ のとき})\end{cases}$$

と定める．

(1) 距離空間 X から原点 $(0,0)$ を除いた部分空間 $X\setminus\{(0,0)\}$ の連結成分を全て求めよ．

(2) 点 $a=(x_0,y_0)\in X$ について，距離空間 X の部分空間 $\{b\in X \mid d(a,b)\leq 1\}$ がコンパクトでないための x_0, y_0 の必要十分条件を求めよ．

A 第 6 問

P を 3 次実正方行列とする．このとき，3 次対称行列 A を次のように定める．

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+{}^tPP$$

ただし，${}^tP$ は P の転置行列を表す．対称行列 A の固有値を $\alpha_1\leq\alpha_2\leq\alpha_3$ とする．${}^tPP$ が相異なる 3 つの固有値 $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ をもち，それらがすべて整数であるとする．

(1) A は正則行列であることを示せ．

(2) $\rho_1+\frac{1}{3}\leq\alpha_1\leq\rho_1+1$ を示せ．

(3) $\alpha_1+\alpha_3<\rho_1+\rho_3+2$ を示せ．

(4) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ は相異なることを示せ．

A 第 7 問

実数 $x \geq 0$ と整数 $n \geq 1$ に対して

$$f_n(x) = x^{\frac{n}{n+1}}$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) 関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が区間 $[0,2)$ 上で一様収束するか否かを判定せよ．

(2) 関数項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(f_n(x)^n\right)$$

が区間 $[0,1)$ 上で各点収束するか否かを判定せよ．また，区間 $[0,1)$ 上で一様収束するか否かを判定せよ．