２０２０年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ｂ　（筆記試験）

２０１９年　８月　２７日（火）
１１：００　～　１５：００

問題は全部で１８題ある．その中から**３題**選んで解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名は記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**３枚の答案**，および**３枚の計算用紙**である．着手した問題数が３題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙答案を補い，３枚とすること．
指示に反したもの，**答案が３枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

B 第 1 問

$F = \mathbf{C}(S,T)$, $K = \mathbf{R}(S^2, \frac{T^2}{1+S})$ とおき，F の K 上の Galois 閉包を L とする．

(1) L の K 上の拡大次数 $[L:K]$ を求めよ．

(2) L の部分体で K の 8 次拡大になっているものの個数を求めよ．

(3) L の部分体であって, K の Galois 拡大ではない 8 次拡大になっており，かつ $\mathbf{C}$ を含まないものの例をあげよ．

B 第 2 問

以下の問に答えよ．

(1) K を体とする．K 上の 2 変数多項式環 $K[X,Y]$ の極大イデアルは 2 つの元で生成されることを示せ．

(2) 有理整数環 $\mathbf{Z}$ 上の 2 変数多項式環 $\mathbf{Z}[X,Y]$ の極大イデアルは 3 つの元で生成されることを示せ．

B 第 3 問

X, Y を変数とする複素数体 $\mathbf{C}$ 上の 2 変数多項式環の商環 $\mathbf{C}[X,Y]/(Y^3 - X^4 - X^3)$ を R で表し，X, Y の R における像を x, y で表す．x と y で生成される R のイデアルを I とする．また $\mathbf{C}$ 代数 S を $S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1}$ で定める．ただし，S の加法群の構造は加法群 I^n/I^{n+1} $(n \geq 0)$ の直和で与え，積は

$$(a + I^{n+1})(b + I^{m+1}) = (ab + I^{n+m+1}) \qquad (a \in I^n,\, b \in I^m,\, n \geq 0,\, m \geq 0)$$

で定める．また S の $\mathbf{C}$ 代数の構造は自然な同一視 $\mathbf{C} = I^0/I^1$ によって与える．

(1) I/I^2, I^2/I^3 の $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間としての次元を求めよ．

(2) x, y の I/I^2 での像を $\overline{x}$, $\overline{y}$ で表す．U, V を変数とする $\mathbf{C}$ 上の 2 変数多項式環 $\mathbf{C}[U,V]$ からの $\mathbf{C}$ 代数の準同型 $F\colon \mathbf{C}[U,V] \to S$ を $F(U) = \overline{x}$, $F(V) = \overline{y}$ で定める．$\mathrm{Ker}\, F$ の生成元を求めよ．

(3) $\mathbf{C}$ 代数 R と S は同型ではないことを示せ．

B 第 4 問

$\mathbf{F}_3$ を 3 元体とし，正の整数 n に対し，S_n は n 次対称群を表す．

(1) 群環 $\mathbf{F}_3[S_2]$ の素イデアルの個数を求めよ．

(2) $R = \mathbf{F}_3[S_3]$ とし，R の中心を A とする．A の素イデアルの個数を求めよ．

(3) A のべき零根基を I とし，環 $R \otimes_A (A/I)$ の全ての極大左イデアルの共通部分を J とする．J の $\mathbf{F}_3$ 上のベクトル空間としての次元を求めよ．

B 第 5 問

$\mathbf{R}^2$ の標準的な座標を (x, y) とし，単位円周 S^1 に $\mathbf{R}^2$ の部分多様体の構造を入れる．$\alpha \in \mathbf{R}$ に対して，$\mathbf{R}^2$ 上のベクトル場 X_α を

$$X_\alpha(x, y) = x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial}{\partial y}$$

により定める．また，関数の和とスカラー倍により

$$\begin{aligned} V_\alpha &= \{f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \mid f \text{ は } C^\infty \text{ 級であって，} X_\alpha f = 0 \text{ が成り立つ}\}, \\ W_\alpha &= \{f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R} \mid f \text{ は } C^\infty \text{ 級であって，} X_\alpha f = 0 \text{ が成り立つ}\}, \\ Z &= \{g : S^1 \to \mathbf{R} \mid g \text{ は } C^\infty \text{ 級である}\} \end{aligned}$$

