２０２０年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ａ　（筆記試験）

２０１９年　８月　２６日（月）
１３：００　～　１６：００

問題は全部で７題ある．Ａ１，Ａ２は必答問題である．Ａ３～Ａ７の中から２題選び，必答問題と合わせて**合計４題**解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**４枚の答案**，および**４枚の計算用紙**である．着手した問題数が４題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，４枚とすること．
指示に反したもの，**答案が４枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

A 第1問（必答）
次の行列 M が対角化可能となるために複素数 a,b,c,d,e が満たすべき必要十分条件を求めよ．

$$M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

ただし，行列 M が対角化可能であるとは，複素数を成分とする正則行列 P が存在して，$P^{-1}MP$ が対角行列となることである．

A 第2問（必答）
t を $0<t<1$ を満たすパラメータとして，$\mathbf{R}^2$ 上の閉領域 A_t を，

$$A_t=\left\{(r,\theta)\in\mathbf{R}^2 \;\middle|\; 0\le\theta\le\frac{\pi}{4} \text{ かつ } t\le r\cos\theta\le 1\right\}$$

で定める．このとき以下の問に答えよ．

(1) 次の定積分の値を求めよ．

$$I(t)=\iint_{A_t}\frac{\log r+\log(\cos\theta+\sin\theta)}{\cos\theta}\,drd\theta.$$

(2) $\lim_{t\to+0} I(t)$ の値を求めよ．

A 第3問
区間 $-1\le x\le 1$ において $h(x)=\sqrt{1-x^2}$ とおく．a を $0<a<1$ を満たすパラメータとして，$f_a(x)$ を次の条件を満たす x の2次関数とする．

(条件) f_a のグラフは h のグラフ上の3点 $(0,1)$, $(\pm a,\sqrt{1-a^2})$ を通る．

このとき以下の問に答えよ．

(1) 区間 $0\le x\le a$ における $h(x)$ と $f_a(x)$ の大小関係を調べよ．

(2) 区間 $0\le x\le a$ において h のグラフと f_a のグラフで囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする．このとき極限

$$\lim_{a\to+0}\frac{S(a)}{a^r}$$

が0でない実数に収束するような実数 r を求めよ．また，その極限値も求めよ．

A 第 4 問

関数 $x(t), y(t)$ に対する次の連立常微分方程式の初期値問題を解け．

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -7x(t) - 4y(t) - 5t, \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = 12x(t) + 7y(t) + t - 1, \\ x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

A 第 5 問

V を有限次元複素ベクトル空間，$f\colon V \to V$ を対角化可能な V の線型変換とする．V の部分空間 W が $f(W) \subset W$ を満たすとき，W は f に関して不変であるという．このとき次の条件 (a) と (b) は互いに同値であることを示せ．

(a) f の全ての固有値 α に対し，対応する固有空間の次元は 1 である．

(b) f に関して不変な任意の 3 つの部分空間 V_1, V_2, W に対し，次の等式が成り立つ：

$$(V_1 \cap W) + (V_2 \cap W) = (V_1 + V_2) \cap W.$$

A 第6問

2重数列 $\{a_{m,n}\}$ であって次の条件 (a),(b),(c) を同時に満たすものを考える．

(a) 全ての正整数 m, n に対して $a_{m,n}$ は非負実数である．

(b) 全ての正整数 m に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = 1$ が成り立つ．

(c) 全ての正整数 n に対して $\displaystyle\lim_{m\to\infty} a_{m,n} = 0$ が成り立つ．

この $\{a_{m,n}\}$ に対して以下の問に答えよ．

(1) 条件 (b) の $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$ の収束は m に関して一様でないことを示せ．

(2) $\{s_n\}$ を収束実数列とし $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = s$ とおく．このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}s_n$ は収束し，かつ $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}s_n = s$ となることを示せ．

A 第7問

実数 $a, b \in \mathbf{R}$ に対して，集合 $\mathbf{R}^2$ の部分集合 $O(a,b)$ を次のように定める．

$$O(a,b) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, a < x \ \text{かつ}\ b < y\}.$$

集合 $\mathbf{R}^2$ に集合族 $\mathcal{L} = \{O(a,b) \,|\, a, b \in \mathbf{R}\}$ の生成する位相を入れて得られる位相空間を X とする．ただし，集合族 $\mathcal{L}$ の生成する位相とは，$\mathcal{L}$ を含む最小の開集合系によって与えられる位相である．以下の問に答えよ．

(1) 位相空間 X における $\{(0,0)\}$ の閉包を求めよ．

(2) 集合 $K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \leq x \ \text{かつ}\ 0 \leq y\}$ は位相空間 X のコンパクト部分集合であることを示せ．

(3) 位相空間 X の空でないコンパクトな閉集合は存在しないことを示せ．