に実線型空間の構造を入れる．ただし，$X_\alpha f$ は，ベクトル場 X_α による関数 f の微分を表す．以下の問に答えよ．

(1) $\alpha > 0$ とする．W_α と Z の間の線型同型写像を一つ構成せよ．

(2) $\alpha > 0$ ならば V_α は有限次元であることを示せ．

(3) $\alpha < 0$ ならば V_α は有限次元でないことを示せ．

B 第 6 問

2 次の実正方行列全体の集合 $M_2(\mathbf{R})$ に標準的な $\mathbf{R}^4$ の位相を入れる．その部分集合 G を

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbf{R},\ x > 0 \right\}$$

で定め，G に $\mathbf{R}^4$ の部分多様体の構造を入れる．行列の積によって G に群の構造を入れ，G の G 自身への左作用を，$A \in G$ に対して

$$\varphi_A : G \longrightarrow G,\quad \varphi_A(X) = AX$$

によって定める．G の部分群 Γ を

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} e^m & ne^m \\ 0 & e^m \end{pmatrix} \middle| \, m, n \in \mathbf{Z} \right\}$$

で定める．以下の問に答えよ．

(1) Γ の左作用による G の商空間 $M = G/\Gamma$ は，射影 $\pi : G \longrightarrow M$ が C^∞ 級写像となるような C^∞ 級多様体の構造を持ち，トーラス $S^1 \times S^1$ と微分同相となることを示せ．

(2) G 上の 1 次微分形式 ω で，すべての $A \in G$ に対して

$$\varphi_A^* \omega = \omega$$

を満たすもの全体のなす $\mathbf{R}$ 上の線型空間を V とおく．V の次元を求め，その基底を一組与えよ．

(3) G 上の 2 次微分形式

$$\sigma = \frac{dx \wedge dy}{x^2}$$

は Γ の左作用で不変であり，商空間 $M = G/\Gamma$ 上の 2 次微分形式を定めることを示せ．また，M に向きを一つ与え，積分

$$\int_M \sigma$$

を計算せよ．

B 第7問

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ の標準座標を (x,y), $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ とし，$\mathbf{R}^4$ 上の2次微分形式 ω を

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbf{R}^4$ 上の C^∞ 級関数 f および C^∞ 級ベクトル場 X, Y であって，

$$i_X\omega = df, \quad \mathcal{L}_Y\omega = 0, \quad Yf = 0$$

を満たすものが与えられたとする．ただし，i は内部積，$\mathcal{L}$ はリー微分を表し，Yf はベクトル場 Y による関数 f の微分を表す．このとき，$\mathbf{R}^4$ 上の C^∞ 級関数 g で，条件

$$i_Y\omega = dg$$

を満たすものが存在することを示せ．さらに，

$$Xg = 0, \quad [X,Y] = 0$$

が成り立つことを確かめよ．

(2) $\mathbf{R}^2$ 上の C^∞ 級関数 ϕ に対して，$\mathbf{R}^4$ 上の関数 f_ϕ を次のように定める．

$$f_\phi(x,y) = e^{-2\phi(x_1,x_2)}(y_1^2 + y_2^2).$$

このとき，$\mathbf{R}^4$ 上の C^∞ 級ベクトル場 X で

$$i_X\omega = df_\phi$$

を満たすものを関数 ϕ および ϕ の偏導関数を用いて表せ．

また，$\mathcal{L}_Y\omega = 0$ を満たす自明でない C^∞ 級ベクトル場 Y で，次の条件を満たすものを考える．

（条件）x_1 軸に沿った平行移動で不変な全ての ϕ に対して $Yf_\phi = 0$ となる．

そのようなベクトル場 Y を一つ求め，それに対して $i_Y\omega = dg$ となる C^∞ 級関数 g を求めよ．

B 第 8 問

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の 3 つの元の組 $(p_1, p_2, p_3) \in (\mathbf{R}^3)^3$ で，条件

$$p_i \cdot p_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ -\dfrac{1}{2} & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすもの全体の集合 X をユークリッド空間 $(\mathbf{R}^3)^3 = \mathbf{R}^9$ の部分位相空間とみなす．ただし，記号 $\cdot$ は $\mathbf{R}^3$ の標準的な内積を表す．また，

$$(p_1, p_2, p_3) \sim (p_2, p_3, p_1)$$

で生成された同値関係による X の商空間を $Y \doteq X/\sim$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) X から 2 次元単位球面 S^2 への写像 $\mu : X \longrightarrow S^2$ を

$$\mu(p_1, p_2, p_3) = \frac{p_1 \times p_2}{\|p_1 \times p_2\|}$$

によって定めると，μ は商空間 Y からの写像 $\nu : Y \longrightarrow S^2$ を誘導する．ただし，記号 $\times$ は $\mathbf{R}^3$ の外積

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix}$$

を表し，$\| \ \|$ は $\mathbf{R}^3$ の標準的なノルムを表す．このとき，

$$Y_0 = \left\{ y \in Y \;\middle|\; \nu(y) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

は単位円周 S^1 とホモトピー同値であることを示せ．

(2) Y の整係数ホモロジー群を求めよ．

B 第 9 問

$\mathbf{R}$ の有界開集合 Ω 上のルベーグ可積分な関数の列 $\{f_n\}$ およびルベーグ可積分な関数 f を考える．ルベーグ可測集合 E に対して $|E|$ はそのルベーグ測度を表す．以下の問に答えよ．

(1) 任意の正数 ε に対して，次の性質（A）を満たす正数 δ が存在することを示せ．

(A) $|E| < \delta$ を満たす Ω 内の任意のルベーグ可測集合 E に対して

$\left|\int_E f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ が成立する．

(2) $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0$ が成立したとする．このとき，任意の正数 ε に対して，次の性質 (B) を満たす正数 δ が存在することを示せ．

(B) $|E| < \delta$ を満たす Ω 内の任意のルベーグ可測集合 E に対して

$\left|\int_E f_n(x)\,dx\right| < \varepsilon$ が全ての $n = 1, 2, \ldots$ に対して成立する．

(3) Ω 上全ての点 x において $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が成立したとする．さらに 任意の正数 ε に対して，上記の性質 (B) を満たす正数 δ が存在したとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0$$

が成立することを示せ．

B 第 10 問

$\mathbf{C}$ 上の有理型関数 $h(z)$ と $\mathbf{C}$ の点 a に対して $\mathrm{Res}(h(z), a)$ は a における $h(z)$ の留数を表す．

(1) $P(z)$ と $Q(z)$ は多項式で，$\deg P + 2 \leq \deg Q$ を満たすとする．有理関数 $f(z) = P(z)/Q(z)$ の極の集合を $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ とおくとき次を示せ．

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}\setminus S} f(n) = -\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\left(\frac{\pi f(z)}{\tan \pi z}, a_k\right).$$

(2) 次を示せ．

$$\frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right).$$

B 第 11 問

$\varepsilon > 0$ に対して，実数値関数 $Y_\varepsilon(x)$ を

$$Y_\varepsilon(x) = xe^{-\varepsilon|x|}$$

とおき，**R** 上の関数 $h_\varepsilon(y)$ を

$$h_\varepsilon(y) = \int_{-\infty}^{\infty} Y_\varepsilon(x)e^{ixy}\,dx$$

で定義する．以下の問に答えよ．

(1) $h_\varepsilon(y)$ を計算せよ．

(2) 台が有界な **R** 上の C^2 級関数 $g(y)$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} h_\varepsilon(y)g(y)\,dy$$

を求めよ．

B 第 12 問

正規直交基底 $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ を持つ **C** 上のヒルベルト空間 H を考える．$\{\theta_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $[0,\pi/2]$ に値を持つ数列とする．H 内の単位ベクトルの列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$\begin{cases} x_n = e_{2n}, \\ y_n = (\cos\theta_n)e_{2n} + (\sin\theta_n)e_{2n+1} \end{cases}$$

により定める．X を $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ の張る閉部分空間，Y を $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ の張る閉部分空間とする．以下の問に答えよ．

(1) 次の不等式を示せ．

$$\sqrt{2}\left(1-\sup_n\cos\theta_n\right)^{1/2} \le \inf\left\{\|x-y\| \;\middle|\; x\in X, y\in Y, \|x\|=1, \|y\|=1\right\}.$$

(2) $\sup_n \cos\theta_n < 1$ の時，$X+Y$ は閉であることを示せ．

B 第 13 問

$t \geq 0$ において，次の連立線型常微分方程式の解を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta_1(t)}{dt} & = c_1(t)\eta_1(t) + c_2(t)\eta_2(t), \\[2ex] \dfrac{d\eta_2(t)}{dt} & = (c_2(t) + \gamma)\eta_1(t) - c_1(t)\eta_2(t). \end{cases}$$

ここで, $c_1(t), c_2(t)$ は実数値連続関数で, γ は実定数である． $t = 0$ で初期値 $(\eta_1(0), \eta_2(0))$ を与える．

このとき以下の問に答えよ．

(1) c_1, c_2 が定数である場合，任意の初期値に対して，

$$\sup_{t>0}(|\eta_1(t)| + |\eta_2(t)|) < \infty$$

となるための必要十分条件を求めよ．

(2) $\gamma > 0$ である場合を考える．実数 $\alpha > 0,\ \beta > 0$ が $\alpha - \beta > \gamma(> 0)$ を満たすとする． $c_1(t), c_2(t)$ が $t \geq 0$ に対して $c_1(t) \geq \alpha$, $|c_2(t)| \leq \beta$ を満たし，初期値が次を満たすものとする．

$$\eta_1(0) > |\eta_2(0)|.$$

このとき任意の $t > 0$ に対して

$$\eta_1(t) > |\eta_2(t)|$$

が成り立つことを示せ．

また，

$$\eta_1(t) \geq e^{(\alpha-\beta)t}\eta_1(0)$$

となることを示せ．

B 第 14 問

(1) 次の行列の固有値を全て求めよ．

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) a, τ を正の実数，N を正の整数として，$2\tau(N+1)^2 \leq 1 + a\tau$ を仮定する．$\{u_{j,n}\}_{0\leq j\leq N+1,\ 0\leq n}$ が次の差分方程式を満たすとする．

$$\frac{u_{j,n+1} - u_{j,n}}{\tau} = (N+1)^2(u_{j-1,n} - 2u_{j,n} + u_{j+1,n}) + au_{j,n} \qquad (1 \leq j \leq N,\ n \geq 0).$$

ただし，$n \geq 0$ に対して，$u_{0,n} = u_{N+1,n} = 0$ とする．

このとき，任意の正数 T に対して，a と T にのみ依存する正の定数 C が存在して，

$$\max_{n\tau \leq T} \sum_{j=1}^{N} u_{j,n}^2 \leq C \sum_{j=1}^{N} u_{j,0}^2$$

が成立することを証明せよ．

B 第 15 問

非負の整数 n に対し，多項式 $p_n(x)$ を次のように定める．

$$p_0(x) = 1, \qquad p_n(x) = \left(x - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\right)^n \cdot 1 \quad (n \geq 1).$$

以下の問に答えよ．

(1) 次の積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x) p_m(x)\, e^{-x^2}\, dx \qquad (n, m \geq 0).$$

(2) 次の積分を $p_n(x)$ を用いて表せ．

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{e^{x^2 - z^2}}{(z - x)^{n+1}}\, dz$$

ただし，Γ は，複素平面上の閉曲線 $|z - x| = r\ (r > 0)$ を反時計回りに一周する積分路とする．

(3) 多項式列 $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ を生成する母関数 $G(x, t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) \frac{t^n}{n!}$ を求めよ．

(4) 次の恒等式を示せ．

$$p_n(x + y) = \sum_{\substack{j, k, \ell \geq 0 \\ j + k + 2\ell = n}} \frac{1}{4^\ell} \frac{n!}{j!\, k!\, \ell!}\, p_j(x) p_k(y).$$

B 第 16 問

$\mathbf{R}^3$ の単位球面を S とする．以下の手順に従い，S 上のラプラシアン Δ の固有関数を求めよう．ただし，Δ は S 上の滑かな複素数値関数に作用するものとする．また，極座標 $x = \sin\theta\cos\phi$, $y = \sin\theta\sin\phi$, $z = \cos\theta$ を用いると，Δ の関数 f への作用が

$$\Delta f = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

と表示されることを用いて良い．

(1) 微分方程式

$$\frac{d}{dw}\left((1-w^2)\frac{dP(w)}{dw}\right) + \lambda P(w) = 0$$

が w の多項式を解として持つための λ に対する条件を求めよ．また，そのときの解 $P(w)$ を具体的に求めよ．

(2) (1) で求めた条件の下で微分方程式

$$\frac{d}{dw}\left((1-w^2)\frac{dP^{(m)}(w)}{dw}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-w^2}\right)P^{(m)}(w) = 0$$

の解 $P^{(m)}(w)$ を $P(w)$ を用いて表せ．ただし，m は整数とする．

(3) 上の結果を用いて，ラプラシアンの固有関数を極座標表示で求めよ．

B 第 17 問

自然数の集合 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ の部分集合 A が極限計算可能であるとは，計算可能関数 $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ が存在して，任意の i について，$i \in A$ ならば $\lim_{n\to\infty} f(n, i) = 1$ となり，$i \notin A$ ならば $\lim_{n\to\infty} f(n, i) = 0$ となることをいう．ここで $\lim_{n\to\infty} f(n, i) = c$ とは $\exists n_0 \forall n \geq n_0 [f(n, i) = c]$ となることを表す．このとき以下の問に答えよ．

(1) 計算可能な無限木 $T \subset {}^{<\omega}\{0, 1\}$ に対し，極限計算可能な集合 A で

$$\forall n \in \mathbf{N}[(\chi_A(0), \ldots, \chi_A(n)) \in T]$$

となるものが存在することを示せ．ここで χ_A は A の特徴関数を表し，${}^{<\omega}\{0, 1\}$ は 0 か 1 を成分にもつ有限列全体の集合を表す．

(2) 可算個の命題変数 $\{p_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ から論理結合子 $\neg, \vee$ によって作られる論理式を考える．論理式の集合 Γ の元は，ある計算可能関数 $n \mapsto \ulcorner\varphi_n\urcorner$ によって枚挙されているとする．すなわち $\Gamma = \{\varphi_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ とする．ここで $\ulcorner\varphi\urcorner \in \mathbf{N}$ は論理式 φ のゲーデル数を表す．さらに Γ は有限充足可能であるとする．このとき，Γ を充足する真理値割当 $\nu : p_i \mapsto \nu(p_i) \in \{0, 1\}$ として極限計算可能なものが取れることを示せ．ここで，写像 $\nu : p_i \mapsto \nu(p_i) \in \{0, 1\}$ を集合 $\{i \in \mathbf{N} \mid \nu(p_i) = 1\}$ と同一視している．また論理式 φ について $\nu(\varphi) \in \{0, 1\}$ は，$\nu(\neg\varphi) = 1 - \nu(\varphi)$, $\nu(\varphi \vee \theta) = \max\{\nu(\varphi), \nu(\theta)\}$ によって再帰的に定義されている．

B 第 18 問

非負整数の集合を $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ とし，正整数の集合を $\mathbf{Z}_{>0} = \{1, 2, ...\}$ とする．$\{Z_n\}_{n\in\mathbf{Z}_{>0}}$ を実数に値をとる独立確率変数列で

$$E[Z_n] = 1, \quad E[Z_n^2] = v \qquad (n \in \mathbf{Z}_{>0})$$

を満たすとする．ここで v は定数である．確率変数列 $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を次のように定める．

$$X_0 = 0, \quad X_n = \bigl(\theta X_{n-1} + 1\bigr) Z_n \qquad (n \in \mathbf{Z}_{>0}).$$

ここで，$\theta \in \mathbf{R}$ は $0 < |\theta| < v^{-1/2}$ を満たす定数である．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $v \geq 1$ であることを示せ．

(2) $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して X_n の期待値 $E[X_n]$ を求めよ．

(3) $m, n \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して，X_m と X_n の共分散を $\mathrm{Cov}[X_m, X_n]$ で表す．v と θ に依存する定数 C が存在して，不等式

$$\bigl|\mathrm{Cov}[X_m, X_n]\bigr| \leq C|\theta|^{|n-m|}$$

がすべての $m, n \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して成り立つことを示せ．

(4) M_n を

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

とし，T_n を

$$T_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{M_n} & (M_n \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (M_n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする．このとき，T_n が確率収束することを示せ．